الجمـــــهوريـــــة الجــــزائريـــــة الديـــمقراطيـــــــــة الشـــــعبيــــــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم العـالـــي و الـبـحـث الـعـلـمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّــــار ثـلـيـــجـــي بالأغــــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيـــــة الـعـلــــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE
(Licence)

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Mathématiques

Par:
Hafes Hamida /lachehebi khadra.....

THEME

Principe de l'application ouverte et théorème du graphe fermé

Proposé par :Pr. MoukhtariAbdelekader.

Année Universitaire 2014/2015

Remerciements

*Notre remerciement s'adresse en premier dieu à **Allah** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.*

*Nos vife remerciements à notre encadreur **Pr.Mokhtari Abedelkader** qui a assuré la direction de ce travail, ses conseils prestigieux ses encouragements sans relâche, sa disponibilité et la confiance qu'il nous a accordée de nous initier à ce travail dans les meilleures conditions…*

Nos remerciements vont aussi à tous nos enseignants et la licence mathématique de Université Amar Thelidji- LAGHOUAT.

Enfin, nous tenons à exprimer notre très reconnaissance et ne sont pas les moindres, vont à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour l'aboutissement de ce travail.

Dédicace :

Je dédie ce simple travail premièrement à dieu qui m'a aidée très fort pour obtenir mon sucée dans ce travail ; puis à l'esprit de mes parents que dieu sont à leursâmes.

Mes frères

Mes sœurs

Toute Ma famille

Les aimées

Ettout personne qui m'a encouragé de loin et de prés.

Tout ce que j'aime, je dédie ce travail

HAMIDA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

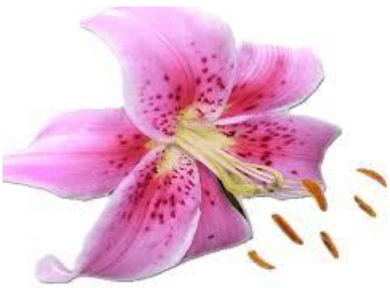
Mon très cher père et ma très chère mère qui sont sans cesse à mes côtés ;

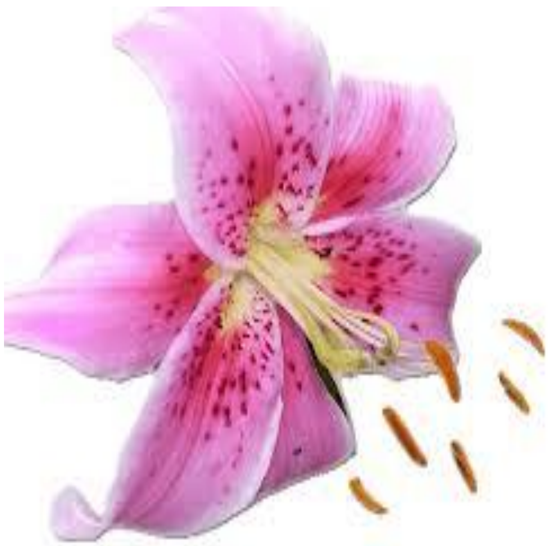
Mes très chers frères et mes très chères sœurs qui m'ont toujours soutenu ;

Mes grandes –parents, mes oncles ;

Toute ma famille

Tous mes amis et mes collègues





Introduction

Soient E et F deux espaces vectoriels normées ;f étant une application continue de E dans F .on sait que si B⊂F, B est ouvert ,alors $f^{-1}(B)$est un ouvert de E .la question qui se pose est la suivante :

peut-on dire que l'image directe d'un ouvert A de E est un ouvert de F ?

la réponse a cette question est négative. A cet effet, on a un théorème de l'application ouverte.

Dans ce mémoire, on a besoin alors d'un rappelle sur les espaces.

Le théorème de l'application ouverte à beaucoup d'application surtout pour la question de décomposition du spectre d'un opérateur.

Chapitre1

Notions générales sur les espaces

1.Les espaces métriques :

1.1.Définition : soit E un ensemble et d : E×E → [0, +∞ [une application vérifiant les axiomes :

- ✓ (d_1) $\forall\, x,y \in E$ $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $(réflexivité)$
- ✓ (d_2) $\forall\, x,y \in E$ $\quad d(x,y) = d\,(y,x)$ $(symétrie)$
- ✓ (d_3) $\forall\, x,y \in E$ $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d\,(y,z)$ (Inégalité triangulaire) ; l'application d s'appelle une distance ou métrique sur E et le couple (E, d) s'appelle un espace métrique.

1.2. Exemples

- $E = R^n$, muni de la distance définie par :

$\forall\, x,y \in R^n\, d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_j \mid$ est un espace métrique.

- $E = R^n$ muni de la distance euclidienne définie par:

$\forall x,y \in R^n\, d_2(x,y) = [\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_j \mid^2]^{1/2}.$

- $E = R^n$ uni de la distance de Tchebychev définie par :

$\forall\, x,y \in R^n\, d_\infty(x,y) = Max_{i=1\ldots n} \mid x_i - y_j \mid$ est un espace métrique.

1.3.Topologie des espaces métriques

Soit (E,d) un espace métrique .

1.3.1 .Définition :

on appelle ouvert de (E,d) toute partie O de E qui est vide ou qui vérifie :

$$\forall x \epsilon O, \exists r > 0, B(x,r) \subset O\ .$$

On vérifie facilement les conditions d'espace topologique,ainsi une distance définit une topologie .

