

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثلجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOuat

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
Mazouz Hadjer

THEME

***Problème de Poisson : Etude théorique et
calcul des solutions approximatives***

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. Rahmoune Abdelaziz
Mr. Yazid Fares
Mr. Abassi Taha Khalil

M.C.B
M.C.B
M.A.A

Président
Examineur
Encadreur

Année Universitaire 2020/2021

Remerciement

Je remercie Allah le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr. Abassi, on le remercie pour le qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Dédicace

A mes chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A mes chers frères Abdelhamid, Mohammed, Ahmed, Aymen.

A mes chers seours Fatima, Imene, Mariem, Asma, Nermine, Sirine

A mon cher neveu Djawad , source de joie et de bonheur

A toute famille, source d'espoir et de motivation.

A tous mes amis, tout particulièrement Hadjer, Ahlem, Selma, Oumelkhir, Zineb

A vous cher lecteur

ملخص

تركز مذكرتنا على دراسة الطول التقريبية لمشكلة بواسون ، وهي معادلة تفاضلية جزئية. لقد أظهرنا أن المسائل على حدود المجال مطروحة بشكل جيد لهذه المعادلات التفاضلية الجزئية الاهليجية أي أنها تقبل حلا وحيدا و درسنا سسكمثال "مشكلة بواسون" .

ذكرنا بعض صيغ التكامل بالتجزئة ، المسماة صيغ غرين ، ثم نظرية لاكس ميلينغرام التي كانت الأداة الأساسية التي تسمح بإثبات وجود وتفرد حلول الصيغة التفاضلية ولقد حددنا فضاءات سوبوليف و درسنا خصائص طريقة العناصر المنتهية.

الكلمات المفتاحية: مشكل بواسون؛ المعادلات التفاضلية الجزئية؛ مبرهنة غرين؛ نظرية لاكس ميلينغرام؛ طريقة العناصر المنتهية.

Résumé

Notre mémoire s'articule sur l'étude des solutions approximatives du problème de Poisson, qui est une équation différentielle partielle. Nous avons montré que les problèmes aux limites sont bien posés pour ces e.d.p. elliptiques, c'est-à-dire qu'elles admettent une solution unique, nous avons étudié l'exemple du Poisson. Nous avons fait rappel formules de Green, puis au théorème de Lax-Milgram. Nous avons défini les espaces de Sobolev et nous avons étudié les propriétés de la méthode des éléments finis.

Mots de clé : Problème de Poisson ; Les équation aux dérivées partielles ; Formules de Green ; Théorème de Lax-Milgram ; La méthode des éléments finis.

Abstract

Our memory focuses on the study of approximate solutions to the Poisson problem, which is a partial differential equation. We have shown that the boundary problems are well posed for these e.d.p. elliptical, that is to say that they admit a unique solution . We have studied the example of Poisson. We recalled Green's formulas, then the Lax-Milgram theorem. We have defined the Sobolev spaces and we have studied the properties of the finite element method.

Word Key :Poisson Problem ; Partial differential equation ; Green's formulas ; Lax-Milgram theorem ; the finite element method.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	5
1.1 Equation différentielle	5
1.1.1 Ordre d'équation différentielle	5
1.1.2 Degré d'équation différentielle	6
1.1.3 Equation différentielle linéaire	6
1.1.4 Equation différentielle linéaire homogène	6
1.1.5 Equation différentielle linéaire non homogène	6
1.1.6 Solution d'équation différentielle	7
1.2 Equation différentielle linéaire Partielle	7
1.2.1 Classification des équations aux dérivées partielles	7
1.2.2 Ensemble régulier	7
1.2.3 Formule de Green	8
1.3 Les Espaces	9
1.3.1 Les espaces $H^m(\Omega)$	12
1.3.2 Les espaces $H^1(\Omega)$	13
1.3.3 Les espaces $H_0^1(\Omega)$	14
1.3.4 Formule de Green Généralisé	15
1.3.5 Formulation variationnelle	17
1.4 Théorème de Lax-Milgram	18
1.4.1 Inégalité de Poincaré Wirtinger	20
2 Etude l'existence des solutions de l'équation de Poisson	21
2.1 Equation de Poisson	21
2.2 Les Conditions aux limites	22
2.3 Les Problèmes Elliptique	23

3	Méthode des éléments finis	41
3.1	Méthode de Foedo-Galerkin	41
3.1.1	Méthode des éléments finis	43
3.1.2	Convergence par Méthode des éléments finis \mathbb{P}_1	44
3.1.3	Méthode des éléments finis dans dimension 2	50
3.1.4	Erreur d'approximation et la convergence de la méthode des éléments finis	52
	Bibliography	56

Introduction

Équation de Poisson est une équation aux dérivées partielles de seconde degré. Il a été nommé en remerciement au physicien français Siméon Poisson, qui fut le premier à découvrir son application dans la gravité cosmique et l'électricité statique, où il contrôlait la relation entre le potentiel électrique et la distribution de la charge électrique, et il a également des applications dans la théorie de potentiel, l'équation de Poisson est mathématiquement formulée comme suit $\Delta\varphi = f$ telle que f une fonction réelle et φ est ce que nous voulons trouver, qui à son tour est un montant scalaire, avec Δ étant le symbole de l'opérateur différentiel laplacien L'équation est décomposée en coordonnées cartésiennes tridimensionnelles comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = f(x, y, z)$$

Si $f = 0$, l'équation est appelée l'équation de Laplace harmonique

En électricité statique selon la loi de **Gauss** (une des équations de Maxwell) alors

$$\nabla D = \rho$$

∇ est l'opérateur d'espace, D représente le déplacement électrique, ρ est la densité de charges libres.

Et puisque

$$D = \varepsilon E$$

telle que ε est la permittivité moyenne, E est le champ électrique. Puisque chaque champ électrostatique (selon les équations de Maxwell pour les champs électriques statiques).

$\nabla \cdot X_E = 0$ avec $\nabla \cdot X$, le champ électrique peut être écrit comme suit

$$E = -\nabla V$$

où V représente le potentiel électrique et Δ l'opérateur de gradient. En Appliquons l'opérateur de divergence à l'équation (de le champ électrique), puis remplacement du côté gauche par l'équation $\nabla D = \rho$ alors : $\nabla(\nabla V) = \nabla^2 V = -\frac{l}{\tau}$ et cette équation forme une équation de Poisson.

Cette simple introduction de l'équation de Poisson, donne une indication du modeste travail de notre mémoire, qui consiste en l'étude de l'existence des solutions à cette équation avec des conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Mixte) et le calcul des solutions approchées par la méthode des éléments finis.

Nous présenterons cette étude en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons les concepts et théories de base qui nous aident à étudier cette équation. Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de solutions à cette équation, qui devient un problème lorsqu'elle est On dit le problème de Dirichlet ou de Neumann de l'équation de Poisson et c'est en fonction de la condition aux limites qu'en plus de l'équation.

cette étude se fait en trois étapes : trouver la formule variationnelle, puis sa résoudre , et enfin l'équivalence avec le problème

Dans le troisième chapitre, nous traitons la méthode de Galerkin, qui est une introduction à la méthode des éléments finis que nous utilisons pour calculer les solutions approchées de cette équation et ceci dans les première et deuxième dimensions 1 et 2.

Nous concluons ce travail par l'étude l'erreur d'approximation et la convergence de la méthode des éléments finis.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Equation différentielle

Définition 1.1.1. Une équation différentielle est une équation où l'inconnu est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y), et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées (dérivée première y' ou dérivées d'ordres supérieurs y', y'', \dots), et s'écrit de la forme :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^p) = 0 \quad (1.1)$$

1.1.1 Ordre d'équation différentielle

Définition 1.1.2. on appelle ordre d'une équation différentielle la dérivée supérieure qui apparaît dans l'équation différentielle

Equation différentielle du premier ordre

Définition 1.1.3. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(x, y(x)), x \in I \subset \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Equation différentielle d'ordre p

Définition 1.1.4. On appelle équation différentielle d'ordre p une equation de la forme

$$y^p = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{p-1}), x \in I \subset \mathbb{R} \quad (1.3)$$

ou f est une application continue donnée

une fonction y de classe $C^1(I)$ vérifiant (1.2) est dite solution de l'équation différentielle de premier ordre. une fonction y de classe $C^p(I)$ vérifiant (1.3) est dite solution de l'équation différentielle d'ordre p .

1.1.2 Degré d'équation différentielle

Définition 1.1.5. *Le degré d'une équation différentielle est la puissance de la dérivé supérieure.*

1.1.3 Equation différentielle linéaire

Définition 1.1.6. *une équation différentielle d'ordre p est linéaire si elle est de la forme :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{p-1}(x)y^{p-1} + a_p(x)y^p = g(x)$$

les coefficients a_i dépendent au plus de x , g est une fonction réelle continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

1.1.4 Equation différentielle linéaire homogène

Définition 1.1.7. *Une équation différentielle linéaire est homogène, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{p-1}(x)y^{p-1} + a_p(x)y^p = 0$$

1.1.5 Equation différentielle linéaire non homogène

Définition 1.1.8. *Une équation différentielle linéaire est non homogène, si la fonction g s'annule pas ($g \neq 0$)*

Remarque 1.1.1. *Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si et seulement si les fonctions a_i sont constantes :*

$$a_0y + a_1y' + \dots + a_{p-1}y^{p-1} + a_py^p = g(x)$$

où g est une fonction continue.

