الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــــة الـعـلــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: BOUFATAH Amira

THEME

Existence globale et la stabilité d'un système de Bresse avec terme de retard de distribution.

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Dr. BOUKEHILA Ahcen	***M.C.B***	***Président***
Dr. RAHMOUNE Abdelaziz	***M.C.B***	***Examinateur***
Mr. BOUGATAIA Amar	***M.A.A***	***Examinateur***
Dr. OUCHENANE Djamel	***M.C.A***	***Encadreur***

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Avant tous je remercie Dieu le tous puissant pour m'avoir donnée la force et le courage pour de terminer ce modeste travail.

Avec tous nos respects nos remerciement à Dr.Ouchenane Djamel pour son encadrement, ses précieux conseils et sa patience qui nos amplement aidé à réaliser ce travail.

Ainsi que tous nos professeurs de mathématique.

Nos remerciement aux membres de jury Dr Boukehila Ahcen et Mr Bougataia Amar et chef de département Dr Rahmoune Abdelaziz pour avoir accepter de juger ce travail.

En fin, nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématiques, 2018/2019 à l'université à Amar Telidji Laghouat.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Mes trés chers parents

pour leurs sacrifices et leurs encouragemnets durant toute ma vie qui Allah les garde et les protége.

Mes soeurs : Ihssane, Bassma, Douaa, Khadija et mon frére Abdel Rahman et à toutes les familles Boufatah et Bouchaala, mes grand-péres alah yarahmhm, et mes grand-mères mes tantes et mes ancles et à tous mes amis d'études.

Et une grande dédicace pour mon encadreur Dr.D.Ouchenane.

Résumé

Dans ce travail, on considère un système thermoélastique linéaire unidimensionnel de Bresse avec terme de retard de distribution dans la première équation. On démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème, ainsi la stabilité exponentielle est prouve sans l'hypothèse usuelle en les vitesses des ondes. On utilise la méthode de semi-groupe ou la méthode d'énergie.

Mots clés : Système de Bresse, avec un retard, stabilité exponentielle, méthode de Lyaponov, thermoélastique

Abstract

In this work, we consider a one-dimensional linear thermoelastic Bresse system with a distributed delay term in the first equation. We prove the well-posedness and exponential stability result, this later will be shown without the usual assumption on the wave speeds. To achieve our goals, we make use of the semi-group method.

Key-words : Bresse system, Delay terms, Exponential decay, Lyaponov method, Thermoelastic

ملخص

في هذا العمل، يتم دراسة النظام الحراري الخطي أحادي الأبعاد من نوع بريس مع تأخير التوزيع في المعادلة الأولى، نبرهن الوجود و الوحدانية و الاستقرار الأسي دون الإفتراض المعتاد على سرعات الموجة. ولتحقيق أهدافنا، نستعمل طريقة سيميقروب أو طريقة الطاقة.

كلمات مفتاحية نظام بريس، مع تأخير، التناقص الأسي، طريقة يابونوف، النظام الحراري.

Table des matières

Notations

X	Espace de Banach,
X'	Espace dual de X,
H	Espace de Hilbert,
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue, $1 \leq p \leq \infty$,
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions tests,
$\mathcal{D}'(\Omega)$	L'espace des distributions,
$W^{m,p}(\Omega),\ H^m(\Omega)$	L'espace de Sobolev,
$W_0^{m,p},\ H_0^m$	La fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega),\ H^m$ respectivement,
Δ	Opérateur de Laplacien.
∇	Opérateur gradient.
$D(A)$	Domaine de l'opérateur A,
$\rho(A)$	Ensemble résolvant de l'opérateur A,
$\sigma(A)$	Spectre de l'opérateur A,
$C_0(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω,
A^*	L'adjoint d'un opérateur A,
p.p.	Presque partout,
$(\, . \, , \, . \,)$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert,
$\Vert . \Vert_p$	La norme associée à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$.
C_0-semigroupe	Semi-groupe fortement continu.

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles interviennent dans de nombreux domaines en Physique, Chimie, Biologie..., En particuliers, les problèmes d'évolutions étudient avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, ...) à partir d'un état initial donné. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un système de Bresse thermoélastique linéaire à une dimension avec terme de retard de distribution, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + \mu_0\varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)\varphi_t(x, t - s)ds = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{tx} = 0, \\ \alpha q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+$ avec les conditions de Dirichlet :

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = w(0, t) = w(1, t) = \theta(0, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

Ce travail constitue en trois chapitres, le premier chapitre on s'intéresse à donner quelques notions générales sur les espaces de Sobolev avec quelques propriétés associées et quelques inégalité utiles utilisés dans la suite de ce mémoire, nous avons donné aussi quelques théorèmes principaux comme le théorème de Lax-Milgram et Hille-Yosida. Dans le deuxième chapitre nous avons vu comment peut étudier l'existence et l'unicité de la solution en appliquant l'idée décrit précédemment sur deux exemples en détaille, le premier exemple est un problème des ondes avec un terme retard et comme deuxième exemple nous avons donné un problème des ondes avec terme retard sur les bords du domaine, l'existence et l'unicité de la solution pour chaque problème équivalent est démontré en utilisant les théorèmes de Hille-Yosida et de Lax-Milgram.
Le dernier chapitre consiste à donné un autre type de problème, présenté par un problème de type de Bresse l'origine de ce type est constitué de trois équations d'ondes où les principales variables décrivant les déplacements longitudinaux, verticaux et les angles de cisaillement.

Chapitre 1

préliminaire

1.1 Topologies faible et faible*

Soit X un espace de Banach et soit $f \in X'$ (X' l'espace dual de X). On désigne par $(\varphi_f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f parcourt X' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur X est la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.*

On va définir maintenant une autre topologie sur X' : la topologie faible étoile que l'on note $\sigma(X', X)$. Pour chaque $x \in X$. On considère l'application (φ_f) : $X' \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f \longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle .$$

Lorsque x parcourt X, on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x \in X}$ de X' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *La topologie faible étoile $\sigma(X', X)$ sur X' est la topologie la moins fine sur X' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in X}$.*

Remarque 1.1. *Comme $X \subset X''$, il est clair que la topologie $\sigma(X', X)$ est moins fine que la topologie $\sigma(X', X'')$. Autrement dit la topologie $\sigma(X', X)$ possède moins d'ouverts (resp.fermés) que la topologie $\sigma(X', X'')$ [qui à son tour possède d'ouverts (resp.fermés) que la topologie forte].*

Proposition 1.1. *[6] Soit (x_n) une suite de X. On a*

(i) $[x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(X, X')] \Leftrightarrow [f(x_n) \longrightarrow f(x), \forall f \in X']$.

(ii) Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(X, X')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq$ $\lim\ \inf \|x_n\|$.

(iv) *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(X, X')$ *et si* $f_n \longrightarrow f$ *fortement dans* X, $(i.e.\|f_n - f\|_{X'} \longrightarrow 0)$.

Proposition 1.2. *[29]*
Sur la compacité dans les trois topologies de l'espace de Banach X *:*

1. *La boule unité*
$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$
dans X *est compact si et seulement si* $\dim(X) < \infty$.
2. *La boule unité* $B' = \{x \in X' : \|x\| \leq 1\}$, *dans* X' *est compacte dans* X' *si et seulement si* X *est réflexif.*
3. B' *est toujours faiblement compact en étoile dans la topologie en étoile faible de* X'.

Proposition 1.3. *[6] Soit* (f_n) *une suite de* X'. *On a*

(i) $[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)] \Leftrightarrow [f_n(x) \longrightarrow f(x), \forall x \in X]$.

(ii) *Si* $f_n \longrightarrow f$ *fortement, alors* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(X', X'')$.
Si $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(X', X'')$, *alors* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)$.

(iii) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)$ *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \lim\inf \|f_n\|$.

(iv) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(X', X)$ *et si* $x_n \longrightarrow x$ *fortement dans* X, *alors* $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.

1.2 Espace fonctionnels

1.2.1 Espace de Hilbert

Définition 1.3. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel* H *muni d'un produit scalaire* (u, v) *et qui est complet pour la norme* $(u, u)^{\frac{1}{2}}$

Proposition 1.4. *[27] Soient* X *et* Y *des espaces de Hilbert,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *une suite qui converge faiblement vers* u *et* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *(opérateur linéaire continu de* X *dans* Y*). Alors la suit* $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* $A(u)$.

preuve. Pour tout $v \in Y$, la fonction $u \longmapsto \langle A(u), v\rangle$ est linéaire continue car
$$|\langle A(u), v\rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|u\|_X\|v\|_Y, \forall u \in X, \forall v \in Y.$$
Il existe donc $w \in X$ $(w = A^*(v), A^*$ est l'adjoint de A) tel que
$$\langle A(u), v\rangle = \langle u, w\rangle \text{ pour tout } u \in X.$$
On a alors, pour tout $v \in X$
$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u_n), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, w\rangle = \langle u, w\rangle = \langle A(u), v\rangle.$$
□

1.2.2 Les espaces L^p

Définition 1.4. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ au sens de Lebesgue, on définit*

$$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{ll} f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \text{ mesurable et il existe une constante } C \\ \text{telle que } |f(x)| \leq C \ p.p \text{ sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \operatorname{Inf} \{ \ C, \ |f(x)| \leq C \ p.p \text{ sur } \Omega \ \}.$$

Notation 1.1.
Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.1.
$L^P(\Omega)$ muni de la norme$\|.\|_p$ est un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Remarque 1.2. *En particulier, quand $p = 2$, $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx,$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2. *[29] Pour $1 < p < \infty$, $L^P(\Omega)$ est un espace réflexif.*

1.2.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Proposition 1.5. *[15] La distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $L^p(\Omega)$ s'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$ telle que*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx, \ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

où $1 \leq p \leq \infty$ et il est bien connu que f est unique .

Définition 1.5. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [0, \infty]$. On défini l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f \in L^p(\Omega), \text{ tel que } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } a \in \mathbb{N}^m \text{ tel que} \\ |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq m, \text{ où, } \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha 1} \partial_2^{\alpha 2} ... \partial_n^{\alpha n} \end{array} \right\}.$$

Théorème 1.3. *[7] $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}, \ 1 \leq p < \infty, \text{ pour tout } f \in W^{m,p}(\Omega),$$

est un espace de Banach.

Définition 1.6. *$W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 1.7. *[27] Lorsque $p = 2$, on préfère notre $W^{m,2}(\Omega) := H^m(\Omega)$ et $W_0^{m,2}(\Omega) := H_0^m(\Omega)$. On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx,$$

et la norme associée

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (\|\partial^\alpha f\|_{L^2})^2 \right)^{1/2}.$$

Proposition 1.6.

1. *Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega)$ est contenu, avec injection continue, dans $H^{m'}(\Omega)$.*
2. *$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle_m$ est un espace de Hilbert.*

Lemme 1.1. *[15] Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, on a le suivant :*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

où $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ dans un sous-espace faible sur Ω.

Le résultats suivants sont fondamentaux dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Théorème 1.4. *[7] On suppose que Ω est de frontière $\partial\Omega$ régulière.Alors,*

1. *Si $1 \leq p \leq n$, on a $W^{1,p} \subset L^q(\Omega)$, pour chaque $q \in [p, p^*]$, où $p^* = \dfrac{np}{n-p}$.*
2. *Si $p = n$ on a $W^{1,p} \subset L^q(\Omega)$, pour chaque $q \in [p, \infty)$.*
3. *Si $p > n$ on a $W^{1,p} \subset L^\infty(\Omega) \bigcap C^{0,\alpha}(\Omega)$, où $\alpha = \dfrac{p-n}{p}$.*

1.2.4 Les espaces $L^p(0, T, X)$

Définition 1.8. *Soit X un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T, X)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace des fonctions $t \longmapsto f(t)$ de $]0, T[\longrightarrow X$ qui sont mesurables à valeur dans X et telles que*

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0,T,X)} < \infty, \tag{1.1}$$

si $p = \infty$, on remplace la norme (1.1) par

$$\|f\|_{L^\infty(0,T,X)} = \sup_{t \in]0,T[} ess \ \|f(t)\|_X. \tag{1.2}$$

Théorème 1.5. *[27] L'espace normé $L^p(0, T, X)$ est complet.*

On désigne par $\mathcal{D}'(0, T, X)$ l'espace de distribution sur $]0, T[$ à valeurs dans X, défini par

$$\mathcal{D}'(0, T, X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}\,]0, T[\,, X).$$

Si $f \in \mathcal{D}'(0, T, X)$, sa dérivée distributionnelle première est définie par

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

On introduira quelques lemmes qu'on utilisera ultérieurement.

