الجمـــهوريـــة الجـــزائريـــة الديـمقراطيـــــة الشـــعبيـــــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعـلـيـم الـعـالــي والـبـحـث الـعـلـمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جـامـعـة عمّــار ثـلـيــجــي بالأغـــواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـلـيــــة الـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT Sciences de la Matière

Mémoire de Master

Domaine : Sciences de la matière.
Filière de Sciences.
Option : Physique Appliquée.

Présente Par :
Zerouil Yausra

THEME

Généralisation de l'équation de Klein Gordon pour une théorie des champs à haute dérivative.

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

➢ ***Ben Makhlouf abd ennour***	*MCB*	*Président*
➢ ***Souleh Kouider***	*MAA*	*Examinateur*
➢ ***Rejam Fathi***	*MAA*	*Examinateur*
➢ ***Seffai djamel***	*MAA*	*Rapporteur*

Année Universitaire : 2018 – 2019

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Allah, notre créateur de nous avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nous remercions l'ensemble des enseignants, qui nous ont apporté leur aide et qui ont permis grâce à leur contribution à l'élaboration de ce mémoire.

Nous remercions en particulier notre encadreur

Seffai djamel,

pour nous avoir honorésde son aide dans la direction de ce travail, pour sa confiance et ses conseils ainsi que ses motivations qui ont été pour nous un précieux encouragement.

Et je merci tout la famille et tout le responsable Et tous mes amis.

Nos plus vifs remerciements s'adressent aussi à tout le cadre administratif Université Amar Telidji , "Département Sciences de la Matière".

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A ceux qui m'ont donné la vie ;

A ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage ;

A ma très chère mère ;

A mon cher père ;

A mes grands parent ;

A mes frères et mes sœurs ;

A toute ma famille ;

A mes amis ;

A tous mes amis d' ELMENIAA

Chaleureusement

Nom et Prénom

Zerouil Yausra

Sommaire

Sommaire

Chapitre IV: Solution de l'équation de Klein Gordon généralisée

Introduction

Introduction

La relativité générale et la mécanique quantique sont les deux piliers de la physique moderne. Chacune a son domaine d'application et ses prédictions, d'une part la Relativité Générale d'Einstein est une théorie des champs classique pour expliquer les phénomènes physiques gravitationnelle comme un phénomène géométrique, à travers l'identification de la métrique de l'espace-temps au champ de gravitation.

D'autre part la mécanique quantique décrit le monde physique à l'échelle atomique et subatomique avec un langage mathématique purement Algébrique très différent de celui utilisé en relativité générale. La mécanique quantique et en particulier la théorie quantique des champs suppose la donnée à priori d'un espace-temps (Minkowskien) dans lequel évoluent les champs de matières; l'unification de la mécanique quantique et la théorie de la relativité restreinte à aboutit a la construction de la théorie quantique des champs, et les théories de jauge modernes , qui ont permis d'unifier les trois interactions fondamentales faible, forte et Electromagnétique dans le cadre du modèle standard .

Depuis la fondation de la mécanique quantique au début du siècle dernier, un développement considérable est réalisé dans la construction des modèles des équation physique mathématique pour décrire des interactions nucléaires en ou des interactions subatomiques en présence d'un effet gravitationnelle quantique grâce à de nombreuses théorie (supergravité , théorie des corde , théorie des champs non commutative), et puis la résolution de ces équations dans le cadre non relativiste ou dans un contexte relativiste. Parmi ces théorie, la théorie des champ a haut dérivative, La généralisation de la construction de Hamilton aux dérive plus élevée a été publiée en 1850 par Ostrogradski [1]. Le concept de généralisation des équations fondamentale en mécanique quantique n'est pas nouveau en physique. la forme de ces équation doit changer des résultat comparables à la longueur de Planck. Il a été introduit, à savoir l'unification des interactions gravitationnelles et des interactions fortes, électromagnétiques et faibles.

L'introduction des forces gravitationnelles dans la théorie des champs quantiques fait apparaître des divergences qui rendent la théorie non renormalisable. Plusieurs scénarios ont été proposés pour résoudre ce problème, notamment géométrie non commutative qui est y traiter les aspects géométriques de l'espace-temps en terme de notions algébriques. Ou l'existence de dimensions supplémentaires de l'espace-temps, ou l'existence d'une longueur minimale, Cette longueur minimale est supposée être proche de la longueur de Planck.

Les théories des champs avec les Lagrangiens à haut dérivative est une mode traditionnelle en physique, par exemple la généralisation de L'électrodynamique par Podolsk [2, 3,4] ; la gravité effective et les tachyons [5]. L'intérêt pour des systèmes mécanique aux dérives d'ordre supérieur est en vie jusqu'à aujourd'hui [6].

Dans le cadre de la théorie des champs à haut dérivative, la résolution des équations les plus fondamentales est un très nécessaire pour avoir l'influence des termes aux dérive supérieur sur les phénomènes fondamentaux. Par exemple La situation des particules relativiste et l'équation de Klein Gordon, est plus compliquée et la plupart des modèles ne peuvent pas être résolus exactement. Et la plupart des résultats disponibles sont basés sur la théorie des perturbations.

Dans ce travail, nous présentons un modèle généralise d'équation de Klein Gordon base sur la théorie des champs à haut dérivative comme une approche mathématique qui permit d'écrire les effets gravitationnelle en mécanique quantique. Notre objectif est la résolution analytique de l'équation de Klein Gordon avec des termes à la dérive supérieure dans un espace-temps à quatre dimensions, Nous cherchons la modification de ces termes sur la fonction d'onde et la relation de dispersion.

.

Ce mémoire est organisé à quatre chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre, on a exposé le formalisme quadri dimensionnel de la théorie relativiste et les principes fondamentaux. Puis, on a écrit principe de correspondance et l'équation de Schrödinger, et de même procéder dans le cas relativiste avec la relation de dispersion On obtient l'équation de Klein Gordon. Le deuxième chapitre est consacré à la formalisme Ostrogorski;. Dans le troisième chapitre nous présentons le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ et l'expression de l'Hamiltonien, puis en réécrire sous forme des opérateurs de création et d'annihilation, ce procédure est connu se le nom de la quantification canonique. le quatrième chapitre, est réservée à la formulation de l'équation de Klein Gordon dans théorie des champs à haut dérivative et leur solution analytique. A la fin, nous avons présenté nos conclusions.

Chapitre I

Formulation de l’équation de Klein Gordon

Chapitre I : Formulation de l'équation de Klein Gordon

I.1 Formalisme quadridimensionnel :

La similitude entre les notions de temps et d'espace nous suggère d'adopter un formalisme quadridimensionnel. Par exemple, le vecteur de position espace-temps x est représenté par ses composantes contravariantes x^{μ} (indicesupérieur) [7].

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) = (ct, x) \tag{1.1}$$

En général, dans un espace vectoriel à D dimensions, il est possible de choisir D vecteurs de base e_{μ} et de représenter un vecteur A à partir de ses composantes (contravariantes) A^{μ} , parallèles aux e^{μ}. Alors le vecteur A s'écrit dans un espace à quatre dimensions (4D) [7].

$$A = \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} e_{\mu} = A^{\mu} e_{\mu} \tag{1.2}$$

La deuxième égalité utilise la convention d'Einstein où un indice répété contravariant covariant (les composantes covariantes sont en indice inférieur et sont définies plus bas) dans un terme réputé être sommé sur toutes ses valeurs possibles.

Le produit scalaire des vecteurs A et B prend la forme [7].

$$A.B = A^{\mu} e_{\mu}.B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu} \tag{1.3}$$

Où

$$g_{\mu\nu} \equiv e_{\mu}.e_{\nu} \tag{1.4}$$

est appelé le tenseur métrique ou simplement la métrique. Il est commun, et plus simple de choisir une base où les vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ Si } \mu \neq \nu \tag{1.5}$$

Et donc

$$A \cdot B = A^{\mu} B^{\mu} {e_{\mu}}^2. \tag{1.6}$$

Pour le cas des quadrivecteurs d'espace-temps dans l'espace de Minkowski, la longueur généralisée d'un vecteur de position espace-temps x est reliée à l'intervalle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathrm{x.x} &= \mathrm{x^{\mu}x^{\mu}e_{\mu}}^{2} \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

où dans le membre de droite x est la composante du quadri-vecteur le long de l'axe des x. Ainsi la norme des vecteurs de base est

$$\mathrm{e_{\mu}}^{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = 0 \\ -1 \text{ si } \mu = 1,2,3 \end{cases} \tag{1.8}$$

et le tenseur métrique s'écrit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les composantes covariantes (indice inférieur) sont des projections orthogonales de A sur les vecteurs de base e_{μ} . Par exemple,

$$e_{\mu}.A \equiv A_{\mu} \tag{1.9}$$

(Notez l'indice inférieur) ou autrement dit

$$\begin{aligned} A_{\mu} \equiv e_{\mu} \cdot A &= e_{\mu} \cdot A^{\nu} e_{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \, . A^{\nu} \end{aligned}$$

À noter, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et son inverse $g^{\mu\nu}$ coïncident

$$g_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} \tag{1.10}$$

Puisque

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}$$

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \tag{1.12}$$

Et

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \tag{1.13}$$

Considérons les composantes contra variantes du quadrivecteur de position x

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x) \tag{1.14}$$

les composantes covariantes de ce quadrivecteur sont alors

$$x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$= g_{\mu\nu} x^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$= (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

et donc

$$x^\mu = (x^0, x_i)$$

$$x_\mu = (x^0, -x_i) \tag{1.15}$$

Remarque 1

Toute quantité qui a la forme

$$a.b = a^\mu b_\mu \tag{1.16}$$

est un invariant de Lorentz si a et b sont des vecteurs de Lorentz, c'est-à-dire que le produit scalaire a · bn'est pas affecté par une transformation de Lorentz et donc à la même valeur dans tous les systèmes de référence inertiels [7].