1.1.6 Solution d'équation différentielle

Définition 1.1.9. On appelle solution d'une équation différentielle d'ordre p sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction y définie sur cet intervalle I , p fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I . On notera en général cette solution (y, I) .

1.2 Equation différentielle linéaire Partielle

Définition 1.2.1. Une équation différentielle partielle est une équation qui contient des dérivées partielles et la fonction inconnue en elle dépend de plusieurs variables, par exemple la température $u(x, t)$ qui dépend de la position x et du temps t .

1.2.1 Classification des équations aux dérivées partielles

On a l'équation caractéristique :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

1. Types d'équations aux dérivées partielles :

Chaque équation différentielle partielle représente l'un des types suivants :

Parabole : si $b^2 - 4ac = 0$

Hyperbole : si $b^2 - 4ac > 0$

Ellipse : si $b^2 - 4ac < 0$

1.2.2 Ensemble régulier

Définition 1.2.2. On dit qu'un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est **régulier** de classe C^k (avec un entier $k \geq 1$) s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\omega_i)_{0 \leq i \leq j}$ tels que

$$\overline{\omega_0} \subset \Omega, \quad \overline{\Omega} \subset \cup_{i=0}^j \omega_i, \quad \partial\Omega \subset \cup_{i=0}^j \omega_i$$

et que, pour chaque $i \in [1, \dots, j]$, il existe une application bijective ϕ_i de classe C^k , de ω_i dans l'ensemble

$$Q = \{y = (y'; y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |y'| < 1, |y_n| < 1\}$$

dont l'inverse est aussi de classe C^k , et telle que

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega_i \cap \Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, y_n > 0\} = Q^+ \\ \phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, y_n = 0\} = Q^+ \end{aligned}$$

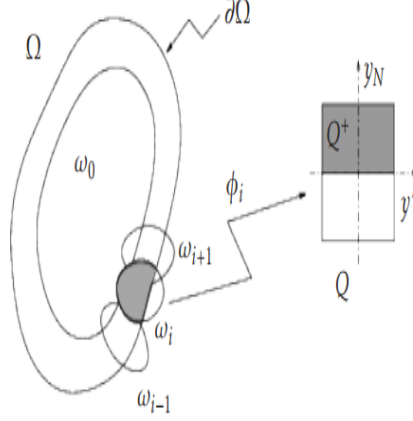


Figure 1.1 Définition de la régularité d'un ouvert

1.2.3 Formule de Green

Théorème 1.2.1. *soit Ω un ouvert régulier de classe C^1 soit u une fonction régulier de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifie la formule d'intégration par partie*

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x))v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds, \quad (1.4)$$

où $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i}_{1 \leq i \leq n}$ est le vecteur gradient de u , et

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i \text{ et } \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$$

Démonstration. on remplaçons v par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et u par v on trouve

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i ds$$

$$\int_{\Omega} v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i} \right) dx = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_i ds$$

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds$$

□

1.3 Les Espaces

Normes et produits scalaires

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1.3.1. $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur E si et seulement si elle vérifie :

- 1) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Définition 1.3.2. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc un produit scalaire sur E si et seulement s'il vérifie :

- 1) $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 2) $\forall x_1, x_2, y \in E, \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
- 3) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- 4) $\forall x \in E, x \neq 0, \langle x, x \rangle > 0$

A partir d'un produit scalaire, on peut définir une norme induite : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ alors, d'après inégalité triangulaire, On a l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

-Un espace vectoriel muni d'une norme est appelée **espace normé**.

-Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**.

En particulier, c'est donc un espace normé pour la norme induite .

Définition 1.3.3. Soit E un espace vectoriel et $(x_n)_n$ une suite de E . $(x_n)_n$ est une **suite de Cauchy** si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q > N \Rightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.3.1. Un espace vectoriel est **complet** si et seulement si toute suite de Cauchy est **convergente**.

Définition 1.3.4. *Un espace normé complet est un espace de Banach.*

Définition 1.3.5. *Un espace préhilbertien complet est un **espace de Hilbert**.*

Définition 1.3.6. *Un espace de Hilbert de dimension finie est appelée **espace euclidien***

Définition 1.3.7. *On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω par*

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable, } \int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty \right\}$$

Théorème 1.3.1. *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.3.8. *Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit le support de φ par :*

$$\text{Supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega / \varphi(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.3.9. *On appelle $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions-test de Ω vers \mathbb{R} , de classe C^∞ , et a support compact inclus dans Ω .*

Théorème 1.3.2. *$\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L_2(\Omega)$ c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une suite $f_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Corollaire 1.3.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0,$$

alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω .

Démonstration. Soit $f \in L^2(\Omega)$, par densité il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que f_n converge vers f in $L^2(\Omega)$ et on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^2 dx &= \int_{\Omega} (f^2 - f f_n + f f_n) dx \\ \int_{\Omega} f^2 dx &= \int_{\Omega} f^2 - f f_n dx + \int_{\Omega} f f_n dx \end{aligned}$$

et puisque $f \in L^2(\Omega)$ et $(f_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} f f_n dx = 0$$

et d'après l'inégalité de Schwartz on trouve

$$0 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|f(f - f_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et parce que f_n converge vers f dans $L^2(\Omega)$ dépasse par la limite on trouve

$$\|f\| \Rightarrow f = 0 \text{ presque par tout}$$

□

Dérivation faible

On définit tout d'abord le concept de dérivée faible dans $L^2(\Omega)$. Cette notion généralise la dérivation usuelle (parfois appelée, par opposition, dérivation forte) et est un cas particulier de la dérivation au sens des distributions.

Définition 1.3.10. Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, telles que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx \quad (1.5)$$

Chaque w_i est appelée la i -ème dérivée partielle faible de v et notée $\frac{\partial v}{\partial x_i}$

Lemme 1.3.1. Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\left| \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.6)$$

alors v est dérivable au sens faible.

Démonstration. : Soit L la forme linéaire définie par

$$L(\phi) = \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx$$

A priori $L(\phi)$ n'est définie que pour $\phi \in D(\Omega)$, mais grâce à inégalité (1.6), on peut étendre L par continuité à toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ car $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ d'après le Théorème 1.3.2. En fait, l'inégalité (1.6) prouve que la forme linéaire L est continue sur $L^2(\Omega)$. En vertu du théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction $(-w_i) \in L^2(\Omega)$ telle que

$$L(\phi) = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx$$

ce qui prouve que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$.

On retrouve un résultat bien connu pour la dérivée usuelle □

Définition 1.3.11. Soit σ une fonction de Ω dans \mathbb{R}^n dont toutes les composantes appartiennent à $L^2(\Omega)$ (on note $\sigma \in L^2(\Omega)^n$).

On dit que σ admet une divergence au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que, pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = - \int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx$$

La fonction w est appelée la divergence faible de σ et notée $\text{div} \phi$.

Lemme 1.3.2. Soit σ une fonction de $L^2(\Omega)^n$. S'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a

$$\left| \int_{\Omega} \sigma(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

alors σ admet une divergence au sens faible.

1.3.1 Les espaces $H^m(\Omega)$

Définition 1.3.12. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre m est définie par

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

où la dérivée partielle $D^\alpha v$ est à prendre au sens faible.

Par extension, on voit aussi que

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

Proposition 1.3.2. *l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx \quad (1.7)$$

et de la norme $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Théorème 1.3.3. *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^m , ou bien si $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$*

1.3.2 Les espaces $H^1(\Omega)$

Définition 1.3.13. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, n\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (1.8)$$

$\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v .

$H^1(\Omega)$ est appelé **espace de Sobolev d'ordre 1**.

En physique ou en mécanique l'espace de Sobolev est souvent appelé **espace d'énergie** au sens où il est constitué des fonctions d'énergie finie (c'est-à-dire de norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ finie).

Proposition 1.3.3. *l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \left(u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \right) dx \quad (1.9)$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Démonstration. Il est évident que (1.9) est bien un produit scalaire dans $H^1(\Omega)$. il reste donc à montrer que $H^1(\Omega)$ est complet pour la norme associée.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$.

Par définition de la norme de $H^1(\Omega)$, $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, il existe des limites

u et w_i telles que u_n converge vers u et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ converge vers w_i dans $L^2(\Omega)$. Or, par définition de la dérivée faible de u_n , pour toute fonction $\phi \in D(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \phi(x) dx \quad (1.10)$$

Passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans 1.10, on obtient

$$\int_{\Omega} u_n(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \omega_i(x) \phi(x) dx$$

ce qui prouve que u est dérivable au sens faible et que w_i est la i -ème dérivée partielle faible de u , $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Donc, u appartient bien à $H^1(\Omega)$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$. \square

Remarque 1.3.1. *On a l'équivalence des normes*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \equiv \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

1.3.3 Les espaces $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3.14. *Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ et on a*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

tel que $\partial\Omega$ est la frontière de Ω .

