

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.
UNIVERSITÉ AMAR TELIJI DE LAGHOUAT



Faculté des sciences
Département de mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Filière : MATHÉMATIQUES

Option : ANALYSE MATHÉMATIQUE

Mémoire de fin d'étude en vue d'obtention de diplôme : Master en Analyse Mathématique

PRÉSENTÉ PAR :

Nedjem Zineb

THÈME :

Séparation des convexes dans un espace de Hilbert.

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

MR B.ISMAIL	M.A.A	PRÉSIDENT
MR M.BEN TOBACHE	M.C.A	EXAMINATEUR
MR F.YAZID	M.A.A	EXAMINATEUR
MR MOKHTARI ABDEL-KADER	PROFESSEUR	ENCADREUR

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Remerciements

*Je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.*

Je tiens à remercier mon encadreur Mr MOKHTARI Abd-el-Kader, pour avoir accepté de me diriger, je le remercie aussi pour ses encouragements tout au long de ma recherche et son inestimable aide dans la correction de ce mémoire.

Je remercie sincèrement les membres du jury B.Ismail, M.Ben tobache, F.Yazid pour avoir accepté de rapporter mon travail. Que Mr Ismail Brahim trouve ici l'expression de mon profond respect pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance de mémoire.

Dédicace

Je dédie ce travail modeste à :

*mes parents
ma famille
mes meilleur amis*

Table des matières

1 Propriétés des convexes.	3
1.1 Ensembles convexes et corps convexes.	3
1.2 Fonctionnelles convexes.	6
1.2.1 Fonctionnelle de Minkowski.	6
1.3 Théorème de Hahn-Banach.	8
2 Espaces de Hilbert.	14
2.1 Produit scalaire.	14
2.2 Théorème de projection.	16
2.3 Espaces de Hilbert séparables.	24
2.4 Séries de Fourier.	25
3 Séparation des convexes.	30
3.1 Intérieur relatif d'un convexe de dimension finie.	31
3.2 Théorème de séparation en dimension finie.	32
3.3 Structure des convexes compacts de dimension finie.	35
3.4 Structure des cônes convexes fermés de dimension finie.	37
4 Applications à l'optimisation d'une forme quadratique.	41
4.1 Projection d'un point sur un hyperplan.	41
4.2 Optimisation de la fonction concave φ	42
bibliographie	48

Introduction

La séparation des convexes dans le cas de l'espace de Hilbert \mathbb{R}^n joue un rôle important dans le cas de la programmation linéaire et quadratique.(voir chapitre 3)

Dans ce mémoire, on a besoin de la séparation d'un convexe fermé et un autre convexe qui est ici un point. L'hyperplan séparateur des convexes contient le point qui donne l'optimum d'une fonction sous contraintes(voir chapitre 4).

Le théorème de projection permet de déterminer l'hyperplan séparateur.

Notons que dans le cas d'une fonctionnelle concave, écrite sous une forme canonique ($f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta_i x_i^2$, $\beta_i < 0$) et sous contraintes linéaires, l'optimum est la projection d'un point sur un convexe Ω' (voir chapitre 4). On peut utiliser une autre méthode de recherche pour la détermination de l'optimum en passant au problème dual mais l'algorithme de recherche devient plus difficile.

La formule $x_0 = x^* - \frac{\langle x^*, a \rangle}{\|a\|^2} a$ donne la projection de x^* sur l'hyperplan $ax = b$ et non sur le convexe, et la question posée reste à vérifier si x_0 est solution réalisable ou non.

Chapitre 1

Propriétés des convexes.

1.1 Ensembles convexes et corps convexes.

La notion de convexité est à la base de nombreuses questions de la théorie des espaces vectoriels. Elle est fondée sur des considérations géométriques intuitives, mais peut être formulée aussi en termes purement analytiques.

Soit L un espace vectoriel réel et soient x, y deux points de cet espace. On appelle segment fermé joignant les points x et y dans L l'ensemble de tous les éléments de la forme

$$\alpha x + \beta y, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

Un segment privé de ses extrémités x et y s'appelle segment ouvert.

Un ensemble $M \subset L$ est dit convexe, si pour tout couple de points $x, y \in M$, le segment joignant ces points est contenu dans M .

On appelle noyau $J(E)$ d'un ensemble $E \subset L$ l'ensemble des points $x \in E$ possédant la propriété suivante : pour tout point $y \in L$, il existe un nombre $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tel que $x + ty \in E$ pour $|t| < \varepsilon$.

Un ensemble convexe dont le noyau n'est pas vide s'appelle corps convexe.

Exemple 1.1.1 1) Dans l'espace euclidien à trois dimensions le cube, la boule, le tétraèdre, le demi-espace sont des corps convexes. Dans le même espace le segment, le plan, le triangle sont des ensembles convexes, mais non des corps convexes.

2) Considérons dans l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ l'ensemble des fonctions vérifiant la condition

$$|f(t)| \leq 1.$$

Cet ensemble est convexe ; en effet, si

$$|f(t)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |g(t)| \leq 1,$$

alors, pour $\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0$, on a

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leq \alpha + \beta = 1.$$

Si M est un ensemble convexe, son noyau $J(M)$ est aussi convexe. En effet, soient $x, y \in J(M)$ et $z = \alpha x + \beta y, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Alors pour $a \in L$ donné on peut trouver deux nombres $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que pour $|t_1| < \varepsilon_1$ et $|t_2| < \varepsilon_2$. Les points $x + t_1 a$ et $y + t_2 a$ appartiennent à l'ensemble M ; par conséquent, si $|t| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; le point $\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = z + ta$ appartient aussi à M , c-à-d. $z \in J(M)$.

Nous allons établir maintenant une propriété importante des ensembles convexes.

Théorème 1.1.1 *L'intersection de toute famille d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*

Démonstration 1.1.1 *Soit $M = \bigcap_{\alpha} M_{\alpha}$, tous les ensembles M_{α} étant convexes. soient, d'autre part, x et y deux points quelconques de M . Le segment joignant ces points appartient à chacun des ensemble M_{α} , donc à M , par conséquent, M est bien un ensemble convexe.*

Remarquons que l'intersection des corps convexes (qui constitue un ensemble convexe) n'est pas nécessairement un corps convexe.

Pour tout ensemble A d'un espace vectoriel L il existe un plus petit ensemble convexe qui le contient, c'est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A (il existe toujours au moins un ensemble convexe contenant A ; par exemple, l'espace L tout entier).

Le plus petit ensemble convexe contenant A s'appelle enveloppe convexe de l'ensemble A (notée coA).

considérons un exemple important d'enveloppe convexe.

Soient x_1, x_2, \dots, x_{n+1} des points d'un espace vectoriel quelconque. Nous dirons que ces points sont indépendants, si les vecteurs $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_1$ sont linéairement indépendants.

(Cela équivaut à dire que les relations

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0 \quad \text{impliquent} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0)$$

L'enveloppe convexe des points indépendants x_1, x_2, \dots, x_{n+1} s'appelle simplexe de dimension n ; les points x_1, x_2, \dots, x_{n+1} sont appelés sommets du simplexe. Un simplexe de dimension 0 est un point. Un simplexe de dimension 1 est un segment, un simplexe de dimension 2 est un triangle, un simplexe de dimension 3 est un tétraèdre.

Si les points x_1, x_2, \dots, x_{n+1} sont indépendants, il en est de même pour n'importe quels $k + 1$ d'eux ($k < n$); ces derniers engendrent donc un simplexe de dimension k que l'on appelle face

de dimension k du simplexe engendré par les n points donnés. Par exemple, un tétraèdre de sommets e_1, e_2, e_3, e_4 a quatre faces de dimension 2, définies respectivement par les triplets de sommets $(e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_2, e_3)$; il a six faces de dimension 1 (arêtes) et quatre faces de dimension 0 (sommets).

Théorème 1.1.2 *Le simplexe de sommets x_1, x_2, \dots, x_{n+1} est l'ensemble de tous les points qui peuvent être mis sous la forme*

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1. \quad (1.1)$$

Démonstration 1.1.2 *Il est aisé de vérifier que l'ensemble S des points de la forme (1.1) constitue un ensemble convexe contenant les points x_1, x_2, \dots, x_{n+1} . D'autre part, tout ensemble convexe contenant ces points, contient nécessairement les points de la forme (1.1). Par conséquent, S est le plus petit ensemble convexe contenant les points x_1, x_2, \dots, x_{n+1} .*

Définition 1.1.1 *Une partie Γ de L est un cône de sommet x_0 si elle est stable par les homothéties de centre x_0 , de rapport $\lambda > 0$.*

Autrement dit $x \in \Gamma, \lambda > 0 \implies x_0 + \lambda(x - x_0) \in \Gamma$. Si on ne précise par le sommet x_0 , ce sera 0. Alors Γ est un cône si et seulement si $\lambda\Gamma \subset \Gamma$, pour tout $\lambda > 0$.

Définition 1.1.2 *Un cône est pointé s'il contient son sommet, épointé sinon.*

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.1 *Une partie Γ de L est un cône convexe (de sommet 0) si et seulement si elle est stable par addition et par multiplication par les réels strictement positifs.*

Autrement dit $\Gamma + \Gamma \subset \Gamma$ et $\lambda\Gamma \subset \Gamma$ pour tout $\lambda > 0$.

(Notation : $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$).

Proposition 1.1.2 *Soit Γ un cône convexe non vide (de sommet 0). Le sous-espace vectoriel engendré par Γ est $\Gamma - \Gamma$; si $0 \in \Gamma$, le plus grand sous-espace vectoriel inclus dans Γ est $\Gamma \cap (-\Gamma)$.*

Notation :

Soit Γ un cône convexe non vide (de sommet 0). On notera

$$N(\Gamma) = \{0\} \cup [\Gamma \cap (-\Gamma)].$$

Définition 1.1.3 *Soit $A \subset L$. Le plus petit cône convexe pointé de sommet 0 contenant A s'appelle le cône engendré par A . On le note $\text{cone}A$.*

Proposition 1.1.3 1) *L'intersection d'une famille quelconque de cônes convexes de même sommet est un cône convexe.*

2) *Si $A \subset L$, le cône convexe engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients positifs ou nuls d'éléments de A .*

1.2 Fonctionnelles convexes.

La notion d'ensemble convexe est étroitement liée avec la notion importante de fonctionnelle convexe.