Les notions d'énergie et d'impulsion sont aussi intimement liées (tout comme l'espace et le temps) en relativité restreinte. On peut y définir le quadrivecteur énergie-impulsion (composantes contra variantes),

$$p^\mu = (E, P_x, P_y, P_z) \tag{1.17}$$

Où $E = \gamma m_0$ est l'énergie totale et $p_i = \gamma m_0 v_i (i = x, y, z \text{ ou } 1,2,3)$ sont les impulsions. Avec : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

L'énergie cinétique s'obtient par :

$$K = E - m_0$$

$$= (\gamma - 1) m_0. \tag{1.18}$$

(Rappelons qu'on utilise le système d'unités naturelles où $c = 1$).

Par ailleurs, la grandeur de p est un invariant de Lorentz et s'écrit comme

$$p^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$$

$$= (p^0)^2 - (\mathbf{p}^1)^2 - (\mathbf{p}^2)^2 - (\mathbf{p}^3)^2$$

$$= E^2 - \mathbf{p}^2$$

$$= m_0^2 . \tag{1.19}$$

Où m_0 est la masse au repos de la particule soit un invariant de Lorentz. On a donc finalement

$$E^2 - p^2 = m_0^2 \tag{1.20}$$

Ou

$$E^2 = p^2 + m_0^2 \tag{1.21}$$

Gradient, opérateurs différentiels [8]

On adopte les notations suivantes

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.22}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) \tag{1.23}$$

Gradient covariant

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \tag{1.24}$$

Gradient contravariant

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla). \tag{1.25}$$

Le dalembertien

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta = \square \tag{1.26}$$

Sous forme covariante. Donc, l'opérateur à quatre moments est donc noté [7]

$$\hat{P}^\mu = ih\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ih\frac{\partial}{\partial(ct)}, +ih\frac{\partial}{\partial x_1} + ih\frac{\partial}{\partial x_2}, +ih\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$$

$$\begin{aligned} &\equiv ih\nabla^\mu = \left\{ih\frac{\partial}{\partial(ct)}, -ih\frac{\partial}{\partial x}, -ih\frac{\partial}{\partial y}, -ih\frac{\partial}{\partial z}\right\} \\ &= ih\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla\right\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Le potentiel quatre du champ électromagnétique est donné par

$$A^\mu = \{A_0, A\} = \{A_0, A_x, A_y, A_z\} = g^{\mu\nu}A_\nu \tag{1.28}$$

Ici, A^{μ} sont la variante de contra, et $A_{\mu} = \left(A_0; -A_x; -A_y; -A_z\right)$ les composantes covariantes. A partir de A^{μ}, le tenseur de champ électromagnétique suit de la manière bien connue:

$$F^{\mu V} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{v}} - \frac{\partial A^{v}}{\partial x_{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Et en peut d'écrire les quadrivecteurs en imaginaire forme qui est utilisable pour les fonctions d'onde [7].

$$x = (x, y, z, ict)$$

$$p = \left(p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\right)$$

$$A = \left(A_x, A_y, A_z, iA_0\right)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{i\partial(ct)}\right) \tag{1.30}$$

I.2 Principe de correspondance :

Ces postulats sont complétés par le "principe de correspondance" qui suggère ce que doit être l'opérateur A du formalisme quantique, étant donné son analogue classique.

Ce principe fait aussi appel à l'observation que dans le passage mécanique classique ver la mécanique quantique, on passe du crochet de Poisson au commutateur[9]

$$\{\mathrm{f}, \mathrm{g}\} \rightarrow [\hat{\mathrm{f}}, \hat{\mathrm{g}}] = -\mathrm{i}\hbar \{\hat{\mathrm{f}}, \hat{\mathrm{g}}\}$$

En particulier on a le commutateur canonique entre les opérateurs $\hat{\mathrm{q}}$ et $\hat{\mathrm{p}}$de position et d'impulsion, soit [9].

$$[\hat{\mathrm{q}}, \hat{\mathrm{p}}] = \mathrm{i}\hbar$$

(Opérateurs conjugués). Noter cependant que ce principe de correspondance n'est pas sans ambigüité : il ne dit rien sur l'ordre des opérateurs$p$et q à adopter pour passer d'une fonction $\mathrm{f}(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ à sa version quantique.

Notons $|q>$l'état propre de l'opérateur $\hat{q}$ de valeur propre q

$$\hat{q}|q>= q|q>, < q|q'> = \delta(q - q'),\ \int dq\,|q>< q| = Id .$$

`A la description d'un état par un vecteur normalisé ψ (à une phase près), on peut préférer celle par sa fonction d'onde ψ(q), obtenue par produit scalaire

$$\psi(q) = < q|\psi >.$$

L'action de $\hat{p}$ sur ψ se traduit en un opérateur différentiel sur ψ(q)

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q} \text{i.e.} < q|\hat{p}\psi \geq = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi(q)$$

De telle sorte que $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$ est bien vérifiée. En particulier, pour les états propres notés $|p>$ de $\hat{p}$

$$\hat{p}|p>= p|p>$$

On a les fonctions d'onde $\psi_p(q) = < q|p >$satisfaisant

$$< q|\hat{p}\,|p>= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

D'où

$$< q|p>= \psi_p(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\frac{i}{\hbar}\,p.q\,,$$

(Avec une normalisation conventionnelle). Toutes les considérations précédentes s'étendent bien sûr à des vecteurs positions et impulsions à $d$dimensions euclidiennes ou minkowskiennes. Résumons donc le principe de correspondance, en notant désormais les coordonnées de positions

Par $x = x^1, x^2, x^3$ ou (x, y, z).

Energie

$$E \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.31}$$

Impulsion

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \tag{1.32}$$

Ou en notations minkowskiennes,

$$p^\mu \mapsto i\hbar\,\partial^\mu = (i\,\partial^0, -i\nabla)$$

I.3 Equations de Schrödinger :

En mécanique quantique non relativiste on peut établir l'équation de Schrödinger si en S'appuyant Le principe de correspondance équations (1.31) et (1.32) à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste.

En mécanique classique La relation de dispersion d'une particule non relativiste est donnée par [10, 11,12]

$$\hat{H}_{classique} = \frac{P^2}{2m} + V(r) = E \tag{1.33}$$

En mécanique quantique, H devient l'opérateur $\widehat{H}$

$$\hat{H}_{\text{quantique}} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)^2 + V(r) \tag{1.34}$$

$$\hat{H}_{\text{quantique}} = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r) \tag{1.35}$$

Et on a

$$H\Psi = E\Psi \tag{1.36}$$

$$\frac{\mathrm{P}^2}{2m}\Psi = \mathrm{E}\Psi \tag{1.37}$$

L'équation de Schrödinger est alors :

$$\frac{1}{2m}(-\imath\hbar\nabla)^2\Psi = \mathrm{E}\Psi \tag{1.38}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - \mathrm{E}\Psi = 0 \tag{1.39}$$

Ce qui conduit à l'équation de Schrödinger [13]

$$\imath\hbar\partial_t\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \tag{1.40a}$$

$$\imath\hbar\partial_t\psi^*(t,x) = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*(t,x) \tag{1.41b}$$

I.4 Le courant correspondant à l'équation de Schrödinger :

La densité de probabilité d'une particule en un point de l'espace est donnée Par

$$\rho(t,x) = |\psi(t,x)|^2 \tag{1.42}$$

En Cherchons l'équation de conservation associée à cette quantité [13]

$$\partial_t |\phi|^2 = \phi \partial_t \phi^* + \phi^* \partial_t \phi$$

$$\left(\frac{\hbar}{2im} \nabla^2 \psi^*\right) + \psi^* \left(-\frac{\hbar}{2im} \nabla^2 \psi^*\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi)$$

$$= \frac{\hbar}{2im} \nabla (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$$

Ce qui donne

$$\partial_t \rho + \nabla J = 0 \tag{1.43}$$

En définissons

$$J = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \tag{1.44}$$

Cette équation signifie que la "charge" associée à la densité ρ, définie par

$$Q = \int_{R3} \rho(t,x) d^3 x \tag{1.45}$$

Est conservée. En effet, on a :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{R3} \rho(t,x) d^3 x = \int_{R3} \partial_t \rho(t,x) d^3 x$$
$$= \int_{R3} - \nabla J(t,x) d^3 x = -\oint_{\partial R3} J.ndS = 0$$

I.5 Equation de Klein Gordon :

En Essayons de même procéder dans le cas relativiste avec la relation de dispersion [13]

$$\mathrm{E}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{p}^2 = \mathrm{m}^2\mathrm{c}^4 \qquad (1.46)$$

On obtient l'équation de Klein–Gordon

$$(-\hbar^2\partial_t^2 + c^2\hbar^2\nabla^2 - c^4m^2)\psi(t,x) = 0$$

Qui se récrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{h^2}\right)\phi = 0 \\ \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{h^2}\right)\phi^* = 0 \end{aligned} \qquad (1.47)$$

et sous la forme covariante [8]

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0 \qquad (1.48)$$

$$\square\phi + m^2\phi = 0 \qquad (1.49)$$

C'est une équation différentielle du second ordre par rapport au temps. Il faut donc connaitre simultanément ϕ et $\partial_t\phi$ à l'instant initial pour que ϕ , soit complètement déterminée à tout instant ultérieur.
Si on cherche les ondes planes solutions de l'équation (1.43)

$$\phi = Ae^{-ik.x} = Ae^{-i(Et-\vec{p}\vec{x})} \qquad (1.50)$$

on trouve après substitution

$$E = \pm\sqrt{P^2 - m^2} \qquad (1.51)$$

Il existe donc des solutions d'énergie négative $-\sqrt{P^2 - m^2}$, qui est une des difficultés de l'adoption de l'équation [8].