Définition 1.3.15. *Pour toute fonction u de $H^1(\Omega)$, on peut définir*

$$|u|_1 = \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_0^2 \right)^{1/2} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 \right)^{1/2} dx$$

Lemme 1.3.3. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in C^1(\overline{\Omega})$ qui s'annule sur le bord $\partial\Omega$*

$$\int |v(x)|^2 dx \leq C \int |\nabla v(x)|^2 dx$$

Théorème 1.3.4. *Soit Ω un ouvert bornée sur \mathbb{R}^n et régulier de classe C^1 , on définit l'application de trace γ_0*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

vérifier

$$\exists c > 0 : \forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Théorème 1.3.5. [de densité] *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , ou bien si $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, ou encore si $\Omega = \mathbb{R}^n$ alors $D(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Rappelons que la notation \mathbb{R}_+^n désigne le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_n > 0\}$.

1.3.4 Formule de Green Généralisé

Définition 1.3.16. *soit Ω un ouvert bornée et régulier de C^2 , $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$ alors*

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x))v(x)dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds \quad (1.11)$$

Démonstration. On a (1.11) vrai pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $u \in C^1(\overline{\Omega})$, et par ce que

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset C^2(\overline{\Omega})$$

et par la densité

$$H^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\overline{\Omega})}^{H^m(\Omega)}$$

on trouve que la relation 1.11 vrai pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. □

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.3.6. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Il existe une constante C telle que*

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \quad (1.12)$$

pour toute fonction test v dans $H_0^1(\Omega)$.

Résultat

On a

$$\|v\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

c'est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent au norme dans $H^1(\Omega)$

Démonstration. On a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2$$

et d'autre part

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

c'est à dire

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \tag{1.13}$$

d'autre part, en utilisant (Poincaré)

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ &\leq c^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ &\leq (1 + c^2) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \end{aligned}$$

alors

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + c^2)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \tag{1.14}$$

donc d'après (1.13) et (1.14) on trouve

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + c^2)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

□

Définition 1.3.17. Une forme **linéaire** $L(v)$ telle que :

$$\begin{aligned} L : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto L(v) \end{aligned}$$

est **continue** si et seulement si il existe une constante K telle que

$$|L(v)| \leq K\|v\|_V, \forall v \in V$$

Définition 1.3.18. Une forme **bilinéaire** $a(u, v)$ telle que

$$\begin{aligned} a : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) \end{aligned}$$

est **continue** si et seulement si il existe une constante M telle que

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \forall (u, v) \in V \times V$$

Définition 1.3.19. Une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur $V \times V$ est **coercive** (ou *V-elliptique*) si et seulement si il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \forall u \in V$$

Définition 1.3.20. On appelle V' **le dual de V** l'ensemble des formes linéaires continues sur V . Pour tout $L \in V'$ on note

$$\|L\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{L(x)}{\|v\|_V}$$

Théorème 1.3.7. [Théorème de Riesz] Soit V un espace de Hilbert et V' Le dual de V alors

$$\begin{aligned} \forall L \in V' \exists ! y \in V, \quad \langle x, y \rangle_V = L(x) \quad \forall x \in V \\ \|L\|_{V'} = \|y\|_V \end{aligned}$$

1.3.5 Formulation variationnelle

Soit V espace de Hilbert réel muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$. On définit la formulation variationnelle par la forme suivante :

$$(FV) \begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V \end{cases}$$

où $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$
 $L(\cdot)$ est une forme linéaire sur V .

1.4 Théorème de Lax-Miligram

Théorème 1.4.1. (Lax -Miligram) Soit V un espace de **Hilbert**. Soit $a(.,.)$ une forme **bilinéaire continue coercive** sur V . Soit $L(.)$ une forme linéaire continue sur V . Alors il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad (1.15)$$

Démonstration. Pour tout w dans V , l'application $v \rightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V , le théorème de représentation de Riesz entraîne qu'il existe un élément de V noté $A(w)$ tel que :

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \text{ pour tout } v \in V$$

Par ailleurs, la **bilinéarité** de $a(w, v)$ implique évidemment la linéarité de l'application $w \rightarrow A(w)$.

De plus, en prenant $v = A(w)$, la **continuité** de $a(w, v)$ montre que

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|$$

c'est-à-dire que $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ et donc $w \rightarrow A(w)$ est continue.

Une autre application du théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe un élément de V , noté f , tel que $\|f\|_V = \|L\|_V$ et

$$L(v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in V$$

Finalement, le problème variationnel est équivalent à trouver $u \in V$ tel que :

$$A(u) = f \quad (1.16)$$

Pour démontrer le théorème il nous faut donc montrer que l'opérateur A est **bijectif** de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u) et que son inverse est continue (ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à L). La coercivité de $a(w, v)$ montre que

$$v\|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|A(w)\|\|w\|$$

ce qui donne

$$v\|w\| \leq \|A(w)\| \text{ pour tout } w \in V \quad (1.17)$$

c'est-à-dire que A est **injectif**.

Pour montrer que A est **surjectif**, c'est-à-dire que $Im(A) = V$ (ce qui n'est pas évident si V est de dimension infinie), il suffit de montrer que $Im(A)$ est fermé dans V et que $Im(A)^\perp = \{0\}$.

En effet, dans ce cas on voit que $V = \{0\}^\perp = (Im(A)^\perp)^\perp = \overline{Im(A)} = Im(A)$, ce

qui prouve bien que A est **surjectif**. Soit $A(w_n)$ une suite dans $Im(A)$ qui converge vers b dans V . En vertu de (1.17) on a

$$v\|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

qui tend vers zéro quand n et p tendent vers l'infini. Donc w_n est **une suite de Cauchy** dans l'espace de Hilbert V , c'est-à-dire qu'elle converge vers une limite $w \in V$. Alors, par continuité de A on en déduit que $A(w_n)$ converge vers $A(w) = b$, c'est-à-dire que $b \in Im(A)$ et $Im(A)$ est donc **fermé**. D'autre part, soit $v \in Im(A)^\perp$, la coercivité de $a(w, v)$ implique que

$$v\|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle = 0$$

c'est-à-dire que $v = 0$ et $Im(A)^\perp = \{0\}$ ce qui prouve que A est **bijectif**.

Soit A^{-1} son inverse : l'inégalité précédente avec $w = A^{-1}(v)$ prouve que A^{-1} est **continu**, donc la solution u dépend continûment de f . \square

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier si la forme bilinéaire est symétrique. En effet dans ce cas, la solution de la formulation variationnelle réalise le minimum d'une énergie (très naturelle en physique ou en mécanique)

Proposition 1.4.1. *On se place sous les hypothèses du Théorème de **Lax-Milgram**. On suppose en plus que la forme **bilinéaire** est symétrique $a(w, v) = a(v, w)$ pour tout $v, w \in V$.*

Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \tag{1.18}$$

Soit $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle. Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle.

1.4.1 Inégalité de Poincaré Wirtinger

Théorème 1.4.2. *Soit Ω un ouvert inter connectés de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq +\infty$ alors*

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad \|v - M(v)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)^n} \quad (1.19)$$

telle que

$$M(v) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx \quad (1.20)$$

Chapitre 2

Etude l'existence des solutions de l'équation de Poisson

Histoire de Siméon Deniz Poisson

Siméon Denis Poisson est un savant français en mathématiques et physique, il a laissé ses empreintes en plusieurs domaines, né en 1741 et meurt en 1842. En 1798 il est entré à l'école polytechnique à l'âge de dix-sept ans. En 1801, Ses premières publications paraissent dans le Journal de l'école polytechnique. En 1802, il a travaillé autant que Professeur suppléant à l'école polytechnique et il a été titularisé en 1806. Il a travaillé en 1809 à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, puis élu à l'Académie des Sciences en 1812. Poisson a publié des centaines de mémoires, extraits de mémoires, rapports, notes, et une douzaine de livres, dont deux furent aussitôt traduits en anglais et en allemand pendant ces quarante années. En 1966 Salomon Bochner a résumé ainsi son opinion sur Poisson : « He worked most successfully in virtually all parts of mathematics and mathematical physics. He was probably the greatest French mathematician of the 19th century ».

2.1 Equation de Poisson

Définition 2.1.1. *On appelle équation de Poisson l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante : $\Delta u = f$ où f est une fonction généralement donnée sur un domaine borné de \mathbb{R}^n et de frontière régulière et Δ est l'opérateur laplacien. le problème de trouver u à partir de f et satisfaisant certaines conditions aux limites.*

Remarque 2.1.1. *Si $f = 0$, alors l'équation est appelée "Equation de Laplace".*



FIGURE 2.1 – Siméon Denis Poisson

Remarque 2.1.2. *Les équations de Poisson ne sont pas suffisantes pour déterminer la solution au bord de l'ouvert Ω (ouvert de \mathbb{R}^n). Pour cela, nous avons besoin d'informations complémentaires sur le comportement de la solution au bord de l'ouvert Ω , c'est ce qu'on appelle les «conditions aux limites». Les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont utilisées dans les équations différentielles partielles elliptiques, ces conditions sont très importantes pour l'existence et l'unicité de la solution.*

2.2 Les Conditions aux limites

Définition 2.2.1. *Soit Ω un ouvert bornée sur \mathbb{R}^n , telle que $n \in \mathbb{N}^*$, par termes des conditions aux limites nous étendons les informations supplémentaires sur le bord de Ω de celui-ci*

1. **Condition aux limites de Dirichlet**
 $u(x)$ donnée pour tout $x \in \partial\Omega$.
2. **Conditions aux limites de Neumann**
 $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ donnée pour tout $x \in \partial\Omega$, telle que $\vec{\eta}$ est le vecteur normal à la frontière

$\partial\Omega$, et on a par définition $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ sur $\partial\Omega$

3. Condition mixte

$\frac{\partial u}{\partial n}$ donnée sur Γ_1 , $u(x)$ donnée sur Γ_2 telle que : $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

2.3 Les Problèmes Elliptique

Conditions aux limites de Dirichlet Homogène

Soit le problème aux limites suivant :

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.2)$$

On cherche une solution à l'équation de Poisson (2.1) avec les conditions limites homogènes (2.2) sachant que :

f : Est un second membre qui appartient à l'espace $L^2(\Omega)$.