Lemme 1.2. *[15] Si $f \in L^p(0, T, X)$ et $\dfrac{df}{dt} \in L^p(0, T, X)$ (au sens des distributions) $(1 \leq p \leq +\infty)$, alors $f \in C(0, T, X)$.*

Théorème 1.6. *[7] $L^p(0, T, X)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p(0,T,X)}$ est un espace de Banach, pour $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposition 1.7. *[11] Soit X un espace de Banach réflexif, X' c'est dual, est $1 \leq p < \infty$, $1 \leq p' < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Alors le dual de $L^p(0, T, X)$ est identifié algébriquement et topologiquement a $L^{p'}(0, T, X')$.*

Proposition 1.8. *[7] Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y, avec l'injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T, X)$ dans $L^p(0, T, Y)$.*

1.3 Quelques Inégalités algébriques

Notre étude est basée sur certaines inégalités algébriques connues, on veut ici rappeler quelques une d'entre elles.

Lemme 1.3. *[31](**Inégalités de Cauchy-Schwarz**)*
Soit E un espace préhilbertien. Tout produit scalaire satisfait l'inégalités de Cauchy-Schwarz

$$\langle x_1, x_2 \rangle \leqslant \|x_1\| \|x_2\|, \; \forall x_1, x_2 \in E.$$

Le signe d'égalité est réalisé si et seulement si x_1 et x_2 sont dépendants.

Inégalités de Young

Lemme 1.4. *Pour tout a, $b \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta},$$

où δ est une constante positive.

Preuve. Prenant le résultat bien connu

$$(2\delta a - b)^2 \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+,$$

pour tous $\delta > 0$, on a :

$$4\delta^2 a^2 + b^2 - 4\delta ab \geq 0.$$

Cela implique

$$4\delta ab \leq 4\delta^2 a^2 + b^2,$$

par conséquent,

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta},$$

Cela achève la démonstration. □

Lemme 1.5. *[29] Pour tous a, $b \geq 0$, l'inégalité suivante est toujours satisfait*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

où, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

Lemme 1.6. *[31] (**Inégalité de Young**).*
On suppose $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Alors $(f * g) \in L^r(\mathbb{R})$ et

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Théorème 1.7. *[31](**Inégalité de Hölder**).*
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Théorème 1.8. *(**Inégalité de Hölder généralisée**).*
Soient $f_1, f_2, ...f_k$ des fonctions telles que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}...\|f_k\|_{p_k}.$$

Lemme 1.7. *[29] (**Inégalité de Minkowski**).*
Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Lemme 1.8. *[29] Soient $1 \leq p \leq r \leq p'$, tel que $\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{p'}$, et $1 \leq a \leq 1$. Alors*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|^a_{L^p}\|u\|^{1-a}_{L^{p'}}.$$

Lemme 1.9. *[29] Si $\mu(\Omega) < \infty$, $1 \leq p \leq p' \leq \infty$, alors $L^{p'} \hookrightarrow L^p$, et*

$$\|u\|_{L^p} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}\|u\|_{L^{p'}}.$$

Lemme 1.10. (***Inégalité de Poincaré***)
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Soit p un réel supérieur ou égal à 1. Alors il existe une constante positive C telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proposition 1.9. *[29](**Formule de Green**).*
Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u à Γ dirigée vers l'extérieur.

1.4 Rappel sur les Opérateurs

Définition 1.9. *Une application $T : H \longrightarrow H$, où H est un espace de Hilbert, est dit opérateur linéaire si et seulement si T satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *Additivité :*
$$T(x+y) = Tx + Ty \quad \forall x, y \in H;$$
2. *Homogénité :*
$$T(\lambda x) = \lambda.Tx \quad \forall x \in H, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.10. *L'opérateur T définit sur un espace de Hilbert est dit borné s'il existe un $C > 0$ tel que*

$$\|Tx\|_H \leq C\|x\|_H \quad \forall x \in H.$$

Théorème 1.9. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ la norme de T est donnée par :*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\{\|Tx\|_H, x \in H, \|x\|_H = 1\}.$$

1.4.1 L'ensemble résolvant et la résolvante

Définition 1.11. *[25] On appelle ensemble résolvant de T l'ensemble de points réguliers de l'opérateur T et note par $\rho(T)$ tel que*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : D(A) \subset H \longrightarrow H, \ inversible\},$$

Définition 1.12. *[25] L'application*

$$R(.,T) : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

$$R(\lambda, T) = \lambda I - T$$

s'appelle la résolvante de A.

Théorème 1.10. *[25] Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, l'ensemble $\rho(T)$ est un ouvert non vide.*

1.4.2 Opérateur fermé

Définition 1.13. *On dit que l'opérateur A est fermé si toute suite x_n d'éléments de $D(A)$ converge vers x telle que la suite Ax_n soit convergente vers y alors, on a*

$$x \in D(A) \ \ et \ \ y = Ax.$$

1.4.3 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 1.14. *[25] Un opérateur linéaire non borné dans H est un couple $(A, D(A))$ où $D(A)$ un sous-espace vectoriel de H et A est une application linéaire de $D(A)$ dans H. Le sous-espace $D(A)$ est le domaine de A*

Définition 1.15. *[25] Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H est m-dissipatif si :*

$$(Av, v) \leq 0, \qquad \forall v \in D(A),$$

1. *A est dissipatif.*
2. $\mathrm{Im}(I - A) = H$ *i.e.*

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A) \quad \textit{tel que} \quad u - Au = f.$$

1.5 Semi-groupe fortement continue

Définition 1.16. *[16] Une famille $T(t)(0 \leq t < \infty)$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continue (un C_0-semi-groupe) si*

1. *$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \qquad \forall t_1, t_2 \geq 0$,*
2. *$T(0) = I$,*
3. *Pour chaque $x \in X, T(.)x$ est continue en t sur $[0, \infty)$.*

Définition 1.17. *[24] Le générateur infinitésimal de $T(t)$ est l'opérateur linéaire A de domaine*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\},$$

défini par

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \qquad \textit{pour } x \in D(A).$$

Proposition 1.10. *[13] Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \textit{pour} \quad 1 \leq t < \infty. \tag{1.3}$$

Théorème 1.11. *[13] Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur l'espace de Banach X et soit $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ les constantes qui vérifient*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \textit{pour} \quad t \geq 0.$$

pour le générateur $(A, D(A))$ de $(T(t))_{t \geq 0}$ les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\mathrm{R}(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds, \tag{1.4}$$

existe pour tout $x \in X$, *alors* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda)$.

2. *Si* $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, *alors* $\lambda \in \rho(A)$, *et le résolvant* $\mathrm{R}(\lambda, A)$ *est donné par l'expression l'intégrale* (1.4).

3. $\|\mathrm{R}(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}$ *pour tout* $\mathrm{Re}\lambda > \omega$.

1.5.1 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.18. *[6] On dit qu'une forme bilinéaire*

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

est :

1. *Continue, s'il existe une constante* C *telle que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \qquad \forall u, v \in H,$$

2. *coercive s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 1.12. (***Lax-Milgram***) *[6]*
Soit H *un espace de Hilbert,* $a(.,.)$ *une forme bilinéaire, continue et coercive sur* H *et* $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme linéaire continue.*
Alors, il existe $u \in H$ *unique solution de problème*

$$a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in H,$$

de plus si a *est symétrique* u *définie par*

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \right\}.$$

1.5.2 Théorème de Hille-Yosida

Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe. D'après le théorème 1.11 il s'ensuite qu'il existe des constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour $t \geq 0$.

Définition 1.19. *[24] Si* $\omega = 0$, $T(t)$ *est dit uniformément borné et si de plus* $M = 1$ *il est appelé* C_0*-semi-groupe de contractions.*

Théorème 1.13. (***Hille-Yosida***)*[24]*
Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $T(t)$, $t \geq 0$ si et seulement si :

1. *A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.*
2. *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$,*

$$\|\mathrm{R}(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Remarque 1.3. *[24] Soit A le générateur infitésimal d'un semi-groupe de contraction $T(t)$. L'ensemble résolvant de A contient toujours le demi-plan ouvert droit, i.e,$\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ et pour λ*

$$\|\mathrm{R}(\lambda : \lambda)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}.$$

Théorème 1.14. (***Lumer-phillips***)*[12]*
Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire et $D(A)$ dense dans H. Alors, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions si et seulement si :

1. *A est dissipatif.*
2. *Il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = H$. ($A$ est maximal).*

1.6 Résolution d'un problème d'évolution

Etant donné, le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \qquad \text{sur } \Omega \times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.5}$$

Théorème 1.15. (***Hille-Yosida***) *[6]*
Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction unique

$$u \in C^1\left([0, +\infty[; H\right) \cap C\left([0, +\infty[; D(A)\right)$$

solution du (1.5).
De plus on a

$$\begin{cases} \left|\dfrac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0. \\ |u(t)| \leq |u_0| \end{cases}$$

Remarque 1.4. *[6] L'intérêt principal du théorème* 1.15 *réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution* (1.5) *on se ramené à vérifier que A est maximal monotone, c'est-à-dire, à étudier l'équation stationnaire $u + \lambda Au = f$.*

Chapitre 2

Quelques problèmes des ondes avec terme retard

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux cas de ce type des problèmes, le premier cas est un problème des ondes avec terme retard dans le domaine d'étude, le deuxième cas est un problème des ondes avec un terme retard sur les bords du domaine.

2.1 Équation des ondes localement amorti avec terme retard

On considère le problème à retard suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a\chi_\omega u_t(x,t) + k u_t(x,t-\tau) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ u_t(x,t) = f_0(x,t), & \text{dans } \Omega \times (-\tau, 0), \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\tau > 0$ représente le temps de retard, a et k sont des constantes positives.
De plus, χ_ω est la fonction caractéristique de ω, définie par

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour} \quad x \in \omega, \\ 0, & \text{pour} \quad x \notin \omega. \end{cases}$$

Remarque 2.1. *Si on pose $v = u_t$, le problème* (2.1) *devient*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = v(x,t), & \\ v_t(x,t) = \Delta u(x,t) - a\chi_\omega v(x,t) - kv(x,t-\tau), & \textit{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \textit{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = u_1(x), & \textit{dans } \Omega, \\ v(x,t) = f_0(x,t), & \textit{dans } \Omega \times (-\tau, 0), \end{cases}$$

qui peut être écrire alors,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = BU(t) + \Phi U^t(-\tau), \quad t \geq 0, \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \\ U^t(-\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_0(.,t-\tau) \end{pmatrix}, \quad t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{2.2}$$

avec $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -a\chi_\omega \end{pmatrix}$ *et* $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$.