I.6 Le courant correspondant à l'équation de Klein- Gordon :

Pour pouvoir interpréter l'équation d'onde, il faut définir une densité de probabilité de présence et une densité de courant j satisfaisant à l'équation de continuité On prend l'équation on (1.48)multiplie ϕ^* par à droite) [8].

$$\varphi^*(\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi) = 0. \tag{1.52}$$

On prend le conjugué de (1.48) et on multiplié par ϕ (à gauche)

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^*\right)\phi = 0. \tag{1.53}$$

La soustraction membre à membre on obtient

$$\begin{gathered} \phi^*(\partial_\mu \partial^\mu \phi) - \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi^*\right)\phi = 0, \\ \partial_\mu \left[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi\right] = 0. \end{gathered} \tag{1.54}$$

Donc

$$\begin{cases} \rho = \phi^* \partial^0 \phi - \left(\partial^0 \phi^*\right)\phi \\ j^i = \phi^* \partial^i \phi - (\partial^i \phi^*)\phi, i = 1,2,3 \end{cases} \tag{1.55}$$

En analysant l'expression de ρ et j dans (1.49), une remarque s'impose ;la densité $\rho(r,t)$n'est pas définie positive, du fait qu'elle dépend d'une dérivée temporelle, qui Présente une difficulté majeure qui vient s'ajouter à la présence des énergies négatives Pou retenir l'équation de Klein-Gordon, Pauli et Weiss kopt ont réinterprété le Quadrivecteur j^μen multipliant par une charge, $(e) \rightarrow$ $e\, j^\mu = \frac{ieh}{2m_0}(\varphi \nabla^\mu \varphi - \varphi \nabla^\mu \varphi^*)$ ceux-ci représentent alors ej comme vecteur densité de courant, et $e\rho$(r; t)est la densité de charge électrique. Par contre, le nombre de particules ne se conserve pas, c'est à dire on peut toujours créer ou annihiler des paires de particules, phénomènes dont seule la théorie des champs quantique rend compte de manière fidèle, ρ j peuvent être associés à la différence entre le nombre de charges positives, et le nombre de charges négatives, la théorie. Donc peut être vue, comme une théorie à une charge totale et non pas une théorie à une particule.

I.7 Particule chargé de Klein Gordon:

Jusqu'à présent, nous avons examiné l'équation de Klein-Gordon à la fois pour un champ scalaire réel, c'est-à-dire non chargé, et pour un champ scalaire complexe, c'est-à-dire chargé. Dans le cas du champ complexe, nous avons spécifié un courant [7].

$$j^{\mu} = \frac{ieh}{2m_0}(\varphi\nabla^{\mu}\varphi - \varphi\nabla^{\mu}\varphi^{*}) \tag{1.56}$$

Avec $\partial j^{\mu} / \partial x^{\mu} = 0$ Est une charge

$$Q = \left(ieh / 2m_0 c^2\right)\int d^3x(\varphi^{*}\varphi - \varphi\varphi^{*}) \tag{1.57}$$

Maintenant, nous voulons examiner les champs chargés de manière un peu plus détaillée. Pour de composer la fonction complexe φ(x) en composants réels et imaginaires,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x) + i\varphi(x)\right] \tag{1.58}$$

Où $\varphi_1(x)$et $\varphi_2(x)$ sont réels. Si φ(x) équivaut à l'équation de Klein — Gordon

$$\left(\square + \frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)\varphi(x) = 0. \tag{1.59}$$

Ensuite, cela suit immédiatement φ_1 et φ_2 obéit également à l'équation de Klein —Gordon,

c'est à dire.

$$\left(\square + \frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)\varphi_1(x) = 0. \quad \text{Et} \left(\square + \frac{m_0^2c^2}{h^2}\right)\varphi_2(x) = 0. \tag{1.60}$$

Inversement, si: Deux champs $\varphi_1(x)$et $\varphi_2(x)$ calculent séparément une équation de Klein-Gordon de même masse $m = m_1 = m_2$, les équations peuvent être remplacées par une équation pour un champ complexe. C'est-à-dire [7]

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \text{ Et } \varphi^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \tag{1.61}$$

Remplir

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{h^2}\right)\varphi = 0.\, et\ \left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{h^2}\right)\varphi^* = 0. \tag{1.62}$$

En échangeant φ et φ ∗dans

$$Q = \frac{ieh}{2m_0 c^2}\int d^3x(\varphi^*\varphi - \varphi\varphi^*) \tag{1.63}$$

Nous obtenons la charge opposée. C'est pourquoi φ et φ ∗ caractériser des charges opposées. Ces études peuvent, par exemple, être appliquées au triplet de pion (π+,π −,π °) : le π °, étant une particule neutre, se caractérise par une fonction d'onde réelle, tandis qu'π^+et

exemple

π^-en charge des champs, doit être représentés par des fonctions d'onde complexes.π^+Etπ^-ont la même et masse en face de charges, c'est-à-dire, nous pouvons définir

$$\phi_\pi + = \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\,\phi_2).$$

$$\varphi_\pi - = \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2). \tag{1.64}$$

Et

$$\varphi_{\pi^0} = \varphi_0 = \varphi_0^* \tag{1.65}$$

Chapitre II

Formalisme d’Ostrogradski

Chapitre II : Formalisme d'Ostrogradski :

II.1 Formulation lagrangienne des champs :

Historiquement la formulation de Lagrange avait pour but de résoudre les problèmes posés par l'existence de certaines liaisons dans les systèmes mécaniques. Lorsque deux particules sont fixées aux extrémités d'une tige rigide, par exemple, leurs positions sont liées. De même il existe une liaison si des particules sont contraintes à se déplacer sur une surface. Les liaisons introduisent deux difficultés dans la formulation de Newton : les coordonnées ne sont plus indépendantes et les forces à l'origine de ces liaisons ne sont pas connues. La première difficulté est surmontée en introduisant les coordonnées généralisées tandis que la seconde l'est en formulant le problème de manière à faire disparaitre les forces de liaison. Le formalisme Lagrangien permet de déterminer les équations de mouvement classiques de Lagrange pour des systèmes finis de particules, ou bien pour des systèmes à une infinité de degrés de libertés [14, 15] (milieux continus).

II.1.1 Equations de Lagrange :

Pour un système fini de particules, caractérisé par les coordonnées généralisées q_i et les vitesses généralisées $\dot{q}_i$ (i = 1, 2, ..., n, n étant le nombre de degré de liberté), les équations de mouvement classiques de Lagrange s'obtiennent en appliquant le principe de moindre action. Ce principe stipule que le mouvement du système est tel que l'action est stationnaire au voisinage de la trajectoire réelle. Cela signifie que pour tout système mécanique, caractérisé par un Lagrangien$L(q_i, \dot{q}_i, t)$, il existe une intégrale définie par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \qquad (2.1)$$

Dite action, qui se voit minimisée pour un mouvement réel entre deux instants $t_1$et t_2. Pour cela, la variation δS doit être nulle

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right] dt = 0 \qquad (2.2)$$

Les variables $q_i(t)$ et $\dot{q}_i(t)$ ne sont pas indépendantes, car entre t_1 et t_2, la connaissance de $q_i(t)$ détermine $\dot{q}_i(t)$. Pour éliminer $\delta\dot{q}_i$, nous intégrons par partie

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \qquad (2.3)$$

Le premier terme du second membre est nul `à cause des conditions aux bornes,

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \qquad (2.4)$$

En portant les équations (2.3) et (2.4), dans (2.2), nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i dt = 0 \qquad (2.5)$$

Comme les variations δq_i autour de la trajectoire réelle sont arbitraires, pour garantir
$\delta S = 0$, l'intégrant doit être nul

$$\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i = 0 \qquad (2.6)$$

Les δq_i étant indépendantes, on déduit les équations

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad (2.7)$$

Appelées équations d'Euler-Lagrange.

II.1.2 Impulsions généralisées :

Nous devons chercher la quantité qui se conserve dans le temps lorsque l'espace est homogène (en l'absence de champs extérieurs). Pour un système isolé, les propriétés mécaniques restent inchangées lors d'une translation rectiligne**.**

$$q \to \acute{q} = q + \epsilon \tag{2.8}$$

Tout en gardant les vitesses $\dot{q}$ invariantes. En imposant au Lagrangien de rester invariant, nous obtenons

$$\delta L = L(q + \epsilon, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q}\epsilon = 0 \tag{2.9}$$

En tenant compte des équations de mouvement (2.7) l'équation (2.9) peut se mettre sous la forme

$$\delta L = \epsilon \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2.10}$$

signifiant que la quantité

$$\mathcal{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cst \tag{2.11}$$

est une constante de mouvement. Elle représente l'impulsion généralisée totale du système. La composante P associée à la coordonnée q est

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{2.12}$$

II.1.3 Hamiltonien :

Nous devons chercher la quantité qui se conserve lorsque le temps est uniforme. Pour cela, exigeons au Lagrangien de rester invariant lors d'une translation dans le temps. Ce qui signifie que pour une variation dt du temps

$$t \to \acute{t} = t + dt \tag{2.13}$$

La variation du Lagrangien doit être nulle**.**

$$\delta L = L(q, \dot{q}, t + dt) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial t}dt = 0 \tag{2.14}$$

Ainsi, nous obtenons la relation

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{2.15}$$

signifiant que le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. On déduit alors

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \tag{2.16}$$

Ou l'équation (2.7) a été utilisée. D'après (2.12), (2.16) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt}(p\dot{q} - L) = 0 \tag{2.17}$$

Ainsi la quantité définie par

$$H = p\dot{q} - L \tag{2.18}$$

est une constante de mouvement. On l'appelle Hamiltonien du système.