Ω : Est un ouvert borné de l'espace \mathbb{R}^n .

$\partial\Omega$: Est la frontière de Ω

substituant les équations (2.1) et (2.2) par le système d'équation (P) tel que :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

L'approche variationnelle pour étudier le problème (P) est constituée de trois étapes que nous allons les présenter comme ci-dessous.

1. Établir une formulation variationnelle,
2. Montrer que cette formulation possède une solution unique,
3. Prouver l'équivalence avec le problème initial.

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle (FV)

Dans une première étape il faut proposer une formulation variationnelle du problème aux limites, qui va encoder à elle seule, à la fois l'équation et les conditions aux limites. De manière conceptuelle, il s'agit de trouver :

1. Une forme bilinéaire $a(., .)$,
2. Une forme linéaire $L(., .)$,
3. Un espace de Hilbert V

De manière que (P) soit équivalent à trouver :

$$u \in V \text{ telque } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V. \quad (2.3)$$

V est un espace vectoriel qui vérifie :

$$u, v \in V \Rightarrow \lambda u + \mu v \in V \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

On mettre

$$V = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Pour trouver la formulation variationnelle, on multiplie l'équation (2.1) par une fonction test régulière $v \in V$ et on intègre par parties sur Ω . Au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution u afin que tous les calculs effectués soient licites, ce calcul est principalement formel. A l'aide de la formule de Green on trouve :

$$\int_{\Omega} f v dx = - \int_{\Omega} \Delta u v ds = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx \quad (2.5)$$

avec

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds = 0$$

Puisque u doit satisfaire une condition aux limites de Dirichlet, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on doit choisir un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'égalité (2.5) devient :

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx \quad (2.6)$$

Nous avons supposé que $f \in L^2(\Omega)$, donc il suffit que $v(x) \in L^2(\Omega)$. Les composantes du terme droite de l'équation (2.6), à savoir $\nabla u(x)$ et $\nabla v(x)$ doivent appartenent aussi à $L^2(\Omega)$.

Alors, le sous-espace de Hilbert dont les éléments s'annulent sur le bord $\partial\Omega$

$$V = \{v \in L^2(\Omega); \nabla v \in L^2(\Omega)^n, v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

doit être :

$$V = H_0^1(\Omega)$$

Ainsi, la formulation variationnelle proposée pour (P) est de trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.7)$$

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Cette étape est consacrée à la vérifications que la formulation variationnelle admet une solution unique. Pour aboutir à ce but, nous utilisons le **Théorème de Lax-Miligram** , en vérifiant les hypothèses :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.8)$$

En utilisant l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**, on peut vérifier que L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f| \cdot |v| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

et que a est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |(a, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Selon l'inégalité de Poincaré la forme bilinéaire a est coercive (elliptique), donc il existe $v > 0$ tel que :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.9)$$

On conclut qu'il existe une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle, puisque $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont satisfaites.

Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

Cette dernière étape consiste à vérifier que la résolution de la formulation variationnelle mène bien à la résolution du problème aux limites (P), et à préciser dans quel sens la solution de (2.7) est aussi une solution de (P). On vient de prouver que la formulation variationnelle (2.7) possède une solution unique et pour montrer l'équivalence avec le problème initial, on procède comme suit :

Cas 1 :

$$u \in H^2(\Omega)$$

d'après formule de Green on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx \\ - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u + f) v dx &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \implies -\Delta u &= f \quad \text{presque partout dans } \Omega \end{aligned}$$

On en déduit que

$$u = 0 \quad \text{presque partout sur } \partial\Omega.$$

(c'est-à-dire : $u \in H_0^1(\Omega) \implies u|_{\partial\Omega} = 0$).

Finalement, on a retrouvé l'équation et la condition aux limites de (P).

Cas 2 :

$$u \notin H_0^2(\Omega)$$

Dans ce cas on ne peut pas utiliser la formule de Green. On définit la fonction vectorielle σ , et on pose $\sigma = \nabla u$, tel que :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u dx \cdot \nabla v dx \right| = \left| \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v dx \right| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.10)$$

d'après le critère d'existence d'une divergence faible, pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\exists \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma v dx + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \eta v dx \quad (2.11)$$

avec

$$\int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \eta v dx = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma v dx &= - \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \implies \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f) v dx &= 0. \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \\ \implies -\operatorname{div} \nabla u &= f \quad \text{presque par tout sur } \Omega \\ \implies f &= \Delta u \quad \text{presque par tout sur } \Omega \end{aligned}$$

et on a

$$u \in H_0^1(\Omega) \implies u|_{\partial\Omega} = 0$$

Forme énergétique

Proposition 2.3.1. Soit $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in H_0^1(\Omega)$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx \quad (2.12)$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution unique de la formulation variationnelle. Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que :

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \quad (2.13)$$

Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle suivant :

$$\begin{cases} u \in V \\ J(u) \leq J(v) \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que u est une solution de la forme énergétique et prouvons qu'elle satisfait la formulation variationnel en publiant l'expression énergie $J(u + \theta v)$, telle que θ variable réel tend vers 0, et v pour tout $u \in V$ une fonction test sur V .

supposons que u est une solution de la problème énergétique et on a

$$|\nabla(u + \theta v)|^2 = |\nabla u|^2 + 2\theta \nabla u \nabla v + \theta^2 |\nabla v|^2$$

On intègre dans Ω on trouve

$$J(u + \theta v) = J(u) + \frac{\theta^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \theta \{a(u, v) - L(v)\} \quad (2.14)$$

d'après l'hypothèse on a $J(u) \leq J(u + \theta v)$.

On utilise (2.14) on trouve

$$[a(u, v) - L(v)] \theta + \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right] \theta^2 \geq 0 \quad (2.15)$$

On observe(2.15) est un polynôme de seconde degré, positive donc

$$\begin{aligned} \Delta = (a(u, v) - L(v))^2 &\leq 0, & \forall v \in V \\ \implies (a(u, v) - L(v))^2 &= 0, & \forall v \in V \\ \implies a(u, v) - L(v) &= 0, & \forall v \in V \\ \implies a(u, v) &= L(v), & \forall v \in V \end{aligned}$$

Supposons que u est une solution de la formulation variationnelle et prouvons que c'est une solution de la forme énergétique.

On a

$$J(v) - J(u) = \left\{ a(u, v - u) - L(v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v - u)|^2 dx \right\}$$

et d'après l'hypothèse on trouve

$$a(u, u - v) - L(v - u) = 0$$

alors

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(v - u)|^2 dx \geq 0 \\ \implies J(v) &\geq J(u), \forall v \in V \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} u \in V \\ J(u) \leq J(v) \end{cases}$$

Alors u est une solution de la forme énergétique. □

Problème de Dirichlet non-homogène

Définition 2.3.1. Soit Ω un ouvert borné de l'espace \mathbb{R}^n , $f \in L^2(\Omega)$, On définit le problème de Dirichlet non-homogène comme suivant :

$$(D) \begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u = u_0 & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

telle que u_0 est la trace de fonction de $H^1(\Omega)$. Pour résoudre cette problème suivons la méthode suivant :

on met $w = u - u_0$, on trouve

$$(1) \begin{cases} -\Delta w = f + \Delta u_0 = \tilde{f} & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Le problème (1) est un problème de Dirichlet homogène.

En suivant les même étapes que ci-dessus, on trouve que le problème (1) admet une solution unique $w \in H_0^1(\Omega)$.

Donc le problème (D) admet un solution unique $u = w + u_0$.