1 .3.2.proposition : une boule ouverte est un ouvert.

1 .3.2.1. preuve :soit B(x_0, r_0)une boule ouverte de (E,d) .soit $x \in B(x_0, r_0)$ .On a $\quad d\,(x_0, x) < r_0$ et on pose $\rho = \frac{r_0 - \ d(x_0,x)}{2}$.alors la boule B$(x, \rho)$ est incluse dans B(x_0, r_0) .En effet pour $\quad y \epsilon$B(x, ρ) on a :

d$(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x,y) < d(x_0, x) + \frac{r_0 - \ d(x_0,x)}{2} = \frac{r_0 - \ d(x_0,x)}{2} < r_0.$

1.3.3. corollaire :un ouvert de (E,d) est une union quelconque de boules ouvertes.

1.3.3.1. Preuve :soit O un ouverte de(E,d) .pour tout $x \in O$,il existe $r > 0$ tel que B$(x, r) \subset O$ .ainsi le réel strictement positif $r_x = sup\{r > 0, B(x, r) \subset O$est bien défini pour tout $x\epsilon O$et on a O= $x\epsilon OB(x,rx)$.

1.4. Remarques

- Une suite (Xn) de points d'un espace métrique E est dite convergente vers un point
  xϵ E si$\lim_{n\to\infty} d\,(x, X_n) = 0$.
- L'espace métrique est noté par le couple (E, d).

2. Les espaces complets

2.1. Suite de Cauchy

2.1.1. Définition : une suite (X_n) de points d'un espace métrique E est appelée suite de Cauchy si :
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists n' \epsilon\, N\ \ \forall\, n > m > n'\, et\, \forall\, n \geq n' \Rightarrow d\,(X_m, X_n) \leq \varepsilon$st satisfaite.

2.2. La convergence

2.2.1 Définition : On dit que la suite (X_n) converge vers $x \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n' \epsilon N, \forall\, n \geq n' \rightarrow d\,(X_n, x) \leq \varepsilon$$

2. 3. l'espace complet

2.3.1. Définition : on dit que l'espace E est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

2.3.2.Exemple

- Soit $E = ([a, b], R^n)$l'ensemble des fonctions numériques définie et continus dans $[a, b]$

$$d\,(f, g) = sup_{x\, \in\, [a,b]}\, |\, f(x) - g(x)\, |\, .$$

3. Théorème de Baire : si un espace métrique complet E est mis sous la forme d'une somme dénombrable de ses sous-ensembles fermés$A_1, A_2, \ldots A_n$; alors l'un au moins de ces sous-ensembles contient une boule de l'espace E.

3.1. Lemme de Baire : un espace métrique complet E, s'il est composé d'un ensemble dénombrable despoints, contient un point isolé.

4. Les espaces Vectoriels normés

4.1.Définition : soit E un espace, k un corps réel, on note ‖.‖ la fonction qui vérifie :

- ✓ $(d_1)\|x\| \geq 0\ \ et\ \|x\| = 0\ si\ x = 0.$
- ✓ $(d_2)\ \forall\alpha \in K, \|\alpha\, x\| =\ |\alpha|\ \|x\|.$
- ✓ $(d_3)\ \ \|x + y\|\ \leq\ \|x\|\ +\ \|y\|$ (Inégalité triangulaire).on dit dans ce cas que l'espace vectorielle (E, ‖.‖) est un espace normé.

4.2.Exemples(Normes classiques)

Soit x ϵR^n:

- ➢ $\|x\|_1\ = \sum_{i=1}^{n}\ |x_i|\ \ ;$
- ➢ $\|x\|_2\ =\ [\sum_{i=1}^{n}\ |x_i|^2]^{½};$ (norme euclidienne)
- ➢ $\|x\|_\infty\ = Max_{i=1\ldots n}\ |x_i|\ ;\ (norme\ infinie).$

4.3.Remarques

- ❖ Toute norme induit une distance, mais toutes les distances ne praviennent pas d'une norme.
- ❖ SurR^n toutes les normes sont équivalentes.
- ❖ Deux normes ‖.‖et‖.‖ sur E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles α >0 et µ>0

Telles que : $\forall\ x, y\ \epsilon\ E$: $\alpha\ \|x\| \leq \|y\| \leq \beta\ \|x\|$.

4.4.Equivalence des normes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

4.4.1. Théorème : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

4.4.1.1.Démonstration du théorème : soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme ||.|| et (e1, ... , en) unebase de E. Soit ||.||∞ la norme de E définie par |

$\|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. Montrons que ces deux normes sont

équivalentes, ce qui montrera que toutes les normes de E sont équivalentes.

Pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ de E on a $\|x\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_ne_n\| \leq \sum_{k=1}^{n}\|x_ke_k\| = \sum_{k=1}^{n}|x_k|.\|e_k\| \leq (\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|)\|x\|_\infty$

et il existe donc une constante k telle que $\|.\| \leq .k||.||_\infty$.

Soit d'autre part S = { $\in E \,/\, ||x||_\infty = 1\}$ la sphère unité de E muni de la norme $||x||_\infty$. Considérons l'application φ *de S* dans r définie par $\varphi(x) = ||x||$.

Pour tous x et y de S on a $||x|| - ||y|| \; - \leq \|x-y\| \leq k||x - y||_\infty$ ce qui assure la continuité de φ.