II.2 Formulation Hamiltonienne :

La formulation de Hamilton a le même contenu physique que celle de Lagrange. Elle fournit une base pour la formulation de Hamilton-Jacobi. Le système de n équations différentielles du second ordre de la formulation de Lagrange est remplacé par un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre. La formulation Hamiltonienne 2 consiste à retrouver les équations de mouvement à partir d'un Hamiltonien qu'on pourra exprimer en fonction de q_i , p_i et t grâce à l'équation (2.12) et (2.18)

$$H = H(q_1 \dots q_n; p_1 \dots p_n; t) \tag{2.19}$$

Calculons la différentielle totale exacte de l'Hamiltonien

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{2.20}$$

En utilisant l'expression de l'Hamiltonien donnée par (2.18), nous avons

$$dH = \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (2.21)$$

L'identification des deux équations (2.20) et (2.21), nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (2.22)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (2.24)$$

Ce sont les équations d'Hamilton. Elles représentent les équations de mouvement du système. La paire (p_i, q_i) est dite canoniquement conjuguée.

II.3 Ostrogradski Formalisme :

Nous considérons une théorie lagrangienne à haut dérivative pour un système fini de particules , décrit par variables $q(t)$ et les dérivés total des coordonnées généralisées $q(t)$ Donc, l'état du système est défini par une forme globale de Lagrangien, qui d'écrit sous la forme

$$L\left[q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, \overset{(m)}{q}\right] \qquad (2.25)$$

Les équations de mouvement classiques de Lagrange s'obtiennent en appliquant le principe de moindre action.

$$\delta S = 0 \qquad (2.26)$$

Donc, on peut déduire les équations d'Euler-Lagrange généralisées

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial L}{\partial \overset{m}{q}} = 0 \qquad (2.27)$$

le moment conjugué P est une constante du mouvement équation (2.11). Donc, en utilisant aussi (2.8), (2.9), et (2.27) on obtient

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \cdots - (-1)^m \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} \tag{2.28}$$

Ainsi, l'équation (2.12) devient

$$P = P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{2.29}$$

Notons que P est appelé moment conjugué principale et les autres termes sont appelées les moments conjuguées secondaires

$$P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dddot{q}} + \cdots + (-1)^m \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} \tag{2.30}$$

$$P_3 = \frac{\partial L}{\partial \dddot{q}} + \cdots - (-1)^m \frac{d^{m-3}}{dt^{m-3}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} \tag{2.31}$$

$$P_{i-1} = \frac{\partial L}{\partial \overset{(i-1)}{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{(i)}{q}} + \cdots + (-1)^{i-1}(-1)^m \frac{d^{m-i+1}}{dt^{m-i+1}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} \tag{2.32}$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \overset{(i)}{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{(i+1)}{q}} + \cdots + (-1)^{i}(-1)^m \frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}} \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} \tag{2.33}$$

$$P_m = \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}} \tag{2.34}$$

On peut réécrire moments conjuguées généralise d'une autre forme plus condensée

$$\begin{aligned} p_m &\equiv \frac{\partial L}{\partial q} \\ p_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} p_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, m-1) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Et les m variables indépendantes

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv q \\ q_i &\equiv \overset{(i-1)}{q} \, (i = 2, \ldots, m) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ainsi, L'Hamiltonien s'exprime comme suit [16,17].

$$H[q_i, p_i] = \sum_{i=1}^{m} p_i\, \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}} - L = \sum_{i=1}^{m-1} p_i q_{i+1} + p_m \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{m}} - L[q_1, \dots q_m; \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{m}}] \qquad (2.37)$$

II.4 Extension en théories des champs :

II.4.1 Équations d'Euler-Lagrange généralisée :

Soit une densité lagrangienne à haut dérivative, nous avons considéré le lagrangien qui est une fonction seulement de quantités de champ $\phi(t, x)$ et leurs dérivés de premier et de second ordre de la champs et Jusqu'à l'ordre m . Maintenant, nous écrire la densité de lagrangien dans le cas générale par.

$$\mathcal{L}\big[\phi, \partial_\mu \phi\, , \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi\big]\ , \qquad (2.38)$$

On écrira alors l'action sous la forme

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}\big(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu v} \phi, \partial_{\mu v a} \phi \dots\big). \qquad (2.39)$$

Considérons une variation de ϕ:

$$\begin{cases} \phi \to \phi + \delta\phi \\ \partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi \to \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi + \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi) \end{cases} \qquad (2.40)$$

Avec $\delta\phi = 0$ sur les bords. La variation de l'action sera alors

$$\delta S = \int d^4 x \delta \mathcal{L} \qquad (2.41)$$

$$\delta S = \int d^4 x \left[\mathcal{L}\left(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta(\partial_\mu \phi), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi + \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)\right) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\right] \qquad (2.42)$$

$$\delta S = \int d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) + \dots + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)} \delta(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)\right] \qquad (2.43)$$

Puis en intégrons par partie, Le résultat final implique équations d'Euler-Lagrange généralisée est s'écrit sous la fourme [17,18]

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_{\mu v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu v} \phi)} + \dots + (-1)^m \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi)} = 0 \qquad (2.44)$$

En peut déduire l'équations d'Euler-Lagrange dans le cas ordinaire au La densité lagrangienne $\mathcal{L}(\varphi. \partial_\mu \varphi)$ qui est une fonctions seulement de quantités de champ $\phi(x)$ et leur dérivés de premier ordre de la champs, d'où L'équation d'Euler-Lagrange est donne par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right) = 0 \tag{2.45}$$

II.4.2 Formulation de l' Hamiltonien pour la théorie des champs à haut dérivative :

Dans la formulation lagrangienne à haut dérivative de la mécanique classique, la dynamique d'une particule est définie au moyen de la fonction de Lagrange $L\left[q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, \overset{(m)}{q}\right]$. Les quantités p, c'est l'impulsions conjuguées aux composantes du vecteur position q, sont alors données par

$$\begin{aligned} p_m &\equiv \frac{\partial L}{\partial q} \\ p_i &\equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} p_{i+1} \qquad (i = 1, \dots, m-1) \end{aligned} \tag{2.46}$$

La généralisation à un système de champs dans l'espace-temps, et à une densité lagrangienne avec des dérives supérieures $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi]$est immédiate. Les impulsions conjuguées au champ $\phi(x)$ sont

$$\begin{aligned} \pi^{\mu_1 \cdots \mu_m} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_m} \\ \pi^{\mu_1 \cdots \mu_i} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi} - \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{i+1}} \pi^{\mu_1 \cdots \mu_i \mu_{i+1}} \\ &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_m} - \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{i+1}} \pi^{\mu_1 \cdots \mu_i \mu_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, m-1)\,. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Si elles n'ont pas aucune signification mécanique directe, ils sont toujours adaptés pour effectuer une transformation de Legendre.

Avec : $Q_1 = \partial_\mu \phi$; $Q_2 = \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \phi$ … ; $Q_m = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi$

La densité hamiltonien est donne par

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \partial_\mu Q_1 + \pi^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} Q_2 + \cdots + \pi^{\mu_1 \cdots \mu_m} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} Q_m - \mathcal{L}\,. \tag{2.48}$$

Alors les équations canoniques sont

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \partial_\nu \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\nu} \;, \quad \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\nu\rho}} \quad, \dots, \partial_\mu \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^{\mu \mu_1 \cdots \mu_m}}, \\ &\partial_\mu \pi^\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}\,, \partial_\nu \pi^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_\mu \phi} \;, \dots, \partial_\sigma \pi^{\sigma \mu_1 \cdots \mu_m} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_m} \phi}\;. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Chapitre III

Tenseur énergie-impulsion

Chapitre III : Tenseur énergie-impulsion

III.1 Théorème de Noether :

L'action S possède une symétrie s'il existe un ensemble de transformations des champs ϕ et des coordonnées d'espace-temps laissant l'action S invariante. L'ensemble de toutes les symétries de l'action forme nécessairement un groupe de symétrie. **[19]**

Considérons une théorie de champs classiques définie par l'action

$$S = \int d^4\, x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{3.1}$$

Une symétrie est une transformation qui laisse l'action invariante. Les symétries apparaissant dans les théories de champs décrivant les interactions des particules élémentaires sont de plusieurs types. Certaines sont discrètes d, le groupe *G* possédant un nombre fini d'éléments. Les symétries continues correspondent à un groupe dont les éléments (les matrices *U*) sont des fonctions d'un nombre fini de paramètres continus α. Nous allons consid´erer des transformations qui sont des fonctions analytiques des paramètres α. Le groupe *G* est alors un groupe de Lie. On peut se restreindre à des transformations infinitésimales et poser

$$x_\mu \to \acute{x}_\mu = x_\mu + a_\mu \tag{3.2}$$

Ou $a_\mu$est indépendant de la coordonnée x ; implique que la variation de la densité lagrangienne est défini par :

$$\delta\mathcal{L} = a_\nu \partial^\nu \mathcal{L} = a_\nu \partial_\mu (g^{\mu\nu} \mathcal{L}) \tag{3.3}$$

On peut se restreindre à des transformations infinitésimales et poser aussi que la variation du champ $\phi(x)$ est défini par :

$$\delta\phi = a_\nu \partial^\nu \phi \tag{3.4}$$

Il s'agit d'une variation totale, donc $\delta\ S\ =\ 0$ Avec δ φ = 0 sur les bords.

L'action sera alors

$$\delta S = \int d^4x\delta\mathcal{L}$$

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta\partial_\mu\phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \tag{3.5}$$

on remplaçons $\delta\mathcal{L}$ equ. (3.3). Dans δS equ (3.6) puis en intégrons par partie

$$\delta S = \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \tag{3.6}$$

La variation de l'action

$$\delta S = \int d^4\, x\delta\phi\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \tag{3.7}$$

Conduit donc aux équations d'Euler-Lagrange pour les champs :

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{3.8}$$

Et on a

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) = a_\nu\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi\right) \tag{3.9}$$

Donc, en utilisons l'équation (3.3) et (3.9) en trouve

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right) = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.10}$$

Donc Le tenseur énergie-impulsion$T^{\mu\nu}$ est une quantité conservée

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.11}$$

Les charges associées aux courants

$$P^\mu = \int d^3x\, T^{0\mu} \tag{3.12}$$

Sont indépendantes du temps si le volume spatial *V* est choisi de façon telle que le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ s'annule à son bord. Le quadrivecteur P^μdonne l'impulsion totale du système de champs contenu dans le volume *V*.