Définition 1.2.1 Une fonctionnelle non négative p , définie sur un espace vectoriel réel L , est dite convexe, si

$$i) p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in L;$$

$$ii) p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x \in L \text{ et } \alpha > 0.$$

Nous n'exigeons pas que la valeur de $p(x)$ soit finie pour tous les $x \in L$; autrement dit, nous admettons que pour certains $x \in L$ on peut avoir $p(x) = +\infty$.

Considéons quelques exemples de fonctionnelles convexes.

1) Soit M l'espace des fonctions bornées x sur un ensemble quelconque S et soit s_0 un point fixe de S . Alors

$$p_{s_0}(x) = |x(s_0)|$$

est une fonctionnelle convexe.

2) Soit m l'espace des suites numériques bornées $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. La fonctionnelle

$$p(x) = \sup_n |x_n|$$

est convexe.

1.2.1 Fonctionnelle de Minkowski.

Etudions la liaison existante entre les fonctionnelles convexe et les ensembles convexes.

Théorème 1.2.1 Si p est une fonctionnelle convexe sur l'espace vectoriel L et k est un nombre positif, l'ensemble

$$E = \{x : p(x) \leq k\}$$

est convexe. Si la fonctionnelle p est partout finie, alors E est un corps convexe ayant pour noyau l'ensemble

$$\{x : p(x) < k\}$$

(contenant nécessairement le point 0).

Démonstration 1.2.1 Si $x, y \in E$ et $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, alors

$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha p(x) + \beta p(y) \leq k,$$

c-à-d. E est un ensemble convexe. Supposons maintenant la fonctionnelle p finie, $p(x) < k$; alors pour $t > 0$ et $y \in L$ on a

$$p(x \pm ty) \leq p(x) + tp(\pm y).$$

si $p(-y) = p(y) = 0$, on a $x \pm ty \in E$ pour tous les t ; si, par contre, au moins l'un des nombres non négatifs $p(y), p(-y)$ est différent de 0 on a $x \pm ty \in E$ pour

$$t < \frac{k - p(x)}{\max(p(y), p(-y))}.$$

Choisissons une valeur bien déterminée de k , par exemple, $k = 1$. Alors toute fonctionnelle convexe finie p définit de façon unique dans L un corps convexe $E = \{x : p(x) \leq 1\}$ tel que $0 \in J(E)$. Inversement, soit E un corps convexe dont le noyau contient le point 0. Alors

$$p_E(x) = \inf\{r : \frac{x}{r} \in E, r > 0\} \quad (1.2)$$

est une fonctionnelle convexe finie. On l'appelle fonctionnelle de Minkowski pour le corps convexe E .

Montrons que la fonctionnelle de Minkowski (1.2) est convexe.

Pour tout $x \in L$ l'élément $\frac{x}{r}$ appartient à E , si r est assez grand; donc, la valeur de $p_E(x)$, définie par l'égalité (1.2), est non négative et finie. Si $t > 0$ et $y = tx$, on a

$$\begin{aligned} p_E(y) &= \inf\{r > 0 : \frac{y}{r} \in E\} = \inf\{r > 0 : \frac{tx}{r} \in E\} \\ &= \inf\{tr' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\} = t \inf\{r' > 0 : \frac{x}{r'} \in E\} \\ &= tp_E(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Soient maintenant $x_1, x_2 \in L$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons les nombres r_i ($i = 1, 2$) de façon que $p_E(x_i) < r_i < p_E(x_i) + \varepsilon$; alors $\frac{x_i}{r_i} \in E$. Posons $r = r_1 + r_2$; alors le point $\frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1 x_1}{rr_1} + \frac{r_2 x_2}{rr_2}$ appartient au segment d'extrémités $\frac{x_1}{r_1}$ et $\frac{x_2}{r_2}$. En vertu de la convexité de E , ce segment est contenu dans E ; en particulier, son point $\frac{x_1 + x_2}{r}$ appartient à E . Par conséquent,

$$p_E(x_1 + x_2) \leq r = r_1 + r_2 < p_E(x_1) + p_E(x_2) + 2\varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a

$$p_E(x_1 + x_2) \leq p_E(x_1) + p_E(x_2). \quad (1.4)$$

Les relations (1.3) et (1.4) signifient précisément que la fonctionnelle $p_E(x)$ est convexe.

Si E est un ensemble convexe contenant le point 0, alors l'égalité (1.2) définit une fonctionnelle $p_E(x)$ convexe, mais non nécessairement finie.

1.3 Théorème de Hahn-Banach.

Soient L un espace vectoriel réel et L_0 un sous-espace quelconque de L . Soit, en outre, f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur le sous-espace L_0 . Une fonctionnelle f , définie sur l'espace L tout entier, est appelée prolongement de la fonctionnelle f_0 , si

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{pour tous les } x \in L_0.$$

Le problème du prolongement d'une fonctionnelle se présente fréquemment en analyse. Le rôle fondamental dans toutes ces questions appartient au théorème suivant.

Théorème 1.3.1 (de Hahn-Banach). *Soit p une fonctionnelle convexe finie, définie sur l'espace vectoriel réel L , et soit L_0 un sous-espace vectoriel de L . Si f_0 est une fonctionnelle linéaire sur L_0 , majorée (sur L_0) par la fonctionnelle $p(x)$, c-à-d. si pour tout $x \in L_0$ on a*

$$f_0(x) \leq p(x). \tag{1.5}$$

Alors f_0 peut être prolongée de façon à obtenir une fonctionnelle linéaire f sur L , majorée par $p(x)$ partout sur L .

Démonstration 1.3.1 *Montrons que si $L_0 \neq L$, la fonctionnelle f_0 peut être prolongée à un sous-espace L' , plus vaste que L_0 , tout en respectant la condition (1.5). En effet, soit z un élément quelconque de L n'appartenant pas à L_0 et soit L' le sous-espace engendré par L_0 et z . Chaque élément de L' est de la forme*

$$tz + x, \quad \text{où } x \in L_0.$$

Si f' est le prolongement cherché de la fonctionnelle f_0 à L' , on a

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f_0(x)$$

ou, si l'on pose $f'(z) = c$

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

Choisissons maintenant c de façon que la condition de majoration (1.5) soit conservée sur L' , c-à-d. de façon que pour tous les $x \in L_0$ et tous les t réels on ait l'inégalité

$$f_0(x) + tc \leq p(x + tz).$$

Pour $t > 0$ cette inégalité équivaut à la condition

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) \quad \text{ou} \quad c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right), \tag{1.6}$$

Pour $t < 0$ elle est équivalente à la condition

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \geq -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) \quad \text{ou} \quad c \geq -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right), \quad (1.7)$$

Montrons qu'il existe toujours un nombre c satisfaisant à ces deux conditions. Soient y' et y'' deux éléments arbitraires de L_0 . Alors

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geq -f_0(y') - p(-y' - z). \quad (1.8)$$

Ceci résulte de l'inégalité

$$f_0(y'') - f_0(y') \leq p(y'' - y') = p((y'' + z) - (y' + z)) \leq p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

Posons

$$\begin{aligned} c'' &= \inf_{y''} (-f_0(y'') + p(y'' + z)), \\ c' &= \inf_{y'} (-f_0(y') - p(-y' - z)). \end{aligned}$$

Comme les éléments y' et y'' sont arbitraires, de (1.8) il résulte que $c'' \geq c'$. En choisissant c de façon que

$$c' \leq c \leq c'',$$

définissons la fonctionnelle f' sur L' par la formule

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

cette fonctionnelle satisfait à la condition de majoration (1.5).

Ainsi, nous avons montré que si une fonctionnelle f_0 est définie sur un sous-espace $L_0 \subset L$ et vérifie sur L_0 la condition (1.5), elle peut être prolongée à un sous-espace plus grand L' de façon que la condition (1.5) soit conservée.

Si dans L on peut choisir un système dénombrable d'éléments $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ engendrant l'espace L tout entier, on construit la fonctionnelle sur L par récurrence, en considérant la suite de sous-espaces

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \dots$$

(ici $\{L^{(k)}, x_{k+1}\}$ désigne le plus petit sous-espace vectoriel de L contenant $L^{(k)}$ et x_{k+1}). Comme tout élément $x \in L$ se trouve alors dans un sous-espace $L^{(k)}$, la fonctionnelle f_0 sera prolongée à l'espace L tout entier.

Dans le cas général (c-à-d. lorsqu'il est impossible de trouver un ensemble dénombrable d'éléments engendrant l'espace L) la démonstration fait appel au lemme de Zorn. L'ensemble \mathfrak{S} de tous les prolongements de la fonctionnelle f_0 , vérifiant la condition (1.5), est ordonné, et tout sous-ensemble totalement ordonné $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$ possède une borne supérieure. Cette borne supérieure n'est autre chose que la fonctionnelle définie sur la réunion des domaines de définition des fonctionnelles $f' \in \mathfrak{S}_0$ et coïncidant avec chacune de ces fonctionnelle f' sur son domaine de définition. En vertu du lemme de Zorn, l'ensemble \mathfrak{S} possède un élément maximal f . Cet élément maximal f est précisément la fonctionnelle cherchée. En effet, elle est un prolongement de la fonctionnelle initiale f_0 , vérifie la condition (1.5) et est définie sur tout l'espace L , car sinon nous l'aurions prolongée de la manière indiquée ci-dessus à un sous-espace plus grand que le sous-espace propre sur lequel elle est définie, de sorte que f ne serait pas un élément maximal de \mathfrak{S} .

Le théorème est démontré.

Considérons maintenant le théorème de Hahn-Banach pour le cas d'un espace vectoriel complexe.