2.1.1 Écriture du problème équivalent

Nous introduisons la nouvelle variable suivante

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t-\tau\rho), \quad x \in \Omega,\ \rho \in (0,1),\ t > 0.$$

Par conséquent, on a

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_p(x,\rho,t) = 0, \qquad x \in \Omega,\ \rho \in (0,1),\ t > 0.$$

Alors, le problème (2.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + a\chi_\omega u_t(x,t) + kz(x,1,t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_p(x,\rho,t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), & \text{dans } \Omega \times (0,1), \end{cases} \tag{2.3}$$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert, où

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times (0,1)) \\ &:= X \times L^2(\Omega \times (0,1)) \end{aligned}$$

muni du produit scalaire suivant

$$\left\langle U,\overline{U}\right\rangle_{\mathcal{H}} := \int_{\Omega}(\nabla u(x)\nabla \overline{u}(x)+v(x)\overline{v}(x))dx+\xi\tau\int_{\Omega}\int_{1}^{0}z(x,\rho)\overline{z}(x,\rho)d\rho dx,$$

avec $U=(u,v,z)^T$, $\overline{U}=(\overline{u},\overline{v},\overline{z})^T\in\mathcal{H}$ et ξ est un nombre positif fixe.
Pour $U=(u,u_t,z)^T$, avec $v=u_t$ le problème (2.3) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} U_t = AU, \\ U(0)=U_0=(u_0,u_1,f_0(.,-.\tau))^T, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $A:D(A)\subset\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ est un opérateur différentiel défini par

$$A\begin{pmatrix} u\\ v\\ z\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v\\ \Delta u - a\chi_\omega v + kz(.,1)\\ -\dfrac{1}{\tau}z_\rho\end{pmatrix},$$

avec le domaine

$$D(A):=\left\{\ (u,v,z)^T\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega\times H^1(0,1)) : v=z(.,0)\ dans\ \Omega\ \right\}.$$

2.1.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associés à ce problème, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.1. *Pour toute donnée initiale $U_0\in\mathcal{H}$. il existe une solution unique*

$$U\in C(\mathbb{R}^+,\mathcal{H})$$

du problème (2.4)*. De plus, si $U_0\in D(A)$, la solution de* (2.4) *satisfait*

$$U\in C(\mathbb{R}^+,D(A))\cap C^1(\mathbb{R}^+,\mathcal{H}).$$

Preuve. Pour montrer l'existence d'une solution du système (2.4) il suffit de montrer que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe de contraction, c'est-à-dire A est maximal dissipatif, pour cela il suffit de montrer que $A-cI$ est dissipatif et maximal.
1) $A-cI$ dissipatif
Pour montrer que $A-cI$ est dissipatif il suffit de prouver qu'il existe $c>0$ telle que

$$\langle (A-cI)U,U\rangle_{\mathcal{H}}\leq 0,\quad \forall U\in D(A). \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega (\nabla v(x)\nabla u(x) + \Delta u(x)v(x))dx - a\int_\Omega v^2(x)dx \\ &\quad -k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx - \xi\int_0^1\int_\Omega z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)dxd\rho,\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -a\int_\Omega v^2(x)dx - k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx \\ &\quad -\xi\int_0^1\int_\Omega z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)dxd\rho,\end{aligned} \tag{2.6}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_0^1 z_\rho(x,\rho)z(x,\rho)d\rho dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}z^2(x,\rho)d\rho dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{z^2(x,1) - z^2(x,0)\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega z^2(x,1)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega v^2(x)dx.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Donc, d'après (2.6) et (2.7), on trouve

$$\begin{aligned}\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -a\int_\Omega v^2(x)dx - k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx \\ &\quad -\frac{\xi}{2}\int_\Omega z^2(x,1)dx + \frac{\xi}{2}\int_\Omega v^2(x)dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}-k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx &\leq k\int_\Omega |z(x,1)v(x)|dx \\ &\leq k\varepsilon\int_\Omega z^2(x,1)dx + \frac{k}{4\varepsilon}\int_\Omega v^2(x)dx\end{aligned}$$

pour $\varepsilon = \dfrac{\xi}{2k}$

$$-k\int_\Omega z(x,1)v(x)dx \leq \frac{\xi}{2}\int_\Omega z^2(x,1)dx + \frac{k^2}{2\xi}\int_\Omega v^2(x)dx$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &\leq -a\int_\Omega v^2(x)dx + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{k^2}{2\xi}\right)\int_\Omega v^2(x)dx \\ &\leq \left(\frac{\xi}{2} + \frac{k^2}{2\xi}\right)\int_\Omega v^2(x)dx.\end{aligned}$$

Donc, il existe $c > 0$ tel que

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq c\|v\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq c\|U\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Alors, l'estimation (2.5) est résulte. Donc l'opérateur $A - cI$ est dissipatif.
2) $A - cI$ maximal
Pour montrer la maximalité de $A - cI$, il suffit de montrer que $\lambda I - A$ est surjectif pour chaque $\lambda > 0$, nous supposons que $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$ et on cherche $U = (u, v, z)^T \in D(A)$ solution de $(\lambda I - A)U = F$ ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$\lambda u - v = f_1, \tag{2.8}$$

$$\lambda v - \Delta u - a\chi_\omega v + kz(., 1) = f_2, \tag{2.9}$$

$$\lambda \tau z + z_\rho = \tau f_3. \tag{2.10}$$

Supposons que nous voulons trouvé avec régularité appropriée. Alors, de (2.8), on a

$$v = \lambda u - f_1. \tag{2.11}$$

De plus, de $(2.3)_4$, (2.10) et (2.11), z est donnée par

$$z(x, \rho) = \lambda u(x)e^{-\lambda\rho\tau} - f_1(x)e^{-\lambda\rho\tau} + \tau e^{-\lambda\rho\tau}\int_0^\rho f_3(x, s)e^{\lambda s\tau}ds, \quad \Omega \times (0, 1) \tag{2.12}$$

En particulier,

$$z(x, 1) = \lambda u(x)e^{-\lambda\tau} + z_0(x), \quad pour \quad x \in \Omega, \tag{2.13}$$

avec $z_0 \in L^2(\Omega)$ défini par

$$z_0(x) = -f_1(x)e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau}\int_0^1 f_3(x, s)e^{\lambda s\tau}ds, \quad x \in \Omega.$$

Substituons (2.11) et (2.13) dans (2.9), on obtient

$$\lambda^2 u - \Delta u + a\lambda\chi_w u + k\lambda u e^{-\lambda\tau} = f_2 + (\lambda + a\chi_\omega)f_1 - kz_0(x), \quad pour \quad x \in \Omega$$

Il reste à prouver qu'il existe u satisfait

$$(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau})u - \Delta u + a\lambda\chi_w u = g \in L^2(\Omega) \tag{2.14}$$

On définit l'espace $W = H^1_0(\Omega)$.

En multipliant l'équation (2.14) par une fonction $w \in W$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}) \int_\Omega uwdx + \int_\Omega \nabla u \nabla wdx + a\lambda \int_\Omega uwdx = \int_\Omega gwdx. \tag{2.15}$$

Pour u et w, on définit sur W une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une forme linéaire $L(.)$ par

$$a(u,w) = (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}) \int_\Omega uwdx + \int_\Omega \nabla u \nabla wdx + a\lambda \int_\Omega uwdx$$

$$L(w) = \int_\Omega gwdx.$$

On montre que $a(.,.)$ est continue, coercive et $L(.)$ est continue.
1) La continuité de a(.,.)
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|a(u,w)| &\leq (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau} + a\lambda) \|u\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau} + a\lambda, 1) \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C_1 \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C_1 \|u\|_W \|w\|_W .
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.
2) La coercivité de $a(.,.)$
D'après l'expression de $a(.,.)$, on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}) \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \nabla u^2 dx + a\lambda \int_\Omega u^2 dx \\
&\geq (\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}) \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \nabla u^2 dx \\
&\geq \min(\lambda^2 + k\lambda e^{-\lambda\tau}, 1) \int_\Omega \left(u^2 + \nabla u^2 \right) dx \\
&\geq C_2 \|u\|_W^2 .
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive.
3) La continuité de L(.)
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
|L(w)| &\leq \int_\Omega |g| \, |w| \, dx \\
&\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_3 \|w\|_W .
\end{aligned}$$

Donc $L(.)$est continue.
$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W et $L(.)$ est linéaire et continue sur W, d'après le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $u \in W = H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(u,w) = L(w), \quad \forall w \in W.$$

Ce qui signifie que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $v = \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$.
Il reste à montrer que $u \in H^2(\Omega),\ z \in L^2(\Omega; H^1(0,1))$ et $z(x,0) = v(x)$,
D'après (2.9), on a

$$\Delta u = -f_2 + \lambda v + a\chi_\omega v + kz(.,t) \in L^2(\Omega),$$

car $f_2, v, z(.,1) \in L^2(\Omega)$. Donc

$$u \in H^2(\Omega).$$

Finalement, à partir de (2.12) et (2.10), on obtient

$$z(x,0) = v(x) \quad et \quad z \in L^2(\Omega; H^1(0,1)).$$

Donc il existe $U = (u,v,z)^T \in D(A)$ qui vérifie $(\lambda I - A)U = F$ pour $\lambda > 0$ et $F \in \mathcal{H}$ C'est-à-dire $\lambda I - A$ est surjectif, pour tout $\lambda I - (A - cI)$ est surjectif, donc $A - cI$ est maximal.
Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (2.4).
Ceci terminé la démonstration. □

2.2 Équation des ondes avec terme retard sur les bords

Nous étudions la condition nécessaire et suffisante pour obtenu une solution unique pour un problème des ondes avec terme retard sur les bords.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert borné du frontière Γ de classe C^2. Nous supposons que Γ est divisé en deux parties Γ_D et Γ_N, c'est-à-dire, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N = \emptyset$ et $\Gamma_D \neq \emptyset$.
On considère le problème à retard suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\mu_1 u_t(x,t) - \mu_2 u_t(x,t-\tau), & \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & \text{dans} \quad \Gamma_N \times (0,1), \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\nu(x)$ désigne le vecteur normal de l'unité vers l'extérieure au point $x \in \Gamma$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normal. De plus, $\tau > 0$ représente le temps de retard, μ_1 et μ_2 sont des constantes positives.

2.2.1 Écriture du problème équivalent

De la même façon que le problème précédent, nous introduisons la nouvelle variable

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t-\tau\rho), \quad x \in \Gamma_N,\ \rho \in (0,1),\ t > 0.$$

Donc, on a

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_p(x,\rho,t) = 0, \qquad x \in \Gamma_N,\ \rho \in (0,1),\ t > 0.$$

Alors, le problème (2.16) est équivalent à :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0,+\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_p(x,\rho,t) = 0, & \text{dans} \quad \Gamma_N \times (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\mu_1 u_t(x,t) - \mu_2 z(x,1,t), & \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ z(x,0,t) = u_t(x,t), & \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans} \quad \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,-\rho\tau), & \text{dans} \quad \Gamma_N \times (0,1), \end{cases} \tag{2.17}$$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert, où

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_N \times (0,1)) \\ &:= X \times L^2(\Gamma_N \times (0,1)) \end{aligned}$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.17), nous considérons que

$$\mu_2 \leq \mu_1 \tag{2.18}$$

et ξ une constante positive tel que

$$\tau\mu_2 \leq \xi \leq \tau(2\mu_1 - \mu_2) \tag{2.19}$$

Définissons sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ le produit scalaire

$$\left\langle U, \overline{U} \right\rangle_{\mathcal{H}} := \int_\Omega (\nabla u(x) \nabla \overline{u}(x) + v(x)\overline{v}(x))dx + \xi \int_{\Gamma_N} \int_1^0 z(x,\rho)\overline{z}(x,\rho) d\rho d\Gamma,$$

avec $U = (u,v,z)^T$, $\overline{U} = (\overline{u}, \overline{v}, \overline{z})^T \in \mathcal{H}$ et ξ est un nombre positif fixe.