Sa composante temporelle P^0 est l'énergie totale du système (c'est l'hamiltonien du système de champs) et

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} \tag{3.13}$$

Est la densité d'énergie des champs **[19]**.

Alor, en peut généralise Le tenseur énergie-impulsion dans le cas au la densité lagrangienne avec des dérive supérieur $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi, \ldots, \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_m} \phi]$, On peut donc identifier le tenseur énergie-impulsion, [18] par :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_\alpha \phi)} \partial_{\alpha\nu} \phi - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_\alpha \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_{\alpha\beta} \phi)} \partial_{\alpha\beta\nu} \phi - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_{\alpha\beta} \phi} \partial_{\nu\beta} \phi + \partial_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu_{\alpha\beta} \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{2.63}$$

Il est contrôlé directement par la condition

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.64}$$

III.2 Autres démonstrations

III.2.1 Énonce et démonstration :

Théorème de Noether : Pour toute symétrie continue de l'action il existe un courant conservé $j_\mu(x)$ **[13].**

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{3.14}$$

Ceci implique l'existence d'une charge conservée, définie par

$$Q(t) = \int d^3 x \rho(t, x) \tag{3.15}$$

En effet, on a :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{R3} \rho(t,x) d^3 x = \int_{R3} \partial_t \rho(t,x) d^3 x$$

$$= \int_{R3} -\nabla J(t,x) d^3 x = -\oint_{\partial R3} J.ndS = 0$$

Démontrons le théorème. Soit l'action dépendant de n champs :

$$S[\phi_a] = \int d^4 x \, \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) \tag{3.16}$$

On utilisera la convention de sommation pour les indices des champs.

Soit une transformation, alors si :

$$\phi'_a = f_a^\alpha(\phi_b)$$

-α = 0, il s'agit de la transformation identité : $\phi'_a = \phi_a$

-$\alpha \ll 1$, il s'agit d'une transformation infinitésimale.

On considère des transformations infinitésimales :

$$\begin{cases} x \to x' = x + \delta x \\ \phi_a \to \phi'_a(x') = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \end{cases} \tag{3.17}$$

Remarquons que la variation $\delta\,\phi_a(x)$

$$\delta\phi_a(x) = \phi'_a(x') - \phi_a(x) \tag{3.18}$$

Représente la variation du champ dû à la fois à la transformation du champ et à la transformation des coordonnées. On définit alors la variation en un point fixé de l'espace par

$$\delta_0\phi_a(x) = \phi'_a(x) - \phi_a(x) \tag{3.19}$$

Déterminons le lien entre d^4x' et d^4x. on a

$$d^4x' = \det\left(\frac{d^4x'}{d^4x}\right) d^4x$$

$$\approx \left(1 + \partial_\mu \delta x^\mu\right) d^4x$$

Où $\det\left(\frac{d^4x'}{d^4x}\right)$ est le jacobien du changement de variable. Calculons pour deux Dimensions d'espace **[13]** :

$$\det\left(\frac{d^4x'}{d^4x}\right) = \begin{vmatrix} \partial_0 x'^0 & \partial_1 x'^0 \\ \partial_0 x'^1 & \partial_1 x'^1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_1 \delta x^0 \\ \partial_0 \delta x^1 & 1 + \partial_1 \delta x^1 \end{bmatrix}$$

$$= (1 + \partial_0 \delta x^0)(1 + \partial_1 \delta x^1) - (\partial_1 \delta x^0)(\partial_0 \delta x^1)$$

$$\approx 1 + \partial_0 \delta x^0 + \partial_1 \delta x^1$$

En se limitant à l'ordre 1.

Cherchons le lien entre $\delta\,\phi$et $\delta_0\phi$ (à l'ordre 1) :

$$\delta\phi_a(x) = \phi'_a(x') - \phi_a(x)$$

$$= \phi'_a(x+\delta x) - \phi_a(x)$$

$$\approx \phi'_a(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi'_a(x) - \phi_a(x)$$

$$= \phi'_a(x) + \delta x^\mu \partial_\mu\big(\phi_a(x) + \delta_0\phi_a(x)\big) - \phi_a(x)$$

D'où

$$\delta\phi_a(x) = \delta_0\phi_a + \delta x^\mu \partial_\mu \phi_a(x) \qquad (3.20)$$

Notons que cette formule peut s'appliquer à tout champ, $\mathcal{L}$ compris.

Nous pouvons maintenant écrire la variation de l'action (en se limitant toujours à l'ordre 1 et en utilisant les formules) **[13]**.

$$\delta S = \int d^4x'\mathcal{L}\big(\phi'_a(x'), \partial_\mu\phi'_a(x'), x'\big) - \int d^4x\mathcal{L}\big(\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x), x\big)$$

$$\approx \int d^4\,x\big(1 + \partial_\mu\delta x^\mu\big)\mathcal{L}\big(\phi'_a(x'), \partial_\mu\phi'_a(x'), x'\big) - \int d^4x\;\mathcal{L}\big(\phi_a(x), \partial_\mu\phi_a(x), x\big)$$

$$= \int d^4\,x\big(\delta\mathcal{L} + (\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}\big) = \int d^4\,x\big(\delta_0\mathcal{L} + (\partial_\mu\mathcal{L})\delta x^\mu + (\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}\big)$$

$$\approx \int d^4\,x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\delta_0\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\;\partial_\mu(\delta_0\phi_a) + \;\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L})\right)$$

$$= \int d^4\,x\delta_0\phi_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \;\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right) + \int d^4\,x\left[\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L}) + \;\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0\phi_a\right)\right]$$

Le premier terme redonne les équations d'Euler-Lagrange, tandis que le second

Est une 4-divergence. Concentrons-nous sur ce dernier et notons-le δS_υ :

$$\delta S_\upsilon = \int d^4x\partial_\mu\left(\delta x^\mu\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta_0\phi_a\right)$$

$$= \int d^4x\;\partial_\mu\left(\delta x^\mu\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}(\delta\phi_a - \delta x^\upsilon\partial_\upsilon\phi_a)\right)$$

$$= \int d^4x\;\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\delta\phi_a - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\upsilon\phi_a - \delta^\mu_\upsilon\mathcal{L}\right)\delta x^\upsilon\right]$$

Considérons maintenant le cas de transformations linéaires :

$$\begin{cases}\delta x^{\mu} = \varepsilon_r X_r^{\mu} \\ \delta \phi_a = \varepsilon_r \phi_{ar}\end{cases} \tag{3.21}$$

Où {ε r} est l'ensemble des paramètres de la transformation. r représente un

Nombre quelconque d'indices et il est soumis à la convention de sommation.

Dans ce cas, δS_{υ} devient :

$$\delta S_{\upsilon} = \int d^4 \mathrm{x} \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \delta\phi_a - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \partial_{\upsilon}\phi_a - \delta_{\upsilon}^{\mu}\mathcal{L}\right) \delta x^{\upsilon}\right]$$

$$= \int d^4 \mathrm{x}\, \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \varepsilon_r \phi_{ar} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \partial_{\upsilon}\phi_a - \delta_{\upsilon}^{\mu}\mathcal{L}\right) \varepsilon_r X_r^{\upsilon}\right]$$

Le courant conservé est donc :

$$J_r^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \phi_{ar} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_a)} \partial_{\upsilon}\phi_a - \delta_{\upsilon}^{\mu}\mathcal{L}\right) X_{\upsilon}^{\mu} \tag{3.22}$$

III.3 Quantification canonique :

Quantifier le hamiltonien revient à le réécrire sous forme des opérateurs de création et d'annihilation pour mieux comprendre ce que nous devons le faire par la suite nous allons commencer par traiter un exemple simple relatif à un système de N oscillateurs harmoniques de fréquences ω_i **[20].**

Le lagrangien de ce système est ;

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2}(p_i^2 - \omega_i^2 q_i^2) \tag{3.23}$$

Ce qui donnent les équations du mouvement une par oscillateur ;

$$\ddot{q} + \omega_i^2 q = 0 \tag{3.24}$$

Qui ont pour solution ;

$$q_i = a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^* e^{e^{i\omega_i t}} \tag{3.25a}$$

$$p_i = -i\omega_i a_i e^{-i\omega_i t} + i\omega_i a_i^* e^{i\omega_i t} \tag{3.25b}$$

Si on promeut $p_i$et q_i en operateurs, alors a_i et a_i^* deviennent aussi :

$$q_i \to \hat{q}_i \quad p_i \to \hat{p}_i \quad a_i \to \hat{a}_i \quad a_i^* \to (\hat{a}_i)^{\uparrow} \tag{3.26}$$

On a les relations de commutations suivantes :

$$[\hat{q}_i \,, \hat{p}_j^{\uparrow}] = i\delta_{ij} \tag{3.27}$$

$$[\hat{q}_i \,, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i \,, \hat{p}_j] = 0 \tag{3.28}$$

Calculons le commutateur de $\hat{a}_i$ et $\hat{a}_i^{\uparrow}$ à partir de celui de $\hat{q}_i$et $\hat{p}_j^{\uparrow}$;

$$[\hat{q}_i \,, \hat{p}_j^{\uparrow}] = [\hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + \hat{a}_i^{\uparrow} e^{i\omega_i t} - i\omega_i \hat{a}_i e^{-i\omega_i t} + i\omega_i \hat{a}_i^{\uparrow} e^{i\omega_i t}] \tag{3.29a}$$

$$= i\omega_i[\hat{a}_i \,, \hat{a}_j^{\uparrow}]\text{-}\ i\omega_i[\hat{a}_i^{\uparrow} \,, \hat{a}_i] \tag{3.29b}$$

$$= 2i\omega_i[\hat{a}_i \,, \hat{a}_i^{\uparrow}] = i\ \delta_{ij} \tag{3.29c}$$