D'autre part E étant de dimension finie, S est un compact de (E,$\|.\|_\infty$) et par

conséquent φ est bornée dans S et atteint ses bornes. Il existe donc α et β dans S tels que $\|\alpha\| = m = Inf_{x\epsilon S}\|x\|$ et $\|\beta\| = M = Sup_{x\epsilon S}\|x\|$

. Comme α et β appartiennent à S on a $\|\alpha\|_\infty = \|\beta\|_\infty = 1$ donc $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ et m et M sont des réels strictement positifs.

Soit x un élément non nul de E; $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à S donc $m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \leq M$ soit

$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_\infty M$ inégalité encorevalable si $x = 0$, ce qui achève la démonstration.

5.Les espaces topologiques

soit E un ensemble $P(E)$ l'ensemble des parties de E, et soit $\tau \subset P(E)$.

5.1. Définition 1 :

On dit que τ est une topologie sur E si :

- ✓ $.E$ et $\emptyset \subset$ O
- ✓ *une rénion quelconque d'élement τ appartient* à τ.

  $\forall O_{i,.}\, ;\bigcup_{i\epsilon I} O_i \subset \tau$.

  τ eststabe pour une réunion quelconque.

  - ✓ Une intersection finie d'élément de τ appartient à τ

  $\forall O_{i=1..n.} \subset \tau\, ;\bigcap_{i=1}^{n} O_i \subset \tau$. τ est stabe pour une intersection finie.

  - On dit que (E, τ) est un espace topologique (τ est une topologie sur E).

5.2.Remarque:

- Les éléments de τ sont appelés des ouverts

5.3. Exemple

- $E = \{a, b, c, d, e\}$.

$$\tau = \{\{E, \emptyset, \{a\}\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

τ Définie une espace topologique.

6.L'espace de Banach

6.1. Définition : un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.

6.2. Exemple :L^1 et L^2 sont des espaces de Banach

- Un élément de L^1 définie par : $f \in L^1$;$\|f\| = \int_A |f(x)|\, du$.
- Un élément de L^2 d éfinie par :f $\in L^2$;$\|f\| = \int_A |f(x)|^{1/2}$

6.3. Remarques

- Tout sous espace fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.
  Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.
- Une différence topologique fondamentale entre espace vectoriel normé de dimension finie et espace vectoriel normé de dimension infinie réside dans la caractérisation des parties compactes.
- Dans un espace vectoriel de dimension finie les parties compactes sont les parties fermées et bornées.
- Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie la boule unité fermé n'est jamais compacte.

7.L'espace de Hilbert

7.1.Définition :

Soit H un espace vectoriel ,on appelle produit scalaire

$<,>$ H×H → C

(x, y) $\rightarrow< x, y >$qui vérifie :

- . $\varphi(\alpha x + \beta\ y, z)$= $\alpha\varphi(x,$ z)+ $\beta\varphi$(y,z).
- $\varphi(x, y) = \varphi\overline{(y, x)}$.
- Définie positive espace

L'espace H muni du produit scalaire est appelé espace préhilbertien ;s'il est complet ; alors il est appelé un espace de Hilbert.

Un espace de Hilbertest un espace normé car la norme est définie par :

$$\|x\|=\sqrt{< x, x >}\ .$$

Notons que de manière général un espace normé n'est pas nécessairement un espace de Hilbert (il faut que la norme vérifie l'égalité de parallélogramme)

7.2.Proposition :si (./.) est un produit scalaire sur H ,l'application

$$\|.\| : \begin{array}{l} H \longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longrightarrow \sqrt{(x/x)}. \end{array}$$

Est une norme sur H.

7.3.Définition (base hilbertienne) : soit (H,($< x, x >$./.)) un espace de Hilbert ,une famille $(e_i)_{i\epsilon I}$ de vecteurs de H est dite

- ✓ orthogonal si (e_i/e_j)=0, pour tous i, j ϵI tel que i$\neq j$;
- ✓ orthonormé si (e_i/e_j)=0, pour tous i, j ϵI tel que i$\neq j$;et (e_i/e_i)=1 pour tout i ϵ I.

- On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H.

7.3.1. Définition (dimension hilbertienne) :on appelle dimension hilbertienne d'un espace de Hilbert le cardinal de l'une quelconque de ses bases hilbertiennes .on note dim H la dimension hilbertienne de H.

Chapitre 2

Rappelle sur les opérateurs

1. Opérateur linéaire

1.1. Définition :

Soient E et E_1deux espaces vectorielles sur un même corps k, une application A s'appelle opérateur linéaire si les conditions : $\forall\ x_1, x_2\ \epsilon E\ \alpha\ \ ,\beta\ \ \epsilon K$

$$A\ (\ \alpha x_1+\beta x_2)=\alpha A x_1+\beta A x_2 \text{.sont satisfaites}$$

1.2. Définitions

1.2.1 Définition1. Si l'espaceE_1 est unidimensionnel, alors l'opérateur A s'appelle fonctionnelle linéaire.

1.2.2. Définition 2: un opérateur linéaire A d'un espace normé E dans un espace normé E_1est dit continu c'est-à-dire :

$\forall\ x, x' \in E$,$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\|x-x'\| \leq \alpha \Rightarrow \|A\ x - A\ x\|' \leq \varepsilon$

1.2.3. Définition 3 : un opérateur linéaire A d'un espace E dans un espace E_1est dit borné s'il est borné sur la boule unité de l'espace E.de sorte que $\|x\|$ ≤1 implique$\|A\ x\| \leq c$ (ou c est un constant).

