

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Têlidji Laghouat



Faculté des Sciences
Département de Mathématique et Informatique

Projet de Licence

Domaine : Mathématique informatique (MI)
Filière : Mathématique
Option : Mathématique

Thème

Modélisation de la croissance d'une population à l'aide
d'une équation différentielle ordinaire

Présenté par :

M^{elle} Hamdi Halima et M^{elle} Hadjaissa Hadjer

Soutenu le : 07 Juin 2014.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>M^r RAHMOUNE</i> Abita	M.A.A, Université de Laghouat
Rapporteur :	<i>D^r NOURI</i> Brahim	M.C.B, Université de Laghouat
Examineur :	<i>M^r RAHMOUNE</i> Abdelaziz	M.A.A, Université de Laghouat

Année universitaire 2013/2014

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat sous la direction de Monsieur NOUIRI Brahim, Maître de conférences à l'université de Laghouat. Je tien à le remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Mes remerciements s'adressent a Monsieur Lagraa Nacereddine chef de laboratoire d'Informatique et de Mathématiques d'avoir disponibilité tous les moyens de laboratoire durant la période de la préparation de ce projet.

Je remercie les membres du Jury pour leurs acceptations d'examiner ce projet.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien.

Aussi, je remercie tout mes collègues et aux qui m'ont aidé de près ou de loin en vue de réaliser ce projet.

Dédicaces

Mes tout premier remerciement pour dieu qui nous a donner la force pour accomplir ce travail

Je dédie ce mémoire à :

A Mes parents :

Ma mère, qui veiller pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste .

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien infini venu de toi.

A mes chers frères et mon oncle

A toute ma famille mes oncles et mes tentes mes cousines et mes cousins

A mes amies qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

A mes cher professeur qui ont tout fait pour notre réussite

A mon encadreur Mr Nouiri et pour ses grands efforts

A ma meilleur amie et mon binôme Halima Hamdi que dieu te garde

Hadjer Hadjaissa

Je tiens d'abord a remercier Dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail

Je dédie ce modeste travail a celle qui ma donne la vie, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite , a ma Mère

A mon père, école de mon enfance qui a ete mon ombre durant toutes les années des études et qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager me donner l'aide et a me protéger

Que dieu les gardes et les protège

A mes adorables sœurs

A mon frère

A toute ma famille mes oncles et mes tentes mes cousins et mes cousines

A mes amies

A tous ce qui me sont chères

A tous ce qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

A tous mes professeur qui m'ont enseigner le long de mon parcours éducatif

A mon encadreur Mr nouiri pour sa compétence et sa disponibilité et son soutien son encouragement durant toute la période de notre travaille ainsi que tout les année qui nous a enseigner

A ma chère et adorable amies Hadjer Hadjaissa

Je dédie ce travaille

Hamdi Halima

Résumé

Notre objective dans ce projet est la résolution analytique et numérique d'un problème de la croissance d'une population dans environnement isolée est fréquemment modélisée par une équation différentielle ordinaire non linéaire autonome du premier ordre :

$$\begin{cases} P'(t) = aP - bP^2 \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (1)$$

Où P désigne la population au temps t , P_0 la population au temps t_0 . Le terme aP représente le taux de naissance et bP^2 le taux de décès dus aux différentes causes comme : compétition pour les ressources naturelles, pour la nourriture et pour l'espace vital etc...

Solution analytique On commence par l'étude d'un problème de Cauchy gouverné par une équation différentielle autonome du premier ordre et ensuite nous présentons une étude qualitative sur exemple pratique dans la dynamique des populations : modèle de Verhulst.

Solution numérique On applique les deux méthodes d'Euler explicite et Rung-Kutta d'ordre 4 sur cet modèle.

Table des matières

1	Modèle de la croissance d'une population	2
1.1	Équations différentielles autonomes d'ordre 1	2
1.2	Modèle de la croissance d'une population	3
1.2.1	Solution analytique	3
2	Méthode d'Euler explicite	9
3	Méthodes de Rung-Kutta	16
3.1	Idée sur la méthode de Rung-kutta	16
3.2	Principe des méthodes de rung-kutta	16
3.3	Notion de consistance, stabilité et convergence	17
4	Annexe	26
4.1	Application contractante	26
4.2	Théorème du points fixe	26
4.3	Théorème de Cauchy-Lipschitz	27
4.4	Équation de Bernoulli	29

Introduction

La dynamique des populations est l'étude de la croissance d'une ou plusieurs populations, dans un environnement donné, qu'elles soient isolées ou en interactions les une avec les autres.

Les premiers modèles de croissance de populations date de la fin du 18^{me} siècle avec le modèle de **Malthus**. **Malthus** était un économiste qui disait que si elle n'est pas freinée, une population s'accroît géométriquement. Ceci se traduit par une équation différentielle ordinaire de premier ordre

$$\begin{cases} P'(t) = rP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (2)$$

où $P(t)$ est la taille de la population et r son taux de croissance.

La solution de cette équation est $P(t) = P_0 e^{rt}$. Dans ce cas c'est la position de r par rapport à 0 qui donne le sens de variation de $P(t)$.

- ☞ Si $r < 0$, la taille de la population diminue,
- ☞ Si $r = 0$, la population reste constante et
- ☞ Si $r > 0$, la population augmente de manière exponentielle.

Le fait que la population augmente de manière exponentielle n'est pas biologiquement satisfaisant, car même si une population arrive dans un environnement contenant toutes les sources nécessaires, ce qui est le cas pour les espèces invasives, une population ne peut pas augmenter exponentiellement jusqu'à l'infini. Des phénomènes d'autorégulation vont donc se mettre en place.

Ces phénomènes sont pris en compte dans le modèle de **Verhulst** en 1838, appelé aussi modèle à croissance logistique. Ce modèle se présente sous la forme d'une équation différentielle de type de Bernoulli

$$\begin{cases} P'(t) = rP \left(1 - \frac{P(t)}{K} \right) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (3)$$

avec r le taux de croissance de la population et K la capacité d'accueil du milieu c'est-à-dire le nombre maximale que le milieu peut accueillir en tenant compte de l'espace, des ressources, etc...

Une population à croissance logistique tend toujours vers K , la capacité d'accueil, quelque soit la densité de population d'origine P_0 .

Notre objective dans ce projet est la résolution analytique et numérique d'un problème de la croissance d'une population dans environnement isolée est fréquemment modélisée par une équation différentielle ordinaire non linéaire du premier ordre :

$$\begin{cases} P'(t) = aP - bP^2 \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (4)$$

Où P désigne la population au temps t , P_0 la population au temps t_0 . Le terme aP représente le taux de naissance et bP^2 le taux de décès dus aux différentes causes comme : compétition pour les ressources naturelles, pour la nourriture et pour l'espace vital etc...

Notre projet se décompose en trois chapitre :

Le premier chapitre consacré à la solution analytique de notre modèle par l'équation de Bernoulli et l'interprétation de la limite de solution $P(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et puis étudier la variation de la fonction dérivée P' si $P(t) < \frac{a}{2b}$ et si $P(t) > \frac{a}{2b}$ et on termine ce chapitre par des représentations graphiques de la solution exacte dans le cas où la population initiale $P_0 < \frac{a}{b}$ et le cas où $P_0 > \frac{a}{b}$.

Dans le second chapitre, on s'intéresse par la solution numérique du problème de Cauchy sur un intervalle $[0, T]$ par la méthode d'Euler explicite. On démontre un résultat de la convergence de cette méthode et on termine par un programme sur Matlab de schéma d'Euler explicite et en comparant le résultat avec la solution exacte.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse par la solution numérique sur un intervalle $[0, T]$ par les méthodes de Rung-Kutta d'ordre 2 et d'ordre 4 et on compare les résultats obtenus dans les deux derniers chapitres avec la solution analytique.

Chapitre 1

Modèle de la croissance d'une population

1.1 Équations différentielles autonomes d'ordre 1

Définition 1.1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle équation différentielle autonome d'ordre un, toute équation différentielle de la forme :

$$y' = f(y) \tag{1.1}$$

Définition 1.2. (Point d'équilibre). on dit que y^* est un point d'équilibre (ou point stationnaire) pour l'équation différentielle (1.1) si $f(y^*) = 0$

Remarque 1.3. L'intérêt de ce type d'équation se situe dans les situations qui amènent ces équations, notamment l'étude de la variation des populations : la croissance d'une population (logistique).

Proposition 1.4. (*Translations des solutions*) Si y est solution de (1.1) sur I , alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_\alpha y : t \mapsto y(t - \alpha)$ est solution de (1.1) sur l'intervalle $\alpha + I$

Démonstration. Par composition $\tau_\alpha y$ est définie et dérivable sur $\alpha + I$ avec

$$(\tau_\alpha y)'(t) = y'(t - \alpha) = f(\tau_\alpha y(t))$$

Remarque 1.5. Par translation, tout problème de Cauchy peut se ramener à un problème en $t_0 = 0$.

Théorème 1.6. Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I n'admet pas un point d'équilibre sur I . Si $y_0 \in I$, le problème de **Cauchy** suivant :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

admet une solution locale.