Conditions aux limites de Neumann

Définition 2.3.2. Soit Ω un ouvert borné de l'espace \mathbb{R}^n , $\partial\Omega$ son bord, et soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On définit le problème de Neumann comme suit :

$$(N) \begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \eta = g & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Notons que le problème de Neumann n'accepte pas une solution unique car si u est une solution de (N) alors $u + c$ avec (c constante) ainsi solution de (N) car

$$-\Delta(u + c) = -\Delta u - \Delta c = -\Delta u = f$$

avec $(-\Delta c = 0)$

$$\frac{\partial(u + c)}{\partial\eta} = \frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{\partial c}{\partial\eta} = \frac{\partial u}{\partial\eta} = g \quad (2.16)$$

et pour trouver la solution unique de (N) on définit la relation \mathcal{R} comme suit

$$u\mathcal{R}v \Leftrightarrow u - v = c$$

\mathcal{R} est une relation d'équivalence donc l'espace que nous recherchons est l'ensemble des lignes d'équivalence définie comme suit

$$X = H^1(\Omega)/\mathcal{R}$$

Remarque 2.3.1. On prend $v = 1$ on trouve

$$\int_{\Omega} -\Delta u dx = \int_{\Omega} f dx$$

En appliquant Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla 1 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta} \cdot 1 ds = \int_{\Omega} f \cdot 1 dx$$

car $\nabla 1 = 0$ alors

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta} ds = \int_{\Omega} f dx$$

c'est à dire

$$- \int_{\partial\Omega} g ds = \int_{\Omega} f dx$$

et dessus

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0 \quad (2.17)$$

Alors si les fonctions donnée ne vérifient pas la relation (2.17), donc il n'y aura pas de solution au problème de Neumann.

Remarque 2.3.2. *Il est difficile de traiter l'espace X , c'est pourquoi nous définissons un espace équivalent*

$$W = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0 \right\} \quad (2.18)$$

qui est un espace de Hilbert.

Démonstration. W est un espace de Hilbert car
Soit

$$\psi : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.19)$$

$$v \longmapsto \psi(v) = \int_{\Omega} v \quad (2.20)$$

On a

-Il est clair que ψ est une forme linéaire.

ψ est continue car

$$\begin{aligned} |\psi(v)| &= \left| \int_{\Omega} v dx \right| \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

On remarque que $W = \psi^{-1}\{0\}$, W est un sous espace fermée sur $H^1(\Omega)$ qui est de Hilbert donc W est un espace de Hilbert.

On définit la norme sur W comme suit :

$$\|v\|_W \equiv \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

Prouve d'équivalence des normes

On a W un sous espace sur $H^1(\Omega)$ donc

$$\|v\|_W^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2$$

□

et pour démontrer l'équivalence on a

$$\|v\|_W^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 = \|v - M(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2$$

et d'après Poincaré-Wirtinger on trouve

$$\begin{aligned} \|v\|_W^2 &\leq C^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \\ &\leq (C^2 + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\|v\|_W^2 \leq (C^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \quad (2.21)$$

et d'autre part, en utilisons la définition de la norme de $H^1(\Omega)$ on trouve

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

c'est à dire

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|v\|_W \quad (2.22)$$

Alors d'après(2.21) et (2.21) on trouve

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \leq \|v\|_W \leq (C^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \quad (2.23)$$

Et pour résoudre cette problème nous suivons les étapes suivantes :

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle (FV)

Supposons que u est une solution de le problème différentielle partielle et nous montrons qu'il vérifie la formulation variationnelle, en multipliant les deux cotés de l'équation $-\Delta u = f$ et en intégrant sur Ω on trouve

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En utilisons la formule de Green on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \quad \forall v \in W \quad (2.24)$$

Donc on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$(FV) \begin{cases} u \in W \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W \end{cases}$$

telle que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds$$

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

Pour résoudre la formulation variationnelle, il suffit de vérifier les conditions du théorème de Lax-Milligram

1. $L(\cdot)$ linéaire .
2. $L(\cdot)$ continue car

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \right|$$

alors

$$|L(v)| \leq \left| \int_{\Omega} |f| |v| dx + \int_{\partial\Omega} |g| |v| dx \right|$$

En utilisant Cauchy Schwartz on trouve

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Donc

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v - M(v)\|_{L^2(\Omega)} + c \|g\|_{H^1(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Poincaré Wirtinger on trouve

$$|L(v)| \leq c' \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + c.c'' \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_W$$

En utilisons l'équivalence des normes on trouve

$$|L(v)| \leq (c' \|f\|_{L^2(\Omega)} + c.c'' \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_W$$

1. $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire
2. $a(\cdot, \cdot)$ est continue car

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \right|$$

En utilisant Cauchy Schwartz on trouve

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

Donc d'après l'équivalence des normes on obtient

$$|a(u, v)| \leq C^2 \|u\|_W \|v\|_W$$

3. $a(.,.)$ est coercive

On a

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla v = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \geq C^2 \|v\|_W^2$$

Donc d'après Lax-Milgram il existe une unique solution u qui vérifie

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in W$$

Étape 3 : Équivalence avec l'équation différentielle partielle (N)

On a

Si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

Il y'a deux cas

-**Cas 1** : $u \in H^2(\Omega)$

On a

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \quad \forall v \in W$$

En utilisant la formule de Green on trouve

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds \quad \forall v \in W$$

Donc

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = \int_{\partial\Omega} (g - \frac{\partial u}{\partial \eta}) v ds \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Donc

$$-\Delta u - f = 0 \quad \text{presque par tout sur } \Omega$$

Alors

$$-\Delta u = f \quad \text{presque par tout sur } \Omega$$

-**Cas 2** : $u \notin H^2(\Omega)$

On met $\sigma = \nabla u$ donc

$$|\int_{\Omega} \sigma \nabla v dx| = |\int_{\Omega} f v dx|$$

Donc

$$|\int_{\Omega} \sigma \nabla v dx| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après la norme de divergence

$$\exists \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} \sigma \nabla v = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \nabla u \cdot v$$

c'est à dire

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \nabla u \cdot v = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = 0$$

Donc

$$-\Delta u - f = 0 \quad \text{presque par tout sur } \Omega$$

Donc

$$-\Delta u = f \quad \text{presque par tousur } \Omega$$

Si $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ On a

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial \Omega} g v dx \quad \forall v \in W$$

En utilisons formule de Green on trouve

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = \int_{\partial \Omega} (g - \frac{\partial u}{\partial \eta}) v ds \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$$

Et on a

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Donc

$$-\Delta u - f = 0 \quad \text{presque par tout sur } \Omega$$

Alors

$$\int_{\partial\Omega} (g - \frac{\partial u}{\partial \eta}) v ds = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Car $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ donc la dernière relation reste vérifiée pour tout $v \in H^1(\Omega)$, donc

$$\int_{\partial\Omega} (g - \frac{\partial u}{\partial \eta}) \gamma_0(v) ds = 0, \gamma_0(v) \in L^2(\partial\Omega)$$

Alors

$$\langle g - \frac{\partial u}{\partial \eta}, \gamma_0(v) \rangle = 0 \implies g - \frac{\partial u}{\partial \eta} \in L^2(\partial\Omega)^\perp = \{0\}$$

Donc

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad \text{presque partout sur } \partial\Omega.$$

Problème mixte pour l'équation de Poisson

Définition 2.3.3. Soit Ω un ouvert, $\partial\Omega$ divisé en deux parties Γ_1 et Γ_2 c'est à dire :

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{2.25}$$

On considère la condition de Dirichlet sur Γ_1

$$u = u_0 \quad x \in \Gamma_1 \tag{2.26}$$

et la condition de Neumann sur Γ_2

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad x \in \Gamma_2 \tag{2.27}$$

On considère u une solution d'équation de Poisson dans l'espace de Ω , prenons u_0 définie dans $\overline{\Omega}$, et on choisit l'espace des fonctions test

$$W = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\} \tag{2.28}$$

dans ce cas, nous écrivons la condition de Dirichlet non homogène sous la forme équivalente $u = u_0 + w$.

W un espace de Hilbert car :

$$\psi : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$v \longrightarrow \psi(v) = v|_{\Gamma_1}$$

ψ est linéaire.

ψ est continue car :

$$\begin{aligned} \|\psi(v)\|_{L^2(\Gamma_1)} &= \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq c\|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

d'après la définition de la forme linéaire ψ on a $W = \psi^{-1}\{0\}$ donc W est un sous espace dans $H^1(\Omega)$ qui est Hilbert alors W est un espace de Hilbert.

On définit la norme sur W de la forme suivante :

$$\|v\|_W \equiv \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

Pour résoudre le problème mixte d'équation de poisson nous suivons les étapes suivantes :

Étape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle. :

On multiplie l'équation de poisson $-\Delta u = f$ par une fonction test régulière $v \in W$ et on intègre sur Ω on trouve :

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

d'après la formule de Green on trouve :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds$$

mais on a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds = \int_{\Gamma_2} g v ds$$

d'où :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v ds \quad \forall v \in W \quad (2.29)$$

En remplaçant $w = u - u_0$ dans (2.29) on trouve w solution de

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla v dx + \int_{\Gamma_2} g v ds \quad \forall v \in W \quad (2.30)$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} w = u - u_0 & \forall w \in W \\ \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla v dx \end{cases}$$

alors u solution de l'équation (2.29) équivalent que w est une solution de (2.30)

Étape 2 : Résolution de la formulation variationnelle.

$$\begin{cases} a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx & \forall v \in W \\ L(v) = \int_{\Omega} f v ds + \int_{\Gamma_2} g v ds & \forall v \in W \end{cases}$$

a est une forme bilinéaire.

a continue car :

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx \right| \leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|w\|_W \cdot \|v\|_W \end{aligned}$$

L est linéaire et continue car :