Pour $U = (u, u_t, z)^T$, avec $v = u_t$ le problème (2.17) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} U_t = AU, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, f_0(., -.\tau))^T, \end{cases} \tag{2.20}$$

où $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur différentiel défini par

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ -\dfrac{1}{\tau} z_\rho \end{pmatrix},$$

avec le domaine

$$D(A) := \left\{ \begin{array}{l} (u, v, z)^T \in (E(\Delta, L^2(\Omega)) \cap H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) \times H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma_N; H^1(0,1)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\mu_1 \nu - \mu_2 z(.,1) \ sur \ \Gamma_N, \ v = z(.,0) \ sur \ \Gamma_N \end{array} \right\}.$$

où

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0, \ dans \ \Gamma_D \right\}$$

et

$$E(\Delta, L^2(\Omega)) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Rappelons que pour une fonction $u \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ et la formule de Green suivante est valable

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = -\int_\Omega \Delta u w dx + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w \right\rangle \Gamma_N \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \tag{2.21}$$

où $\langle ., . \rangle_{\Gamma_N}$ est le crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$.
Notez en outre que pour $(u, v, z)^T \in D(A)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ appartient à $L^2(\Omega)$ puisque $z(., 1)$ est dans $L^2(\Omega)$.

2.2.2 Étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent

Sous les hypothèses associés à ce problème, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.2. *Pour toute donnée initiale* $U_0 \in \mathcal{H}$. *le problème* (2.20) *admet une solution unique*

$$U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$$

De plus, si $U_0 \in D(A)$, *la solution de* (2.20) *satisfait*

$$U \in C(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}).$$

Preuve. Pour montrer l'existence d'une solution du système (2.20) on applique le théorème de Lumer-Phillips, pour cela il suffit de montrer que A est dissipatif et maximal.

1) A dissipatif

Pour montrer que A est dissipatif il suffit de prouver que

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall U \in D(A).$$

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} (\nabla v(x) \nabla u(x) + \Delta u(x) v(x)) dx - \frac{\xi}{\tau} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_\rho(x,\rho) z(x,\rho) d\rho d\Gamma.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x) d\Gamma - \frac{\xi}{\tau} \int_{\Gamma_N} \int_0^1 z_\rho(x,\rho) z(x,\rho) d\rho d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x) d\Gamma - \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) d\Gamma + \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} v^2(x) d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_N} \{\mu_1 v(x) + \mu_2 z(x,1)\} v(x) d\Gamma - \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) d\Gamma + \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} v^2(x) d\Gamma \\
&= (-\mu_1 + \frac{\xi}{2\tau}) \int_{\Gamma_N} v^2(x) d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z(x,1) v(x) d\Gamma - \frac{\xi}{2\tau} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) d\Gamma.
\end{aligned}$$

On a d'après l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
-\mu_2 \int_{\Gamma_N} z(x,1) v(x) d\Gamma &\leq \mu_2 \int_{\Gamma_N} |z(x,1) v(x)| d\Gamma \\
&\leq \varepsilon \mu_2 \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) d\Gamma + \frac{\mu_2}{4\varepsilon} \int_{\Gamma_N} v^2(x) d\Gamma.
\end{aligned}$$

on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$-\mu_2 \int_{\Gamma_N} z(x,1) v(x) d\Gamma \leq \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) d\Gamma + \frac{\mu_2}{2} \int_{\Gamma_N} v^2(x) d\Gamma,$$

donc

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq \left(\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_{\Gamma_N} z^2(x,1) d\Gamma + \left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau}\right) \int_{\Gamma_N} v^2(x) d\Gamma,$$

D'après, les conditions (2.18) et (2.19), on a

$$\frac{\mu_2}{2} - \frac{\xi}{2\tau} \leq 0 \quad et \quad -\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\xi}{2\tau} \leq 0,$$

alors,

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Donc A est dissipatif.

2) A maximal

Pour montrer la maximalité de A, nous supposons que $F = (f^1, f^2, f^3)^T \in \mathcal{H}$ et on cherche $U = (u, v, z)^T \in D(A)$ solution de $(I - A)U = F$, ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$u - v = f^1, \tag{2.22}$$

$$v - \Delta u = f^2, \tag{2.23}$$

$$\tau z + z_\rho = \tau f^3. \tag{2.24}$$

Supposons que nous voulons trouvé avec régularité appropriée. Alors, de (2.22), on a

$$v = u - f^1. \tag{2.25}$$

Aussi nous pouvons déterminer z. En effet, par $(2.17)_5$,

$$z(x, 0) = v(x) \quad \textit{pour} \quad x \in \Gamma_N \tag{2.26}$$

et, de (2.24), on a

$$\tau z(x, \rho) + z_\rho(x, \rho) = \tau f^3(x, \rho) \quad \textit{pour} \quad x \in \Gamma_N,\ \rho \in (0, 1). \tag{2.27}$$

Alors, d'après (2.26) et (2.27), on obtient

$$z(x, \rho) = v(x)e^{-\rho\tau} + \tau e^{-\rho\tau} \int_0^\rho f^3(x, s)e^{\tau s} ds.$$

Donc, à partir de (2.25),

$$z(x, \rho) = u(x)e^{-\rho\tau} - f^1(x)e^{-\rho\tau} + \tau e^{-\rho\tau} \int_0^\rho f^3(x, s)e^{\tau s} ds, \quad \Gamma_N \times (0, 1) \tag{2.28}$$

En particulier,

$$z(x, 1) = u(x)e^{-\tau} + z_0(x), \quad \textit{pour} \quad x \in \Gamma_N, \tag{2.29}$$

avec $z_0 \in L^2(\Gamma_N)$ défini par

$$z_0(x) = -f^1(x)e^{-\tau} + \tau e^{-\tau} \int_0^1 f^3(x, s)e^{\tau s} ds, \quad x \in \Gamma_N$$

Substituons (2.25) dans (2.23), on obtient

$$u - \Delta u = f^1 + f^2, \tag{2.30}$$

où $(f^1 + f^2) \in L^2(\Omega)$. On définit l'espace $W = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$.

En multipliant l'équation (2.30) par une fonction $w \in W$ et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega (u - \Delta u) w dx = \int_\Omega (f^1 + f^2) w dx. \tag{2.31}$$

D'après la formule de Green et en utilisant (2.25) et (2.29), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u-\Delta u)wdx &= \int_\Omega (uw+\nabla u\nabla w)dx - \int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}wd\Gamma \\
&= \int_\Omega (uw+\nabla u\nabla w)dx + \int_{\Gamma_N}(\mu_1 vw+\mu_2 z(x,1)w)\,d\Gamma \\
&= \int_\Omega (uw+\nabla u\nabla w)dx + \int_{\Gamma_N}\left\{\mu_1(u-f^1)w+\mu_2(ue^{-\tau}+z_0)w\right\}d\Gamma.
\end{aligned}$$

Donc, (2.31) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega uwdx+\int_\Omega \nabla u\nabla wdx+(\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\int_{\Gamma_N}uwd\Gamma=\int_\Omega (f^1+f^2)wdx \\
&+\mu_1\int_{\Gamma_N}f^1wd\Gamma-\mu_2\int_{\Gamma_N}z_0wd\Gamma,\quad \forall w\in W.
\end{aligned}\tag{2.32}$$

Pour u et w, on définit sur W une forme bilinéaire $a(.,.)$ et une forme linéaire $L(.)$ par

$$\begin{aligned}
a(u,w) &= \int_\Omega uwdx+\int_\Omega \nabla u\nabla wdx+(\mu_1+\mu_2 e^{-\tau})\int_{\Gamma_N}uwd\Gamma \\
L(w) &= \int_\Omega (f^1+f^2)wdx+\mu_1\int_{\Gamma_N}f^1wd\Gamma-\mu_2\int_{\Gamma_N}z_0wd\Gamma.
\end{aligned}$$

On montre que $a(.,.)$ est continue, coercive et $L(.)$ est continue.

1) La continuité de a(.,.)

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|a(u,w)| &\leq (1+\mu_1+\mu_2e^{-\tau})\|u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max(1+\mu_1+\mu_2e^{-\tau},1)\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C_1'\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right)\left(\|w\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq C_1'\|u\|_W\|w\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est continue.

2) La coercivité de $a(.,.)$

D'après l'expression de $a(.,.)$, on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega u^2dx+\int_\Omega \nabla u^2dx+(\mu_1+\mu_2e^{-\tau})\int_{\Gamma_N}u^2d\Gamma \\
&\geq \int_\Omega (u^2+\nabla u^2)dx \\
&\geq \|u\|_W.
\end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est Coercive.
3) La continuité de L(.)
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}|L(w)| &\leq \int_{\Omega} |f^1||w|dx + \int_{\Omega} |f^2||w|dx + \mu_1 \int_{\Gamma_N} |f^1||w|d\Gamma + \mu_2 \int_{\Gamma_N} |z_0||w|d\Gamma \\ &\leq \|f^2\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + (1+\mu_1) \|f^1\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \mu_2 \|z_0\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max(\|f^2\|_{L^2(\Omega)}, (1+\mu_1) \|f^1\|_{L^2(\Omega)}, \mu_2 \|z_0\|_{L^2(\Omega)}) \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_3' \|w\|_W .\end{aligned}$$

Donc $L(.)$est continue.
$a(.,.)$ bilinéaire, continue et coercive sur W et $L(.)$ est linéaire et continue sur W, d'après le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $u \in W = H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ telle que

$$a(u,w) = L(w), \quad \forall w \in W.$$

Ce qui signifie que $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ et $v = u - f^1 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ *donc* $u, v \in H^1(\Omega)$.
Il reste à montrer que $u \in E(\Delta, L^2(\Omega))$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\mu_1 v - \mu_2 z(.,1)$, $z \in L^2(\Gamma_N; H^1_0(0,1))$ et $z(x,0) = v(x)$,
D'après (2.30), on a

$$\Delta u = u - f^1 - f^2 \in L^2(\Omega),$$

car $f^2 \in L^2(\Omega)$ *et* $u, f^1 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. Donc

$$u \in E(\Delta, L^2(\Omega)).$$

En substituant la formule de Green (2.21) dans (2.32) et en utilisant (2.30), on obtient

$$\int_{\Gamma_N} (\mu_1 + \mu_2 e^{-\tau}) uw d\Gamma + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, w \right\rangle \Gamma_N = \mu_1 \int_{\Gamma_N} f^1 w d\Gamma - \mu_2 \int_{\Gamma_N} z_0 w d\Gamma,$$

par conséquent

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + (\mu_1 + \mu_2 e^{-\tau}) u = \mu_1 f^1 - \mu_2 z_0 \quad sur \quad \Gamma_N \tag{2.33}$$

Substituons (2.25) et (2.29) dans (2.33), on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\mu_1 v - \mu_2 z(.,1) \quad sur \quad \Gamma_N$$

Finalement, à partir de (2.28) et (2.24) , on obtient

$$z(x,0) = v(x) \quad et \quad z \in L^2(\Gamma_N; H^1(0,1)).$$

Donc il existe $U = (u, v, z)^T \in D(A)$ qui vérifie $(I - A)U = F$ pour tout $F \in \mathcal{H}$, et A est maximal.
Le théorème de Hille-Yosida assure l'existence et l'unicité d'une solution de (2.20).
Ceci terminé la démonstration. $\square$

Chapitre 3

Existence globale et stabilité de la solution d'un système de Bresse avec terme de retard de distribution.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence globale et stabilité de la solution d'un système de Bresse avec terme de retard de distribution.