Démonstration : f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $y_0 \in I$. Alors pour tout $y_1, y_2 \in I$, avec le théorème des accroissements finis sur $[y_1, y_2]$, on obtient :

$$f(y_2) - f(y_1) = (y_2 - y_1) f'(\eta), \quad \eta \in]y_1, y_2[.$$

Alors, on a :

$$|f(y_2) - f(y_1)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad L = \sup_{\eta \in I} |f'(\eta)|.$$

Donc, la fonction f est localement Lipschitzienne sur I . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (1.2) admet une solution locale.

Corollaire 1.7. *Les solutions de l'équation (1.1) sont strictement monotones si y n'est pas d'un point d'équilibre.*

Démonstration. Soit y une solution de (1.2) non injective. Il existe $a, b \in I$ tel que $a < b$ et $y(a) = y(b)$. Par le théorème de Rolle, il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $y'(t_0) = 0$ et alors $f(y(t_0)) = 0$.

Posons $y_0 = y(t_0)$ de sorte que vérifie $f(y_0) = 0$. Puisque la fonction $t \mapsto y_0$ est solution sur \mathbb{R} de l'équation $y' = f(y)$, c'est une solution maximale et y en est une restriction. Ainsi, y est une fonction constante.

1.2 Modèle de la croissance d'une population

Si on pose dans le problème de Cauchy(1.2), $y = P$ et $f(P) = aP - bP^2$, on obtient un problème de Cauchy qui modélise la croissance d'une population dans un environnement isolé. Ce problème est donné par

$$\begin{cases} P' = f(P(t)) = aP(t) - bP^2(t) \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Où P désigne la population au temps t , P_0 la population au temps t_0 . Le terme aP représente le taux de naissance et bP^2 représente le taux de décès dus aux différentes causes : compétition pour les ressources naturelles, pour la nourriture et pour l'espace vital etc...

1. L'équation (1.3) admette deux solutions constantes $P(t) = 0$ et $P(t) = a/b$,
2. Si $P(t) \neq 0$ et $P(t) \neq a/b$, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 . Alors, en utilisant Théorème 1.6, le problème (1.3) admet une solution locale.

1.2.1 Solution analytique

L'équation (1.3) est une équation différentielle ordinaire de Bernoulli pour $m = 2$ car elle est écrite sous la forme :

$$P' = aP - bP^2 \Rightarrow \frac{P'}{P^2} - \frac{a}{P} = -b \quad (1.4)$$

On pose $Z = \frac{1}{P}$, alors, on a :

$$Z' = \frac{-P'}{P^2}$$

En remplaçant dans (1.3) on obtient :

$$Z' + aZ = b \quad (1.5)$$

L'équation (1.4) est une équation linéaire de premier ordre. Premièrement, on résout l'équation sans second membre :

$$Z' + aZ = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{Z} = -adt \Rightarrow Z = ke^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}$$

On suppose que k est un fonction de t . Alors, on a :

$$Z' = k'(t)e^{-at} - ak(t)e^{-at}$$

on remplace dans l'équation (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} k'(t)e^{-at} - ak(t)e^{-at} + ak(t)e^{-at} &= b \Rightarrow k'(t) = be^{at} \\ \Rightarrow k &= \frac{b}{a}e^{at} + c \text{ où } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{b}{a} + ce^{-at} \Rightarrow P = \frac{1}{\frac{b}{a} + ce^{-at}} \\ &\Rightarrow P = \frac{a}{b + ace^{-at}} \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante c , on a :

$$P(t_0) = P_0 \Rightarrow P_0 = \frac{a}{b + ce^{-at_0}} \Rightarrow c = \frac{a - bP_0}{P_0e^{-at_0}}$$

Alors, la solution exacte de problème de Cauchy (1.3) est donnée par :

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - P_0b)e^{-a(t-t_0)}} \quad (1.6)$$

Remarque 1.8. A partir de la solution exacte (1.6), nous avons pour t assez grand :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{aP_0}{bP_0 + (a - P_0b)e^{-a(t-t_0)}} = \frac{a}{b}$$

Alors, la limite $\frac{a}{b}$ est signifie l'équilibre de la population ou la capacité d'accueil (*biotique*) de l'environnement considéré.

Remarque 1.9. On peut résoudre l'équation différentielle non linière (1.3) par la méthode des variables séparables.

Étude de la variation de $\frac{dP}{dt}$

De (1.3) et pour tout $t \in]0, +\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} &= a\frac{dP}{dt} - 2b\frac{dP}{dt}P \\ &= a(aP - bP^2) - 2b(aP - bP^2)P \\ &= (aP - bP^2)(a - 2bP) \\ &= P(a - bP)(a - 2bP)\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } P = \frac{a}{b} \text{ ou } P = \frac{a}{2b}$$

Le tableau de variation de la dérivée seconde $\frac{d^2P}{dt^2}$ est le suivant :

P	0	$\frac{a}{2b}$	$\frac{a}{b}$
$a - bP$		+	0
$a - 2bP$		+	0
P''	0	+	0

Remarque 1.10. Le point $(\frac{a}{2b}, p(a/2b))$ est un point d'inflexion pour la fonction P .

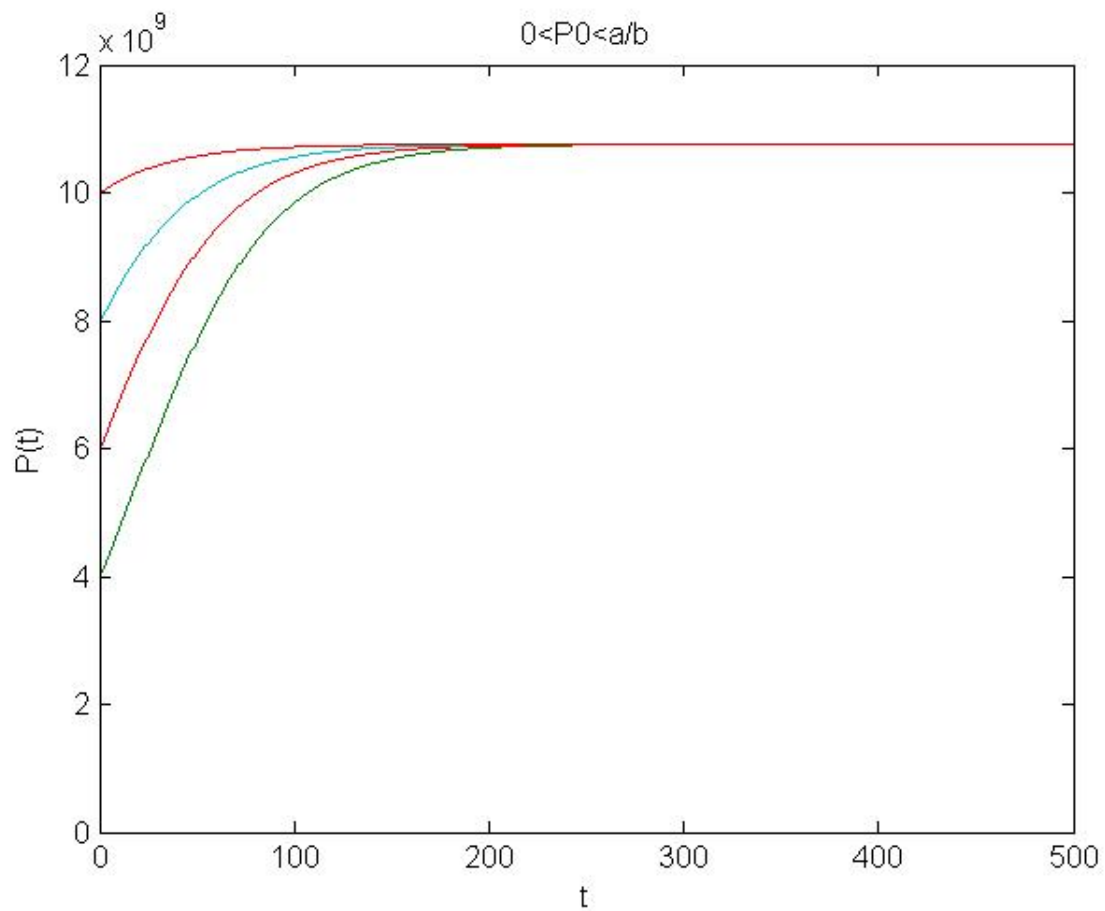
Allure du graphe de $P(t)$

Pour déterminer l'allure générale du graphe de la fonction P , il convient d'en effectuer une étude sur la dérivée de P . Donc, on dérive cette fonction, on obtient :