Une fonctionnelle non négative p , définie sur l'espace vectoriel complexe L , est appelée convexe, si pour tous les $x, y \in L$ et tous les nombres complexes λ on a

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda|p(x).$$

Théorème 1.3.2 Soit p une fonctionnelle convexe finie sur l'espace vectoriel complexe L et soit f_0 une fonctionnelle linéaire, définie sur un sous-espace vectoriel quelconque $L_0 \subset L$ et vérifiant sur ce sous-espace la condition

$$|f_0(x)| \leq p(x), \quad x \in L_0.$$

Alors il existe une fonctionnelle linéaire f , définie sur tout l'espace L et vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq p(x), \quad x \in L, \\ f(x) &= f_0(x), \quad x \in L_0. \end{aligned}$$

Démonstration 1.3.2 Désignons par L_R et L_{0R} les espaces L et L_0 considérés comme espaces vectoriels réels. Il est clair que p est une fonctionnelle convexe finie sur L_R et $f_{0R}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ est une fonctionnelle linéaire réelle sur L_{0R} vérifiant la condition

$$|f_{0R}(x)| \leq p(x)$$

et, à plus forte raison, la condition

$$f_{0R}(x) \leq p(x).$$

D'après le théorème précédent, il existe une fonctionnelle linéaire réelle f_R , définie sur tout l'espace L_R et satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} f_R(x) &\leq p(x), & x \in L_R (= L), \\ f_R(x) &= f_{0R}(x), & x \in L_{0R} (= L_0). \end{aligned}$$

Il est clair que $-f_R(x) = f_R(-x) \leq p(-x) = p(x)$, si bien que

$$|f_R(x)| \leq p(x), \quad x \in L_R (= L). \quad (1.9)$$

Définissons une fonctionnelle f sur L , en posant

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix)$$

(ici nous utilisons le fait que L est un espace vectoriel complexe et donc dans cet espace la multiplication par un nombre complexe est définie). On vérifie aussitôt que f est une fonctionnelle linéaire complexe sur L telle que

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) \quad \text{pour } x_0 \in L_0, \\ \operatorname{Re} f(x) &= f_R(x) \quad \text{pour } x \in L. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tous les $x \in L$. Supposons le contraire ; alors pour un certain $x_0 \in L$, on a $|f(x_0)| > p(x_0)$. Mettons le nombre complexe $f(x_0)$ sous la forme

$$f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$$

avec $\rho > 0$ et posons $y_0 = e^{-i\varphi} x_0$. Alors on a

$$f_R(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi} f(x_0)] = \rho > p(x_0) \simeq p(y_0),$$

ce qui contredit la condition (1.9).

Le théorème est démontré.

Soit E un espace vectoriel normé.

\bar{x} un point quelconque de E . On rappelle qu'une homothétie de centre \bar{x} et de rapport λ est :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x) = \bar{x} + \lambda(x - \bar{x}) = (1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x \in E. \end{aligned}$$

car E est convexe.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, $f(x) \in [\bar{x}, x]$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est un élément de la droite.

Exemple 1.3.1

$$\begin{aligned} f : B(x_0, \delta) &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x) = (1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x. \end{aligned}$$

Pour $\lambda = \lambda_0 \in]0, 1[$, $f(x) = (1 - \lambda_0)\bar{x} + \lambda_0 x$, et centre de la boule $B(x_0, \delta)$ dévient $f(x_0) = (1 - \lambda_0)\bar{x} + \lambda_0 x_0 = y_0$. Donc

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= (1 - \lambda_0)\bar{x} + \lambda_0 x \\ y_0 = f(x_0) &= (1 - \lambda_0)\bar{x} + \lambda_0 x_0 \end{aligned} \right\} = f(x) - y_0 = \lambda_0(x - x_0).$$

$$\begin{aligned} \implies \|f(x) - y_0\| &= \lambda_0 \|x - x_0\| \\ &\leq \lambda_0 \delta. \quad \implies f(x) \in B(y_0, \lambda_0 \delta) \end{aligned}$$

$$\lambda_0 < 1 \implies f(B(x_0, \delta)) = B(y_0, \lambda_0 \delta).$$

Lemme 1.3.1 Soit C un convexe ayant un point intérieur x_0 . Pour tout point $\bar{x} \in \overline{C}$, tout point $y \in [x_0, \bar{x}[$ est intérieur à C .

Preuve 1 i) Si $\bar{x} \in C$, d'après l'exemple précédant,

$$\begin{aligned} f : B(x_0, \delta) &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto f(x) = (1 - \lambda_0)\bar{x} + \lambda_0 x \in C. \end{aligned}$$

Car C est convexe

$$f(x) \subset B(f(x_0), \lambda_0 \delta) = f(B(x_0, \delta)) \subset C.$$

ii) Supposons que $\bar{x} \in \overline{C}$. Considérons alors l'homothétie de centre y où $y \in]\bar{x}, x_0]$ amenant x_0 sur \bar{x} .

$$\begin{aligned} g : C &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto g(x) = y + \lambda(x - y) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} g(x_0) = \bar{x} &= y + \lambda_0(x_0 - y) \\ \bar{x} - y &= \lambda_0(x_0 - y). \implies \lambda_0 < 0. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g(x_0) - y &= +\lambda_0(x_0 - y) \\ g(x) - y &= \lambda_0(x - y) \end{aligned} \right\} \implies g(x) - g(x_0) = \lambda_0(x - x_0).$$

$$\implies g : B(x_0, \delta) \longrightarrow C$$

$$x \longmapsto g(x) = y + \lambda_0(x - y).$$

$$g(x) \subset B(g(x_0), |\lambda|\delta) = B(\bar{x}, |\lambda|\delta).$$

Mais $\bar{x} \in \bar{C} \implies B(\bar{x}, |\lambda|\delta) \cap C \neq \emptyset \implies \exists z \in C \cap B(\bar{x}, |\lambda|\delta).$

$z = g^{-1}(u)$ où $u \in B(x_0, \delta) \implies u \in C^\circ$ car $B(x_0, \delta) \subset C.$

$z - y = \lambda(u - y)$ avec $\lambda < 0 \implies y \in]u, z[$ donc intérieur.

Proposition 1.3.1 Soit C un convexe d'intérieur non vide. On a alors :

i) C° est convexe.

ii) $\bar{C}^\circ = \bar{C}$; $\bar{C}^\circ = C^\circ.$

Démonstration 1.3.3 i) On sait que si $x_1, x_2 \in C^\circ$, alors $[x_1, x_2] \subset C^\circ$ donc C° est convexe.

ii) $C^\circ \subset C$ et $\bar{C}^\circ \subset \bar{C}$ cette inclusion est vraie. La réciproque : $\bar{C} \subset \bar{C}^\circ$ est vraie pour $\bar{x} \in \bar{C}$; $V(\bar{x}) \cap C \neq \emptyset, \exists y \in V(\bar{x}) \cap C$; $y \in C$, et $] \bar{x}, y[\subset C^\circ \implies [\bar{x}, \bar{y}] \subset \bar{C}^\circ$ donc $\bar{x} \in \bar{C}^\circ.$

D'autre part $C^\circ \subset \bar{C}^\circ$ toujours vraie, montrons que $\bar{C}^\circ \subset C^\circ$ pour C convexe.

Soit $x \in \bar{C}^\circ \implies B(x, \delta) \subset \bar{C} = \bar{C}^\circ \forall y \in B(x, \delta)$, $y \in \bar{C}^\circ, V(y) \cap C^\circ \neq \emptyset$ pour tout $V(y)$ en particulier pour $B(x, \delta) : B(x, \delta) \cap C^\circ \neq \emptyset.$ $z \in B(x, \delta) \cap C^\circ$, d'après le lemme précéant $]z, y[\subset C^\circ$ et comme x appartient à ce segment $x \in C^\circ.$ C.Q.F.D.

Chapitre 2

Espaces de Hilbert.

2.1 Produit scalaire.

Définition 2.1.1 Soit E un espace vectoriel on appelle produit scalaire l'application $E \times E$ dans \mathbb{C} définie par :

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

$$i) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$ii) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ [cas réel := } \langle y, x \rangle \text{]}.$$

$$iii) \langle x, x \rangle \geq 0; \quad \forall x \in E \quad : \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Remarque 2.1.1

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} \quad : \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ &= \overline{\alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle. \end{aligned}$$

Propriétés 2.1.1 *i) Inégalité de **Cauchy-Shwarz** : pour tout $x, y \in E$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

ii) Loi du parallélogramme : pour tout $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Preuve 2 i)

1) On va vérifier l'inégalité dans le cas où $K = \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ 0 &\leq \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ 0 &\leq \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 &\leq a\lambda^2 + 2b\lambda + c. \end{aligned}$$

$\Delta' = b^2 - ac \leq 0$: on a : $a = \langle y, y \rangle > 0$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle &\leq 0 \\ \langle x, y \rangle^2 &\leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \\ |\langle x, y \rangle| &\leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2) Cas où H est réel $K = \mathbb{R}$. Si $x \neq 0, y \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}} \right| &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}} \leq 1 \\ \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}} &= \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \implies \langle x, y \rangle &= \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}} \cos(\theta). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Lemme 2.1.1 Si E un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ensuite $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme.

Preuve 3 0- $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$.

i- $\|x\| \geq 0$: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ par la définition précédente.

ii- $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{\frac{1}{2}} = (\alpha \bar{\alpha})^{\frac{1}{2}} \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2 \langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

iii- $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$$\begin{aligned}
&\leq |\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle| \\
&\leq |\langle x, x \rangle| + |\langle x, y \rangle| + |\langle y, x \rangle| + |\langle y, y \rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \\
\implies \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Définition 2.1.2 Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace **préhilbertien**.

Notons qu'un espace préhilbertien est un espace normé :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 2.1.3 Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .

Définition 2.1.4 Un espace préhilbertien et **complet** est appelée un espace de **Hilbert**

Définition 2.1.5 Soit H un espace de Hilbert, et soient x et y deux vecteurs de H , on dit que x et orthogonal à y si $\langle x, y \rangle = 0$, et qu'on note $x \perp y$.

Propriétés 2.1.2 i) Si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$$\text{car : } \langle x, y \rangle = 0 : \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

ii) Si x_1, x_2, \dots, x_n sont orthogonaux deux à deux ($\langle x_i, x_j \rangle = 0$ si $i \neq j$)

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Propriétés 2.1.3 Soit H un espace de Hilbert le produit scalaire est une fonction continue.

2.2 Théorème de projection.

Lemme 2.2.1 Riesz Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. F est un s.e.v fermé de E . Il existe au moins un élément $x_0 \in E/F$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|x - x_0\| \geq \frac{1}{2}$, pour tout $x \in F$.