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g v ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla v dx \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_2)} \cdot \|v\|_{L^2(\Gamma_2)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^n} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^n} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\leq c' \|f\|_{L^2(\Omega)} + c' c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)^n} \cdot \|v\|_W \end{aligned}$$

a est **coercive** :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq C^2 \|v\|_W^2$$

donc d'après théorème de lax Miligram :

$$\exists ! w \in W : a(w, v) = L(v) \quad \forall v \in W$$

Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

Supposons que w est une solution de la formulation variationnelle et démontrons que u est une solution de l'équation. Nous avons deux cas :

Cas1 : $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = \int_{\Omega} f.v dx + \int_{\Gamma_2} g.v ds - \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla v \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

1 : $w, u \in H^2(\Omega)$

on utilisons la formule de Green et on trouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta w.v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta}.v ds = \int_{\Omega} f.v dx + \int_{\Gamma_2} g.v ds + \int_{\Omega} \Delta u_0 v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \eta}.v ds$$

puisque $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} (\Delta w - \Delta u_0 - f).v dx &= 0 \\ \implies -\Delta w - \Delta u_0 &= f \quad \text{presque partout sur } \Omega \end{aligned}$$

et on a

$$w \in W \implies w|_{\Gamma_1} = 0$$

donc

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\Gamma_1} = u_0 \end{cases}$$

2 : $w, u_0 \notin H^2(\Omega)$

on pose $\sigma = \nabla w$ et $\sigma_0 = \nabla u_0$

on utilise la divergence on trouve

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma.v + \int_{\partial\Omega} \sigma \eta v ds &= \int_{\Omega} f.v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_0.v dx + \int_{\Gamma_2} g v ds \\ \implies -\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma.v dx &= \int_{\Omega} f.v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_0.v dx \\ \implies -\int_{\Omega} (-\operatorname{div} \sigma - \operatorname{div} \sigma_0 - f)v dx &= 0 \\ \implies -\operatorname{div} \sigma - \operatorname{div} \sigma_0 &= f \quad \text{presque par tout sur } \Omega \\ \implies -\Delta u &= f \quad \text{presque par tout sur } \Omega \end{aligned}$$

et on a :

$$w \in W \implies w|_{\Gamma_1} = 0$$

Cas2 : $v \notin \mathcal{D}(\Omega)$

On utilise la divergence on trouve

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot v + \int_{\partial\Omega} \sigma \eta v ds = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_0 \cdot v dx - \int_{\partial\Omega} \sigma_0 \eta v ds + \int_{\Gamma_2} g v ds \forall v \in W$$

$$\implies -\int_{\Omega} \Delta w v dx - \int_{\Omega} \Delta u_0 v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx - \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta}\right) + g \cdot v \cdot ds \forall v \in W$$

$$\implies \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = g \quad \text{presque par tout sur } \Gamma_2$$

$$\implies \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \quad \text{presque par tout sur } \Gamma_2$$

Forme énergétique

On observe que les conditions de théorème de Lax Miligram sont évidentes et $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique donc u vérifie la valeur minimum de l'énergie c'est à dire :

$$J(u) = \min_{v \in W} J(v)$$

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v)$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v)|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_2} g v ds$$

Chapitre 3

Méthode des éléments finis

3.1 Méthode de Foedo-Galerkin

La méthode de Galerkin est un principe général pour construire des approximations pour résoudre le problème aux limites, nous considérons le problème variationnelle dans un espace de dimension infinie et cette méthode est une introduction à la méthode des éléments finis. On a le problème variationnelle $u \in V$:

$$\begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = L(v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \end{cases}$$

ou

$(u, v) \mapsto a(., .)$ une forme bilinéaire sur $V \times V$

$v \mapsto L(v) = \langle f, v \rangle$ une forme linéaire sur V

V un espace vectoriel des fonctions .

Nous appliquerons la méthode de Galerkin au problème de Poisson avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, ou l'espace dans lequel nous cherchons des solutions est $V = H_0^1(\Omega)$, et la formulation variationnelle approximative est :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx = L(v) \quad \forall v \in V$$

l'espace V de dimension infini consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous-espace de dimension finie V_h telle que $V_h \subset V$, c'est-à-dire à chercher la solution du problème variationnel :

$$(FV)_h \begin{cases} u_h \in V_h \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

on considère la base $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ de V_h , c'est à dire V_h est l'espace induite par $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, et la solution $u_h \in V_h$ écrit sous la forme :

$$(u_h) = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j(x)$$

ou $(u_j)_{j=1, \dots, n} \in \mathbb{R}$, donc la solution de la formulation variationnelle approximative consiste à trouver le vecteur u_h vérifier

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \\ \iff a\left(\sum_{j=1}^n u_j \phi_j, v_h\right) &= \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \\ \iff \sum_{j=1}^n a(\phi_j, v_h) u_j &= \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

on pose $v_h = \phi_i$, on trouve :

$$\sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_j = \langle f, \phi_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$$

on pose la matrice $A : A = (A_{ij})_{i \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et, $(A_{ij}) = a(\phi_j, \phi_i)$
le vecteur $F : F = (F_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, et, $F_i = \langle f, \phi_i \rangle$.

on trouve que la solution de $(FV)_h$ est la solution de $AU = F$, si la matrice A est inversible alors la solution que nous recherchons est $U = A^{-1}F$, et elle est unique.

Remarque 3.1.1. *On peut montrer que la solution est unique en prouvant que A est bijective .*

Démonstration. Injective : Il suffit de prouver que le noyau est nul
on a :

$$\begin{aligned} AU = 0 &\implies \sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ &\implies \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_j u_i = 0 \\ &\implies a\left(\sum_{j=1}^n \phi_j u_j, \sum_{i=1}^n \phi_i u_i\right) = 0 \\ &\implies a(u, u) = 0 \end{aligned}$$

a est coercive donc :

$$\begin{aligned} a\|u\|_{V_h}^2 \leq a(u, u) = 0 \\ \implies u = 0 \end{aligned}$$

donc A est injective.

Surjective :

On a A est injective dans l'espace V_h , et V_h de dimension finie alors A est bijective. donc A est inversible ce qui implique que $U = A^{-1}F$, alors elle admet une unique solution, donc la $(FV)_h$ admet une unique solution dans l'espace V_h . \square

3.1.1 Méthode des éléments finis

Définition 3.1.1. *La méthode des éléments finis est un cas spécial de la méthode de Galerkin. L'idée de base de cette méthode est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace V_h de dimension finie ($\dim V_h < \infty$). Le problème "approché" posé sur V_h à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité.*

La Méthode des éléments finis en dimension 1

On a le domaine $\Omega =]0, 1[$. En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ tels que :

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Le maillage sera dit **uniforme** si les points x_j sont équidistants, c'est-à-dire que

$$x_j = jh \text{ avec } h = \frac{1}{n+1}, 0 \leq j \leq n+1,$$

Les points x_j sont aussi appelés **les sommets** (ou nœuds) du maillage.

Dans tout ce qui suit on notera \mathbb{P}_k l'ensemble de polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à k

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, a_j \in \mathbb{R} \right\}$$

\mathbb{P}_k est un espace vectoriel de dimension $k+1$.

3.1.2 Convergence par Méthode des éléments finis \mathbb{P}_1

Considérant l'espace des fonctions de dimension finie V_h^1 inclus de l'espace V_h , telle que :

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \text{ telle que } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq j \leq n \right\}$$

$$V_h^1 = \left\{ v \in V_h : v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

V_h^1 est un sous espace sur H_0^1 de dimension n

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

et on a le graphe de la fonction ϕ

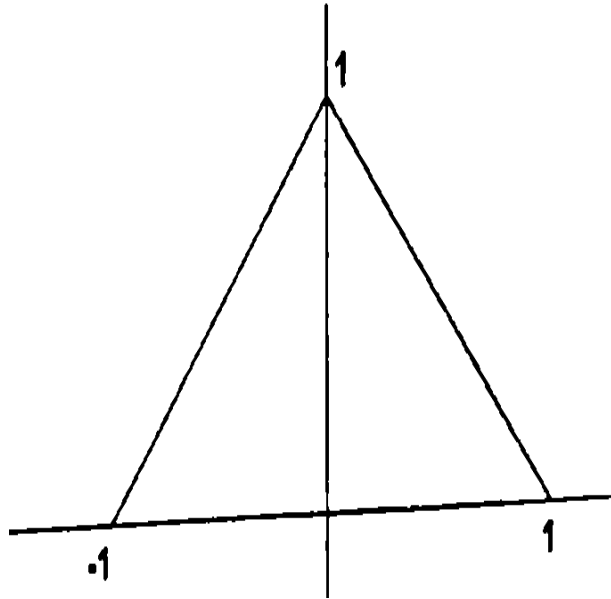


Figure 3.1 Les fonctions ϕ

Lorsque le maillage est uniforme, les fonctions de base se définissent à partir d'une unique fonction ϕ par

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right)$$

et

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{x - x_j}{h} \right| & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Lemme 3.1.1. *L'espace V_h , est un sous-espace de $H^1(0, 1)$ de dimension $n + 2$, et toute fonction $v_h \in V$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ comme suit*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j) \phi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Démonstration. Avant de passer à la preuve rappelons que les fonctions continues et de classe C^1 sont des fonctions de $H^1(0, 1)$ d'autre part en remarquant que $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, alors :

$$\begin{aligned} v_h \in V_h &\implies v_h(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \phi_j(x_i) \\ \implies v_h(x_i) &= \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \phi_j(x_i) = \alpha_i \\ \implies v_h(x) &= \sum_{j=0}^{n+1} v_h(x_j) \phi_j(x) \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.2. *L'importance de la méthode des éléments finis est que l'ensemble $\{x, \phi_i(x) \neq 0, \forall i\}$ est petit par rapport à l'intervalle de la solution $[0, 1]$. Cela conduit à que la majorité des coefficients de la matrice de rigidité $A = a(\phi_i, \phi_i)_{1 \leq i, j \leq n}$*

seront nuls.