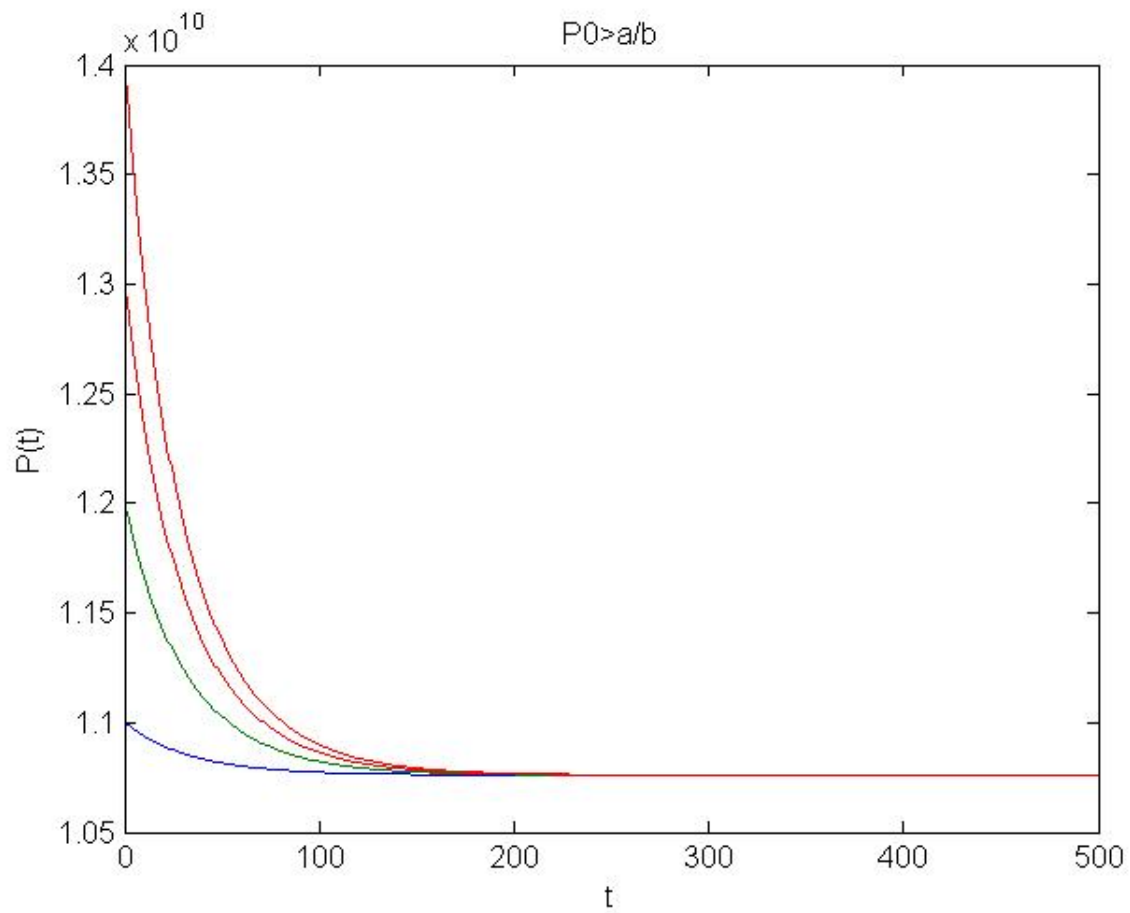
$$P'(t) = \frac{a^2 P_0 (a - bP_0) e^{-a(t-t_0)}}{[bP_0 + (a - bP_0) e^{-a(t-t_0)}]^2}$$

Trois cas peuvent alors se présenter : On donne $a = 0.029$ et $b = 2.695 \cdot 10^{-12}$ et $t \in [0, 500]$.

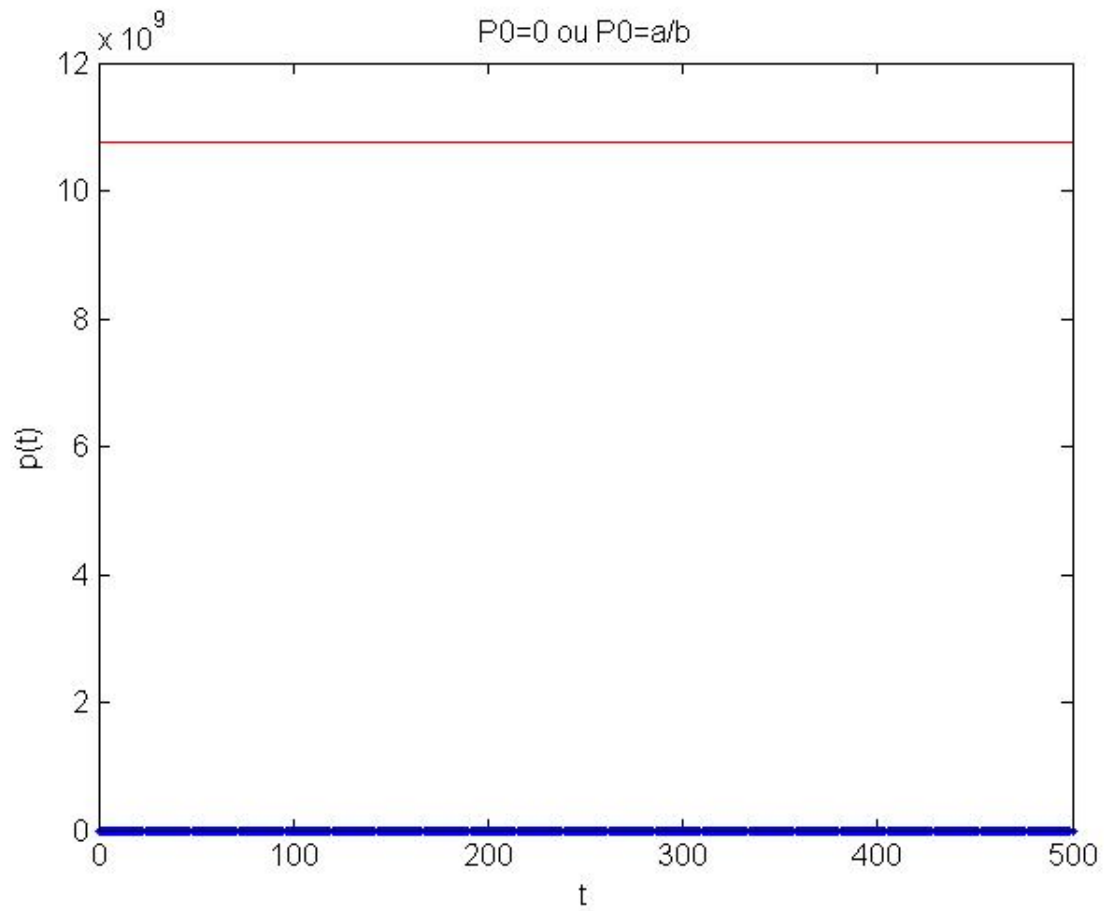
Si $0 < P_0 < \frac{a}{b}$, alors $P'(t) > 0$ et donc la solution analytique P est croissante.



Si $P_0 > \frac{a}{b}$, alors $P'(t) < 0$ et donc la solution analytique P est décroissante,



Si $P_0 = 0$ ou $P_0 = \frac{a}{b}$, alors $P'(t) = 0$ et donc la solution analytique P est constante,



Chapitre 2

Méthode d'Euler explicite

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique au problème suivant :

$$\begin{cases} P'(t) = f(P(t)) = aP(t) - bP^2(t), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

par la méthode d'Euler. Étant donné une subdivision régulière $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ et en posant $t_n = t_0 + nh$ où $\Delta t = T/N$.

En intégrant le problème (2.1) sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, on obtient :

$$P(t_{n+1}) = P(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(P(t)) dt \quad (2.2)$$

En utilisant la méthode de rectangle à gauche pour l'intégrale de seconde membre de (2.2), on trouve le schéma d'Euler explicite suivant :

$$P_{n+1} = P_n + \Delta t f(P_n), \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.3)$$

Définition 2.1. (Consistance). Soit P la solution exacte du problème de Cauchy (2.1). On appelle erreur de consistance (ou erreur de troncature) du schéma d'Euler explicite (2.3), la quantité :

$$R_n = \frac{P(t_{n+1}) - P(t_n)}{\Delta t} - f(P(t_n)), \quad \forall n = 0, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Le schéma d'Euler explicite (2.3) est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt tend vers 0, c'est à dire

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R^n = 0.$$

Lemme 2.2. *Le schéma d'Euler explicite (2.3) est consistant d'ordre un, c'est à dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = O(\Delta t).$$

Démonstration : On suppose que la solution exacte $P \in \mathcal{C}^2([t_0, t_0 + T])$. En utilisant la formule de Taylor avec le reste de Lagrange à l'ordre un sur la solution P , alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} P(t_{n+1}) &= P(t_n) + \Delta t P'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} P''(t_n + \theta \Delta t) \\ &= P(t_n) + \Delta t f(P(t_n)) + \frac{\Delta t^2}{2} P''(t_n + \theta \Delta t) \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$R_n = \frac{\Delta t}{2} P''(t_n + \theta \Delta t) \leq \frac{M}{2} \Delta t, \quad (2.5)$$

où

$$M = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} |P''(t)|$$

Définition 2.3. (Erreur de convergence). On appelle erreur de convergence la différence entre la solution exacte et la solution numérique

$$e_n = |P(t_n) - P_n|. \quad (2.6)$$

On dira que le schéma d'Euler explicite (2.3) est convergent si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0.$$