1.3. Propriétés :

- ✓ **1.3.1. Propriété 1** : si un opérateur linéaire A est borné, il est continu en tout point $x$de l'espace E.
- ✓ **1.3.2. Propriété 2** : si un opérateur linéaire A est continu pour au moins un point x, alors il est borné.
- ✓ **1.3.3. Propriété 3 :** un opérateur linéaire qui est continu pour au moins un point de l'espace E est continu en tous ses points**.**
- ✓ **1.3.4. Propriété 4** : un opérateur linéaire A dans un espace normé E est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble pré compact**.**

1.4. Remarque :

- ❖ Dans un espace normé de dimension finie tout opérateur linéaire est compact.
- ❖ Les trois Théorèmes suivants sont également valables pour un opérateur continu A d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y.

1.5. Théorème 1 : si une série$\sum_{i=1}^{\infty} X_n$ =s converge dans l'espace E .alors $\sum_{i=1}^{\infty} A\ X_n\ = A\ s$.

1.6. Théorème 2 :si x(t) est une fonction continue par morceaux sur un intervalle

a≤t ≤b. à valeurs dans l'espace X, alors on a

$$A\,\{\int_a^b X(t)dt\} = \int_a^b (AX(t))\,dt.$$

1.7. théorème 3: si $X\,(\,t)$est une fonction dérivable pour $t\,=\,t_0$à valeur dans l'espace X, alors on a : $A[\,X^{'}\,(t_0)]$=$(A\,X)'(t_0)$.

<u>1.8. Exemples :</u>

- <u>Exemple1 :</u>

Soit E un espace vectoriel topologique. Posons$A\,x\,=\,x$ pour tout $x\,\epsilon\,A$. Un tel opérateur qui transforme tout élément de l'espace en lui-même s'appelle opérateur identique.

- <u>Exemple 2 :</u>

En programmation linéaire l'opérateur :

$$R^n\,\rightarrow R$$

x→$<\,a,x\,>=\,ax\,=\sum_{i=1}^n a_i x_i$

2. Opérateur adjoint. Opérateurs unitaires. Opérateurs hermitiens :

soit A un opérateur linéaire dans un espace préhilbertien H . on appelle opérateur adjoint de A l'opérateur A^* tel que ,pour tous x ,y de H .

(Ax, y)=(x,A^*y).

On dit que A est hermitien, ou auto –adjoint si A=A^*

(Ax, y)=(x, A y).

On dit que A est isométrique si $\forall x\,\epsilon$ H

$\|A\,x\|\,=\,\|x\|$.

On dit que A est unitaire si A admet un inverse et si $A^*\,=\,A^{-1}$

(A x, y)=(x,A^{-1} y)

Un opérateur unitaire est isométrique .en effet

$\|A\,x\|^2\,=\,(A\,x,Ax)\,=\,(x,A^*A\,x)\,=\,(x,A^{-1}A\,x)\,=\,(x,x)\,=\,\|x\|^2$.

La réciproque est fausse ,car un opérateur isométrique peut ne pas avoir d'inverse.

2.1. Théorème :

Les valeurs propres d'un opérateur hermitien A sont réelles .deux vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distincts sont orthogonaux.

2.1.1. Démonstration:

- Soit u un vecteur propre de A pour la valeur propre λ on a :

$$(A\,u, u)=(u\ ,A\,u)$$

Ou $(\mu_1\ , uX)=(u\ , \mu_1 u\ )$

Ou encore $\mu_1\ (u\ , u) = \overline{\mu_1}(u\ , u)$

Comme u est vecteur propre , u x$\neq$ 0 et(u, u) $\neq$0 .donc $\mu_1 = \mu_1 . \overline{\mu_1}$ est réel .

- Soient u ,v deux vecteurs propres correspondant à deux valeurs propres distinctesμ_1, μ_2. On a

$$(A\,u, v)=(u, A\,v)$$

$$\text{Ou } (\mu_1\ u, v) = (u, \mu_2\ v)$$

$$\mu_1\ (u, v) =\overline{\mu_2}\ (u, v) =\mu_2(u, v)\ \ (\text{car } \mu_2 \text{ est réel})$$

comme $\mu_1 \neq \mu_2$.   (u,v)=0.   u et v sont orthogonaux.

3.Propriétés spectrales des opérateurs linéaires

Un opérateur linéaire borné A agissant dans espace de Banach X appartient algèbre L(X) de tous les opérateurs linéaires bornés agissant dans l'espace X . En tant qu'élément de cette algèbre il possède un spectre S_A qui est ensemble des nombres complexes λ pour lesquels A- λE n'a pas d'opérateur inverse borné .Dans le cas de dimension finie (X=C_n) ,le spectre de l'opérateur A se réduit ,comme nous l'avons vu dans , à un nombre fini , par exemple$m$,de points distincts qui sont les valeurs propres de l'opérateur A .Nous savons que l'espace C_n est alors décomposable en somme directe de m sous-espaces invariants dans chacun desquels l'opérateur A a un seul point pour spectre et admet une description complète . En cas de dimension infinie ,le spectre de l'opérateur A est un ensemble compacte non vide du plan ,inclus dans le cercle $|\lambda| \leq \|A\|$ou bien , plus exactement, dans le cercle $|\lambda| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A\|^n}$ dans le cas général, on n'y peut rien ajouter