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + \mu_0\varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)\varphi_t(x, t-s)ds = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{tx} = 0, \\ \alpha q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+$ avec les conditions de Dirichlet :

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = w(0, t) = w(1, t) = \theta(0, t) = 0, \quad t > 0 \tag{3.2}$$

et les conditions au bord et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad x \in (0, 1) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x) \qquad \text{dans}(0, \infty) \\ \varphi_t(x, -t) = f_0(x, t) \qquad \text{dans } (0, 1) \times (0, \tau_2) \\ \varphi(0, t) = \psi_x(0, t) = w_x(0, t) = \theta(0, t) = 0, \qquad \forall t \geq 0 \\ \varphi_x(1, t) = \psi(1, t) = w(1, t) = q(1, t) = 0, \qquad \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

τ_1 et τ_2 sont deux nombres réels avec $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, $\mu_0 > 0$ est une constante positive et $\mu : [\tau_1, \tau_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^∞, $\mu \geq 0$ presque partout et les données initiales $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, f_0, \theta_0, q_0)$ appartiennent à un espace de Sobolev. Nous prouvons l'existence et l'unicité et la stabilité exponentielle en fonction des paramètres suivants

$$\eta = \left(1 - \frac{\alpha k \rho_3}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) - \frac{\gamma^2 \alpha}{b} \quad \text{et } k = k_0 \tag{3.4}$$

sous les hypothèses

$$\mu_0 \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu((s))| ds. \tag{3.5}$$

Le système de Bresse original est donné par les équations suivantes (Voir [5]) :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = Q_x + lN + F_1 \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - Q + F_2 \\ \rho_1 w_{tt} = N_x - lQ + F_3 \end{cases} \tag{3.6}$$

où F_i sont les forces extérieures et N, Q et M désignent la force axiale, la force de cisaillement et le moment de flexion, respectivement. Ces forces sont les relations contrainte déformation pour le comportement élastique et elles sont données par :

$$\begin{aligned} &N = k_0(w_x - l\varphi) \\ &Q = k(\varphi_x + lw + \psi) \\ &M = b\psi_x \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ici $\rho_1 = \rho A = \rho I$, $k_0 = EA$, $k = k'GA$ et $l = R^{-1}$. où ρ est la densité du matériau, E est le module d'élasticité, G est le module de cisaillement, k est le facteur de cisaillement, A est la surface en coupe transversale, I est le second moment de la section transversale et R est le rayon de courbure. Les fonctions φ, ψ et w désignent, respectivement, le déplacement transversal, l'angle de rotation d'un filament et le déplacement longitudinal de la poutre.
Le système (3.6) est un système non amorti et son énergie associée reste constante lorsque le temps t évolue. Pour stabiliser le système (3.6), plusieurs conditions d'amortissement été démontrées par différents auteurs . (voir [1], [2], [3], [4], [10], [17], [28]). En considérant les conditions d'amortissement dans des mémoires infinies agissant dans les trois équations, le système (3.6) a été récemment étudié dans [10]

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + lw + \psi)_x - Ehl(w_x - l\varphi) + \int_0^\infty g_1(s)\varphi_{xx}(t-s)ds = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - El\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + lw + \psi) + \int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(t-s)ds = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - Eh(w_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + lw + \psi) + \int_0^\infty g_3(s) w_{xx}(t-s)ds = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

où $(x,t) \in]0, L[\times \mathbb{R}_+$, $g_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2, 3$ sont donnés des fonctions. Les auteurs ont prouvé, dans des conditions appropriées sur les données initiales

et les mémoires g_i, que le système est bien posé et que son énergie converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini et ils établissent un lien entre le taux de décroissance de l'énergie et la croissance de g_i à l'infini. La preuve est basée sur la théorie des semi-groupes pour le bien posé, la méthode de l'énergie et l'approche introduite dans [9], pour la stabilité.
Dans [2], les auteurs ont considéré le système de Bresse dans un domaine borné avec retard dans les retours internes.

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - Gh(\varphi_x + lw + \psi)_x - Ehl(w_x - l\varphi) + \mu_1\varphi_t + \mu_2\varphi_t(x, t-\tau_1) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - El\psi_{xx} + Gh(\varphi_x + lw + \psi) + \tilde{\mu}_1\psi_t + \tilde{\mu}_2\psi_t(x, t-\tau_2) = 0 \\ \rho_1 w_{tt} - Eh(w_x - l\varphi)_x + lGh(\varphi_x + lw + \psi) + \tilde{\tilde{\mu}}_1 w_t + \tilde{\tilde{\mu}}_2 w_t(x, t-\tau_3) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

où $(x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tau_i > 0$ $(i = 1,2,3)$ sont des retards temporels, $\mu_1, \mu_2, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\tilde{\mu}}_1, \tilde{\tilde{\mu}}_2$ sont des nombres réels positifs. Ce système est soumis aux conditions aux limites de Dirichlet et aux conditions initiales qui appartiennent à un espace de Sobolev approprié. Premièrement, l'auteur a prouvé l'existence globale de ses solutions dans les espaces de Sobolev l'explication de la théorie des semi-groupes, dans une condition entre le poids des termes de retard dans les rétroactions et le poids des termes sans délai. De plus, ils ont étudié le comportement asymptotique des solutions en utilisant la méthode du multiplicateur.
Le système de Bresse (3.6) est plus général que le système de Timoshenko bien connu, où le déplacement longitudinal ω n'est pas considéré $l = 0$. Il existe un certain nombre de publications concernant la stabilisation du système de Timoshenko avec différents types d'amortissement, à cet égard, nous notons les références suivantes (voir [14], [8], [18], [19], [20], [22], [23], [26], [30] et [32]).
Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous utilisons la méthode de semi-groupe pour prouver que le problème (3.1) − (3.3) et est bien posé. Dans la section 3, nous utilisons la méthode des multiplicateurs pour établir un résultat de stabilité exponentielle.

3.2 Existence et unicité

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.1) − (3.3) en utilisant la théorie des semi-groupes. Introduisons la nouvelle variable suivante [21]

$$z(x,\rho,t,s) = \varphi_t(x, t-\rho s), \quad x \in (0,1),\ \rho \in (0,1),\ s \in (\tau_1,\tau_2),\ t > 0. \tag{3.10}$$

Comme

$$z_t(x,\rho,t,s) = \frac{\partial\varphi_t(x,t-\rho s)}{\partial(t-\rho s)} \times \frac{\partial(t-\rho s)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_t(x,t-\rho s)}{\partial(t-\rho s)}$$

et

$$z_\rho(x,\rho,t,s) = \frac{\partial \varphi_t(x,t-\rho s)}{\partial(t-\rho s)} \times \frac{\partial(t-\rho s)}{\partial \rho} = -s\frac{\partial \varphi_t(x,t-\rho s)}{\partial(t-\rho s)}$$

Alors nous avons

$$sz_t(x,\rho,t,s) + z_p(x,\rho,t,s) = 0 \quad dans \quad (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty)\times(\tau_1,\tau_2) \tag{3.11}$$

Par conséquent, le problème (3.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + lw + \psi)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + \mu_0\varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)z(x,1,t,s)ds = 0, \\ sz_t(x,\rho,t,s) + z_p(x,\rho,t,s) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + lw + \psi) = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{tx} = 0, \\ \alpha q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

Avec les mêmes conditions aux bords et les conditions initiales :

$$\begin{cases} z(x,0,t,s) = \varphi_t(x,t) \quad sur \quad (0,1)\times(0,\infty)\times(\tau_1,\tau_2), \\ z(x,\rho,0,s) = f_0(x,\rho s) \quad sur \quad (0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2), \end{cases} \tag{3.13}$$

on note que

$$U = (\varphi, \varphi_t, z, \psi, \psi_t, w, w_t, \theta, q)^T,$$

alors

$$U' = (\varphi_t, \varphi_{tt}, z_t, \psi_t, \psi_{tt}, w_t, w_{tt}, \theta_t, q_t)^T.$$

Donc on peux réécrire le problème (3.12) et (3.13) sous la forme

$$\begin{cases} U'(t) + AU(t) = 0, \\ U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, f_0, \theta, q), \end{cases} \tag{3.14}$$

où l'opérateur A est défini par

$$A\begin{pmatrix}\varphi\\ u\\ z\\ \psi\\ v\\ w\\ \varpi\\ \theta\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u\\ -\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+lw+\psi)_x-\dfrac{k_0l}{\rho_1}(w_x-l\varphi)+\dfrac{\mu_0}{\rho_1}\varphi_t+\dfrac{1}{\rho_1}\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z(x,1,t,s)ds\\ \left(\dfrac{1}{s}\right)z_p\\ -v\\ -\dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}+\dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+lw+\psi)+\dfrac{\gamma}{\rho_2}\theta_x\\ \varpi\\ -\dfrac{k_0}{\rho_1}(w_x-l\varphi)_x+\dfrac{kl}{\rho_1}(\varphi_x+lw+\psi)\\ \dfrac{1}{\rho_3}q_x+\dfrac{\gamma}{\rho_3}\psi_{tx}\\ \dfrac{\beta}{\alpha}q+\dfrac{1}{\alpha}\theta_x\end{pmatrix}\tag{3.15}$$

On considère les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{aligned}H_*^1(0,1)&=\left\{h\in H^1(0,1):h(0)=0\right\},\\ \tilde{H}_*^1(0,1)&=\left\{h\in H^1(0,1):h(1)=0\right\},\\ H_*^2(0,1)&=H^2(0,1)\cap H_*^1(0,1),\\ \tilde{H}_*^2(0,1)&=H^2(0,1)\cap\tilde{H}_*^1(0,1),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\;=\;&H_*^1(0,1)\times L^2(0,1)\times\tilde{H}_*^1(0,1)\times L^2(0,1),\\ &\times\tilde{H}_*^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2(0,1),\\ &\times L^2((0,1),(\tau_1,\tau_2),H_0^1(0,1)).\end{aligned}$$

On montre que l'opérateur A engendre un C_0 semi-groupe dans $\mathcal{H}$. On définit le produit scalaire, pour

$$U=(\varphi,u,z,\psi,v,w,\varpi,\theta,q)^T,\quad\overline{U}=(\overline{\varphi},\overline{u},\overline{z},\overline{\psi},\overline{v},\overline{w},\overline{\varpi},\overline{\theta},\overline{q})^T$$

$$\begin{aligned}\left\langle U,\overline{U}\right\rangle_{\mathcal{H}}\;=\;&k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)(\overline{\varphi}_x+\overline{\psi}+l\overline{w})dx\\ &+k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)(\overline{w}_x-l\overline{\varphi})dx+\rho_1\int_0^1u\overline{u}dx\\ &+\rho_2\int_0^1v\overline{v}dx+\rho_1\int_0^1\varpi\overline{\varpi}dx+b\int_0^1\psi_x\overline{\psi_x}dx\\ &+\int_0^L\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\mu(s)\int_0^1z(x,\rho,s)\overline{z}(x,\rho,s)d\rho dsdx\\ &+\rho_3\int_0^1\theta\overline{\theta}dx+\alpha\int_0^1q\overline{q}dx.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Alors le domaine de l'opérateur A est donné par :

$$D(A)=\left\{\begin{array}{l} U\in\mathcal{H}/\varphi\in H_*^2(0,1);\psi,w\in\tilde{H}_*^2(0,1),u,\theta\in H_*^1(0,1),\\ v,\varpi,q\in\tilde{H}_*^1(0,1);z\in L^2\left((0,1),(\tau_1,\tau_2),H_0^1(0,1)\right),\\ u(x)=z(x,0,s)\ dans\ (0,1)\\ \varphi_x(1)=0,w_x(0)=\psi_x(0)=0 \end{array}\right\}. \tag{3.17}$$

On montre maintenant que A est un opérateur maximal monotone. On a besoin deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. *L'opérateur A monotone et satisfait, pour tout $U\in D(A)$.*

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= \mu_0\int_0^1 u^2dx+\beta\int_0^1 q^2dx+\int_0^1 u\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu\left(s\right)z\left(x,1,t,s\right)dsdx\\ &\quad+\int_0^L\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu\left(s\right)zz_\rho dsd\rho dx\end{aligned}\tag{3.18}$$