Lemme 2.4. *Le schéma d'Euler explicite (2.3) est convergent.*

Démonstration : De (2.3) et (2.6), on a :

$$\begin{aligned} P(t_{n+1}) &= P(t_n) + \Delta t f(P(t_n)) + \Delta t R_n, \\ P_{n+1} &= P_n + \Delta t f(P_n). \end{aligned}$$

et avec (2.6), on obtient :

$$e_{n+1} = e_n + \Delta t [f(P(t_n)) - f(P_n)] + \Delta t R_n$$

la fonction f est Lipschitzienne, alors, on a :

$$|f(P(t_n)) - f(P_n)| \leq L|e_n|,$$

donc, de (2.5), on a :

$$|e_{n+1}| \leq (1 + \Delta t L) |e_n| + \frac{M}{2} (\Delta t)^2. \quad (2.7)$$

Pour compléter la démonstration, nous avons besoin les deux lemmes suivants :

Lemme 2.5. Soit $(\theta_n)_{n \geq 0}$ une suite positive telle que :

$$\forall n = 0, \dots, N \quad \theta_{n+1} \leq a\theta_n + \alpha, \quad /a, \alpha \geq 0$$

Alors :

$$\forall n = 1, \dots, N+1 \quad \theta_n \leq a^n \theta_0 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a^i = a^n \theta_0 + \alpha \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad (2.8)$$

Démonstration : Montrons par récurrence sur n l'inégalité suivante :

$$\theta_n \leq a^n \theta_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} \alpha$$

L'inégalité est vraie pour $n = 0$. On suppose donc que l'inégalité est vraie pour n et on la démontre pour $n + 1$. On a :

$$\theta_{n+1} \leq a\theta_n + \alpha$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &\leq a\left(a^n \theta_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} \alpha\right) + \alpha \\ &\leq a^{n+1} \theta_0 + \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} \alpha + \alpha \\ &\leq a^{n+1} \theta_0 + \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \alpha \end{aligned}$$

Lemme 2.6. Nous avons l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + r)^n \leq e^{nr}, \quad r \geq 0.$$

Démonstration : On pose $g(r) = e^r - r - 1$. Alors, on a :

$$\forall r > 0, \quad g'(r) = e^r - 1 > 0$$

donc, la fonction g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. D'autre part, on a : $g(0) = 0$, alors on a :

$$g(r) \geq 0 \Rightarrow 1 + r \leq e^r$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1 + r)^n \leq e^{nr}.$$

On pose $a = 1 + r$ dans (2.8) et en utilisant Lemme 2.6, on obtient :

$$\theta_n \leq e^{nr} \theta_0 + \frac{\alpha}{r} (e^{nr} - 1). \quad (2.9)$$

De (2.7) et (2.9), on obtient :

$$|e_n| \leq e^{L\Delta t} |e_0| + \frac{M(\Delta t)^2}{2} \frac{e^{Ln\Delta t} - 1}{L\Delta t} \quad / \forall n = 1, \dots, N.$$

Si $e_0 = 0$, nous avons :

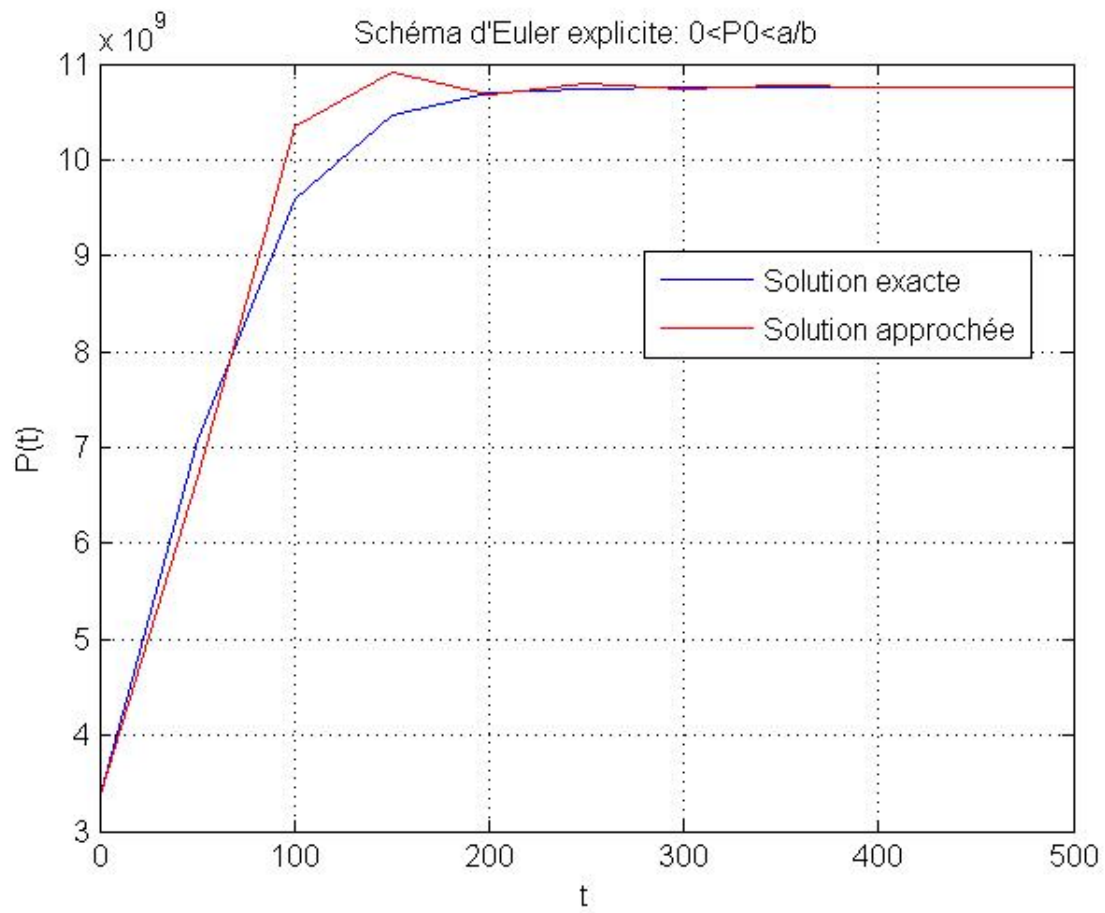
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{n\Delta t \leq T} e_n = 0.$$

Schéma d'Euler explicite avec Matlab

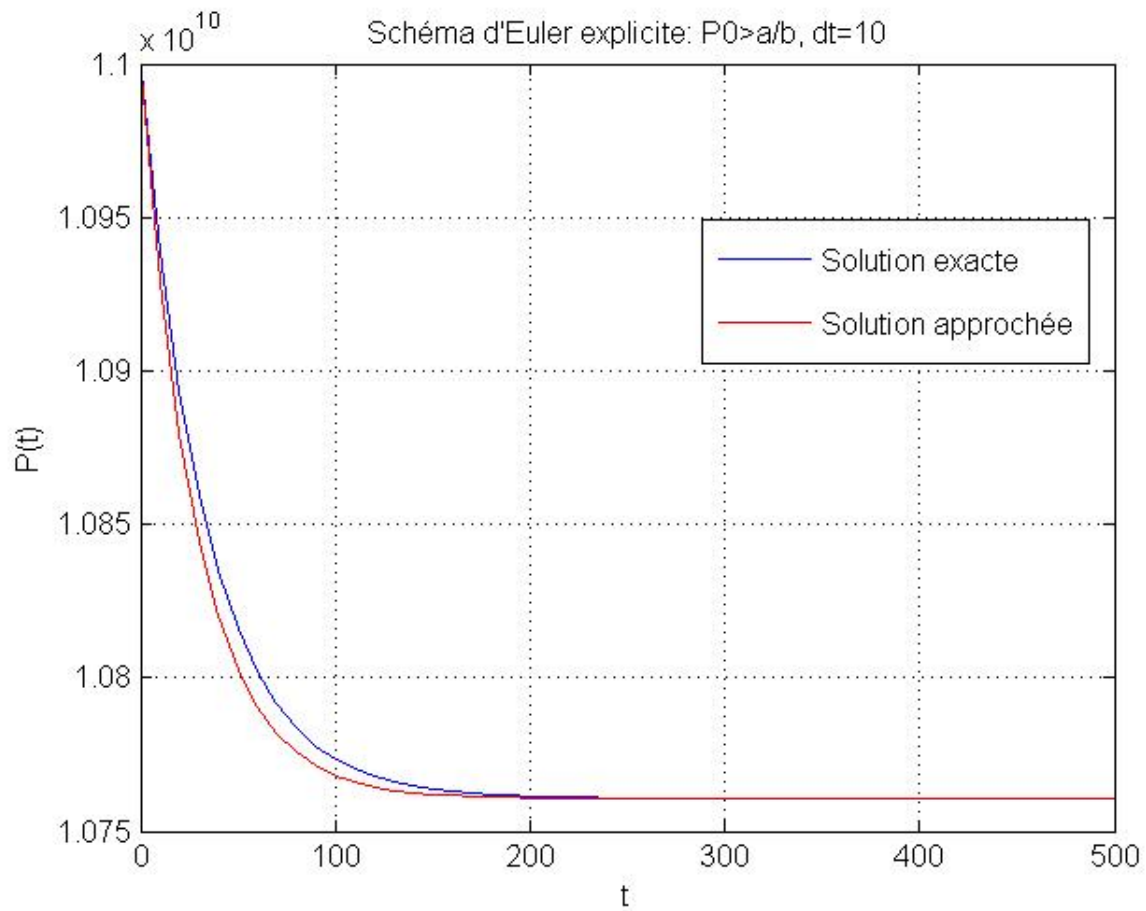
Explications	Programme
Nettoyage (facultatif mais conseillé)	<code>clear all;</code> <code>close all;</code>
Temps initial	<code>t0 = 0;</code>
Donnée initiale	<code>P0 = 3.34e9;</code> <code>a = 0.029;</code> <code>b = 2.695e-12;</code>
Temps final	<code>T = 500;</code>
Pas de temps	<code>dt = 1;</code>
Nombre des nœuds	<code>N = floor(T/dt);</code> <code>P = zeros(N,1);</code> <code>tt = zeros(N,1);</code> <code>P(1) = P0;</code> <code>tt(1) = t0;</code>
Début de boucle	<code>for i = 1 : N - 1</code> $P(i + 1) = P(i) + dt * P(i) (a - b * P(i));$ $tt(i + 1) = t0 + (i + 1) * dt;$
Fin de boucle	<code>end</code>
Dessin de la solution	<code>plot(tt,P, 'r');</code>