Preuve 4 Comme $F \neq E$,

alors il existe un élément $y_0 \in E/F$.

Posons $d = \inf_{x \in F} \|x - y_0\|$.

Comme $\|x - y_0\| \geq 0; \forall x \in F$,

c'est donc une partie minorée de \mathbb{R} , et donc admet une borne inférieure.

Si $d = 0 \Leftrightarrow \exists (x_n)$ de $F : x_n \rightarrow y_0$ et comme F est fermé on aurait $y_0 \in F$ impossible.

Donc $d \neq 0$ par définition de la borne inférieure, il est un élément $z_0 \in F$:

$0 < d \leq \|z_0 - y_0\| < d + \varepsilon = 2d$ avec $\varepsilon = d$ car $d > 0$

$x_0 = \frac{z_0 - y_0}{\|z_0 - y_0\|}$; $z_0 \in F \Rightarrow x_0 \notin F$ (sinon $y_0 \in F$)

$\|x_0\| = 1$, et

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \left\| x - \frac{z_0 - y_0}{\|z_0 - y_0\|} \right\|, \quad x \in F \\ &= \frac{1}{\|z_0 - y_0\|} \|\{ \|z_0 - y_0\| x - z_0 + y_0 \}\| \\ &= \frac{1}{\|z_0 - y_0\|} \|z_0 - \|z_0 - y_0\| x - y_0\| \geq \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d'où $\|x_0\| = 1$, $\|x - x_0\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in F$.

Théorème 2.2.1 Riesz Soit $(E, \|\cdot\|)^*$ un espace vectoriel **normé** sur K " $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ". Alors E est de dimension algébrique finie si et seulement si tout ensemble borné et fermé de E est **compact**.

Preuve 5 i) Si $\dim E < +\infty$, soit A une partie de E fermée et bornée. Considérons alors une suite $(x_n)_n$ de A . Il faut montrer qu'il existe une sous suite $(x_{n_k})_k$ convergente dans A (A compact revient ou dire A dénombrable meut compact).

Soit $\{e_i\}_{i=1, \dots, p}$ un base de E , $\dim E = p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$x_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j^n e_j$. Mais $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ car $\dim E = p < +\infty$.

$$\implies |\lambda_j^n| \leq \|x_n\|_\infty \leq K \cdot \|x_n\|.$$

Comme A est bornée, $|\lambda_j^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \{1, \dots, p\}$.

$(|\lambda_j^n|)_n$ est borné "de \mathbb{R} " donc il existe une sous suite $(|\lambda_j^{n_k}|)_k$ convergente vers $\bar{\lambda}_j$ pour $j = 1, \dots, p$, posons alors $\bar{x} = \sum_{j=1}^p \bar{\lambda}_j e_j$ et montrons que $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$.

$$\|x_{n_k} - \bar{x}\| = \left\| \sum_{j=1}^p (\lambda_j^{n_k} e_j - \bar{\lambda}_j e_j) \right\| \leq \sup_j |\lambda_j^{n_k} - \bar{\lambda}_j| \cdot \sum_{j=1}^p \|e_j\| < \varepsilon$$

car $\lambda_j^{n_k} \rightarrow \bar{\lambda}_j$. Donc $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$, comme A est fermé et $(x_{n_k}) \subset A$, alors $\bar{x} \in A$
C.Q.F.D.

ii) *Réciproquement,*

Supposons que tout ensemble $A \subset E$ fermé et borné est compact, montrons que $\dim E < +\infty$.

Si $E = \{0\}$, alors $\dim E = 0$; sinon, $E \neq \{0\}$. Soit $x_1 \in E$, $x_1 \neq 0$. Alors $[x_1]$ est un s.e.v. de dimension 1 donc fermé de E .

Si $E = [x_1] \implies \dim E = 1 < +\infty$, sinon $[x_1] \neq E$, et alors il existe $x_2 \in E/[x_1] : \|x_2\| = 1, \|x - x_2\| \geq \frac{1}{2}, \forall x \in [x_1]$ donc $\|x_2\| = 1, \|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Si $E = [x_1, x_2] \implies \dim E < +\infty$, sinon, $[x_1, x_2] \neq E, \exists x_3 : \|x_3\| = 1$, et $\|x - x_3\| \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in [x_1, x_2]$ et par suite,

$\|x_3\| = 1, \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}, \dots$

$\exists (x_n) : \|x_n\| = 1, \|x_n - x_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$.

$(x_n) \subset S(0, 1)$ sphère unité de E qui est fermée et bornée, donc d'après l'hypothèse de compacité on peut alors extraire une sous suite (x_{n_k}) convergente mais $\|x_n - x_{n-1}\| \geq \frac{1}{2}$ n'est pas de Cauchy **si de plus E est complet**, on aurait alors une contradiction. D'où $\dim E < +\infty$. C.Q.F.D. S'il n'est pas complet $x_{n_k} \rightarrow x$ est une contradiction avec $\|x_{n_k} - x_{n_k-1}\| \geq \frac{1}{2}$ conv \implies de Cauchy.

★ On voit que $(E, \|\cdot\|)$ doit être complet donc de **Banach** ou bien non complet.

Corollaire 2.2.1 *Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension algébrique finie si et seulement si la sphère unité est compact.*

Notons que le théorème de Riesz cesse d'être vrai si l'espace E n'est pas normé. (voir espace métrique : $(H(D), d)$).

Soit D un domaine (ouvert convexe) de \mathbb{R}^n . Alors il existe une suite d'ensemble compacts $\{K_n, n \in \mathbb{N}\}$ tels que $K_n \subset K_{n+1} \subset D$.

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C}. \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

on a

$$\|f\|_{K_n} = \sup_{x \in K_n} |f(x)| < +\infty.$$

f est bornée dans K_n mais pas nécessairement dans D .

On peut munir $C(D)$ d'une distance (et non d'une norme) :

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \\ d(f, g) &= \|f - g\|. \\ d(f, 0) &= \|f\|. \end{aligned}$$

On aura $\|\lambda f\| \neq |\lambda| \|f\|$ si $\lambda \neq 0$ donc impossible de définir la norme....

pour l'espace $(H(D), d)$ tout fermé et borné est compact, mais $\dim H(D)$ est infinie.

Théorème 2.2.2 (de projection) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, F un s.e.v. de E de dimension finie. Pour tout $x \in E/F$, $\exists x_0 \in F$:

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Preuve 6 Si $x \in F$; $\inf_{y \in F} \|x - y\| = 0$ et $x = y$. Donc on suppose que $x \notin F$. Notons que F est fermé.

$$f(x) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in F; \quad f(x) \leq \|x - y_n\| < f(x) + \frac{1}{n}.$$

$$\|y_n\| = \|y_n - x + x\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| < f(x) + \frac{1}{n} + \|x\| = M.$$

$\|y_n\| \leq M \implies y_n \in \bar{B}(0, M)$: $\bar{B}(0, M)$ fermé et borné de F , mais F de dimension finie, Donc d'après Riesz $\bar{B}(0, M)$ est compact, et donc on peut extraire de la suite $(y_n)_n$ une sous suite convergente $y_{n_k} \rightarrow y_0$, comme F est fermé, $y_0 \in F$.

$$f(x) \leq \|x - y_{n_k}\| < f(x) + \frac{1}{n_k}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$f(x) \leq \|x - y_0\| \leq f(x)$$

$$d'où \quad f(x) = \|x - y_0\|. \quad C.Q.F.D.$$

Ici y_0 n'est pas unique (il sera unique si E est un espace Hilbert).

Application

i) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Considérons une partie finie $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E libre.

$[e_1, \dots, e_n]$ est un s.e.v de dimension n (fermé de E) pour tout

$$x \in E/[e_1, \dots, e_n], \exists x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 e_i : \inf_{y \in [e_1, \dots, e_n]} \|x - y\| = \|x - x_0\|$$

x_0 est la meilleure approximation x .

ii) Soit $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ une suite des éléments linéairement indépendants $\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots,$

$\{x_1, \dots, x_n\}, \dots$ sont des parties libres.

$$f_1(x) = \inf_{y \in [x_1]} \|x - y\|, f_2(x) = \inf_{y \in [x_1, x_2]} \|x - y\|, \dots, f_n(x) = \inf_{y \in [x_1, \dots, x_n]} \|x - y\|, \dots$$

Alors $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_n(x)$, si la suite $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E , alors $f_n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exemple 2.2.1 ($C[a, b], \| \cdot \|$)

$1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ sont linéairement indépendants dans $C([a, b])$ pour voir tous les polynômes $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots + \lambda_n t^n$, il existe un polynôme de meilleure approximation : $\sup |f(x) - (\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots + \lambda_n t^n)| = \psi_n(f)$ avec $\psi_n(f) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Car l'ensemble $[1, t, t^2, \dots, t^n, \dots]$ est dense dans $C[a, b]$, c-à-d l'ensemble de polynômes de degré quelconque est dense dans $C[a, b]$.

Théorème 2.2.3 Soit H un espace de Hilbert, $F \subset H$ un ensemble non vide convexe et fermé. Pour $x_0 \in H/F$, il existe un élément unique \bar{x} tel que

$$\inf_{x \in F} \|x - x_0\| = \|\bar{x} - x_0\|.$$

Preuve 7 C'est donc l'approximation dans un espace de Hilbert pour le cas où F est un s.e.v fermé.

Posons $d = \inf_{x \in F} \|x - x_0\|$, comme F est fermé et $x_0 \notin F$, alors $d > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n) \subset F : d \leq \|x_n - x_0\| < d + \frac{1}{n}.$$

Montrons alors que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. On effect, d'après la loi du parallélogramme, on a :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|(x_n - x_0) - (x_m - x_0)\|^2 \\ &= 2\|x_n - x_0\|^2 + 2\|x_m - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x_0\right\|^2 \end{aligned}$$

Mais $\frac{x_n + x_m}{2} \in F$, car F est convexe, donc

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \frac{4}{n}d + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{m}d + \frac{2}{m^2} < \varepsilon \quad \text{quand } n > m > n_0.$$

Comme H est complet, $x_n \rightarrow \bar{x}$. Montrons que $\|\bar{x} - x_0\| = \inf_{x \in F} \|x - x_0\|$.

$$d \leq \|\bar{x} - x_0\| \leq \|\bar{x} - x_n\| + \|x_n - x_0\| < d + \frac{1}{n} + \varepsilon$$

d'où $\|\bar{x} - x_0\| = d$.