Preuve. Pour tout $U\in D(A)$, et en utilisant le produit scalaire et l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\langle AU,U\rangle_H &= k\int_0^1\left(-u_x-v-l\bar{w}\right)(\varphi_x+lw+\psi)\,dx+k_0\int_0^1\left(-\bar{w}_x+lu\right)(w_x-l\varphi)\,dx\\
&+\rho_1\int_0^1 u\left[-\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+lw+\psi)_x-\frac{k_0l}{\rho_1}(w_x-l\varphi)+\frac{\mu_0}{\rho_1}\varphi_t\right]dx\\
&+\rho_1\int_0^1 u\left[\frac{1}{\rho_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\,z(x,1,t,s)\,ds\right]dx\\
&+\rho_2\int_0^1 v\left[\frac{-b}{\rho_2}\psi_{xx}+\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+lw+\psi)+\frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x\right]dx\\
&+\rho_1\int_0^1 \bar{w}\left[-\frac{k_0}{\rho_1}(w_x-l\varphi)_x+\frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x+lw+\psi)\right]\\
&+b\int_0^1\psi_x(-v_x)\,dx+\int_0^L\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\int_0^1 zz_\rho\,d\rho\,ds\,dx\\
&+\rho_3\int_0^1\theta\left[\frac{1}{\rho_3}q_x+\frac{\gamma}{\rho_3}\psi_{tx}\right]dx+\alpha\int_0^1 q\left(\frac{\beta}{\alpha}q+\frac{1}{\alpha}\theta_x\right)dx\\
&= -k\int_0^1 u_x(\varphi_x+lw+\psi)\,dx-k\int_0^1 v(\varphi_x+lw+\psi)\,dx\\
&-kl\int_0^1\bar{w}(\varphi_x+lw+\psi)\,dx-k_0\int_0^1\bar{w}_x(w_x-l\varphi)\,dx\\
&+lk_0\int_0^1 u(w_x-l\varphi)\,dx-k\int_0^1 u(\varphi_x+lw+\psi)_x\,dx\\
&-k_0l\int_0^1 u(w_x-l\varphi)\,dx+\mu_0\int_0^1 u\varphi_t dx+\int_0^1 u\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\,z(x,1,t,s)\,ds\,dx\\
&-b\int_0^1 v\psi_{xx}dx+k\int_0^1 v(\varphi_x+lw+\psi)+\gamma\int_0^1 v\theta_x dx\\
&-k_0\int_0^1\bar{w}(w_x-l\varphi)_x\,dx+kl\int_0^1\bar{w}(\varphi_x+lw+\psi)\,dx\\
&-b\int_0^1\psi_xv_xdx+\int_0^L\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\,zz_\rho\,ds\,d\rho\,dx\\
&+\rho_3\int_0^1\theta q_xdx+\gamma\int_0^1\theta\psi_{tx}dx+\beta\int_0^1 q^2dx+\int_0^1 q\theta_xdx\\
&= \mu_0\int_0^1 u\varphi_t+\int_0^1 u\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\,z(x,1,t,s)\,ds\,dx+\beta\int_0^1 q^2dx\\
&+\int_0^L\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\,zz_\rho\,ds\,d\rho\,dx
\end{aligned}$$

$$= \mu_0 \int_0^1 u^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 u \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)\, z(x,1,t,s)\, ds dx$$
$$+ \int_0^L \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)\, z z_\rho ds d\rho dx$$

on obtient (3.18). □

Lemme 3.2. *L'opérateur $A + I$ est surjectif.*

Preuve. Soit $\mathfrak{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9)^T \in \mathcal{H}$, il existe $U \in D(A)$ vérifiant

$$U + \mathcal{A}U = \mathfrak{F}. \tag{3.19}$$

L'équation (3.19) est équivalente à

$$\begin{cases} -u + \varphi = f_1 \ \in H_*^1(0,1), \\ -k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1 u + \mu_0 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z(x,1,t,s) ds = \rho_1 f_2 \in L^2(0,1), \\ z + s^{-1} z_p = f_3 \in L^2((0,1), H^1(0,1)), \\ -v + \psi = f_4 \in \tilde{H}_*^1(0,1), \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) + \rho_2 v + \gamma\theta_x = \rho_2 f_5 \in L^2(0,1), \\ -\varpi + w = f_6 \in \tilde{H}_*^1(0,1), \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) + \rho_1 \varpi = \rho_1 f_7 \in L^2(0,1), \\ q_x + \gamma v_x + \rho_3 \theta = \rho_3 f_8 \in L^2(0,1), \\ (\beta + \alpha) q + \theta_x = \alpha f_9 \ \in L^2(0,1). \end{cases} \tag{3.20}$$

A partir de $(3.20)_9$, on trouve

$$\theta = \alpha \int_0^x f_9(y) dy - (\beta + \alpha) \int_0^x q(y) dy, \tag{3.21}$$

et $\theta(0,t) = 0$. On remplace $u = \varphi - f_1,\ v = \psi - f_4,\ \varpi = w - f_6$, et (3.21) dans $(3.20)_2$, $(3.20)_5$, $(3.20)_7$, et $(3.20)_8$, on trouve

$$\begin{cases} -k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1 \varphi + \mu_0 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z(x,1,t,s) ds = h_1 \in L^2(0,1), \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) + \rho_2 \psi - \gamma(\beta - \alpha) q = h_2 \in L^2(0,1), \\ -k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) + \rho_1 w = h_3 \in L^2(0,1), \\ q_x + (\beta + \alpha) \int_0^x q(y) dy - \gamma \psi_x = h_4 \in L^2(0,1), \\ z + s^{-1} z_p = h_5 \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{3.22}$$

où

$$\begin{cases} h_1 &= \rho_1(f_1 + f_2), \\ h_2 &= \rho_2(f_4 + f_5) - \alpha\gamma f_9, \\ h_3 &= \rho_1(f_6 + f_7), \\ h_4 &= -\gamma f_{4x} - \rho_3 \left(f_8 - \alpha \int_0^x f_9(y) dy \right), \\ h_5 &= z + s^{-1} z_p. \end{cases} \tag{3.23}$$

d'outre par, de (3.20) on peut trouver z tel que

$$z(x,0,s) = u(x) \quad pour \quad x \in (0,1),\ s \in (\tau_1,\tau_2), \tag{3.24}$$

de (3.20), on obtient

$$z(x,\rho,s) + s^{-1} z_p(x,\rho,s) = f_3(x,\rho,s) \quad sur \quad (0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2). \tag{3.25}$$

En utilisant (3.24) et (3.25) on obtient

$$z(x,\rho,s) = u(x)e^{-\rho s} + se^{-\rho s}\int_0^\rho f_3(x,\sigma,s)e^{\sigma s}d\sigma. \tag{3.26}$$

Alors, de (3.20) sur $(0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)$;

$$z(x,\rho,s) = \varphi(x)e^{-\rho s} - f_1 e^{-\rho s} + se^{-\rho s}\int_0^\rho f_3(x,\sigma,s)e^{\sigma s}d\sigma. \tag{3.27}$$

et, en particulier

$$z(x,1,s) = u(x)e^{-s} + z_0(x,s), \quad x \in [0,1],\ s \in (\tau_1,\tau_2)$$

avec

$$z_0 \in L^2((0,1)\times(\tau_1,\tau_2)$$

Défini par

$$z(x,\rho,s) = -f_1 e^{-\rho s} + se^{-\rho s}\int_0^\rho f_3(x,\sigma,s)e^{\sigma s}d\sigma, \quad x \in [0,1],\ s \in (\tau_1,\tau_2).$$

Pour résoudre (3.22) on considère

$$a\left((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})\right) = L(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q}); \tag{3.28}$$

où la forme bilinéaire

$$a : \left[H_*^1(0,1)\times\tilde{H}_*^1(0,1)\times\tilde{H}_*^1(0,1)\times L^2(0,1)\right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

définit par

$$\begin{aligned}
a\left((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})\right) \quad = \quad & k\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)\left(\tilde{\varphi}_x + l\tilde{w} + \tilde{\psi}\right)dx \\
& +(\beta+\alpha)\int_0^1 q\tilde{q}dx + b\int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx \\
& +\rho_2\int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx - \gamma(\beta+\alpha)\int_0^1 q\tilde{\psi}dx \\
& +\rho_1\int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx + \gamma(\beta+\alpha)\int_0^1 \psi\tilde{q}dx \\
& +\rho_1\int_0^1 w\tilde{w}dx + k_0\int_0^1 (w_x - l\varphi)(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})dx \\
& +\int_0^1 \mu_0\varphi\tilde{\varphi}dx + \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)e^{-s}dsdx \\
& +\rho_3(\beta+\alpha)\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\int_0^x \tilde{q}(y)dy\right)dx,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

et la forme linéaire

$$L : \left[H^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1)\right] \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie par

$$\begin{aligned} L(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{w}, \tilde{q}) &= \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx + \int_0^1 h_2 \tilde{\psi} dx + \int_0^1 h_3 \tilde{w} dx \\ &\quad +(\alpha+\beta) \int_0^1 h_4 \int_0^x \tilde{q}(y) dy dx \\ &\quad + \int_0^1 \tilde{\varphi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z_0(x,s) ds dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Posons

$$V = H^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1)$$

muni de la norme

$$\|(\varphi, \psi, w, q)\|_V^2 = \|(\varphi_x + \psi + lw)\|_2^2 + \|w_x - l\varphi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|q\|_2^2$$

comme

$$\int_0^1 \left(\varphi_x^2 + \psi_x^2 + w_x^2\right) dx \le c \int_0^1 \left((\varphi_x + \psi + lw)^2 + (w_x - l\varphi)^2 + \psi_x^2\right) dx, \tag{3.31}$$

Pour l assez petit, les formes a et L sont bornées. De plus, d'après l'expression de a, on a

$$\begin{aligned} a\left((\varphi, \psi, w, q), (\varphi, \psi, w, q)\right) &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi^2 dx + \rho_1 \int_0^1 w^2 dx \\ &\quad + (\rho_1 + \mu_0) \int_0^1 \varphi^2 dx + (\beta + \alpha) \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad + \rho_3 (\beta + \alpha)^2 \int_0^1 \left(\int_0^x q(y) dy\right)^2 \\ &\ge c \|(\varphi, \psi, w, q)\|_V^2. \end{aligned}$$

Ainsi $a(.,.)$ est continue et coercive et $L(.)$ est linéaire et continue. Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, le système (3.22) admet une solution unique

$$\varphi \in H^1_*(0,1), \quad \psi \in \tilde{H}^1_*(0,1), \quad w \in \tilde{H}^1_*(0,1), \quad q \in L^2(0,1).$$

En remplaçant φ dans $(3.20)_1$, ψ dans$(3.20)_3$ et w dans $(3.20)_5$, q dans $(3.20)_8$, on obtient

$$u \in H^1_*(0,1), \quad v \in \tilde{H}^1_*(0,1), \quad \varpi \in \tilde{H}^1_*(0,1), \quad \theta \in H^1_*(0,1).$$

Si

$$(\tilde{\psi}, \tilde{w}, \tilde{q}) \equiv (0,0,0) \in \tilde{H}^1_*(0,1) \times \tilde{H}^1_*(0,1) \times L^2(0,1),$$

alors (3.29) se réduit à

$$k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\tilde{\varphi}_x dx - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)\tilde{\varphi} dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi} dx = \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx, \quad (3.32)$$

Pour tout $\tilde{\varphi} \in H^1_*(0,1)$, ceci implique que

$$-k\varphi_{xx} = k\psi_x + l(k+k_0)w_x - (k_0 l^2 + \rho_1)\varphi + h_1 \in L^2(0,1). \quad (3.33)$$

Par conséquent, la théorie de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, résulte que

$$\varphi \in \tilde{H}^2_*(0,1).$$

Par ailleurs, (3.32) est vrai pour tout $\phi \in C^1([0,1]), \phi(0) = 0$ dans $H^1_\star(0,1)$. Par conséquent, pour tous $\phi \in C^1([0,1]), \phi(0) = 0$, on a

$$k\int_0^1 \varphi_x \phi_x dx - \int_0^1 \Big(k\psi_x + l(k+k_0)w_x - (k_0 l^2 + \rho_1)\varphi + h_1\Big)\phi dx = 0.$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$\varphi_x(1)\phi(1) = 0, \quad \forall \phi \in C^1([0,1]), \qquad \phi(0) = 0.$$