Exemple numérique

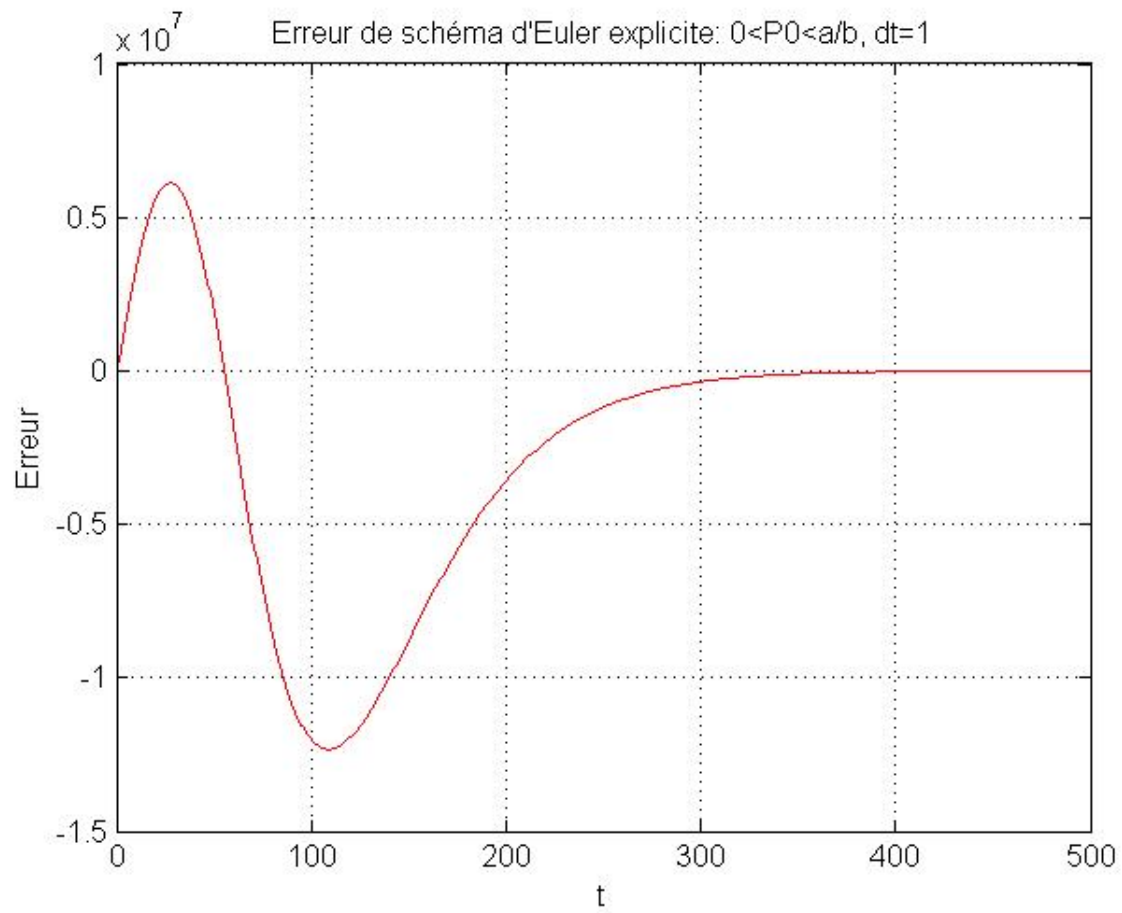
Soient $a = 0.029$; $b = 2.695e - 12$; $p0 = 3.34e9$; $T = 500$, $\Delta t = 50$.



Soient $a = 0.029$; $b = 2.695e - 12$; $p_0 = 11e9$; $T = 500$ et $\Delta t = 10$.



Erreur de schéma d'Euler explicite.



Chapitre 3

Méthodes de Rung-Kutta

3.1 Idée sur la méthode de Rung-kutta

sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solution d'équations différentielles, elles ont été nommées aussi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge, et Martin Wilhelm Kutta lesquels élaborèrent la méthode en 1901. Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise et ainsi de suite.

Une méthode itérative à un pas consiste à approcher chaque valeur $y(t_{n+1})$ par une valeur y_{n+1} de \mathbb{R} calculée en fonction de t_n, y_n (valeur approchée de $y(t_n)$) et du pas Δt . Une telle méthode peut s'écrire :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n, \Delta t); n = 0, 1, 2, \dots, N \\ y_0 = \eta_{\Delta t} \end{cases} \quad (3.1)$$

Où f est une fonction de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, \Delta t_0]$ dans \mathbb{R} dépendant du problème (1.3)

3.2 Principe des méthodes de Rung-kutta

on pose $\tilde{t}_n = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ et $\tilde{y} = y + \frac{\Delta t}{2}$
on prend le développement en série de Taylor autour de ce point s'écrit en remplaçant $t_n \rightarrow t_n + \frac{\Delta t}{2}$ dans le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} y(t_n + \Delta t) &= y(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} y^{(1)}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{(\Delta t)^2}{8} y^{(2)}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + O((\Delta t)^3) \\ &= \tilde{y} + \frac{\Delta t}{2} f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{y}) + \frac{(\Delta t)^2}{8} y^{(2)}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \end{aligned}$$

on calcule :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) &= \frac{4}{\Delta t^2} [y(t_n + \Delta t) - 2y(t_n + \frac{\Delta t}{2}) + y(t_n)] + O(\Delta t) \\ &= \frac{4}{(\Delta t)^2} [y(t_n + \Delta t) - 2\tilde{y} + y(t_n)] + O(\Delta t) \end{aligned}$$

remplaçant dans le développement de Taylor on obtient :

$$\begin{aligned}
 y(t_n + \Delta t) &= \tilde{y} + \frac{\Delta t}{2} f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{y}) + \frac{1}{2} [y(t_n + \Delta t) - 2\tilde{y} + y(t_n)] + O((\Delta t)^3) \\
 &= \frac{\Delta t}{2} f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{y}) + \frac{1}{2} y(t_n + \Delta t) + \frac{1}{2} y(t_n) \\
 &= y(t_n) + \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \tilde{y}) \\
 &= y(t_n) + \frac{\Delta t}{2} k_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta t f(t_n + \Delta t, \tilde{y}) &= \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2} k_1) \\
 &= \Delta t k_2 + O(\Delta t)^3
 \end{aligned}$$

$$y(t_n + \Delta t) = y(t_n) + \Delta t k_2$$

c'est la méthode de Rung-Kutta d'ordre 2.

en prenant le développement de Taylor de la fonction f jusqu'au degré 4, un raisonnement similaire a celui même a la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 on obtient :

$$\begin{cases}
 k_1 &= \Delta t f(t_n, y_n) \\
 k_2 &= \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
 k_3 &= \Delta t f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
 k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 t_{n+1} &= t_n + \Delta t
 \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N$$

3.3 Notion de consistance, stabilité et convergence

Définition 3.1. (consistance) :

La méthode (3.1) est consistante avec l'équation (1.2) si on a

$$\max_{\Delta t \rightarrow 0} |y'(t_n) - f(t_n, y(t_n), \Delta t)| = 0, n = 0, 1, \dots, N - 1$$

Ou y est solution de (1.3) la dérivée approchée de y en t

$$y'(t) = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$y'(t) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t}$$

Définition 3.2. Soient deux suites y_n et z_n définies par les équation :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t F(t_n, y_n, \Delta t) \quad y_0 \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t F[(t_n, Y_n, \Delta t) + \epsilon_n] \quad Y_0 \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

On dit que le schéma (3.3) et le schéma (3.2) perturbe par ϵ_n et par la nouvelle condition initial

Définition 3.3. (stabilité) : La méthode (3.1) est stable s'il existe deux constantes M_1 et M_2 indépendantes de Δt telles que : Ouy_n et Y_n sont les résultants des schéma (3.2) et (3.3) respectivement

Définition 3.4. Soit $\eta_{\Delta t} = y_0$ condition initiale pour un Δt fixé
On dit que la méthode (3.1) est convergent si :

$$(\eta_{\Delta t} \rightarrow \Delta t, \text{ quand } \Delta t \rightarrow 0) \Rightarrow \max_{\Delta t \rightarrow 0} |y_n - y(t_n)| \rightarrow 0$$

Théorème 3.5. Si la méthode (3.2) est consistante et stable, alors elle est convergente

Démonstration :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \Delta t [f(t_n, y(t_n), \Delta t) + \epsilon_n] \quad (3.4)$$

Avec y solution de (1.2). La méthode est consistante, alors on a :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 < n < N} \left| \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} - F(t_n, y(t_n), \Delta t) \right| = 0$$

ou encore

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_n |\epsilon_n| = 0$$

Comme la méthode (3.1) est stable, il résulte de (3.4) qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 telles que :

$$\max_{0 < n < N} |y_n - y(t_n)| \leq M_1 |\eta_{\Delta t} - \eta| + M_2 \max_{0 < n < N} |\epsilon_n|$$

On a comme hypothèses de convergence $|\eta_{\Delta t} - \eta| \rightarrow 0$ quand $\Delta t \rightarrow 0$ Donc

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 < n < N} |y_n - y(t_n)| = 0$$

Et la méthode (3.1) est convergente.