Tous les autres commutateurs seront nuls à cause des relations de commutations (3.28) :

$$[\hat{a}_i \,, \hat{a}_j^{\uparrow}] = \frac{1}{2\omega_i}\delta_{ij} \tag{3.30a}$$

$$[\hat{a}_i \,, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^{\uparrow} \,, \hat{a}_j^{\uparrow}] = 0 \tag{3.30b}$$

III.4 Calcul de l'Hamiltonien :

Considérons le lagrangien **[13].**

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\varphi) \tag{3.31}$$

Dans ce cas, le tenseur énergie impulsion vaut

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\left(\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\varphi)\right) \tag{3.32}$$

Les différentes composantes sont :

$$\mathcal{E} = T_{00} = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2\right) + V \tag{3.33a}$$

$$p_i = T_{0i} = \dot{\phi}\partial_i\phi \tag{3.33b}$$

$$p_{ij} = T_{ij} = \partial_i\phi\partial_j\phi \tag{3.33c}$$

On retrouve la densité d'énergie $\mathcal{E}$, la densité d'impulsion p_i et le tenseur des contraintes p_{ij}. Les équations de conservation sont alors :

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla p = 0 \tag{3.34a}$$

$$\partial_t p_i + \nabla \mathrm{p_i} = 0 \tag{3.34b}$$

La charge conservée de la composante temporelle est l'énergie :

$$\mathrm{E}= \int d^3x\, \mathcal{E} \tag{3.35}$$

$T_{\mu\nu}$N'est pas forcément symétrique, mais il est toujours possible de le symétriser.

Donc, on Cherchons l'expression de l'Hamiltonien **[20].**

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right) \tag{3.36}$$

En fonction de commençant par calculer $\dot{\phi}$ et $\nabla\phi$:

$$\dot{\phi} = \int \frac{(d)^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2} i(-a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}) \tag{3.37a}$$

$$\nabla\phi = \int \frac{(d)^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} ik(a_k e^{-ikx} - a_k^* e^{ikx}) \tag{3.37b}$$

Il est important d'utiliser des k différents dans l'intégration calculons-le premier Terme en $\dot{\phi}^2$:

$$\int d^3\,x\, \dot{\phi}^2 = \int d^3\,x(\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2} i(-a_k e^{-ikx} + c.c))\,(\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2} i(-a_q e^{-iqx} + c.c)) \tag{3.38a}$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{4}\int d^3x\,(a_k a_q e^{-i(k+q)x} - a_k a_q^* e^{-i(k-q)x} + c.c) \tag{3.38b}$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3q \frac{1}{4}(a_q a_k \delta^{(3)}(q+k) e^{-i(\omega_k+\omega_q)t} - a_k a_k^* \delta^{(3)}(q-k) e^{-i(\omega_k-\omega_q)t} c.c.) \tag{3.38c}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4}(-a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + c.c.) \tag{3.38d}$$

Car $\omega_k = \omega_{-k}$, et de même on trouvera que :

$$\int d^3x(\nabla\phi)^2 = \int d^3x\left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} ik(a_k e^{-ikx} + c.c.)\right) \times \left(\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_q} iq\left(a_q e^{-qx} - c.c.\right)\right) \tag{3.39a}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k\omega_q}\int d^3x\,(-kq)(a_q a_k e^{-i(k+q)x} - a_k a_q^* e^{-i(k-q)x} + c.c) \tag{3.39b}$$

$$= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3q \frac{1}{4\omega_k\omega_q} kq(a_k a_q \delta^{(3)}(q+k) e^{-i(\omega_k+\omega_q)^t} - a_k a_q^* \delta^{(3)}(q-k) e^{-i(\omega_k-\omega_q)^t} + c.c\,) \tag{3.39c}$$

$$= -\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\frac{1}{4{\omega_k}^2} k^2\,(-a_k - a_{-k} e^{-2i\omega_k t} - a_k a_k^* + c.c) \tag{3.39d}$$

Et finalment :

$$\int d^3x\phi^2 = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k{}^2}m^2(a_k a_{-k}e^{-2i\omega_k t} + a_k a_k^* + c.c) \quad (3.40)$$

En rassemblant les trois termes ,on obtient **[20]**

$$\mathrm{H}= \int d^3x\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \quad (3.41a)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^3K}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k{}^2}(-\omega_k{}^2 a_k a_{-k}e^{-2i\omega_k t} + \omega_k{}^2 a_k a_k^* + (\omega_k{}^2 - m^2)a_k a_{-k}e^{-2i\omega_k t} + m^2 a_k a_k^* + c.c) \quad (3.41b)$$

$$= \int \frac{d^3K}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega_k{}^2}(a_k a_k^* + a_k^* a_k) \quad (3.41c)$$

En posant ;

$$N_k = (2\pi)^3 2\omega_k a_k^* a_k \quad (3.42)$$

On obtient ;

$$\mathrm{H} = \int d^3k\ \omega_k\, N_k \quad (3.43)$$

$\omega_k N_k$ correspond donc à la densité d′énergieunité de k

Chapitre IV

Solution de l’équation de Klein Gordon généralisée

Chapitre IV: Solution de l'équation de Klein Gordon généralisée

Dans ce chapitre nous avons rappelé quelque propriétés de l'équation de Klein Gordon ordinaire valable dans le cadre de la relativité restreinte, et en donne une généralisation sur l'équation de Klein Gordon , puis en chercher une solution sous forme d'onde plan pour cette équation généralise , qui va jouer un rôle similaire en théorie des champs a haut dérivative , Plusieurs méthodes étaient proposées par les physiciens pour traiter le système du particule libre c'est-à-dire, la solution de l'équation de Klein Gordon pour une particule libre soit à D(1,1) ou D(4,1) dimensions. Dans ce chapitre nous proposons l'une de ces méthodes **[7,21]**.

IV.1 Solutions d'équation de Klein-Gordon :

a-méthode d'onde plane :

Considérons une particule libre, relativiste (sa vitesse à l'ordre de la vitesse du lumière), avec un spin (0), son équation du mouvement est représenter par ; cette dernier équation admet une solution sous la fourme **[22]**:

$$\phi(x)\ \alpha\ \exp\left(-\frac{i}{\hbar}k.x\right) \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(Et-\vec{k}\vec{r}\right)\right) \qquad (4.1)$$

Où Kx représente le produit scalaire de deux quadrivecteur dans l'espace Minkowski :

$$k.x = k_\mu x^\mu$$

$$k.x = k_0x^0 + k_1x^1 + k_2x^2 + k_3x^3$$

$$k.x = \frac{E}{C}Ct + k_x(-x) + k_y(-y) + k_z(-z)$$

$$k.x = Et - \vec{k}\vec{r}$$

On remplace dans l'équation Klein Gordon (1.48), on trouve :

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x) = -\frac{E^2}{\hbar^2C^2}\phi(x) \qquad (4.2)$$

$$\vec{\nabla}^2\phi(x) = -\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2}\phi(x) \qquad (4.3)$$

En remplacent les deux équations (4.2) et (4.3) dans l'équation, on trouve :

$$\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mC}{\hbar}\right)^2\right)\phi(x) = 0$$

Et de cela nous produisons

$$E^2 = p^2C^2 + m^2C^2 \Rightarrow$$

$$E = \pm E_p = \pm\sqrt{p^2C^2 + m^2C^2} \tag{4.4}$$

Il est clair que l'on obtient les valeurs positives et négatives de l'énergie cinétique à partir d'une seule solution et donc que la valeur d'énergie négative ne peut pas être rejetée car elle provient de la même solution qui donne de l'énergie positive. Cette énergie négative est interprétée comme une antiparticule **[22]**.

b-Méthode du Transformée de Fourier:

Essayant maintenant de trouver sa solution qui est du type onde plane toute en la écrivant sous la forme d'une transformée de Fourier **[20]**

$$\phi(t, x) = \varphi(t)\exp(-ikx) \tag{4.5}$$

En injectant cette fonction dans l'équation (1.49) on obtient :

$$\ddot{\psi} + (k^2 + m^2)\psi = 0 \tag{4.6}$$

Soit encore :

$$\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0 \tag{4.7}$$

En notant :

$$\omega^2 = k^2 + m^2 \tag{4.8}$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique qui a pour solution :

$$\psi_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} + b_k e^{i\omega_k t} \tag{4.9}$$

Et donc :

$$\phi_k(t, x) = a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + b_k e^{i(\omega_k t + kx)} \tag{4.10}$$

La solution générale s'obtient en intégrant sur les k :

$$\phi(t,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - kx)} + b_k \mathrm{e}^{i(\omega_k t + kx)}\right)\delta(\omega^2 - \omega_k{}^2) \quad (4.11)$$

Il reste à imposer la condition de réalité $\phi = \phi^*$

$$\phi^*(t,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(a_k{}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t - kx)} + b_k{}^* \mathrm{e}^{-i(\omega_k t + kx)}\right)\delta(\omega^2 - \omega_k{}^2) \quad (4.12a)$$

$$\phi^*(t,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(a_k{}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_k t + kx)} + b_k{}^* \mathrm{e}^{-i(\omega_k t - kx)}\right)\delta(\omega^2 - \omega_k{}^2) \quad (4.12b)$$