Par conséquent

$$\varphi_x(1) = 0.$$

De même, on obtient

$$\begin{cases} -b\psi_{xx} = -k\varphi_x - (k+\rho_2)\psi - lkw - \gamma(\beta+\alpha)\displaystyle\int_0^1 q\tilde{\varphi} dx + h_2 \in L^2(0,1) \\ -kw_{xx} = -l(k+k_0)\varphi_x - lk\psi + (\rho_1 + l^2 k_0)w + h_3 \in L^2(0,1) \\ -q_x = \gamma\psi_x - (\alpha+\beta)\rho_3 \displaystyle\int_0^x q(y)dy + h_4 \in L^2(0,1), \end{cases}$$

donc, on a

$$\psi, w \in \tilde{H}^2_*(0,1), \quad q \in \tilde{H}^1_*(0,1), \quad w_x(0) = \psi_x(0) = 0.$$

On applique le résultat de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'un unique $U \in D(A)$ tel que (3.19) est satisfaite. Par conséquent, l'opérateur A est maximale. □

Finalement, en utilisant le Lemme 3.1 et le Lemme 3.2, on conclut que A est un opérateur maximal monotone. Ainsi, par le théorème de Lumer-Phillips (voir [16] et [24]), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 3.1. *Soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe une solution unique $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du problème* (1.4)−(1.5). *De plus, si $U_0 \in D(A)$, alors $U \in C(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.*

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, on va étudier la stabilité exponentielle de la solution du système (3.1) et (3.3) et en utilisant la technique des multiplicateurs. On définie comme suit :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2+\rho_1 w_t^2+b\psi_x^2+\rho_3\theta^2+\alpha q^2\right]dx \\ &+\frac{1}{2}\int_0^1 \left[k(\varphi_x+\psi+lw)^2+k_0(w_x-l\varphi)^2\right]dx \\ &+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu_s(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx. \end{aligned} \tag{3.34}$$

On a besoin de plusieurs lemmes suivant :

Lemme 3.3. *Soit* $(\varphi,\psi,w,\theta,q,z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors, la fonctionnelle d'énergie* (3.34) *satisfait,*

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\mu_0\int_0^1\varphi_t^2dx-\beta\int_0^1 q^2dx-\int_0^1\varphi_t\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\,\varphi_t(x,t-s)\,ds \\ &-\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_s(s)|\,zz_\rho(x,\rho,s,t)\,dsd\rho dx \end{aligned} \tag{3.35}$$

Preuve. En multipliant les équations $(3.1)_1$,$(3.1)_2$,$(3.1)_3$,$(3.1)_4$ et $(3.1)_5$ par $\varphi_t,\psi_t,w_t,\theta,$ et q, respectivement et en intégrant sur $(0,1)$, en utilisant l'intégration par parties avec les conditions aux bords, on trouve (3.35). □

Lemme 3.4. *Soit* $(\varphi,\psi,w,\theta,q,z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors la fonctionnelle donner par*

$$F_1(t):=\alpha\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx \tag{3.36}$$

satisfait, pour toute $\varepsilon_1>0$, *l'estimation*

$$F_1'(t)\le-\frac{\rho_3}{2}\int_0^1\theta^2dx+\varepsilon_1\int_0^1\psi_t^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\int_0^1 q^2dx. \tag{3.37}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_1, en utilisant les équations quatrième et cinquième de (3.1) et en intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_3\int_0^1\theta^2dx+\alpha\gamma\int_0^1 q\psi_t dx+\alpha\int_0^1 q^2dx \\ &-\beta\rho_3\int_0^1\theta\int_0^x q(y)dydx. \end{aligned} \tag{3.38}$$

En utilisant alors l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\varepsilon_1>0$ dans (3.38) on obtient (3.37). □

Lemme 3.5. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors la fonctionnelle*

$$F_2(t) := -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(y)dydx \tag{3.39}$$

satisfait, pour toute $\varepsilon_2,\ \varepsilon_3 > 0$, *l'estimation*

$$\begin{aligned} F_2'(t) \quad &\leq \quad -\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ &\quad +\varepsilon_3 \int_0^1 \psi_x^2 dx + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3}\right)\int_0^1 \theta^2 dx + c\int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_2, puis en exploitant les équations deuxième et quatrième de (3.1), et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) \quad &= \quad -\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\psi_t dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx - \frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\psi_x dx \\ &\quad +\frac{k\rho_3}{\gamma}\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\int_0^x \theta(y)dydx. \end{aligned} \tag{3.41}$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve (3.40). □

Lemme 3.6. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors la fonctionnelle*

$$F_3(t) := \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\varphi + \int_0^x \psi(y)dy\right) dx \tag{3.42}$$

satisfait, pour toute $\varepsilon_4 > 0$, *l'estimation*

$$\begin{aligned} F_3'(t) \quad &\leq \quad -\frac{k}{2}\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx - \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{lk_0}{2}\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad +c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx + c\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)| z^2(x,1,s,t) ds dx \end{aligned} \tag{3.43}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_3, en utilisant que,

$$z(x,\rho,s,0) = f_0(x,\rho s) \quad \text{dans} \quad (0,1)\times(0,1)\times(0,\tau_2) \tag{3.44}$$

Et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F_3'(t) \quad &= \quad \rho_1\int_0^1 \varphi_t \int_0^x \psi_t(y)dydx - \int_0^1 \left(\varphi + \int_0^x \psi(y)dy\right)\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z(x,1,s,t) ds dx \\ &\quad -k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad -\mu_0 \int_0^1 \varphi_t \left(\varphi + \int_0^x \psi(y)dy\right) dx. \end{aligned} \tag{3.45}$$

En utilisant les inégalité de Young, Poincaré et Cauchy-Schwartz, pour estimer les termes de côté droite de (3.45).

$$\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi(y)dy \right) dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \tag{3.46}$$

où $\varepsilon_4 > 0$. □

Lemme 3.7. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors la fonctionnelle*

$$F_4(t) := \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx \tag{3.47}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} F_4'(t) \quad \leq \quad & -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx \\ & + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_4 et en utilisant la deuxième équation de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} F_4'(t) \quad = \quad & -b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) dx \\ & + \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx. \end{aligned} \tag{3.49}$$

En utilisant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, on obtient l'estimation (3.48). □

Lemme 3.8. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors la fonctionnelle*

$$F_5(t) := -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(w_x - l\varphi \right) dx - \rho_1 \int_0^1 w_t \left(\varphi_x + \psi + lw \right) dx \tag{3.50}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} F_5'(t) \quad \leq \quad & -lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - l\rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) ds \right) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_5 et en utilisant les équations première et troisième de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} F_5'(t) &= -lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - l\rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) ds \right) (w_x - l\varphi) dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve (3.51). □

Lemme 3.9. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3), *sous la condition* $k = k_0$. *Alors la fonctionnelle*

$$F_6(t) := -\rho_1 \int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t) \, dx \tag{3.52}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} F_6'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) ds \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_6, en utilisant les équations première et troisième de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} F_6'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx + c \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) dx + \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) ds \right) \varphi dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve (3.53) □

Lemme 3.10. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3) *et soit* (3.4) *vraie. Alors la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_7(t) &:= \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + lw) \, dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx \\ &\quad + \frac{b\rho_3}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \theta \varphi_t dx - \frac{b}{\gamma} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 q \, (\varphi_x + \psi + lw) \, dx \\ &\quad - \frac{bl^2 \rho_2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_t dx + \frac{bl\rho_1}{k_0} \int_0^1 w_t \psi dx \end{aligned} \tag{3.54}$$

satisfait,

$$\begin{aligned}
F_7'(t) &\leq -\frac{k}{2}\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)^2\,dx+\varepsilon_7\int_0^1 w_t^2dx+\frac{2b^2l^2}{k}\int_0^1\psi_x^2dx\\
&+\varepsilon_7'\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)\int_0^1\psi_t^2dx+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)\int_0^1 q^2dx\\
&+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7'}\right)\int_0^1\theta^2dx+\frac{b}{\gamma\tau}\int_0^1\theta_x\,(\varphi_x+\psi+lw)\,dx\\
&+\frac{b\rho_1}{2k}\int_0^1\psi_x^2dx\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)ds\right)dx+\frac{b\rho_1}{2k}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu(s)|z^2(x,1,s,t)dsdx\\
&+\frac{b\rho_3}{2\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)ds\right)\theta_t^2dx\\
&+\frac{b\rho_3}{2\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z^2(x,1,s,t)dsdx
\end{aligned}\tag{3.55}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_7, on obtient

$$\begin{aligned}
F_7'(t) &= \rho_2\int_0^1\psi_{tt}\,(\varphi_x+\psi+lw)\,dx+\rho_2\int_0^1\psi_t\,(\varphi_{xt}+\psi_t+lw_t)\,dx\\
&+\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1\varphi_{tt}\psi_xdx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1\psi_t\varphi_{xt}dx+\frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1\theta_t\varphi_tdx\\
&+\frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1\theta\varphi_{tt}dx-\frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q_t\,(\varphi_x+\psi+lw)\,dx\\
&-\frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 q_t\,(\varphi_{xt}+\psi_t+lw_t)\,dx-\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1\psi_t^2dx\\
&-\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1\psi_{tt}\psi dx+\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 w_{tt}\psi dx+\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 w_t\psi_tdx\\
&+\frac{b\rho_1}{2k}\int_0^1\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)ds\right)\psi_xdx\\
&+\frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)ds\right)\theta_tdx
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve (3.54). □

Lemme 3.11. *Soit* $(\varphi,\psi,w,\theta,q,z)$ *une solution du problème* (3.1), (3.3) *et* (3.11). *Alors la fonctionnelle*

$$F_8(t):=\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} se^{-s\rho}|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \tag{3.56}$$

satisfait, pour une constante positive n_1, nous avons l'estimation suivant

$$\begin{aligned} F_8'(t) &\leq -n_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \\ &\quad -n_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx + \mu_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Preuve. En calculant la dérivée de F_8, et en utilisant l'équation (3.11), on obtient

$$\begin{aligned} F_8'(t) &= -2\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho}|\mu(s)|z(x,\rho,s,t)z_\rho(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \\ &= -\frac{d}{d\rho}\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho}|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \\ &\quad -\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} se^{-s\rho}|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \\ &= -\int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\left[e^{-s}z^2(x,1,s,t) - z^2(x,0,s,t)\right]dsd\rho dx \\ &\quad -\int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} se^{-s\rho}|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx. \end{aligned} \tag{3.58}$$

En utilisant $z(x,0,s,t) = \varphi_t$ et $-e^{-s} \leq e^{-s\rho} \leq 1$, pour tout $0 < \rho < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} F_8'(t) &\leq -\int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s}|\mu(s)|z^2(x,1,s,t)dsd\rho dx + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|ds \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad -n_1 \int_0^1 \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Comme $-e^{-s}$ est une fonction croissante, nous avons $-e^{-s} \leq -e^{\tau_2}$, pour tout $s \in [\tau_1, \tau_2]$. En posant $n_1 = e^{-\tau_2}$ et en rappelant (3.5), on obtient (3.57). $\square$

Lemme 3.12. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *Alors la fonctionnelle*

$$F_9(t) := -\rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi) \int_0^x w_t(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx \tag{3.60}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} F_9'(t) &\leq -\left(\frac{\rho_1}{2} - c\mu_0\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 w_t^2 dx \\ &\quad +\left(1 + \varepsilon\mu_0 + \frac{1}{k}\right)\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + \frac{\rho_1}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad +\frac{1}{k}\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|ds \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|z^2(x,1,s,t)dsdx \end{aligned} \tag{3.61}$$

Preuve. En calculant la dérivée de de F_9, et en utilisant le première équation de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} F_9(t) &= -\rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_t \int_0^x w_t(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 (w_x - l\varphi) \left(\int_0^x w_t(y)dy \right)_t dx \\ &\quad -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dydx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y)dy \right)_t dx \end{aligned}$$

Maintenant, on prend les termes de coté droite de (3.60) en utilisant les inégalités de Young, de Poincaré et de Cauchy-Schwartz, avec $k = k_0$, on trouve (3.61). □

Théorème 3.2. *Soit* $(\varphi, \psi, w, \theta, q, z)$ *une solution du problème* (3.1) *et* (3.3). *On suppose que* $\xi = 0$ *et* $k = k_0$. *Alors, la fonctionnelle d'énergie* (3.34) *satisfait,*

$$E(t) \le c_0 e^{-c_1 t}, \quad \forall t \ge 0, \tag{3.62}$$

où c_0 *et* c_1 *sont des constantes positives.*

On définit Pour $N,\ N_i > 0$, la fonction de Lyaponov $\mathcal{L}$ suivante :

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + \sum_{i=1}^{9} N_i F_i(t) \tag{3.63}$$

D'abord, on montre l'équivalence entre $E(t)$ et $\mathcal{L}(t)$.