Unicité : Supposons que $\|\bar{x} - x_0\| = \|\bar{\bar{x}} - x_0\| = d$, alors

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|^2 &= \|\bar{x} - x_0 + x_0 - \bar{\bar{x}}\|^2 = \|(\bar{x} - x_0) - (\bar{\bar{x}} - x_0)\|^2 \\ &= 2\|\bar{x} - x_0\|^2 + 2\|\bar{\bar{x}} - x_0\|^2 - \|\bar{x} + \bar{\bar{x}} - 2x_0\|^2 \\ &\leq 4d^2 - 4\left\|\frac{\bar{x} + \bar{\bar{x}}}{2} - x_0\right\|^2 \\ &\leq 4d^2 - 4d^2 = 0 \\ \|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|^2 &= 0 \implies \bar{x} = \bar{\bar{x}}. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.4 Soit H un espace de Hilbert, et soit F un s.e.v fermé de H . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\bar{x} \in F : \|x_0 - \bar{x}\| \leq \|x_0 - y\| , \forall y \in F , x_0 \in H/F.$

ii) $\bar{x} - x_0 \in F^\perp.$

Preuve 8 i) Soit x_0 un point quelconque de H/F , si $\bar{x} - x_0 \in F^\perp$ où $\bar{x} \in F$ on a :

$$\|x_0 - y\|^2 = \|(x_0 - \bar{x}) + (\bar{x} - y)\|^2, \bar{x} - y \in F$$

donc , $\langle x_0 - \bar{x}, \bar{x} - y \rangle = 0$, et d'après le théorème de Pythagore; on a :

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2$$

$$\|x_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - \bar{x}\|^2$$

$$\|x_0 - y\| \geq \|x_0 - \bar{x}\|.$$

ii) Supposons qu'on a : $\|x_0 - \bar{x}\| \leq \|x_0 - y\| , \forall y \in F.$

$$\begin{aligned} \|x_0 - \bar{x}\|^2 \leq \|x_0 - y\|^2 &= \|x_0 - \bar{x} + \bar{x} - y\|^2 \\ &= \|(x_0 - \bar{x}) - (y - \bar{x})\|^2. \\ &= \|x_0 - \bar{x}\|^2 + \|y - \bar{x}\|^2 - 2\text{Rel}\langle x_0 - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|y - \bar{x}\|^2 \geq 2\text{Rel}\langle x_0 - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle, \forall y \in F.$$

Posons $z = y - \bar{x} \in F$, z étant quelconque de F .

$$\|z\|^2 \geq 2\text{Rel}\langle x_0 - \bar{x}, z \rangle.$$

★ Si $\text{Rel}\langle x_0 - \bar{x}, z \rangle = 0$, alors $\text{Im}\langle x_0 - \bar{x}, z \rangle = \text{Rel}\langle x_0 - \bar{x}, z \rangle = 0, \forall z.$

$\implies \langle x_0 - \bar{x}, z \rangle = 0$ c-à-d $x_0 - \bar{x} \in F^\perp.$

★ Sinon $\exists z_0 \neq 0 : \text{Rel}\langle x_0 - \bar{x}, z_0 \rangle \neq 0.$

Soit $\lambda_n = \frac{1}{n} \frac{\langle x_0 - \bar{x}, z_0 \rangle}{|\langle x_0 - \bar{x}, z_0 \rangle|}$ pour $z = \lambda_n z_0$, on obtient

$$\frac{1}{n} \|z_0\|^2 \geq 2|\langle x_0 - \bar{x}, z_0 \rangle|$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ d'où par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$0 \geq 2|\langle x_0 - \bar{x}, z_0 \rangle|$, contradiction car $\langle x_0 - \bar{x}, z_0 \rangle \neq 0.$

Caractérisation du point \bar{x} :

Définition 2.2.1 Si F est un s.e.v fermé de H , l'application

$$P : H \longrightarrow F.$$

$$x \longmapsto Px.$$

telle que

$$\inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - Px\|$$

est appelée la **projection orthogonale** de H sur F .

Théorème 2.2.5 Soit H un espace de Hilbert, et soit F un convexe fermé non vide de H . x_0 un point de H/F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$i) \exists! \bar{x} \in F : \langle x - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in F;$$

$$ii) \exists! \bar{x} \in F : \inf_{x \in F} \|x - x_0\| = \|\bar{x} - x_0\|.$$

Preuve 9

$$i) \implies ii)$$

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &= \|(x - \bar{x}) - (x_0 - \bar{x})\|^2 \\ &= \|x - \bar{x}\|^2 + \|x_0 - \bar{x}\|^2 - 2\langle x - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \\ \|x - x_0\|^2 &\geq \|x_0 - \bar{x}\|^2 \\ \|x - x_0\| &\geq \|x_0 - \bar{x}\|. \quad \forall x \in F. \end{aligned}$$

$$\inf_{x \in F} \|x - x_0\| = \|\tilde{x} - x_0\|.$$

d'où $\tilde{x} = \bar{x}$ (par unicité).

$$ii) \implies i)$$

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &\geq \|\bar{x} - x_0\|^2, \quad \forall x \in F \\ \|x - x_0\|^2 &= \|(x - \bar{x}) - (x_0 - \bar{x})\|^2 \\ &= \|x - \bar{x}\|^2 + \|x_0 - \bar{x}\|^2 - 2\langle x - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \\ \Rightarrow \|x - \bar{x}\|^2 &\geq 2\langle x - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle, \quad \forall x \in F \end{aligned}$$

★ Si $x - \bar{x} = 0 \Rightarrow$ Le résultat est évident, sinon soit $z_0 \in F$, $\|z_0\| \neq 0$ ($F \neq \emptyset$) $\lambda \in [0, 1]$;

$$x = \lambda z_0 + (1 - \lambda)\bar{x} \in F$$

d'où

$$x - \bar{x} = \lambda z_0 - \lambda \bar{x}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda z_0 - \lambda \bar{x}\|^2 &\geq 2\langle \lambda z_0 - \lambda \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \\ |\lambda|^2 \|z_0 - \bar{x}\|^2 &\geq 2\lambda \langle z_0 - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \\ |\lambda| \|z_0 - \bar{x}\|^2 = \lambda \|z_0 - \bar{x}\|^2 &\geq 2\langle z_0 - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle, \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Quand $\lambda \rightarrow 0$

$$2\langle z_0 - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \leq 0$$

$\langle z_0 - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \leq 0$ est vraie pour tout $z_0 \in F$, $z_0 \neq 0$. d'où $\langle x - \bar{x}, x_0 - \bar{x} \rangle \leq 0$, $\forall x \in F$
C.Q.F.D.

★ Il est important de noter que le résultat est vraie pour F fermé convexe et non vide, et par suite pour un s.e.v. fermé de H et non vide.

Théorème 2.2.6 Soit H un espace de Hilbert, et soit F un s.e.v de H , $F \neq H$.

P La projection orthogonale de H sur F . On a alors

i) P est un opérateur linéaire.

ii) $P \circ P = P$.

iii) $\|Px\| \leq \|x\|$.

Preuve 10 i) Soient $x, y \in H$; $P(x + y) = P(x) + P(y)$

$\langle P(x + y) - (x + y), z \rangle = 0, \forall z \in F$ car $x + y - P(x + y) \in F^\perp$

$\langle P(x + y) - x, z \rangle + \langle P(x + y) - y, z \rangle = 0$

mais $\langle Px - x, z \rangle = \langle Py - y, z \rangle = 0$

$\langle [Px - x] + [Py - y], z \rangle = 0$

$\langle (Px + Py) - (x + y), z \rangle = \langle P(x + y) - (x + y), z \rangle = 0 \forall z$.

$$\xrightarrow{\text{unicité}} Px + Py = P(x + y).$$

De même pour $P(\lambda x) = \lambda Px$.

ii) $(P \circ P)(x) = P(Px) = Px$ car $Px \in F$.

iii) $\|x\|^2 = \|x - Px + Px\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2$ car $Px \in F; x - Px \in F^\perp$

$\implies \|x\|^2 \geq \|Px\|^2 \implies \|Px\| \leq \|x\|$ et donc P est continue.

Théorème 2.2.7 Soit F un s.e.v fermé d'un espace de Hilbert H .

Alors on a :

i- $P_1 : H \longrightarrow F$ La projection orthogonale, $\ker P_1 = F^\perp$.

ii- $P_2 : H \longrightarrow F^\perp$, alors $P_2 = I - P_1$.

Preuve 11 i) Soit $x \in F^\perp \implies \langle x, y \rangle = 0$, $\forall y \in F$; mais $\langle x - Px, y \rangle = 0 \implies \langle Px, y \rangle = 0$,

$\forall y \in F$, et pour $y = Px$, on aura $\|Px\| = 0 \implies Px = 0$.

Réciproquement si $x \in \ker P$; c-à-d $Px = 0 \implies \langle x - 0, y \rangle = 0$, $\forall y \in F \implies \langle x, y \rangle = 0 \implies x \in F^\perp$

ici $P = P_1$.

ii) F^\perp est un s.e.v fermé de H donc on peut définir : $P_2 : H \longrightarrow F^\perp$. montrons que

$P_2 = I - P$, $\forall x \in H$: $\langle x - (x - Px), y \rangle = \langle Px, y \rangle = 0$ pour tout $y \in (F^\perp)$. Donc $I - P = P_2$

(Théorème 2.2.4)

Théorème 2.2.8 Décomposition orthogonale Soit H_1 un s.e.v fermé d'un espace de Hilbert H . Alors tout élément x de H s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = y + z ; y \in H_1 ; z \in H_1^\perp$$

Preuve 12 Soit $x \in H$, $x = x - Px + Px = Px + (x - Px)$; $Px \in F$ et $x - Px \in F^\perp$.

Montons que cette écriture est unique : $x = y + z$; $y \in F$; $z \in F^\perp$.

$$Px = Py + Pz = y$$

$$(I - P)x = (I - P)y + (I - P)z = z : d'où $Px = y$ et $x - Px = z$.$$

Application : théorème de Riesz

Si $x \in H_1 \cap H_1^\perp \Rightarrow \langle x, Px \rangle = \|x\|^2$, et $\langle x, (I - P)x \rangle = \|x\|^2$.