Lemme 3.6. Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode (3.1). Soit consistant avec l'équation différentielle (1.2) est que :

$$F(t, y, 0) = f(t, y); \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]; \forall y \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

Démonstration :

– Condition nécessaire :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 < n < N} |\nabla y(t_n) - f(t_n, y(t_n), \Delta t)| = 0$$

donc

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 < n < N} \left| \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t} - f(t_n, y(t_n), \Delta t) \right| = 0$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 < n < N} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, y(x)) dx - F(t_n, y(t_n), \Delta t) \right| = 0$$

Soit $t \in [t_0, t_0 + T]$, il existe une suite t_n (n dépendant de Δt) tendant vers t quand $\Delta t \rightarrow 0$. f et F sont continues, donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, y(x)) dx &= f(t, y(t)) \\ \lim_{h \rightarrow 0} F(t_n, y(t_n), \Delta t) &= F(t, y(t), 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(t, y(t)) - F(t, y(t), 0) = 0; \forall t \in [t_0, t_0 + T], z = y(t)$$

Parcourt \mathbb{R} quand y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation (1.2) d'où (3.5).

– Condition suffisante :

Si $F(x, y(x), 0) = f(x, y(x))$, a-t-on (3.2), c'est-à-dire la consistance ?

$$\frac{1}{\Delta t} (y(t_{n+1}) - y(t_n)) - F(t_n, y(t_n), \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(x, y(x), 0) - F(t_n, y(t_n), \Delta t)] dx$$

F est continue uniformément sur le compact

$$(t, y(t))/t \in [t_0, t_0 + T] \times [0, \Delta t_0]; t_n \leq x \leq t_{n+1},$$

On a :

$$\max_{0 < n < N} |F(x, y(x), 0) - F(t_n, y(t_n), \Delta t)| = 0$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$. Ce qui entraîne

$$\max_{0 < n < N} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x, y(x), 0) - F(t_n, y(t_n), \Delta t) dx \right| = 0$$

Quand $\Delta t \rightarrow 0$; ce qui est bien l'équation (3.2)

Lemme 3.7. Si F vérifie la condition de Lipschitz

$$|F(t, y, \Delta t) - F(t, y^*, \Delta t)| \leq L|y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}, \forall \Delta t \in [0, \Delta t_0] \quad (3.6)$$

Avec L ne dépendant pas de Δt , alors la méthode (3.6) est stable avec pour constantes M_1 et M_2 :

$$M_1 = e^{L(t-t_0)} \wedge M_2 = \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L}$$

Le paramètre Δt_0 est le rayon de stabilité de la méthode.

Démonstration : Soient (y_n) et (z_n) vérifiant

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t F(t_n, y_n; \Delta t), n = 0, \dots, N - 1 \\ z_{n+1} &= z_n + \Delta t (F(t_n, z_n, \Delta t) + \epsilon_n), n = 0, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

On fait la différence et on a :

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - z_{n+1}| &\leq |y_n - z_n| + \Delta t |F(t_n, y_n, \Delta t) - F(t_n, z_n, \Delta t)| + \Delta t |\epsilon_n| \\ |y_{n+1} - z_{n+1}| &\leq (1 + \Delta t L) |y_n - z_n| + |\Delta t| |\epsilon_n|; n = 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Alors, d'après le lemme (3.6) et (3.7) on a :

$$|y_n - z_n| \leq |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)} + \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L} \max_{n=0, \dots, N-1} |\epsilon_n|$$

pour $n = 0, \dots, N$ Donc :

$$\max_{n=0, \dots, N} |y_n - z_n| \leq |y_0 - z_0| e^{L(t-t_0)} + \frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L} \max_{n=0, \dots, N} |\epsilon_n|$$

D'ou la stabilité

Théorème 3.8. Soit F vérifiant

1. $F(t, y, 0) = f(t, y); \forall t \in [t_0, t_0 + T]; \forall y \in \mathbb{R}$
2. $|F(t, y, \Delta t) - F(t, y^*, \Delta t)| \leq L|y - y^*|; \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$

$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall \Delta t \in [0, \Delta t_0]$ avec L indépendant de Δt

Alors, la méthode (3.1) converge

Démonstration :

1. \Rightarrow consistance d'après le lemme (3.6)
2. \Rightarrow stabilité d'après le lemme (3.7)

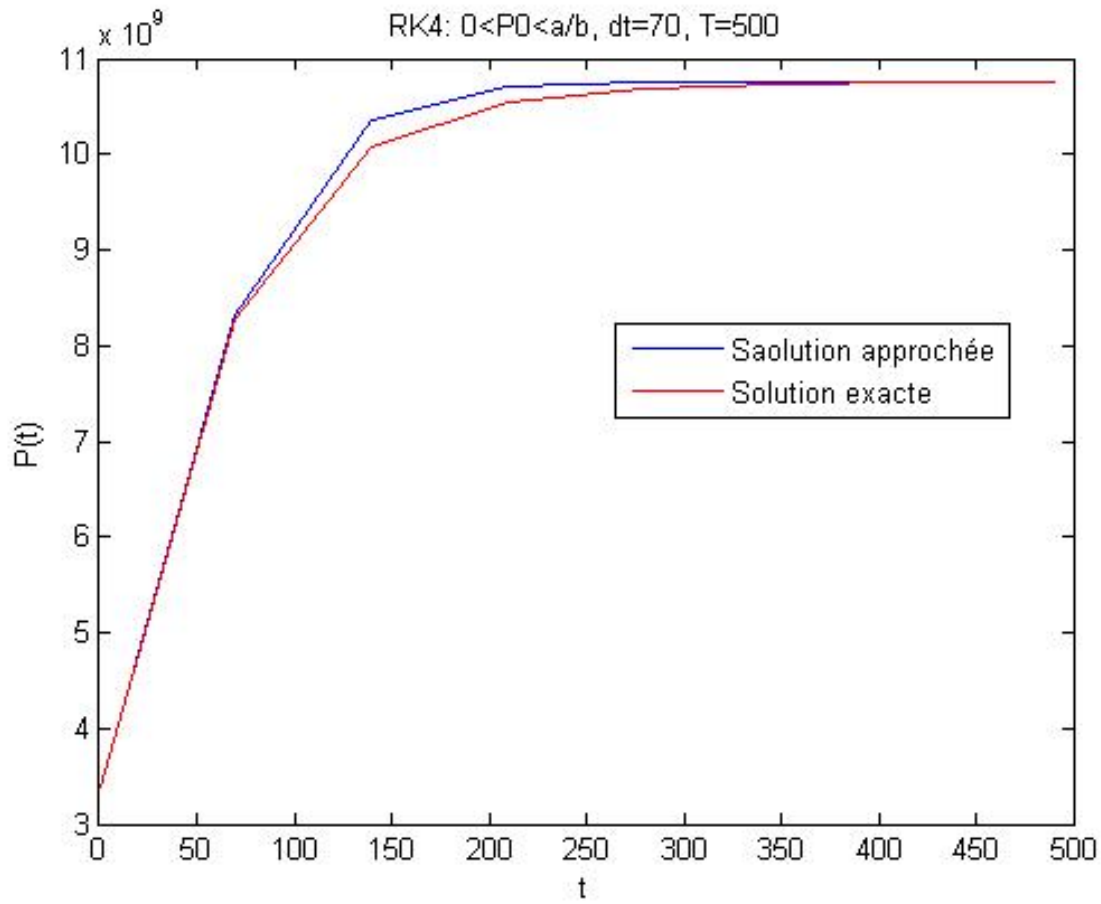
consistance et stabilité \Rightarrow convergence d'après le problème de Cauchy . On peut démontrer de la même façon que le schéma d'Euler explicite.