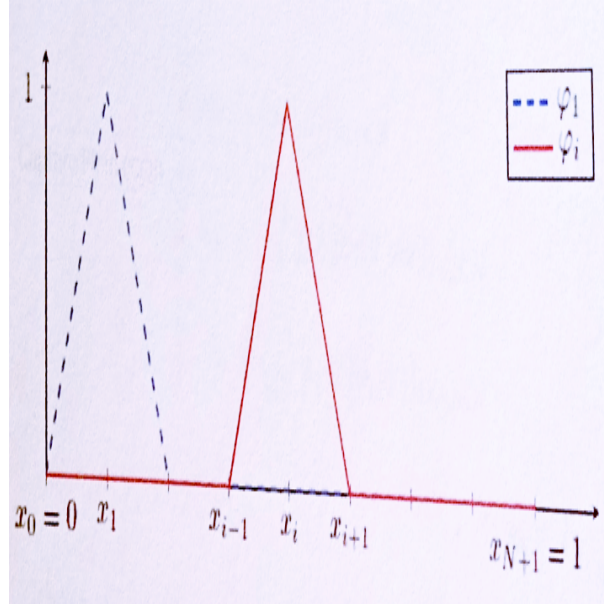


Figure 3.2 Les fonctions de base.

Exemple 3.1.1. Problème de Dirichlet de dimension 1 :

Considérons le Problème de Dirichlet suivants :

$$\begin{cases} -u'' = f, x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

. On commence par écrire le problème à résoudre sous une forme dite faible ou variationnelle. Celle-ci s'obtient en multipliant l'équation initiale de Dirichlet par une fonction v qui s'annule également sur le bord du domaine, à intégrer sur tout le domaine, et à faire une intégration par parties. On obtient successivement

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

puis, comme $-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ (le terme tout intégré disparaît car $v(0) = v(1) = 0$), on arrive à

$$-\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (3.1)$$

Pour toute fonction v suffisamment dérivable 1 pour que le calcul ait un sens. Cette formulation variationnelle peut s'appliquer dans le cas de l'espace de fonction V_h^1 , c'est-à-dire que l'on peut chercher à résoudre le problème suivant

$$\text{Trouver } u_h \in V_h^1 \text{ telque } \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \quad (3.2)$$

On décompose alors u_h sur la base des $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^n u_h(x_j)\phi_j(x)$$

et on prend $v_h = \phi_i$ ce qui donne

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n u_h(x_j)\phi_j(x) \right)' \phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

$$\sum_{j=1}^n u_h(x_j) \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

En notant

$$\begin{cases} U_h &= (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq n} \\ b_h &= \left(\int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \right)_{1 \leq i \leq n} \\ A_h &= \left(\int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{cases}$$

la formulation variationnelle donc revient à résoudre dans \mathbb{R}^n le système linéaire :

$$A_h U_h = b_h$$

En résolvant ce système linéaire, on obtient le vecteur U_h dont les composantes sont les valeurs de u_h aux sommets $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ du maillage. si $j \neq i-1$ ou $j \neq i$ ou $j \neq j+1$ alors les fonctions $\phi_j(x) \cdot \phi_i(x) = 0$ donc $\phi_j' \cdot \phi_i'(x) = 0$.

Calcule A_h

on a :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 1 - \frac{x - x_i}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{x_{j+1}-x_j} & si \quad j = i - 1 \\ \frac{1}{x_j - x_{j-1}} + \frac{1}{x_{j+1} - x_j} & si \quad j = i \\ -\frac{1}{x_j - x_{j-1}} & si \quad j = i + 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et, dans le cas du maillage uniforme, on aura :

$$\int_0^1 \phi'_j(x)\phi'_i(x)dx = \begin{cases} -\frac{1}{h} & si \quad j = i - 1 \\ \frac{2}{h} & si \quad j = i \\ -\frac{1}{h} & si \quad j = i + 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La matrice A_h est tridiagonale et s'écrit dans ce cas :

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & 0 \\ . & . & . & . & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Définition 3.1.2. On dit qu'une matrice A est définie positive si :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \langle Au, u \rangle > 0$$

Lemme 3.1.2. Toute matrice A définie positive est inversible.

Démonstration. Démonstration par l'absurde : supposant que A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $u \neq 0$ de \mathbb{R}^n tel que $Au = 0$ ce qui implique que $\langle Au, u \rangle = 0$ avec $u \neq 0$, contradiction avec A est définie positive.

Montrons que A_h est définie positive

pour $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n , le vecteur $A_h u_h$ donnée par

$$\left(\sum_{j=1}^n A_1 u_j, \dots, \sum_{j=1}^n A_n u_j \right) = \left(\sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_1) u_j, \dots, \sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_n) u_j \right)$$

on trouve

$$\langle A_h u_h, u_h \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_1) u_j u_i = a\left(\sum_{j=1}^n u_j \phi_j, \sum_{i=1}^n u_i \phi_i\right) = a(\tilde{u}, \tilde{u}) = \int_0^1 |\tilde{u}'(x)|^2 dx$$

telle que $\tilde{u}(x)$ une fonction de V_h^1 définie par $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(x)$ et (u_1, u_2, \dots, u_n) ne sont pas nuls, peut facilement vérifier que $\tilde{u}(x) \neq 0$ implique que $\int_0^1 |\tilde{u}'(x)|^2 dx > 0$ alors A_h est définie positive, donc A_h est inversible. \square

Calcul b_h

On a $b_{h_i} = \langle f, \phi_i \rangle_{1 \leq i \leq n}$, pour obtenir le second membre b_h il faut calculer les intégrales

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_i \rangle &= \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \phi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx \\ b_{h_i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

L'évaluation exacte du second membre b_h peut être difficile ou impossible si la fonction f est compliquée. En pratique on a recours à des formules de quadrature (ou formules d'intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales définissant b_h . Par exemple, on peut utiliser la formule du "point milieu"

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$$

ou la formule des "trapèzes"

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx \frac{1}{2} (\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i))$$

ou la formule de Simson

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) dx \approx (x_{i+1} - x_i) \frac{\psi(x_i) + 4\psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + \psi(x_{i+1})}{6}$$

si on utilise la formule de "trapèzes", on trouve :

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

tel que (u_1, u_2, \dots, u_n) inconnu et la solution approximative est alors donnée par $u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i) \phi_i(x)$

3.1.3 Méthode des éléments finis dans dimension 2

On explique toujours la méthode des éléments finis sur le problème de Dirichlet homogène :

$$(p) = \begin{cases} -\Delta u & = f, & x \in \Omega \\ u & = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tel que Ω est un ouvert borné sur \mathbb{R}^2 , supposons que la formulation variationnelle du problème admette une solution u dans l'espace V , tel que l'espace V est l'ensemble des fonctions continue de classe C^1 par morceau sur $\bar{\Omega}$ et s'annule sur la frontière. Nous recherchons l'approximation par la fonction u_h solution de la même formulation variationnelle avec remplacement V par l'espace de l'approximation V_h .

premièrement

On va définir un maillage Ω dans la dimension 2.

Définition 3.1.3. *On appelle un maillage triangulaire T_h pour Ω chaque ensemble de triangles $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ irréguliers qui divise Ω . On suppose que les triangles sont fermés et l'intersection à l'intérieur de deux triangles K_i et K_j est vide ou égale à un sommet commun de deux triangles, ou un coté commun de deux triangles. Plus tard, on note le sommet ou le nœud du maillage (les sommets des triangles communs du maillage)*

Remarque 3.1.3. *Un maillage peut être construit à partir de quadrilatères ou de polygones en général, comme dans la dimension 1.*

On définit \mathbb{P}_k l'espace d'un polynôme à deux variables de degré inférieur ou égal à k .

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x, y) = \sum_{i, j > 0, i+j \leq k} a_{ij} x^i y^j, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.5)$$

Exemple 3.1.2. *Le polynôme de premier degré s'écrit sous la forme :*

$$p(x, y) = a + bx + cy$$

Le polynôme du second degré s'écrit sous la forme :

$$p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$$

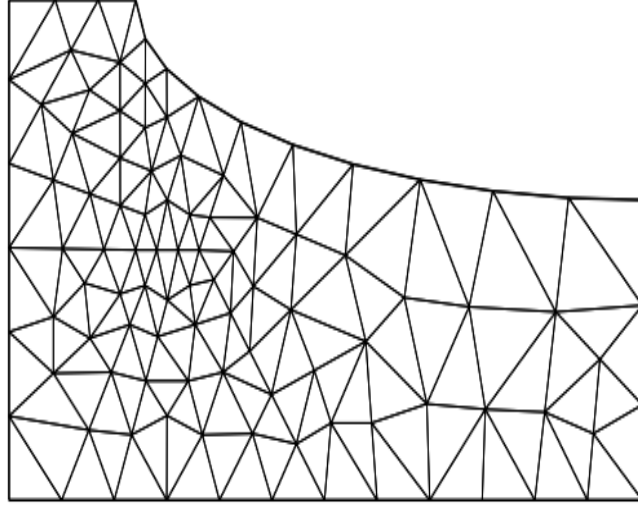


Figure 3.3 -Exemple de maillage triangulaire en dimension $n = 2$

Les espaces approchés sont définis de la même manière dans le cas de la dimension 1, on choisit les fonctions qui sont continues sur $\bar{\Omega}$, ses restrictions sur chaque triangle K_i sont des polynômes.