Lemme 3.13. *Pour deux constantes positives* c_1 *et* c_2*, on a*

$$c_1 E(t) \le \mathcal{L}(t) \le c_2 E(t), \quad \forall t \ge 0$$

Preuve. Maintenant, pour

$$\mathfrak{L}(t) = \sum_{i=1}^{9} N_i F_i(t)$$

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{L}(t)| \leq\ & N_1\alpha\rho_3 \int_0^1 |\theta \int_0^x q(y)|dydx + N_2\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 |\theta \int_0^x \psi_t(y)|dydx \\
& + N_3\rho_1 \int_0^1 |\varphi_t \left(\varphi + \int_0^x \psi(y)dy\right)|dx + N_4\rho_2 \int_0^1 |\psi\psi_t|dx \\
& + N_5\rho_1 \int_0^1 |\varphi_t\left(w_x - l\varphi\right)|dx + \rho_1 \int_0^1 |w_t\left(\varphi_x + \psi + lw\right)|dx \\
& + N_6\rho_1 \int_0^1 |\left(\varphi\varphi_t + ww_t\right)|dx + N_7\rho_2 \int_0^1 |\psi_t\left(\varphi_x + \psi + lw\right)|dx + N_7\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 |\varphi_t\psi_x|dx \\
& + N_7\frac{b\rho_3}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} + \frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 |\theta\varphi_t|dx + N_7\frac{b}{\gamma}\left(\frac{\rho_1}{k} + \frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 |q\left(\varphi_x + \psi + lw\right)|dx \\
& + N_7\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 |\psi\psi_t|dx + N_7\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 |w_t\psi|dx \\
& + N_8 \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |se^{-s\rho}|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)|dsd\rho dx \\
& + N_9\rho_1 \int_0^1 |(w_x - l\varphi)\int_0^x w_t(y)|dydx + \rho_1\int_0^1 |\varphi_t \int_0^x \left(\varphi_x + \psi + lw\right)(y)|dy.dx.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young, de Poincaré et de Cauchy-Schwartz et en utilisant (3.34) et $e^{-s\rho} \leq 1$ pour tous $\rho \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{L}(t)| \leq\ & c\int_0^1 \left[\varphi_t^2 + \psi_t^2 + w_t^2 + \psi_x^2 + \theta^2 + q^2 + (\varphi_x + \psi + lw)^2 + (w_x - l\varphi)^2\right] dx \\
& \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \\
\leq\ & cE(t)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq cE(t)$ on a

$$(N-c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N+c)E(t)$$

pour $(N-c) > 0$. □

Preuve. (Théorème 3.2)
On dérive (3.63) par rapport à t et en rappelant (3.37), (3.40), (3.45), (3.48), (3.51), (3.53), (3.55), (3.57) et (3.61)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \quad \leq \quad & \left[N_3c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)+N_5l\rho_1-N_6\rho_1+N_8\mu_0-N_9\left(\frac{\rho_1}{2}-c\mu_0\right)-N\mu_0\right]\int_0^1\varphi_t^2dx \\
& +\left[N_1\varepsilon_1-N_2\frac{\rho_2}{\gamma}+N_3\varepsilon_4+N_4\rho_2+N_5c+N_7c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)+N_9\frac{\rho_1}{2}\right]\int_0^1\psi_t^2dx \\
& +\left[N_2\varepsilon_3-N_4\frac{b}{2}+N_6c+N_7\left(\frac{2b^2l^2}{k}+\frac{\mu_0b\rho_1}{2k}\right)\right]\int_0^1\psi_x^2dx \\
& +\left[-N_5l\rho_1-N_6\rho_1+N_7\varepsilon_7+N_9\rho_1\right]\int_0^1 w_t^2dx \\
& +\left[-N_1\frac{\rho_3}{2}+N_2c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+N_4c+N_7c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)\right]\int_0^1\theta^2dx \\
& +\left[N_1c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+N_2c+N_7c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)-N\beta\right]\int_0^1 q^2dx \\
& +\left[N_2\varepsilon_2-N_3\frac{k}{2}+N_4\frac{k^2}{b}+N_5lk+N_6c\right]\int_0^1\left(\varphi_x+\psi+lw\right)^2dx \\
& +\left[-N_3\frac{lk_0}{2}+N_5\frac{\mu_0}{2}+N_6k_0+N_7\varepsilon_7'-N_9k_0\right]\int_0^1(w_x-l\varphi)^2dx \\
& +\left[N_8n_1\right]\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}s|\mu(s)|z^2(x,\rho,s,t)dsd\rho dx \\
& +\left[-N_8n_1+\frac{N_6}{2}+\frac{N_5}{2}+cN_3\right]\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu(s)|z^2(x,1,s,t)dsdx
\end{aligned}$$

On choisit N_8 assez grand tel que

$$-N_8n_1+\frac{N_6}{2}+\frac{N_5}{2}+cN_3<0$$

Pour N_8 fixé, on choisit alors N_2 assez grand tel que

$$N_1\varepsilon_1-N_2\frac{\rho_2}{\gamma}+N_3\varepsilon_4+N_4\rho_2+N_5c+N_7c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)+N_9\frac{\rho_1}{2}<0$$

On peut choisir N_4, N_6, N_1 et N_3 assez grand tel que

$$N_2\varepsilon_3-N_4\frac{b}{2}+N_6c+N_7\left(\frac{2b^2l^2}{k}+\frac{\mu_0b\rho_1}{2k}\right)<0$$

$$-N_5l\rho_1-N_6\rho_1+N_7\varepsilon_7+N_9\rho_1<0$$

$$-N_1\frac{\rho_3}{2}+N_2c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+N_4c+N_7c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_7}\right)<0$$

$$\max\left\{N_2\varepsilon_2 - N_3\frac{k}{2} + N_4\frac{k^2}{b} + N_5lk + N_6c,\ -N_3\frac{lk_0}{2} + N_5\frac{\mu_0}{2} + N_6k_0 + N_7\varepsilon_7' - N_9k_0\right\} < 0.$$

On choisit N assez grand tel que

$$\max\left\{\begin{array}{l} N_3c\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon_4}\right) + N_5l\rho_1 - N_6\rho_1 + N_8\mu_0 - N_9\left(\dfrac{\rho_1}{2} - c\mu_0\right) - N\mu_0, \\ N_1c\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right) + N_2c + N_7c\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon_7}\right) - N\beta \end{array}\right\} < 0.$$

En utilisant (3.34), on obtient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\alpha_0 E(t), \quad \forall t \geq 0$$

pour $\alpha_0 > 0$.
D'après le lemme 3.13 on trouve

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_1\mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{3.64}$$

où $k_1 = \dfrac{\alpha_0}{c_2}$. Donc on intégré directement (3.64) on obtient (3.62). □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré un probléme thermoélastique linéaire unidimensionnel de Bresse avec terme de retard de distribution, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème on utilisant la techniques de Semi-groupe fortement continue. Après, on a prouvé que la décroissance exponentielle de la fonctionnelle d'énergie.

Bibliographie

[1] F. Alabau-Boussouira, J.E. Munôz Rivera, D.S. Almeida Junior, Stability to weak dissipative Bresse system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 374 :481-498, 2011.

[2] A. Benaissa, M. Miloudi, M. Mokhtari, Global existence and energy decay of solutions to a Bresse system with delay terms, Comment. Math. Univ. Carolin. 56, 2, 169-186, 2015.

[3] L. Bouzettouta, S. Zitouni, Kh. Zennir and A. guesmia, Stability of Bresse system with internal distributed delay, J. Math. Comput. Sci. 7, No. 1, 92-118, 2017.

[4] L. Bouzettouta, S. Zitouni, Kh. Zennir and H. Sissaoui, Well-posedness and decay of solutions to Bresse system with internal distributed delay, Int. J. Appl. Math. Stat. 56, 4, 1-12,2017.

[5] J.A.C. Bresse, Cours de Méchanique Appliquée, Mallet Bachelier, Paris, 1859.

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[7] T. Cazenave and A. Hareaux, Introduction aux Problems d'évolution semi-linéaires, El- lipses, societé de mathematiques appliquees et industrielles.

[8] B. Feng and Xin-Guang Yang, Long-time dynamics for a nonlinear Timoshenko system with delay, Applicable Analysis (2016) http : dx.doi.org/10.1080/00036811.2016.1148139.

[9] A. Guesmia, Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory, J. Math. Anal. Appl. 382 :748-760, 2011.

[10] A. Guesmia and M. Kafini, Bresse system with infinite memories, Math. Meth. Appl. 2014, DOI : 10.1002/mma.3228.

[11] V. Georgiev and G. Todorova, Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms, Journal of differential equations 109, 295-308, (1994).

[12] Ioan I.Vrabie, C_0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.C

[13] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Alfred A.Knopf, 1995.

[14] J. U. Kim, Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM J. Control Optim. 25, 1417-1429, 1987.

[15] J. L. Lions, "quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non lineaires," Dunod, Gaulthier-Villars, Paris (1969).

[16] Z. Liu, S. Zheng, Semigroups Associated with Dissipative Systems, 398, Chapman Hall/CRC, London, 1999.

[17] Z. Liu, B. Rao, Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system, Z. Angew. Math. Phys. 60, 54-69, 2009.

[18] S.A. Messaoudi, M.I. Mustapha, On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 15, 655-671, 2008.

[19] S.A. Messaoudi, M.I. Mustapha, On the stabilization of the Timochenko system by a weak nonlinear dissipation, Math. Meth. Appl. Sci. 32, 454-469, 2009.

[20] J.E. Munoz Rivera, R. Racke, Global stability for damped Timoshenko systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 9, 1625-1639, 2003.

[21] A. S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Diff. Int. Equs. 21 (9-10), 935-958, 2008.

[22] D.Ouchenane, A stability result of a Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback, Georgian Mathematical Journal, 2014.

[23] J. H. Park J. R. Kang, Energy decay of solutions for Timoshenko beam with a weak non-linear dissipation, IMA J. Appl. Math. 76, 340-350, 2011.

[24] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Volume 44 of Applied Math. Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[25] J. Pierre Raymond, Équations d'évolution. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées. Université Paul Sabatier.

[26] C.A. Raposo, J. Ferreira, J. Santos, N.N.O. Castro, Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings, Appl. Math. Lett. 18, no. 5, 535-541, 2005.

[27] B. Said-Houari, "Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un probleme hyperbolique," Memoire de magister (2002), Université de Annaba.

[28] M. L. Santos, A. Soufyane and D. S. Almeida Junior, Asymptotic behavior to Bresse system with past history, Quarterly Of Applied Mathematics. V LXXIII, 1 23-54, 2015.

[29] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equation," By the American Mathematical Society, (1997).

[30] S.P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, Philos. Magazine 6, 744-746, 1921.

[31] W. Walter, "Ordinary Differential Equations," Springer-Verlage, New York, Inc, (1998).

[32] S. Zitouni, A. Ardjouni, Kh. Zennir and R. Amiar, Existence and stability of solution for transmission system with varying delay, Int. J. Appl. Math. Stat. 55 ; Issue No. 2 ; 2016, 1-13.