- En cas de dimension infinie, un nombre λ appartenant au spectre d'un opérateur A n'est pas forcément une valeur propre de l'opérateur A .**O**n peut même dire que ,dans ce cas ,c'est non plus la notion de valeur propre qui devient naturelle , mais celle de valeur propre généralisée : on appelle ainsi un nombre λ qui admet une suite de vecteurs $x_1, x_2,\ldots$telle que $|x_n| \geq c > 0$ et Ax_n- λx_n →0. Toute valeur propre d'un opérateur en est évidemment une valeur propre généralisée Toute valeur propre généralisée d'un opérateur A appartient $\grave{a}$ son spectre ;en effet , si l'on a Ax_n- λx_n →0 pour une suite $x_n$et que l'opérateur admette un inverse borné ,
  alors x_n=$(A - \lambda E)^{-1}$(A- λE)$x_n \to 0$
- Montrons à présent que tout point sur la frontière du spectre d'un opérateur A est sa valeur propre généralisée . soit λun point sur la frontière du spectre ; comme A- λE est la limite des opérateur inversibles A- μE , oùμS_A,l'opérateur $A - \lambda E$ est un diviseur généralisé de zéro en vertu de … ,donc il existe suite d'opérateur P_n talle que $\|P_n\| \geq c >$ 0,mais $(A - \lambda E)\, P_n \to 0$ dans l'algèbre L(X).pour tout opérateur P_n, nous choisissons un vecteur y_n tel que $|y_n|$=1, $|P_n y_n| \geq {}^{c}/_{2}$,En posant $x_n = P_n y_n$ nous avons $|x_n| \geq {}^{c}/_{2}$,
  $|(A - \lambda E)x_n|$= $|(A - \lambda E)P_n y_n| \leq \|(A - \lambda E)P_n\| |y_n| \to 0$
  Ce qu'il nous fallait.
  Quant aux points intérieurs du spectre d'un opérateur A ,ils ne sont pas forcément des valeur propre généralisée

3.Le théorème suivant rend parfois plus simple l'étude d'un opérateur

3.1.Le théorème : Supposons que le spectre S_A d'un opérateur A soit la réunion de deux ensembles fermés disjoints S_1 et S_2. Alors l'espace X est décomposable en somme directe de deux sous-espace fermés$X_1 et X_2$ qui sont invariants par A , de sorte que le spectre de A considéré sur le sous-espace X_1 est l'ensemble S_1et celui considéré sur X_2est S_2

3.1.1.Démonstration : Nous utilisons le morphisme de l'algèbre L(X) établi dans Ce morphisme est réalisé par la formule

$$f=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} (A - \lambda E)^{-1} \quad f(\lambda)\, d\lambda$$

oùΓest une courbe fermée contournant l'ensemble $S_A$dans le domaine d'analyticité de la fonction $f(\lambda)$.Dans le cas $o\grave{u}$ l'ensemble S_A est réunion de ses parties fermée deux à deux disjointes ,il peut en être de même courbe Γ .Dans le présent cas , l'ensemble S_A est réunion de deux ensembles fermés S_1 et S_2 sans points communs est la courbe Γ peut se composer de deux courbes fermés Γ_1 et Γ_2, la première contournant l'ensemble S_1 ,la deuxième S_2

La fonction $e_1(\lambda)$qui vaut 1sur l'ensemble S_1et 0 sur S_2 appartient à l'algèbre U(S_A) contient également la fonction $e_2(\lambda)$valant 0 sur l'ensemble S_1et 1 sur S_2.Ces fonctions possèdent les propriétés évidentes :

$$e_1(\lambda)+e_2(\lambda)\equiv 1 \quad (\text{sur} S_A), \quad e_1^2(\lambda)=e_1(\lambda)$$
$$e_2^2(\lambda)=e_2(\lambda), e_1(\lambda)e_2(\lambda) = e_2(\lambda)\, e_1(\lambda) = 0.$$

Désignons par E_1 et E_2 les opérateurs linéaires correspondant respectivement aux fonction$e_1(\lambda)$ et $e_2(\lambda)$. Vu les propriétés d'un morphisme, nous avons

$$E_1 + E_2=E \ , E_1^2 = E_1 \ , \ E_2^2 = E_2 , E_1 E_2 = E_1 E_2 = 0$$

Soient X_1 l'ensemble des solution (dans l'espace X)de l'équation $E_1 x = x$ et X et celui des solution de l'équation $E_2 x = x$. En particulier , tout vecteur de la forme $x = E_1 y$,pour n'importe quel $y \epsilon X$,est solution de l'équation $E_1 x = x$ car $E_1(E_1 y)=E_1^2 y=E_1 y$.

Il est évident que $X_1 et X_2$ sont des sous-espace dans espace X et sont fermés en vertu de la continuité des opérateurs E_1 et E_2 .Si $z \epsilon X_1 \cap X_2$,alorsz=$E_1 z$=$E_2 z$; or E_1z=$E_1(E_1 z)$=$E_1(E_2 z)$=0 d'où z=$E_1 z$=0 .Ainsi , l'intersection des sous-espaces $X_1 et X_2$ ne contient que le vecteur nul . En appliquant l'opérateur $E_1 + E_2$=E ,à un vecteur y quelconque on trouve y=$E_1 y + E_2 y$ le premier terme appartenant à,X_1, le deuxième à X_2 l'espace X est donc décomposé en somme directe des sous-espaces $X_1 et X_2$.