Schéma de Rung-Kutta d'ordre 4 avec Matlab

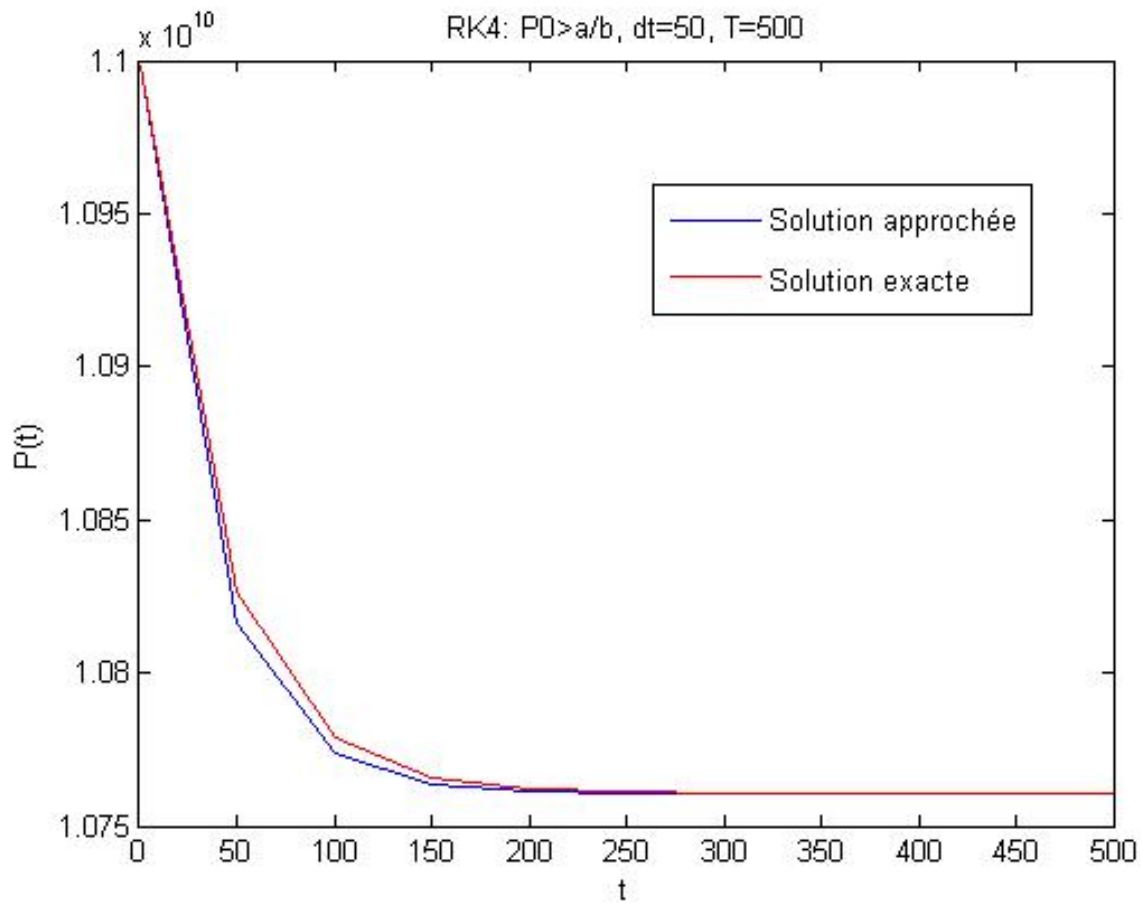
Explications	Programme
Nettoyage (facultatif mais conseillé)	<code>clear all;</code> <code>close all;</code>
Temps initial	<code>t0 = 0;</code>
Donnée initiale	<code>P0 = 3.34e9;</code> <code>a = 0.029;</code> <code>b = 2.695e-12;</code>
Temps final	<code>T = 500;</code>
Pas de temps	<code>dt = 1;</code>
Nombre des nœuds	<code>N = floor(T/dt);</code> <code>P = zeros(N, 1);</code> <code>tt = zeros(N, 1);</code> <code>P(1) = P0;</code> <code>tt(1) = t0;</code>
Début de boucle	<code>while t ≤ T</code> <code> K1 = a * P0 - b * P0²;</code> <code> K2 = a * (P0 + h/2 * K1) - b * (P0 + h/2 * K1)²;</code> <code> K3 = a * (P0 + h/2 * K2) - b * (P0 + h/2 * K2)²;</code> <code> K4 = a * (P0 + h * K3) - b * (P0 + h * K3)²;</code> <code> phi = (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6;</code> <code> P = P0 + h * phi;</code> <code> PP(i) = P0;</code> <code> P0 = P;</code> <code> tt(i) = t;</code> <code> t = t + h;</code> <code> y(i) = pt;</code>
Fin de boucle	<code>end</code>
Dessin de la solution	<code>plot(tt,PP, 'r')</code>

Exemple numérique

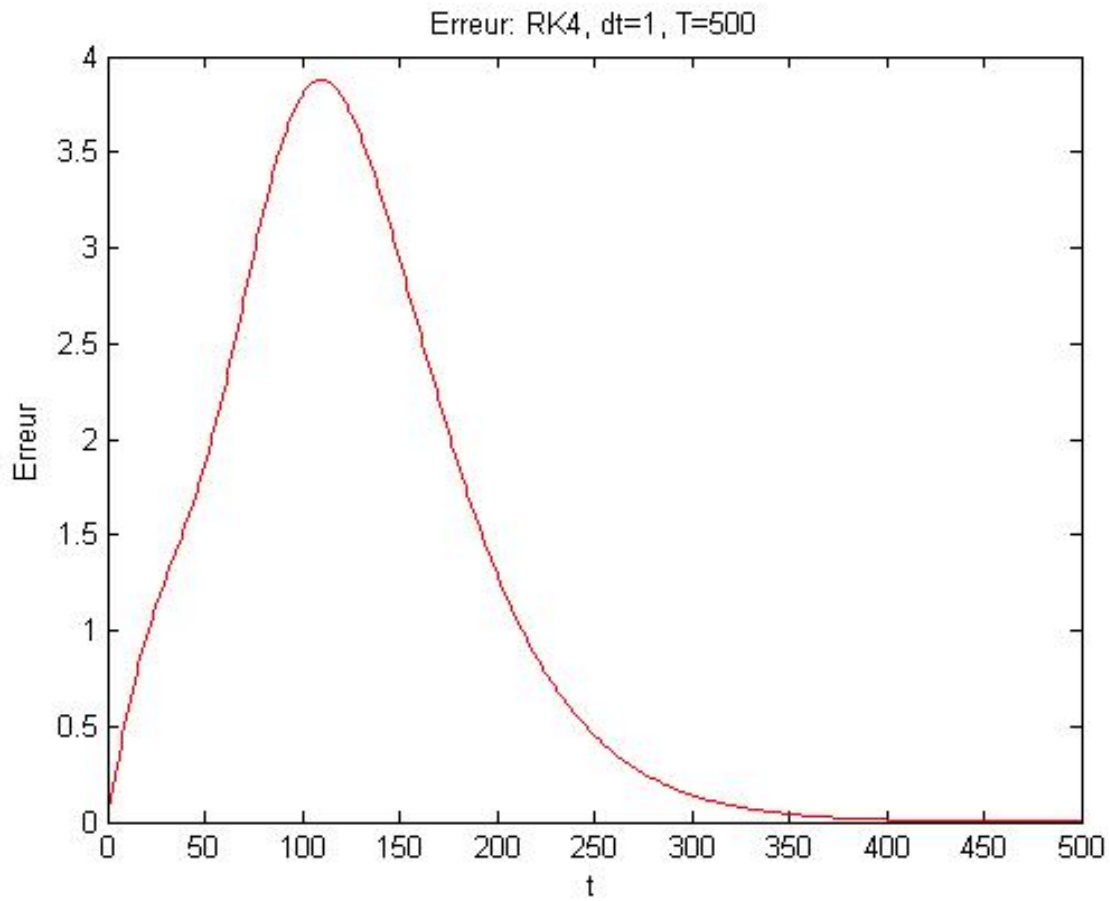
Soient $a = 0.029$; $b = 2.695e - 12$; $p_0 = 3.34e9$; $T = 500$, $\Delta t = 50$.



Soient $a = 0.029$; $b = 2.695e - 12$; $p_0 = 11e9$; $T = 500$ et $\Delta t = 10$.