$\langle x, Px \rangle = \langle x, x - Px \rangle \Rightarrow 2\langle x, Px \rangle = \|x\|^2 = 2\|x\|^2 \Rightarrow \|x\| = 0$. Donc $H_1 \cap H_1^\perp = \{0\}$. Par suite $H = H_1 \oplus H_1^\perp$.

Théorème 2.2.9 Soit H_1 un s.e.v de H (pas nécessairement fermé). Alors

$$(H_1^\perp)^\perp = \overline{H_1}.$$

Preuve 13 $H_1 \subset (H_1^\perp)^\perp$ car $x \in H_1$ et $y \in H_1^\perp$: $\langle x, y \rangle = 0$.

Comme $(H_1^\perp)^\perp$ est fermé $\Rightarrow \overline{H_1} \subset \overline{(H_1^\perp)^\perp} = (H_1^\perp)^\perp$ d'où $\overline{H_1} \subset (H_1^\perp)^\perp$; montrons que

$(H_1^\perp)^\perp \subset \overline{H_1}$; on soit que H_1^\perp est fermé et par suite il existe un opérateur $P : H \rightarrow H_1^\perp$:

$\ker P = (H_1^\perp)^\perp$ donc il suffit de montrer que $\ker P \subset \overline{H_1}$.

Soit $x \in \ker P$: $Px = 0$, $H = \overline{H_1} \oplus \overline{H_1^\perp} \Rightarrow x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \overline{H_1}$,

$x_2 \in \overline{H_1^\perp} = H_1^\perp$; $0 = Px = P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2 = 0 + Px_2 = x_2$ d'où $x_2 = 0$ et $x = x_1 \in \overline{H_1}$. C.Q.F.D.

Noter que si H_1 est fermé $(H_1^\perp)^\perp = H_1$.

2.3 Espaces de Hilbert séparables.

Définition 2.3.1 Soit E un espace normé.

Une suite $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ de E : $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$ est appelée **base de Schauder** si tout $x \in E$, s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \quad c - \grave{a} - d \quad S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 : \|x - S_n\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.3.1 Soit E un espace normé. Si E admet une base de Schauder alors il est séparable.

Proposition 2.3.1 (*L'inégalité de Bessel*)

Soit H un espace de Hilbert et soit $\{e_i\}_{i \in I}$ un système orthonormé dans H . Alors pour tout $x \in H$. La famille réelle $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$ est sommable et on a l'inégalité de Bessel suivante :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration 2.3.1 Soit $S \subset I$ un sous-ensemble fini. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \sum_{i \in S} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2 &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{i \in S} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle + \sum_{i \in S} |\langle x, e_i \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i \in S} |\langle x, e_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i \in S} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

En prenant le sup sur tous les sous-ensembles fini $S \subset I$. on obtient l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2.4 Séries de Fourier.

Théorème 2.4.1 Soit H un espace de Hilbert. $\{e_i\}_{i=1, \dots, n, \dots}$ un système orthonormal : posons

$$H_S = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i e_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty \right\}$$

i- H_S est un s.e.v de H .

ii- H_S est un espace de Hilbert.

iii- H_S est isométriquement isomorphe à l_2 .

iv- H_S est un s.e.v. fermé.

Preuve 14 On a : $\{e_i\}_{i=1, \dots, n, \dots}$ un système orthonormal :

$$H_S = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i e_i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty \right\}$$

$x = \sum_{i=1}^n x_i$ est convergente si $\sum_{i=1}^{+\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad n > m > n_0 \implies \|S_n - S_m\|^2$$

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^m x_i \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=m+1}^n x_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^n \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

Mais

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : n > m > n_0 : \|T_n - T_m\| < \varepsilon^2$$

$$\left\| \sum_{i=m+1}^n \|x_i\|^2 \right\| = \sum_{i=m+1}^n \|x_i\|^2 < \varepsilon^2$$

D'après le théorème (2.4.1) : $x_i = \lambda_i e_i$. Mais $\|x_i\|^2 = \|\lambda_i e_i\|^2 = \langle \lambda_i e_i, \lambda_i e_i \rangle = |\lambda_i|^2$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty$$

donc $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ est convergente

★ $x \in H_s : x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i ; \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty$. On a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in L_2$?

$y \in H_s : y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i ; \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < +\infty$. On a $(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in L_2$?

$$(\lambda_1 + \xi_1, \dots, \lambda_n + \xi_n, \dots) \in L_2 \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i + \xi_i|^2 < +\infty$$

$$x + y = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \xi_i) e_i \in H_s$$

★

$$\begin{aligned} \lambda x &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \lambda_i e_i \quad c - \grave{a} - d \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda \lambda_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty \\ &\implies \lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \lambda_i e_i \in H_s \end{aligned}$$

ii) Montrons que H_s est isométrique isomorphe à l_2

$$\psi : H_s \longrightarrow L_2.$$

$$x \longrightarrow \psi(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = \psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\right) \cdot \psi(x + y) =$$

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right).$$

$$= \psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \xi_i) e_i\right).$$

$$= (\lambda_1 + \xi_1, \dots, \lambda_n + \xi_n, \dots).$$

$$= (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) + (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots).$$

$$= \psi(x) + \psi(y).$$

$$\psi(\lambda x) = \psi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda \lambda_i e_i\right).$$

$$= (\lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_n, \dots).$$

$$= \lambda (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots).$$

$$= \lambda \psi(x).$$

Donc ψ est linéaire.

$$\star \quad \psi(x) = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = 0 \implies \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0, \dots \implies x = 0.$$

Donc ψ est injective. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in L_2$

$\exists x = \sum \lambda_i e_i \in H_s$ s'ou ψ est isomorphisme d'algèbre.

$$\begin{aligned} x \in H_s : \langle \psi(x), \psi(x) \rangle &= \langle (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots), (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2. \\ \langle x, x \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2. \end{aligned}$$

Donc $\|\psi(x)\| = \|x\|$; ψ est une isométrie.

De même $\langle \psi(x), \psi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

ii) Soit (x_n) une suite de Cauchy de H_s .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > m > n_0 : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

$$\|x_n - x_m\| = \|\psi(x_n - x_m)\| = \|\psi(x_n) - \psi(x_m)\| < \varepsilon.$$

$$\psi(x_n) \longrightarrow \psi(x) : \|\psi(x_n) - \psi(x)\| = \|\psi(x_n - x)\| = \|x_n - x\|.$$

Conclusion

- 1- H_s est un s.e.v de H .
- 2- H_s est complet et par suite H_s est un espace de Hilbert séparable.
- 3- $H_s \subset H$ complet donc H_s est fermé.

On a la série de Fourier :

$$\lambda_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|} \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

Définition 2.4.1 Soit $\{e_i : i \in I\}$ un système orthonormale d'un espace Hilbert. On dit que ce système est une **base orthonormale** s'il est **maximal**. C-à-d

$$\forall x \in H : \langle x, e_i \rangle = 0 \implies x = 0.$$

On dit aussi que c'est un système orthonormal **complet** ou **total**.

Théorème 2.4.2 Soit H un espace de Hilbert.

$\{e_i : i \in I\}$ est une base orthonormale si et seulement si $\overline{\{e_i : i \in I\}} = H$

Preuve 15 i- Si $\overline{[e_i]} = H \implies \{e_i\}_{i \in I}$ est une base orthonormale.

Soit $x \in H : \langle x, e_i \rangle = 0$; pour toute $x \in H = [e_i]$

$$x \in [e_i]^\perp$$

$$x \in \overline{[e_i]} \implies x = 0.$$

donc $\{e_i\}_{i \in I}$ est maximal.

ii- Si $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base orthonormale $\implies \overline{[e_i]} = H$.

$\overline{[e_i]} \subset H$ est évidente.

$$H \subset \overline{[e_i]} \quad \text{soit } x \in H : x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i : S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i; S_n \in [e_i]$$

$$x = \lim_n S_n \quad \text{donc } x \in \overline{[e_i]} \implies \overline{[e_i]} = H$$

Proposition 2.4.1 Égalité de Parseval Soit H un espace de Hilbert.

$\{e_i\}_{i=1, \dots, n, \dots}$ un système orthonormal

$$H_s = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i e_i : \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 < +\infty \right\}$$

$H_s \subset H : \text{on a } \overline{[e_i]} = H_s.$

Démonstration 2.4.1 i) $H_s \subset \overline{[e_i]}$

$$\text{Soit } x \in H_s : x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i : S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i; S_n \in [e_i]$$

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad c - \grave{a} - d \quad x \in \overline{[e_i]}$$

ii) $\overline{[e_i]} \subset H_s$

$$\text{Soit } x \in \overline{[e_i]} \quad x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$$

$$S_n \in H_s \quad \text{car} : S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

$$\lambda_i = \xi_i \quad \text{si } i = 1, \dots, n$$

$$\lambda_i = 0 \quad \text{si } i = n + 1, \dots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 + 0 < +\infty$$

$S_n \in H_s$ mais H_s est fermé, donc $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in H_s \implies \overline{[e_i]} = H_s.$

Conclusion : $\{e_i\}_{i=1,\dots,n,\dots}$ est une base orthonormé dénombrable de H_s

$$\{e_i\}_{i=1,\dots,n,\dots} \quad [e_i] = \overline{[e_i]} \quad Px = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i ; \lambda_i = \langle x, e_i \rangle$$

$x \in H :$

$$\|x\|^2 = \|x - Px + Px\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 ; \|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \|Px\|^2 &\leq \|x\|^2 \\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 &\leq \|x\|^2, \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 &\leq \|x\|^2 \\ \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2, \forall n \\ \|x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Si } H_s = H \Rightarrow \|x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2.$$

$$H_s = H \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \Rightarrow \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2.$$

Réciproque si l'inégalité de Bessel est une égalité ?.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2 = \|x\|^2 &\implies \|x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\|^2 = 0 \\ &\implies \|x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\| = 0 \\ &\implies x - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i = 0 \\ &\implies x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \in H_s \end{aligned}$$

Donc $x \in H_s : H \subset H_s \implies H = H_s$

$H_s = H \iff \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^2$ (égalité de Parseval).