Où on a fait le changement de variable $k \to -k$.L'identification des coefficients avec:

$$\begin{cases} a_{-k}{}^* = b_k \\ b_{-k}{}^* = a_k \end{cases} \quad (4.13)$$

D'où :

$$\phi(t,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - kx)} + a_{-k}{}^* \mathrm{e}^{i(\omega_k t + kx)}\right)\delta(\omega^2 - \omega_k{}^2) \quad (4.14a)$$

$$\phi(t,x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_k t - kx)} + a_{-k}{}^* \mathrm{e}^{i(\omega_k t - kx)}\right)\delta(\omega^2 - \omega_k{}^2) \quad (4.14b)$$

on définit le quadrivecteur :

$$k^\mu = (\omega, \vec{k}) \quad (4.15)$$

Et on obtient la solution pour :

$$\phi(t,x) = \int \frac{(d)^4k}{(2\pi)^4}\left(a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{ik}} + a_k{}^* \mathrm{e}^{i\mathrm{k}}\right) \quad (4.16)$$

IV.2 Lagrangien du champ réel Klein Gordon généralisé à haut dérivative :

Dans cette chapitre en prendre la densité lagrangienne de Klein-Gordon champ à haut dérivative sous la forme suivante **[21]**

$$\mathcal{L}(\varphi; \partial_\mu\varphi; \Box\varphi) = \tfrac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - 2\beta\hbar^2(\Box\varphi)(\Box\varphi)\right] - \tfrac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi^2 \quad (4.17)$$

Le second terme du côté droit de représente les effets de la correction quantique gravitationnelle. Si densité lagrangienne $\mathcal{L}$ dépend des dérivés de premier et de second ordre de la champs, les équations d’Euler-Lagrange prendra la forme.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \varphi)} \right) = 0 \qquad (4.18)$$

Si l’on remplace la densité lagrangienne dans l’équation d’Euler-Lagrange généralisée nous obtenons l’équation de Klein-Gordon en présence. Comme suit **[21]**.

$$\Box \varphi + 2\beta\hbar^2 \Box\Box \varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi = 0 \qquad (4.19)$$

IV.3 Solutions d’ondes planes de l’équation de Klein-Gordon généralisée :

a- méthode d’onde plane :

Dans cette section, nous allons obtenir les solutions ondes planes de l'équation généralisée Klein-Gordon (4.19). Sous la forme **[21]**:

$$\phi = Ae^{-ik.x} \qquad (4.20)$$

Où $A \neq 0$ est un constant complexe. L’équation (4.20) est une solution de (4.19) **[20]**. Si

$$2\beta\hbar^2 (k^2)^2 - k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = 0 \qquad (4.21)$$

$$k^2 = k_\mu k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}\right) - \vec{k}.\vec{k}\ . \qquad (4.22)$$

la résolution de l’équation. (4.21) par rapport à k^2, on obtient deux valeurs différentes pour k^2 comme **[21]**

$$k_+^2 = \left(\frac{m_+ c}{\hbar}\right)^2 \qquad (4.23)$$

$$k_-^2 = \left(\frac{m_- c}{\hbar}\right)^2 \qquad (4.24)$$

Où les masses effectives m_+ et m_- non dégénérées sont définies comme **[21]**

$$m_+ = \frac{(1+2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}}+(1-2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\beta}c} \tag{4.25}$$

$$m_- = \frac{(1+2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}}-(1-2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\beta}c} \tag{4.26}$$

Du point de vue de la mécanique quantique, Eq(4.24) et Eq(4.25) indiquent que notre champ est associé à des particules ayant des masses effectives m_+et m_- . Pour éviter que des particules de masse complexe, Eq(4.24)et Eq(4.25) on exige que **[21].**

$$\beta < \frac{1}{8m^2c^2} \tag{4.27}$$

Pour $\beta = \frac{1}{8m^2c^2}$, les deux masses effectives sont égaux, c'est-à-dire [20],

$$m_+ = m_- = m\sqrt{2}$$

A l'aide de l'eq(4.22) et Eq(4.24),nous arrivons aux relations d'énergie-impulsion généralisée **[21]** :

$$E_p^{(+)2} = m_+^2c^4 + c^2 \tag{4.28}$$

$$E_p^{(-)2} = m_-^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2 \tag{4.29}$$

Ou $E_P^{\pm} = h\omega_k^{(\pm)}$Les masses effectives m_+ et m_- en Eq(4.25) et Eq(4.26) Dans le premier ordre sur le paramètre de déformation β peut être écrit comme

$$m_+ = \frac{1}{\sqrt{2B_c}} - \frac{m^2}{2}\sqrt{2Bc} \tag{4.30}$$

$$m_- = m + Bm^2c^2 \tag{4.31}$$

Donc pour β → 0 la masse effective m_- en Eq(4.31) réduit à la masse ordinaire m. Insertion Eq (4.31) dans l'équation (4.29) nous trouvons la généralisation suivante pour la relation énergie-moment.

$$E_p^{(-)^2} = m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2 + 2Bm^4c^6 \tag{4.32}$$

Lorsque β = 0, (4.32) l'équation sera convertie en énergie-moment bien connue d'Einstein relation dans la relativité restreinte. Par contre, la masse effective m_+dans Eq (4.30) diverge pour les petits β, nous avons montré que le véritable champ de Klein-Gordon dans la présence d'une longueur minimale possède un état physique avec la masse effective m_-, et une Fantôme de Weyl avec la masse effective m_+ et donc l'autre énergie généralisée relation pour la masse effective m_+ en Eq (4.28) est entièrement nouveau et pour β = 0, il n'ai pas d'analogue dans la théorie spéciale de la relativité. La solution générale de l'équation (4.19) est une superposition de ondes planes comme :

$$\phi(x)= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2Vw_k^{(-)}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[a(\overrightarrow{k}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(E_p^{(-)}t - \overrightarrow{p.r}\right)\right) + a^{\intercal}(\overrightarrow{k}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(E_p^{(-)}t - \vec{p}.\vec{r}\right)\right)\right]$$

$$+ \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar c^2}{2Vw_k^{(+)}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[b(\overrightarrow{k}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(E_p^{(+)}t - \overrightarrow{p.r}\right)\right) + b^{\intercal}(\overrightarrow{k}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(E_p^{(+)}t - \vec{p}.\vec{r}\right)\right)\right] \quad (4.33)$$

Où nous prendrons les solutions ϕ(x) pour se situer dans un grand cube de côté L et de volume $V = L^3$.Les deux premiers termes situés à droite de l'équation (4.33) pour β→ 0 sera converti en solution générale de l'équation ordinaire de Klein-Gordon **[23]**.tandis que les deux derniers termes de côté droit de l'équation (4.33) pour β → 0 sont entièrement nouveaux et n'ont pas d'analogue ordinaire Théorie de Klein-Gordon.

b- Méthode du Transformée de Fourier:

Le champ $\phi(x)$ peut être exprimé par des transformations de Fourier comme Suit **[22]**

$$\phi(x) = N \int d^3p \;\; a(\vec{p}, t)\exp(-i\vec{p}\vec{x}) \quad (4.34)$$

Où N est une constante de normalisation .en utilisant Eq(4.2) et Eq(4.3), on trouve :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = N \int d^3\, p \,\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\, e^{-i\vec{p}\vec{x}} \quad (4.35)$$

$$\nabla^2\phi = -N \int d^3pp^2 a e^{-i\vec{p}\vec{x}} \quad (4.36)$$

Puis en remplacent les deux équations (4.35) et (4.36) dans l'équation de Klein-Gordon exprimée par l'équation, on trouve :

$$\Box\phi + 2\beta\hbar^2\Box\Box\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi = 0 \tag{4.37}$$

$$N\int d^3p\left[\ddot{a} + ap^2 + 2\beta\hbar^2\left(\frac{\partial^3}{\partial t^2} - \nabla^2\right)^2 a + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 a\right]e^{-ipx} = 0$$

$$\ddot{a} + ap^2 + 2\beta\hbar^2\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)(\ddot{a} + ap^2)\right] + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 ae^{-ipx} = 0$$

$$\ddot{a} + ap^2 + 2\beta\hbar^2\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}a + 2p^2\ddot{a} + ap^4\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 a = 0$$

$$2\beta\hbar^2\varepsilon^4 + (1 + 4\beta\hbar^2p^2)\varepsilon^2 + \left(2\beta\hbar^2p^4 + p^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\varepsilon = 0$$

On a $\varepsilon^2 = x$

$$2\beta\hbar^2x^2 + (1 + 4\beta\hbar^2p^2)x + \left(2\beta\hbar^2p^4 - p^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) = 0 \tag{4.38}$$

$$\Delta = (1 + 4\beta\hbar^2p^2)^2 - 8\beta\hbar^2\left(2\beta\hbar^2p^4 + p^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)$$

$$\Delta = 1 - 8\beta\hbar^2\frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 1 - 8\beta m^2c^2$$

$$\Delta \geq 0$$

On a

$$x_1 = \frac{-(1+4\beta\hbar^2p^2) - \sqrt{1-8\beta m^2c^2}}{4\beta\hbar^2} \tag{4.39}$$

$$x_2 = \frac{-(1+4\beta\hbar p^2) + \sqrt{1-8\beta m^2c^2}}{4\beta\hbar^2} \tag{4.40}$$

$$\begin{cases}\varepsilon_{1,2} = \pm x_1 \\ \varepsilon_{3,4} = \pm x_2\end{cases} \tag{4.41}$$

C'est une équation différentielle du quatre ordre sans un quatre membre, sa solution s'écrit sous la forme suivante **[22]**

$$a(\vec{p},t) = a_1(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_1 t} + a_2(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_2 t} + a_3(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_3 t} + a_4(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_4 t} \tag{4.42}$$

En utilisant les équations (4.42) et (4.34), nous trouvons les transformées de Fourier comme suite :

$$\phi(x) = N \int d^3K \left[a_1(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_1 t} + a_2(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_2 t} + a_3(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_3 t} + a_4(\vec{p},t)e^{+i\varepsilon_4 t}\right] \exp(-i\overrightarrow{px}) \quad (4.43)$$

On peut réécrire le Champ scalaire :

$$\phi(x) = N \int d^3p\left[a_1(p)e^{-i[\varepsilon_1 t-px]} + a_2(p)e^{-i[\varepsilon_2 t+px]} + a_3(p)e^{-i[\varepsilon_3 t-px]} + a_4(p)e^{-i[\varepsilon_4 t+px]}\right] \quad (4.44)$$

Le champ $\phi(x)$ qui décrit une particule scalaire est sans spin et non chargé est réel, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante **[22]**:

$$\phi(x) = \phi(x)^* \quad (4.45)$$

A partir de la relation (4.44) et (4.45) on écrit

$$\phi^*(x) = N \int d^3p\left[a_1^*(-p)e^{-i[\varepsilon_1 t-px]} + a_2(p)e^{-i[\varepsilon_2 t+px]} + a_3^*(-p)e^{-i[\varepsilon_3 t-px]} + a_4(p)e^{-i[\varepsilon_4 t+px]}\right] \quad (4.46)$$

Et on a La condition de la renormalisation **[24]**:

$$\int \phi_{p\lambda}^{(\mp)t}(r,t)\phi_{p\prime\lambda\prime}^{(\mp)}(r,t)d^3\mathrm{r} = \delta_{\lambda\lambda\prime}\delta(p-p'). \quad (4.47)$$

Ici, $\lambda = \pm 1$ caractérise les solutions d'énergie positive et négative avec $\mathcal{E}_{\mp} = \lambda E_p^{(\mp)}$ Facteurs de l'évolution du temps.