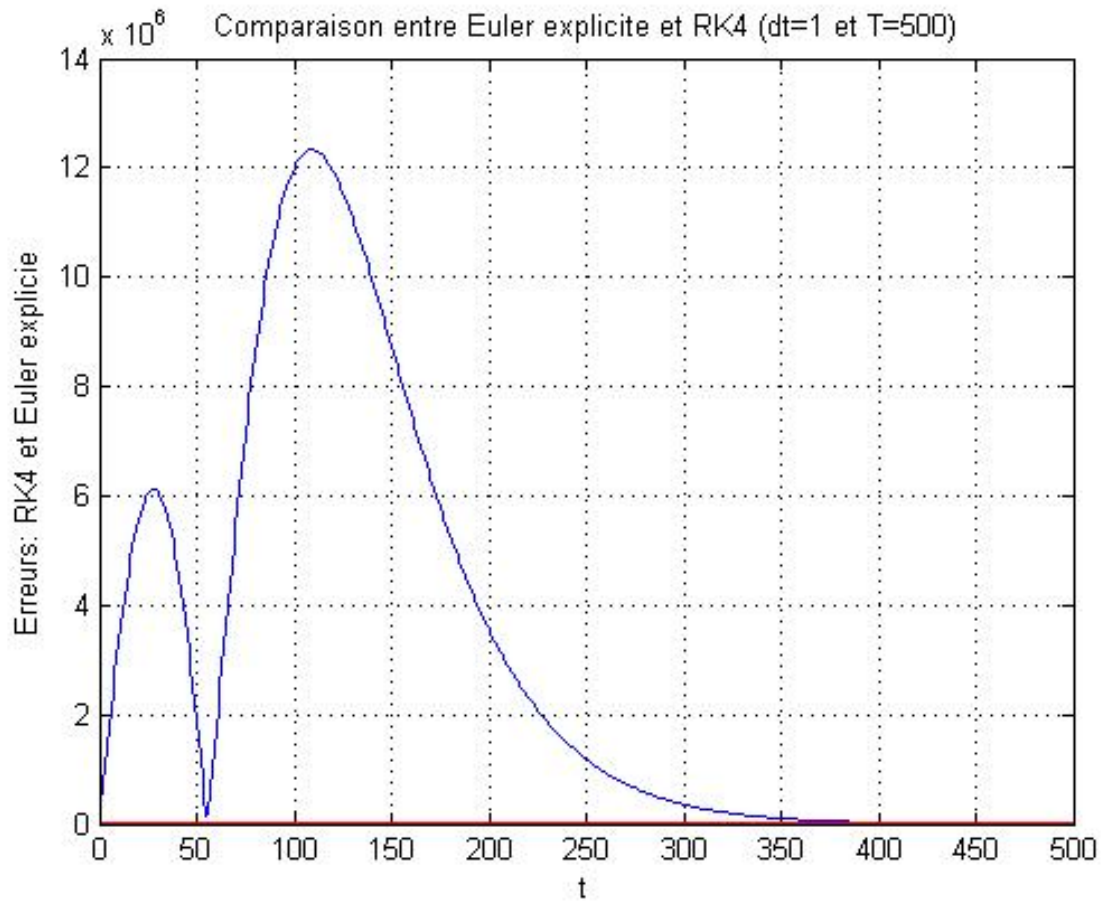


Erreur de schéma de Rung-Kutta d'ordre 4.



Comparaison entre Euler explicite et Rung-Kutta d'ordre 4

Soient $a = 0.029$; $b = 2.695e - 12$; $p_0 = 3.34e9$; $T = 500$, $\Delta t = 1$.



Chapitre 4

Annexe

4.1 Application contractante

Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \mapsto E$ une application. on dit que f est une application contractante s'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$ on ait $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$

Définition 4.1. Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \mapsto E$ une application. on dit que f est une application faiblement contractante s'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in E$ $d(f(f(x)), f(x)) < k'd(f(x), x)$

Remarque 4.2. si f est une application contractante de l'espace métrique E vers lui même alors $k' \leq k$ ou

$$k = \sup \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : (x, y) \in E^2, x \neq y$$
$$k' = \sup \frac{d(f(f(x)), f(x))}{d(f(x), x)}, x \in E, x \neq f(x)$$

4.2 Théorème du points fixe

Soit f une application d'un espace métrique (E, d) dans un autre (F, ∂)

Définition 4.3. – L'application f est dite Lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que , pour tout $x, y \in E$ on a : $\partial(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$
– Lorsqu'on peut choisir $k \in]0, 1[$ on dit que f est contractante

Proposition 4.4. *Tout application Lipschitzienne est continue et en plus uniformément continue dans la suite , soit $(E, \|\cdot\|)$ espace métrique complet et soit $f : E \mapsto E$*

Définition 4.5. On dit que f admet un point fixe s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$

Théorème 4.6. *Toute contraction d'un espace métrique complet admet un unique point fixe. l'existence du point fixe résultat de l'itération de f a partir d'un point arbitraire $x_0 \in E$ de E on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ et on vérifie que la suite (x_n) converge dans E dans le cas ou (E, d) est complet , l'application f admet un seul point fixe*

4.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 4.7. (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*) Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Soit $T > 0$ un réel donné. Si la fonction $f : [x_0, x_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est vérifié les hypothèses suivantes :

1. f continue sur $([x_0, x_0 + T] \times \mathbb{R})$.
2. La fonction $f(x, \cdot)$ est de Lipschitz c'est à dire

$$\exists k > 0 \text{ tel que } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2| \quad \forall x \in [x_0, x_0 + T] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

Alors, le problème (4.1) admet une solution unique de classe \mathcal{C}^1 sur $[x_0, x_0 + T]$.

Démonstration. Pour tout $x \in [x_0, x_0 + T]$ en intégrant (4.1) sur l'intervalle $[x_0, x]$, on obtient :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (4.3)$$

Posons $E = \mathcal{C}([x_0, x_0 + T] \times \mathbb{R})$. Alors, E est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|y\| = \max_{x \in [x_0, x_0 + T]} |y(x)|$$

Soit l'application continue $G : E \rightarrow E$ définie par :

$$G(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad \forall x \in [x_0, x_0 + T] \quad (4.4)$$

Posons :

$$\begin{aligned} y_1 &= G(y) & z_1 &= G(z), \\ y_2 &= G(y_1) = G^2(y) & z_2 &= G^2(z), \\ & \vdots & & \\ y_n &= G(y_{n-1}) = G^n(y) & z_n &= G^n(z). \end{aligned}$$

De (4.4), (4.2) et pour tout $\forall x \in [x_0, x_0 + T]$ on a :

$$|G(y) - G(z)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \leq k \int_{x_0}^x |y(t) - z(t)| dt$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|G^n(y) - G^n(z)| &= |G(G^{n-1}(y)) - G(G^{n-1}(z))| \\
&\leq k \int_{x_0}^x |G^{n-1}(y) - G^{n-1}(z)| dt
\end{aligned} \tag{4.5}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
|y_n(x) - z_n(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, z_{n-1}(t))| dt \\
&\leq k \int_{x_0}^x |y_{n-1}(t) - z_{n-1}(t)| dt \\
&\leq k \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_1} |f(t, y_{n-2}(t)) - f(t, z_{n-2}(t))| dt \\
&\leq k \int_{x_0}^x k \int_{x_0}^{s_1} |y_{n-2}(t) - z_{n-2}(t)| dt dt_1 \\
&\leq k \int_{x_0}^x k \int_{x_0}^{s_1} \int_{x_0}^{s_2} |f(t, y_{n-3}(t)) - f(t, z_{n-3}(t))| dt dt_1 dt_2 \\
&\vdots \\
&\leq k^{n-1} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_1} \dots \int_{x_0}^{s_{n-1}} |f(t, y_1) - f(t, z_1)| dt dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&\leq k^n \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{s_1} \dots \int_{x_0}^{s_{n-1}} |y - z| dt \dots dt_{n-1} \\
&\leq k^n |y - z| \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^{s_{n-1}} dt dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&\leq k^n |y - z| \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^{s_{n-1}} (t_{n-1} - x_0) dt dt_1 \dots dt_{n-1} \\
&\leq k^n |y - z| \int_{x_0}^x \frac{(t_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\
&\leq \frac{(kT)^n}{n!} |y - z|
\end{aligned}$$

Donc :

$$|G^n(y) - G^n(z)| \leq M_n |y - z| \text{ où } M_n = \frac{(kT)^n}{n!}$$

On va démontrer que la série numérique $\sum M_n$ est convergente. Alors, avec la règle de D'Alembert, on a :

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(kT)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{KT}{n+1} = 0$$

donc, $\sum M_n$ est convergente, et d'après la condition nécessaire de convergence d'une série numérique, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$$

Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ implique $M_n < 1$ donc G^n est une application contractante de E dans E . D'après le théorème de point fixe G^n a un point fixe unique $y^* \in E$ tel que

$$y^* = G^n(y^*) \quad (4.6)$$

Et d'autre part :

$$G^{n+1}(y^*) = G^n(G(y^*)) = G(y^*) \quad (4.7)$$

D'après (4.6) et (4.7) on a : $G(y^*) = y^*$. Alors, y^* est un point fixe unique de G . Donc (4.4) a une unique solution y^* , laquelle est l'unique solution de (4.1).

4.4 Équation de Bernoulli

L'équation est de type

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \quad n \in \mathbb{N}$$

ou a et b sont deux fonctions linéaires

- en tout point de $I \times \mathbb{R}$ il possède une unique solution maximal
- $y = 0$ est une solution de l'équation
- la recherche des solutions qui ne s'annulent pas on pose $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ on se ramène alors a une équation linéaire de premier ordre

Bibliographie

- [1] Sylvie BENZONI-GAVAGE. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2010.
- [2] Michel CROUZEIX et Alain L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*. Masson, Paris, 1984.
- [3] Jean pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles. Collection Grenoble Sciences*. Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
- [4] N. piskounov. *calcul différentiel et integral*. OPU, Place central ben Aknoun-Alger, 1988.
- [5] Moise Sibonny. *Système linéaire et non linéaire, T2*. Harmann, Paris, 1982.