Chapitre 3

Séparation des convexes.

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que sur les espaces vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Sans perte de généralité, on peut donc munir E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (il suffit d'identifier E à \mathbb{R}^p à l'aide d'une base et de prendre le produit scalaire naturel \mathbb{R}^p), et de la norme euclidienne associée $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle que dans ce cas, toutes les formes linéaires sont continues et que le dual de E s'identifie à E , c'est à dire que toute forme linéaire (continue) $f \in E'$ sur E est représentée par un élément $y \in E$, avec :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle y, x \rangle \quad \text{et} \quad \|f\| = \|y\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Rappelons le théorème fondamental des espaces euclidiens finis, qui sera généralisé en dimension quelconque.

Théorème 3.0.3 *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace euclidien de dimension finie et $x_0 \notin C$. Il existe un point unique $y_0 \in C$, appelé projection de x_0 sur C , qui réalise la distance de x_0 à C . La projection de x_0 sur C est caractérisée par*

$$\forall y \in C, \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0.$$

Démonstration 3.0.2 *Soit $r = d(x_0, C) > 0$ et $B = C \cap \bar{B}(x_0, 2r)$. On écrit :*

$$d(x_0, C) = \inf_{y \in C} \|y - x_0\| = \inf_{y \in B} \|y - x_0\|.$$

Or B est un fermé borné dans un espace de dimension finie, il est donc compact. La fonction continue $y \rightarrow \|y - x_0\|$ atteint donc son minimum sur B . Le point y_0 où cette fonction atteint son minimum réalise la distance de x_0 à C et ceci prouve l'existence de la projection $y_0 \in C$ de x_0 sur C .

La projection y_0 vérifie : $\forall y \in C, \|x_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2$, d'où en développant :

$$\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq \frac{1}{2} \|y - y_0\|^2.$$

Soit $\theta > 0$. On applique cette inégalité à $x_0 = \theta y + (1 - \theta)y_0$ et on obtient :

$$\theta \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq \left(\frac{1}{2}\right)\theta^2 \|y - y_0\|^2.$$

En divisant par θ et en faisant tendre θ vers 0, on obtient bien

$$\forall y \in C, \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0.$$

Réciproquement, si $y_0 \in C$ vérifie $\forall y \in C, \langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$, on a bien :

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + 2\langle x_0 - y_0, y_0 - y \rangle + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2$$

et y_0 réalise la distance de x_0 à C .

Enfin, si z_0 est un autre point de C vérifiant l'inégalité $\forall y \in C,$

$\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0$, on peut écrire :

$$\forall y \in C, \langle x_0 - y_0, z_0 - y_0 \rangle \leq 0,$$

$$\forall y \in C, \langle x_0 - z_0, y_0 - z_0 \rangle \leq 0.$$

En sommant, on obtient : $\langle z_0 - y_0, z_0 - y_0 \rangle \leq 0$, soit $y_0 = z_0$, d'où l'unicité de la projection de x_0 sur C .

3.1 Intérieur relatif d'un convexe de dimension finie.

Proposition 3.1.1 Soit C un convexe dans un espace vectoriel de dimension finie E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $C^0 \neq \emptyset$.

ii) $\text{Aff}C = E$.

iii) C contient un repère affine.

Démonstration 3.1.1 $i) \Rightarrow iii)$: Toute boule $B(x_0, r)$ contient un repère affine : $(x_0, x_0 + \rho e_1, x_0 + \rho e_2, \dots, x_0 + \rho e_p)$, où (e_1, \dots, e_p) est une base de E et $\rho < \inf\{r/\|e_i\|\}$.

$iii) \Rightarrow i)$: Si (x_0, \dots, x_p) est un repère affine de E , alors $\text{co}(x_0, \dots, x_p)$ est d'intérieur non vide.

En effet soit $u_i = x_i - x_0$; (u_1, \dots, u_p) est une base de E . Soit (u_1^*, \dots, u_p^*) la base duale. Alors $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i$, équivaut lorsque $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ à $x - x_0 = \sum_{i=0}^p \lambda_i (x_i - x_0)$, et dans ce cas $\lambda_i = u_i^*(x - x_0)$. Par conséquent :

$$\text{co}(x_0, \dots, x_p) = \{x \in E / u_i^*(x - x_0) \geq 0, i = 1, \dots, p \text{ et } \sum_{i=0}^p u_i^*(x - x_0) \leq 1\}$$

qui contient l'ouvert non vide

$$\{x \in E / u_i^*(x - x_0) > 0, i = 1, \dots, p \text{ et } \sum_{i=0}^p u_i^*(x - x_0) < 1\}.$$

iii) \Rightarrow ii) : clair.

ii) \Rightarrow iii) : Si iii) est faux, soit k le nombre maximum de points affinement indépendants de C . On a $k < n + 1$. Soit (x_1, \dots, x_k) ces points. Tout $x \in C$ peut s'écrire $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, avec $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$; il en est de même de tout $x \in \text{Aff}(C)$. On a donc $\text{Aff}(C) = \text{Aff}(x_1, \dots, x_k)$. Or la dimension de $\text{Aff}(x_1, \dots, x_k)$ est de dimension $k - 1 < n$, donc $\text{Aff}(C) \neq E$, ce qui contredit ii)

Définition 3.1.1 On appelle dimension d'un convexe C la dimension de $\text{Aff}C$. C'est aussi le nombre p maximal tel que C contienne $p + 1$ points affinement indépendants.

Définition 3.1.2 Soit C un convexe non vide d'un espace vectoriel de dimension finie E . On appelle intérieur relatif de C , et on note $\text{ri}C$ l'intérieur de C relatif au sous-espace affine $\text{Aff}C$. Un point x de C est donc relativement intérieur à C s'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r)$ vérifie $(B(x, r) \cap \text{Aff}C) \subset C$.

Remarque 3.1.1 Cette notion d'intérieur relatif ne dépend pas de la norme considérée sur l'espace de dimension finie E .

Remarque 3.1.2 Tout convexe de dimension finie a même adhérence que son intérieur relatif. En particulier si le convexe est non vide, il en est de même de son intérieur relatif.

Démonstration 3.1.2 Soit C un convexe non vide de E . Par translation on se ramène au cas où $0 \in \text{Aff}C$. Alors on peut considérer $E_1 = \text{Aff}C$ comme un espace vectoriel normé (par la restriction de la norme de E), et C comme un convexe de E_1 tel que $\text{Aff}(C) = E_1$. L'intérieur de C relatif à E_1 est donc non vide (proposition 3.1.1) et c'est exactement $\text{ri}C$. De plus C et $\text{ri}C$ ont même adhérence dans E_1 , d'après la proposition 1.4.1; mais l'adhérence d'une partie A de E_1 est la même dans E et E_1 (car E_1 est fermé).

3.2 Théorème de séparation en dimension finie.

Théorème 3.2.1 Si C est un convexe fermé non vide d'un espace E de dimension finie et x_0 un point de E n'appartenant pas à C il existe un hyperplan affine H séparaant strictement x_0 de C ; c'est à dire que C et x_0 sont inclus chacun dans un demi-espace ouvert différent défini par H . En particulier C est inclus dans l'un des demi-espaces affines associés à H .

Démonstration 3.2.1 Soient x_0 et C comme dans l'énoncé. La distance $d(x_0, C) = \inf\{\|y - x_0\| / y \in C\}$ de x_0 à C est strictement positive, puisque $x_0 \notin C$ et C est fermé. Le théorème de projection sur un convexe fermé d'un espace euclidien, 3.0.3, dit qu'il

existe un unique point y_0 de C réalisant cette distance (i.e. $\|y_0 - x_0\| = d(x_0, C)$), caractérisé par les inéquations :

$$\forall y \in C, \langle y - y_0, x_0 - y_0 \rangle \leq 0$$

Soit H l'hyperplan médiateur du segment $[x_0, y_0]$. Pour tout $y \in C$, on a :

$$\|y - x_0\|^2 = \|y - y_0\|^2 + 2\langle y - y_0, y_0 - x_0 \rangle + \|y_0 - x_0\|^2 > \|y - y_0\|^2$$

Donc y appartient au demi-espace ouvert $\{x \in E / d(x, y_0) < d(x, x_0)\}$ défini par H auquel x_0 n'appartient pas.

Remarque 3.2.1 Il revient au même de dire que si x_0 n'appartient pas au convexe fermé C , il existe une forme linéaire f sur E (de la forme $x \mapsto \langle u, x \rangle$) telle que $\sup_{x \in C} f(x) < f(x_0)$.

Remarque 3.2.2 Les résultats précédents, 3.2.1, sont vrais dans un espace vectoriel normé de dimension infinie ; la preuve donnée ici est spécifique à la dimension finie.

Théorème 3.2.2 Si C est un convexe non vide d'un espace E de dimension finie et x_0 un point de E n'appartenant pas à $\text{ri}(C)$, il existe un hyperplan affine H de E , contenant x_0 et disjoint de $\text{ri}(C)$. De plus C est inclus dans l'un des demi-espaces affines associés à H .

Démonstration 3.2.2

a) Supposons d'abord que C est ouvert.

Soit y_0 un point de C , et soit C_n l'image de C par l'homothétie de centre y_0 , de rayon $1 - \frac{1}{n}$. Il résulte du lemme 1.4.1 que l'adhérence $\overline{C_n}$ est incluse dans C , et que tout point de C est inclus dans un C_n . Autrement dit $C = \bigcup_{n \geq 1} \overline{C_n}$. D'après le théorème précédent, appliqué à x_0 et $\overline{C_n}$, pour tout n il existe

$u_n \in E$ non nul tel que $\sup_{y \in C_n} \langle u_n, y \rangle < \langle u_n, x_0 \rangle$. On peut supposer que $\|u_n\| = 1$.

Par compacité de la sphère unité de E , une sous-suite (u_{n_k}) converge vers vecteur u , vérifiant $\|u\| = 1$ et $\langle u, y \rangle \leq \langle u, x_0 \rangle$ pour tout $y \in C$. Ceci signifie que C est inclus dans le demi-espace fermé $\{y \in E / \langle u, y \rangle \leq \langle u, x_0 \rangle\}$. Comme C est ouvert, il est en fait inclus dans l'intérieur du demi-espace, c'est à dire le demi-espace ouvert correspondant $\{y \in E / \langle u, y \rangle < \langle u, x_0 \rangle\}$. Un hyperplan séparateur est donc $H = \{y \in E / \langle u, y \rangle = \langle u, x_0 \rangle\}$.

b) Le cas général.