D'après l'équation (4.45) En faisant une identification sur les équations (4.44) et (4.45), on trouve :

$$\phi = \phi^* \mapsto \begin{cases} a_2(p) = a_1^*(-p) \\ a_4(p) = a_3^*(-p) \end{cases} \quad (4.48)$$

Les équations (4.48) et (4.45) et permettent d'écrire le champ scalaire exprimé dans la solution (4.44) comme suit [**[22]**

$$\phi^*(x) = N \int d^3p\left[a(p)e^{-i[px+\varepsilon_1 t]} + a^*(-p)e^{-i[\varepsilon_2 t-px]} + b(p)e^{-i[\varepsilon_3 t+px]} + b^*(-p)e^{-i[\varepsilon_4 t+px]}\right] \quad (4.49)$$

Donc on trouve la solution :

$$\mathcal{E}_{1,2}^2 = \frac{-1}{4\beta\hbar^2} - p^2 - \sqrt{1 - 8\beta m^2 c^2} \quad (4.50)$$

$$\mathcal{E}_{3,4}^2 = \frac{-1}{4\beta\hbar^2} - p^2 + \sqrt{1 - 8\beta m^2 c^2} \quad (4.51)$$

Et on a

$$p = \left(p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\right) \quad (4.52)$$

Donc en trouve :

$$\left(i\,\frac{E_{1,2}}{c}\right)^2 = \mathcal{E}_{1,2}^2 \text{ et } \left(i\,\frac{E_{3,4}}{c}\right)^2 = \mathcal{E}_{3,4}^2 \qquad (4.53)$$

Nous arrivons aux mêmes relations d'énergie-impulsion généralisée en équations (4.50) (4.51).

Conclusion

Conclusion :

Pour Déterminer la structure de l’espace-temps à courtes distances ou à hautes énergies où les effets de la gravitation quantique sont non négligeables est un des principaux défis de la physique moderne, ceci est une théorie parmi des plusieurs théorie, pour la description des phénomènes physiques à l’échelle macroscopique qu’à l’échelle microscopique en réécrivant les équations quantique fondamentales dans des champs dans le cadre de la théorie quantique relativiste à haute dérivative.

On à présenter l’unification de relativité restreinte et la mécanique quantique grâce à le principe de correspondance, nous présentons aussi une contribution importante à l'approche de la théorie quantique relativiste à haute dérivative, le formalisme Hamiltonien et lagrangien cette dernier théorie est traite par Le théorème d'Ostrogradski, qui est permit de reformule l’équation d’Euler Lagrange.

L’objectif de cette mémoire est la résolution de l’équation de Klein Gordon dans le cadre de la théorie quantique relativiste à haute. En effet, cette dernière théorie qui constitue une déformation sur équations Klein Gordon, nous avons cherché des solutions sous forme d’ondes planes et le résultat fut l’obtention des équations déjà écrites dans l’espace des impulsions. Cette solution est permit de calcule la correction sur la relation de dispersion. Nous définissons deux masses effective qui décrire l’équivalence entre l’équation Klein Gordon ordinaire et l’équation Klein Gordon généralise, cette dernier permis de définir deux nouveaux particule relativiste avec spin zéro.

Référence

Référence :

[1] M. Ostrogradsky, Mem. Ac. St. Petersbourg VI 4 (1850) 385.

[2] B.Podolski and P.Schwed, *Rev.Mod.Phys.*20(1948)40.

[3] K.S.Stelle, Gen.Rel.Grav.9(1978)353.

[4] A.Bartoli and J.Julve, *Nucl.Phys.*B425(1994)277.

[5] D.G.Barci,C.G.Bollini and M.C.Rocca, *Int.J.Mod.Phys.* A10(1995)1737.

[6] B.M.Pimentel and R.G.Teixeira, Preprint hep-th/9704088.

[7] Walter. Greiner; RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS, Third Edition; Springer.

[8] TAHRAOUI Louiza ,De l'equation de duffin –kemmer-petiau vers analogue non relativite ,mémoire de masster,universite A.mira de bejaia,2015.

[9] Notes de cours de 2007 www.lpthe.jussieu.fr/~zuber/Cours/chap000_12.pdf.

[10] David J. Gri¢ ths (2004). Introduction to Quantum Mechanics (2nd ed.). Benjamin Cummings.

[11] Louis De Broglie. Recherches sur la thÈorie des Quanta. Physics [physics]. Migration - universitÈ en cours díа§ectation, 1924. French.

[12] D. Pauli and V. Weisskopf, Helv Phys Acta 7, 709 (1934).

[13] Haroled Evbin, theorie des champs classique **,** *Notes de cours de Magistère M1* **,** http://harold.e.free.fr/,12 février 2011.

[14] N. Staumann, General relativity and relativistic astrophysics, Springer-Verlag (1984).

[15] Greiner, Classical mechanics : Systems of particles and hamiltonien dynamics, Springer (2003).

[16] D. Kimberly, J. Magueijo and J. Medeiros, Phys. Rev. D70, 084007, 2004.

[17] F.J. de Urries and J.Julve; OSTROGRADSKI FORMALISM FOR HIGHER-DERIVATIVE SCALAR FIELD THEORIES; arXiv:hep-th/9802115v2.

[18] Joao Magueijo ; Could quantum gravity be tested with high intensity Lasers?; arXiv:gr-qc/0603073v2.

[19] Jean-Pierre Derendinger, theorie quantique des champs, presses polytechniques et universitaires romandes.

[20] Benbrahim Khaled Ibn El Walid, Résolution numérique de l'équation de Klein-Gordon via un potentiel harmonique, mémoire de master, Université Dr Moulay Tahar de Saida,2015/2016.

[21]] LEWIS H. RYDER ; QUANTUM FIELD THEORY; Second edition 1996

[22] S. K. Moayedi, M. R. Setare et H. Moayer ,Quantum Gravitational Corrections to the Real Klein-Gordon Field in the Presence, http://arxiv.org/abs/1004.0563v1,05 apr 2010.

[23] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory (John Wiley & Sons, 1984)**.**

[24] S. K. Moayedi , M. R. Setare ,et H. Moayeri, Formulation of the Spinor Field in the Presence of a Minimal Length Based on the Quesne-Tkachuk Algebra, http://arxiv.org/abs/1105.1900v1, 10 mai 2011.

Résumé

Nous construisons un modèle de champ scalaire à haut dérivative dans l'espace de Minkowski. Notre idée est basée l'extension de la théorie d'Ostrogorski en théorie des champs quantique.

On a étudié dans ce travail la théorie quantique relativiste à haut dérivative ; L'approche par les champs à haute dérivative qui est permit de généralise l'équation de Klein Gordon, nous avons reste à un terme définir par : $2\beta\hbar^2\Box\Box\varphi$, et on cherche la solution analytique de l'équation de Klein Gordon sous forme d'ondes planes, et par des transformations de Fourier.

Mots-clés : Champ scalaire, la théorie quantique relativiste à haut dérivative, l'équation de Klein Gordon, transformations de Fourier.

Abstract

We construct a high derivative spin or field model in Minkowski space. Our idea is based on the extension of Ostrogorski's theory in quantum field theory. In this work we studied the quantum theory of relative high derivatives; We chose the approach of the higher derivatives fields in order to generalize the equation Klein Gordon, as we chose the stop at the limit defined as : $2\beta\hbar^2\Box\ \Box\ \phi$, And we search for the analytical solution of the Klein Gordon equation in the form of plane waves, and by Fourier transformations.

Keywords :
Peaceful fields, quantum field theory with higher derivatives, Klein Gordon equation, Fourier transformations.

ملخص

نقوم ببناء نموذج حقل سلمي بمشتقات عليا في فضاء Minkowski. تعتمد فكرتنا على امتداد نظرية Ostrogorski الى نظرية الحقول المكممة.

في هذا العمل درسنا نظرية الكم النسبية ذات المشتقات العالية ; حيث اخترنا مقاربة الحقول ذات المشتقات العليا من اجل تعميم معادلة Klein Gordon , كما اخترنا التوقف عند الحد المعرف ب: $2\beta\hbar^2\Box\ \Box\ \phi$, ومنه قمنا بالبحث عن الحل في مشكل دالة موجبة مستوية, كما استخدمنا تحولات فوريه.

كلمات مفتاحية :
الحقول السلمية ، نظرية الحقول المكممة ذات المشتقات العليا ، معادلة Klein Gordon ، تحولات فورييه.