Soit $x \epsilon X_1$, Alors on a $Ax = A(E_1 x)$=$E_1(Ax)$,donc Axappartenant aussi au sous-espace X_1 ; par conséquent , X_1est invariant par l'opérateur A . D'une façon analogue ,X_2 est invariant par A .

Il reste à démontrer la conclusion du théorème . Posons A_1=AE_1 ; A_1 se confond avec A sur le sous-espace X_1 et est nul sur X_2 . D'autre part ,en peut écrire

$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \lambda e_1(\lambda)(A-\lambda E)^{-1} \quad d\lambda$$

Ici l'on peut remplacer la courbe Γ par $\Gamma_1$car la fonction $e_1(\lambda)$ est nulle sur la courbe Γ_2 . Ceci fait , on peut remplacer la fonction $e_1(\lambda)$ par 1 ; définitivement ,on aura

$$A_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \lambda(A-\lambda E)^{-1} \quad d\lambda$$

Ensuite ,quel que soit μ ,

$$A_1 - \mu E_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu)(A - \lambda E)^{-1} \, d\lambda$$

Supposons que μ Soit à l'extérieur de la courbe Γ_1 ; construisons l'opérateur

$$Q_\mu = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{(A - \lambda E)^{-1} \, d\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Les mêmes raisonnements que dans impliquent

$$(A_1 - \mu E_1) Q_\mu = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} (\lambda - \mu) \frac{(A - \lambda E)^{-1} \, d\lambda}{\lambda - \mu} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} (A - \lambda E)^{-1} \, d\lambda = E_1$$

De la sorte , l'opérateur $\lambda - \mu E$ est inversible dans le sous-espace X_1 par conséquent , le spectre de l'opérateur A dans le sous-espace X_1 ne peut contenir que les points de l'ensemble S_1. De même, le spectre de A dans X_2 ne peut contenir que les points de S_2 . Montrons que le spectre de A dans X_1 contient tous les points de l'ensemble S_1 .

Soit $\lambda_0 \epsilon S_1$ .On a vu que l'opérateur $A - \lambda_0 E$ est inversible dans le sous-espace X_2 ,de sorte qu'il existe un opérateur Q_2 tel que $(A - \lambda_0 E) Q_2 y = y$ pour tout $y \epsilon X_2$;sil'opérateur $A - \lambda_0 E$ était inversible dans lesous-espace X_1,il existerait un opérateur Q_1 tel que $(A - \lambda_0 E) Q_2 x = x$ pour tout $x \epsilon X_1$.

On construirait alors un opérateur Q se confondant avec Q_1 dans X_1 et avec Q_2 dans X_2 et linéairement prolongé sur tout le X . En vertu de , il serait un opérateur linéaire borné dans l'espace X . Evidemment , il serait en même temps l'inverse de $A - \lambda_0 E$ .or c'est impossible parce que $\lambda_0 \epsilon S_A$. le théorème est démontré.

Chapitre 3

Principe des applications ouvertes et Théorème du graphe fermé

1. Principe de l'application ouverte

1.1.Introduction :

Soient X et Y Deux espaces métriques et y=F(x) est une fonction continue, alorsl'image réciproque de tout sous- ensemble ouvert est un sous ensemble ouvert.

L'image F(G) d'un ensemble ouvert ($G\subset X$) n'est pas forcément un ensemble ouvert dans Y.

1.1.1. Problème : quellessont les conditions pour que l'image F(G) d'un ensemble ouvert ($G\subset X$) soit un ensemble ouvert dans Y ?

1.2. Théorème :

Soit A un opérateur linéaire continu appliquant d'une façon bijective un espace normé et complet X sur un espace normé et complet Y. Alors l'opérateur A transformé tout ensemble ouvert ($G\subset X$)dans un ensemble ouvert $F(G)\subset Y$

1.2.1. Démonstration :

Désigner par v_r la boule{x : |x|<r}.

Nous allons d'abord démontrer que la fermeture de l'ensemble A(v_1) dans Y contient une boule de l'espace Y.

Par hypothèse, on a $Y=A(X)=A(\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty} A(v_n)$.d'autant plus, $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(v_n)}$.en vertu de théorème de Baire.

Il existe un numéro n=N tel que l'ensemble $\overline{A(v_N)}$ contienne une boule {y : $|y-y_0|<\varepsilon$}.comme l'ensemble $\overline{A(v_N)}$ est évidement équilibré, il contient également la boule {y : $|y+y_0|<\varepsilon$}.de plus, l'ensemble $\overline{A(v_n)}$ est convexe (puisqu'un opérateur linéaire transforme un ensemble convexe en un ensemble convexe, et la fermeture d'un ensemble convexe est convexe) contient donc la boule W_ε= {y : |y|<ε} incluse dans l'enveloppe convexe de deux boules mentionnées.

Pour la raison d'homothétie, il est clair que, quel que soit p>0, on a l'inclusion $W_p\subset\overline{A(v_1)}$, ce qu'il nous fallait.

Montrons à présent que l'ensemble A(v_1) lui-même (et non seulement sa fermeture) contient la boule $W_{\notin(2N)}$.