Pour approcher \mathbb{P}_1 par exemple nous avons :

$$V_h^1 = \{u \in C(\bar{\Omega}), u|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h, u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Les fonctions ϕ_i qui prennent la valeur 1 au nœud (x_i, y_i) du maillage et la valeur 0 au reste des nœuds (x_j, y_j) du maillage forment la base de l'espace V_h^1 .

la matrice de rigidité A_h peut être calculée de la même manière qu'en dimension 1 par la formule :

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x, y) \nabla \phi_i(x, y) dx dy$$

et le deuxième élément

$$\langle f, \phi_i \rangle = \int_{\Omega} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy$$

se calcule sous la forme approximative par les formules quadratiques.

3.1.4 Erreur d'approximation et la convergence de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis se concentre sur le calcul de la solution approximative u_h du problème variationnel en substituant l'espace V par l'espace V_h , tel que ($V_h \subset V$) de dimension finie.

la question qui peut être posée ici est quelles sont les erreurs qui résultent du remplacement de l'espace V par V_h , c'est à dire quelle est l'erreur entre la fonction u et u_h ?

Pour répondre à cette question, nous utilisons un outil qui permet de mesurer la distance entre les deux fonctions u et u_h .

On a pour une fonction v définie sur l'intervalle $[0, 1]$, nous savons que la norme dans L^2 définie par :

$$\|v\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit la distance entre deux fonctions v_1 et v_2 par :

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|_{L^2(0,1)}$$

On peut définir une norme qui permet de mesurer la distance entre deux fonctions et en même temps celle entre leurs dérivées, qui n'est que la norme définie sur H^1 par :

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(0,1)} &= \left(\|v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v'\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 |v|^2 dx + \int_0^1 |v'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Lemme 3.1.3. *Supposons qu'il existe une solution u de V au problème de poisson dans la dimension 1, tel que V est l'ensemble des fonctions continues, C^1 par morceau sur $[0, 1]$ et vérifie $u(0) = u(1) = 0$.*

Soit $V_h \subset V$ un sous espace approximatif de dimension finie, et soit u_h de V_h la solution approximative.

Alors il existe $c \geq 1$ ne dépend pas du V_h qui vérifie :

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq c \cdot d(u, V_h)$$

telle que :

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)}$$

est la distance entre la fonction u et l'espace approximatif V_h .

Donc l'erreur est limitée d'en haut par la distance entre la solution et l'espace approximatif V_h multipliée par une constante c positive.

Dans l'étape suivante nous estimons la valeur de la distance $d(u, V_h)$ par des fonctions d'espace approximatif V_h , plus précisément par fonctions indexées h qui sont sur le maillage .

Il est clair que plus que h est petit, plus que la dimension de V_h est grande, parce que pour \mathbb{P}_1 par exemple on trouve $\dim V_h = n$ tel que $n = \frac{1}{h-1}$.

De plus, plus V_h est grand, il s'approche de l'espace V , et la solution exacte est u , et nous aurons la figure suivante :

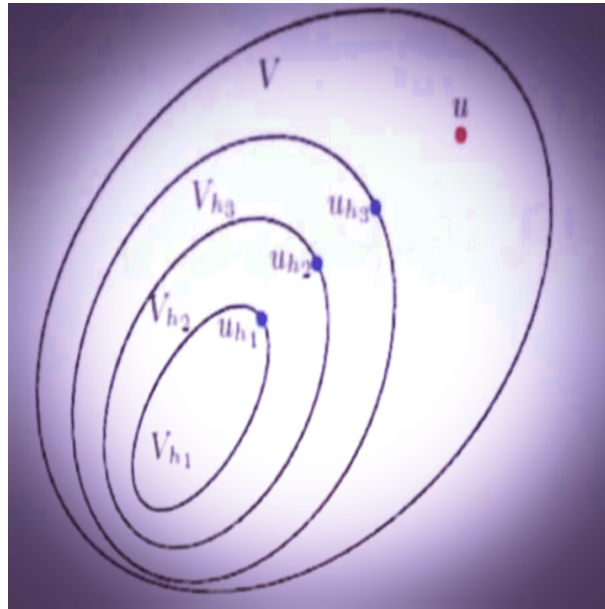


Figure 3.4- De plus, plus V_h est grand, u_h s'approche de u .

Dans le cadre de l'approximation par les éléments finis, on peut vérifier que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(u, V_h) = 0$$

pour cela la solution approchée converge vers la solution exacte pour $h \rightarrow 0$. c'est à dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0$$

3.1. MÉTHODE DE FOEDO-GALERKIN

et pour prouver que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} d(u, V_h) = 0$$

il suffit de trouver la fonction u de V_h qui vérifie :

$$\|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \rightarrow 0$$

et ceci quand h tend vers zéro

On considère l'approximation par les éléments finis \mathbb{P}_1 , et on prend la seule fonction $I_h u(x)$ de V_h^1 qui prend les mêmes valeurs avec u aux points x_i du maillage comme il est illustré dans la figure suivante :

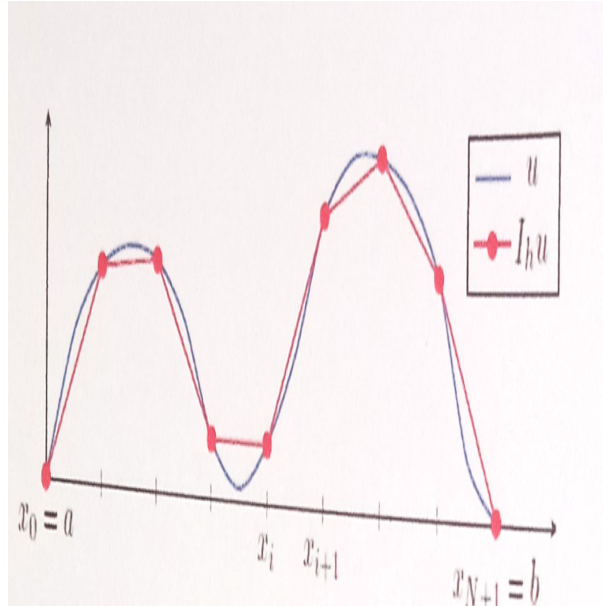


Figure 3.5 -Polarisation de la fonction u

La fonction approximative $I_h u$ appelée polarisation u , exprimée dans la base $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ comme suivant :

$$I_h u(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \phi_i(x)$$

la proposition suivant permet de mesurer la valeur des approximations, que quel soit v de V par polariseur $I_h v$.

Proposition 3.1.1. *Soit v de V et soit $I_h v$ polarisé en V_h^1 , alors on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - I_h v\|_{H^1(0,1)} = 0$$

et si la fonction v de classe C^2 alors il existe $k > 0$ indépendant de h vérifie

$$\|v - I_h v\|_{H^1(0,1)} \leq kh \|v'\|_{L^2(0,1)}$$

Enfin pour prouver la convergence de la solution approchée u_h vers la solution u

$$\begin{aligned} \|u - u_h(v)\|_{H^1(0,1)} &\leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(0,1)} \\ &\leq \|u - I_h v\|_{H^1(0,1)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et dans le cas de la solution u de classe C^2 , on a :

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq ckh \|u'\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0$$

Conclusion

Dans cette mémoire, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solution de problème de poisson avec conditions limites (Dirichlet, Neumann, Mixte) nous utilisons la formulation variationnelle et théoreme de Lax-Milligramme et calculer les solutions approchées par la méthode des éléments finis (dans la dimension 1 et 2). Elle est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites . Nous avons vu que le principe de cette méthode est directement issu de **l'approche variationnelle**. L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace V_h de dimension finie. Le problème "approché" posé sur V_h à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce que le sous-espace V_h soit une bonne approximation de V et que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle soit "proche" de la solution exacte u dans V

Bibliographie

- [1] Grégoire ALLAIRE - François ALOUGES, *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, année 2015 - 2016
- [2] Franck Boyer, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, 18 février 2016
- [3] Eric Blayo, *Notes de cours sur la méthode des éléments finis*, Janvier 2010
- [4] Haim Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications* MASSON 1987
- [5] Haim Brezis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [6] Sonia Fliss, *Introduction à la méthode des éléments finis Résolution des formulations variationnelles*
- [7] Aude Rondepierre et Adeline Rouchon , *Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles Étude théorique*, Année 2012-2013
- [8] P.A.Raviart, J.M.Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*