Soit y ∈ $W_{\notin(2N)}$.puisqu'on a démontré que $W_{\notin(2N)} \subset \overline{A\ (v_{1/2})}$.il est possible de choisir un point y_1 ∈ A $(v_{1/2})$ autant proche que l'on veut du point y .par exemple, on peut le faire de façon à avoir ∣y-y_1∣ <ε/4N .vu que $W_{\varepsilon/(4N)} \subset \overline{A(v_{1/4})}$, on peut trouver de même un point $y_2 \in A(v_{1/4})$ tel que-y_1-y_2∣<ε/(8N).en continuant le procédé on construit, pour tout n=1,2,…… ; un point $y_n \in A(v_{1/2^n})$ tel que ∣y-y_1-$y_2 - \cdots y_n$∣<ε/(2^{n+1} N).

Par construction on a y=$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .or,y_n=A x_n,ou$x_n \in v_{1/2^n}$, de sorte que ∣x_n∣<1/2^n.l'espace X étant complet, lasériex_1+x_2+…converge ; soit$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.comme l'opérateur A est continu, A x =A ($\sum_{n=1}^{\infty} x_n$)=$\sum_{n=1}^{\infty} A\, x_n$=$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$=y.de plus , ∣$x$∣≤$\sum_{n=1}^{\infty}$ ∣x_n∣ $< \sum_{n=}^{\infty} 1/2^n$=1.par conséquent, la boule $W_{\varepsilon/(2n)}$ est contenue dans l'image de la boule v_1,ce qu'on affirmait.

Toujours pour la raison homothétie, on a $W_\rho A \subset \left(V_{\varepsilon\rho\,(2N)}\right) pour\ tout\ \rho > 0$.En particulier, il résulte de $|x - x_0| < \delta$ que $|Ax - Ax_0|$=$|A(x - x_0)| < \delta\ \varepsilon/(2N)$, de sorte que l'image A(U) de la boule U={x: $|x - x_0| < \delta$} contient la boule{y: $|y - Ay| < \delta\ \varepsilon/(2N)$}Il en découle que l'image de toutensemble ouvert G⊂X ensemble ouvert dans Y, et le théorème est complétement démontré.

1.3. Les conséquences :

1 .3.1.Conséquence :

Si A est une application continue et isomorphe d'un espace normé complet X sur un espace normé complet Y, alors l'application inverse A^{-1} est elle aussi continue.

1.3.1.1. Démonstration : Dans ce cas, l'opérateur inverse A^{-1} est défini d'une façon univoque et est évidemment linéaire de même que A. en vertu du théorème b, l'image réciproque par l'opérateur A^{-1} de tout ensemble ouvert G⊂X est l'ensemble ouvert A G⊂Y En

Particulier, l'image réciproque de la boule {x: $|x| < \varepsilon$} contient une boule {y: $|y| < \varepsilon$},ce que signifie la continuité de l'application A^{-1}

1.3.2.Conséquence :

Si un espace vectoriel L est complet par rapport à chacune des deux normes$|x|_1 et |x|_2$alors l'existence d'une constante c_1 telle que $|\acute{x}|_2 \geq$

$c_1|x|_1$pour tout xϵL implique l'existence d'une constante $c_2$telle que $|x|_1 \geq c_1|x|_2$pour tout xϵL ;

- **1.3.2.1. Démonstration :** Considérons l'application identique A de l'espace normé X que l'on obtient en munissant L de la norme $|x|_2$sur l'espace normé Y que l'on obtient en munissant L de la norme $|x|_1$ .En raison de l'inégalité $|x|_2 \geq c_1|x|_1$,cette application est continue. par hypothèse et selon c l'application inverse est continue elle aussi, d'o$\grave{u}$ le résultat cherché

  1.3.3. Conséquence :

Supposons qu'un espace complet X soit mis sous forme de somme direct de deux sous-espace fermés X_1 etX_2 de sorte que, pour tout vecteur xϵX ,on a une représentation unique

$$x \ =x_1+x_2, \quad x_1\epsilon X_1 \quad ,x_2\epsilon X_2$$

l'opérateur P_1 qui à tout vecteur x fait correspondre sa composante x s'appelle projecteur (ou projection)sur le sous-espace X_1; d'une manière analogue , l'opérateur P_2

faisant correspondre à tout vecteur x sa composante x_2s'appelle projecteur (ou projection) sur le sous-espace X_2 .Ces opérateur sont évidemment linéaires, mais il n'est point évident qu'ils soient continus. Nous verrons que les opérateurs $P_1 etP_2$ sont continus en supposant l'espace X complet,les sous-espaceX_1 et X_2fermés, et en utilisant le théorème sur l'application ouverte.

En plus de la norme initial$|x| \equiv |x|_1$, introduisons dans l'espace X norme

$$|x|_2 = |x_1|_1 + |x_2|_1$$

Il est évident que $|x|_2$vérifie les axiomes de la norme .Nous avons aussi

$$|x|_1 \leq |x_1|_1 + |x_2|_1 = |x|_2$$

Montrons que l'espace X est complet par rapport à la norme $|x|_2$ .soit$\{x^{(n)}\}$une suite de Cauchy pour la norme $|x|_2$;il résulte de l'égalité

$$\left|x^{(n)}-x^{(m)}\right|_2=\left|x_1^{(n)}-x_1^{(m)}\right|_1+\left|x_2^{(n)}-x_2^{(m)}\right|_1$$

Que les suites $\{x^{(n)}{}_1\}$et$\{x^{(n)}{}_2\}$sont de Cauchy pour la norme $|x|_1$.L'espace X étant complet, il existe les limites

$$x_1=\lim_{n\to\infty} x^{(n)}{}_1 \qquad ,x_2=\lim_{n\to\infty} x^{(n)}{}_2 \ ;$$

Les sous-espaces $X_1 et\ X_2$étant fermés, on a $x_1\ \epsilon X_1, x_2\ \epsilon X_2$. Posons x=$x_1+x_2$. Nous avons

$$\left|x-x^{(n)}\right|_2=\left|x-x_1^{(n)}\right|_1+\left|x-x_2^{(n)}\right|_1 \to 0$$

De sorte que x est la limite de la suite$\{x^{(n)}\}$pour la norme$|x|_2$,ce qui démontre que X est complet par rapport à la norme$|x|_2$ .En appliquant d on voit que les normes $|x|_1$ et $|x|_2$sont équivalentes ; en particulier, il existe une constante c telle que l'inégalité

$$|x|_2=|x_1|_1+|x_2|_1 \leq c|x|_1=c|x|$$

A lieu pour tout xϵX ;mais alors on ; aussi

$$|P_1x|=|x_1|_1 \leq c|x| \quad ,|P_2x|=|x_2|_1 \leq c|x|$$

Ce qui démontre la continuité des opérateurs P_1etP_2.

1.3.4. Conséquence :

Soient toujours X un espace complet, somme directe de deux sous-espaces fermés X_1 et X_2, etP_1 et P_2 les projecteurs correspondants .soient$A\ _1$un opérateur linéaire continu dans X_1et A_2un opérateur linéaire continu dans X_2 définissons dans l'espace X

L'opérateur A d'après la formule

$$Ax\equiv A(x_1+x_2)=A_1x_1+A_2x_2$$

L'opérateur A est évidemment linéaire

L'opérateur A est continu dans l'espace X

- #### 1.3.4.1 .Démonstration :

En effet

$$Ax=A_1x_1+A_2x_2=A_1P_1x+A_2P_2x$$

Et, les opérateurs $P_1 et P_2$ étant bornés dans l'espace X d'après e, nous avons

$$|Ax| \leq \|A_1\| .\|P_1\|.|x|+\|A_2\|.\|P_2\|.|x| =c|x|$$

Ce qu'il nous fallait.

1. Le théorème du graphe fermé

2.1. Rappel : graphe et topologie produit

Le graphe de T est l'ensemble G(T) ={(u, T u)/u∈ E}⊂ E ×F de la topologie produit, soit encore de la norme $\|(u,v)\|_{E\times F}$ =$\|u\|_E$ × $\|V\|_F$.E×F est alors un espace de banach pour$\|.\|_{E\times F}$.

Pour prouver que $\mathfrak{T}(T)$ est fermé pour cette norme ,on se donne une suite $(U_n)_{n\,\in N}$d'élément de E qui converge vers u dans E et telle que $(TU_n)_{n\in N}$ converge vers v dans F.on montre alors que v=T u. pour montrer la continuité de T ,on se donne une suite ($U_n)_{n\,\in N}$d'élément de E qui converge vers u dans E. on doit alors prouver que $(TU_n)_{n\in N}$ converge vers un élément v dans F et que v=T u.

Le caractère fermé Ţ(T) est donc une hypothèse a priori plus faible que la continuité de T .nous allons maintenant voir que dans les espaces de Banach ,le caractère fermé de Ţ(T) est en fait équivalent à la continuité de T.

2.2. Théorème (graphe fermé)

soient deux (E,$\|.\|_E$) et (F,$\|.\|_F$) espaces de Banach .soit T :E⟶ F une application linéaire .alors T est continue si et seulement si son graphe est fermé.

2.2.1. Preuve

Supposons Ţ(T) fermé et montrons que T est continue. G(T)= {(u, T u)/ u∈ E} est un sous- espace vectoriel de E ×F car T est linéaire .comme il est fermé dans E ×F qui un espace de Banach, Ţ(T) est aussi un espace de Banach pour$\|.\|_{E\times F}$.soit p_1 : E×F→E la première projection, p_1((u, v))=ualors,p_1 est linéaire et continue. Onconsidére sa restriction à Ţ(T) ,q_1=p_1 | Ţ(T) associe u .alors ,q_1 est linéaire bijective entre Banach .$q_1$admet donc un inverse continu par le théorème de l'isomorphisme de Banach,

$$q_1^{-1} : E\rightarrow Ţ(T)$$
$$U\longrightarrow (u, T u)$$

Si p_2 : E→F est la seconde projection, p_2((u, v))=v, c'est aussi une application linéaire continue .alors,

$$p_2 \circ p_1^{-1} : E\rightarrow F$$
$$U\rightarrow Tu$$

Est continue et T=$p_2 \circ p_1^{-1}$.donc, T est continue.

On déduit du théorème du graphe ferméla continuité des projections sur des supplémentaires dans les espaces de Banach.

Conclusion

on vient de voir que le théorème de l'application ouverte à beaucoup d'application ;en particulier la décomposition spectrale d'un opérateur .

Bibliographie

[1] :G- Chilov, Analyse mathématique (fonctions d'un variable). 3e partie

[2] : G- Chilov, Analyse mathématique (fonctions d'un variable).1ére et2e parties

[3] Kolmogorov, Fomine Eléments de la théorie des fonctions et de analyse fonctionnelle

[4] V.Trenoguine, Analyse Fonctionnelle

[5] : Walter Hengartner , Marcel Lambert et Corine Reischer , Introduction à analyse fonctionnelle .