Si $x_0 \notin \text{Aff}C$, le théorème 3.2.1 appliqué à x_0 et au convexe fermé $\text{Aff}C$ montre qu'on peut séparer strictement x_0 de $\text{Aff}C$.

Si $x_0 \in \text{Aff}C$, on peut par translation supposer que $\text{Aff}C$ est un sous-espace vectoriel fermé V de E . Appliquons le point (a) ci-dessus au convexe C considéré dans l'espace vectoriel V ,

on voit qu'il existe un hyperplan M de l'espace V contenant x_0 et disjoint de $\text{ri}C$. La preuve du point (a) montre en fait l'existence d'un vecteur $u \in V$ tel que $\text{ri}C$ soit inclus dans le demi-espace ouvert (relatif à V) $\{y \in E / \langle u, y \rangle < \langle u, x_0 \rangle\}$. L'hyperplan affine de E défini par $H = \{y \in E / \langle u, y \rangle = \langle u, x_0 \rangle\}$ contient donc x_0 et est disjoint de $\text{ri}C$. Comme $C \subset \overline{\text{ri}C}$ (Remarque 3.1.5), il est inclus dans l'adhérence du demi-espace ouvert, c'est-à-dire le demi-espace fermé $\{y \in E / \langle u, y \rangle \leq \langle u, x_0 \rangle\}$.

Remarque 3.2.3 On voit donc qu'il existe une forme linéaire non nulle f sur E (de la forme $x \rightarrow \langle u, x \rangle$) telle que $\sup_{x \in C} f(x) \leq f(x_0)$.

Corollaire 3.2.1 (Théorème de Hahn-Banach géométrique dans les espaces de dimension finie) Soit C un convexe non vide de l'espace vectoriel normé E . Tout sous-espace affine M disjoint de C est inclus dans un hyperplan affine H disjoint de C .

Démonstration 3.2.3 Le convexe $C - M = \{x - y / x \in C, y \in M\}$ est non vide et ne contient pas le point 0. Il existe donc d'après le théorème 3.2.2 une forme linéaire f telle que $f(x - y) > f(0) = 0$ pour tout $x \in C, y \in M$. Alors la forme linéaire f est constante sur M (si elle prend des valeurs distinctes en deux points $y_1, y_2 \in M$, sa restriction à la droite $y_1 y_2$ prend toutes les valeurs réelles, donc ne peut être majorée par $f(x)$). Soit a cette valeur constante. On a donc $M \subset H = \{y / f(y) = a\}$ qui est l'hyperplan affine recherché.

Corollaire 3.2.2 Soient C_1 et C_2 deux convexes non vides et disjoints de l'espace vectoriel normé E . On suppose que C_1 est ouvert. Il existe alors un hyperplan affine H séparant strictement C_1 de C_2 . Plus précisément il existe une forme linéaire f sur E et un réel a tels que $\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2, f(x_1) < a \leq f(x_2)$.

Démonstration 3.2.4 On applique le Théorème 3.2.2 au point 0 et au convexe non vide $C_1 - C_2 = \{y - z / x \in C_1, y \in C_2\}$. D'où il existe f forme linéaire telle que $\forall y \in C_1, z \in C_2, f(y - z) < f(0) = 0$; on en déduit, en notant $a = \inf_{z \in C_2} f(z)$ que $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, f(x_1) \leq a \leq f(x_2)$. La première inéquation signifie que C_1 est inclus dans le demi-espace $f(x) \leq a$; comme C_1 est ouvert, il est en fait inclus dans l'intérieur du demi-espace, c'est à dire le demi-espace $f(x) < a$.

Corollaire 3.2.3 Par tout point non intérieur d'un convexe de E il passe un hyperplan d'appui.

Démonstration 3.2.5 Si le convexe C est d'intérieur non vide c'est une conséquence directe du théorème 3.2.2 (puisque $C^0 = \text{ri}C$). Si C est d'intérieur vide, $\text{Aff}C$ est un sous-espace affine de E , différent de E . Il est donc inclus dans un hyperplan affine H ; celui-ci contient C , donc est bien un hyperplan d'appui de C .

Corollaire 3.2.4 *Tout convexe fermé de dimension finie distinct de l'espace entier est une intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent et qui sont associés à des hyperplans d'appui.*

Démonstration 3.2.6 *Supposons d'abord que l'on considère un convexe fermé C d'intérieur non vide. Soit x_0 un point n'appartenant pas à C , et y_0 un point intérieur à C . Alors l'intersection du segment $[y_0x_0]$ avec C est un segment $[y, z_0]$; le point z_0 n'est pas intérieur à C (puisque approchable par des points de $]z_0, x_0[$). Soit H un hyperplan d'appui de C passant par z_0 et disjoint de C^0 (Corollaire 3.2.3), et D un demi-espace associé contenant C . Le demi-espace D ne peut contenir x_0 (en effet y_0 est intérieur à C , donc à D ; si x_0 est dans D , alors le point $z_0 \in]y_0, x_0[$ doit aussi être intérieur à D ; ce qui contredit $z_0 \in H$). Soit C_1 l'intersection des demi-espaces fermés, associés à des hyperplan d'appui de C , qui contiennent C . Il est clair que C_1 contient C , et ce qui précède montre qu'un point hors de C est hors de C_1 ; d'où l'égalité. Dans le cas général (où on en suppose pas C d'intérieur non vide), on remarque d'abord que $\text{Aff}C$ est intersection d'un nombre fini d'hyperplans affines (automatiquement d'appui pour C), et que chacun d'eux est trivialement intersection de deux demi-espaces fermés. Si $C = \text{Aff}C$, la preuve est terminée. Sinon, on applique ce qui précède en considérant C comme convexe fermé de $\text{Aff}C$ (distinct de $\text{Aff}C$). On obtient que C est intersection des demi-espaces de $\text{Aff}C$ qui le contiennent et qui sont associés à des hyperplans d'appuis de C dans $\text{Aff}C$. Un tel demi-espace est lui-même l'intersection de $\text{Aff}C$ avec un demi-espace fermé de E tout entier, contenant C et associé à un hyperplan de E d'appui pour C .*

3.3 Structure des convexes compacts de dimension finie.

Proposition 3.3.1 *Soit K est un convexe compact d'un espace vectoriel normé E . Pour tout hyperplan vectoriel fermé V de E il existe un hyperplan d'appui fermé de K parallèle à V . De plus K est l'intersection des demi-espaces le contenant déterminés par ses hyperplans d'appui.*

Démonstration 3.3.1 *Tout hyperplan vectoriel fermé V a pour équation $f(x) = 0$, où f est une linéaire non nulle. Cette forme linéaire est évidemment continue, elle atteint donc son maximum M et son minimum m sur K . Les hyperplan d'équation $f(x) = m$ et $f(x) = M$ rencontrent donc K . Comme K est inclus dans les demi-espaces $f(x) \geq m$ et $f(x) \leq M$, ces hyperplans sont bien des hyperplans d'appui de K , de direction V .*

Si $x_0 \in E$ est un point n'appartenant pas à K , il existe d'après la proposition 3.2.1 une forme linéaire continue f telle que $M := \sup_{x \in K} f(x) < f(x_0)$. Le demi-espace $f(x) \leq M$ contient K mais non x_0 .

Remarque 3.3.1 *En fait on voit que soit K est inclus dans un hyperplan parallèle à V , soit il est inclus dans une bande définie par deux hyperplan d'appui parallèles à V .*

Le théorème qui suit est la version finie-dimensionnelle d'un théorème de Krein et Milman.

Théorème 3.3.1 Krein-Milman *Tout convexe compact K de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Démonstration 3.3.2 *On raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel. Si $\dim E = 0$, c'est trivial. Soit $n > 0$ et supposons le théorème démontré pour $\dim E < n$. Soit K un convexe compact de E de dimension n . On peut supposer $\text{Aff}(K) = E$ (sinon, remplacer E par $\text{Aff}(K)$). Alors $K^0 \neq \emptyset$ (proposition 3.1.1).*

Soit $x \in K$, il s'agit de montrer que $x \in \text{co}(\text{Ext}K)$. Si $x \in K \setminus K^0$, il existe un hyperplan H contenant x (Théorème 3.2.2), et on a $H \cap K \neq \emptyset$. Mais alors $F = H \cap K$ est une face de K , de sorte que $\text{Ext}F \subset \text{Ext}K$. d'autre part $\text{Aff}(F) \subset H$ est un sea de dimension strictement inférieure à n , par conséquent l'hypothèse de récurrence s'applique à F . On a donc $x \in \text{co}(\text{Ext}F) \subset \text{co}(\text{Ext}K)$.

Si au contraire $x \in K^0$, soit D une droite affine quelconque contenant x . Alors $D \cap K$ est un convexe compact de D , c'est à dire un segment $[x_1, x_2]$. Les points x_1, x_2 ne sont pas dans K^0 , et donc d'après ce qui précède, ils sont dans $\text{co}(\text{Ext}K)$. Alors $x \in \text{co}(x_1, x_2) \subset \text{co}(\text{Ext}K)$.

En vue de préciser le théorème de structure précédent, on rappelle le théorème de Carathéodory :

Proposition 3.3.2 Théorème de Carathéodory *Soit E un espace vectoriel de dimension finie p , et A un sous-ensemble de E .*

- i) Tout point du cône convexe engendré par A est combinaison linéaire à coefficients positifs d'au plus p éléments de A .*
- ii) Tout point de l'enveloppe convexe de A est combinaison convexe d'au plus $p+1$ éléments de A .*

Démonstration 3.3.3 *i) Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, avec $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$. On veut montrer, par récurrence sur n , qu'il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$, avec $\text{card } I \leq p$ et des nombres $\mu_i \geq 0$, tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = x$. C'est clair si $n \leq p$. Supposons $n \geq p + 1$. La famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est nécessairement liée, il existe donc des réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a alors :*

$$x = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \tau \alpha_i) x_i.$$

On peut toujours supposer que $\{i \mid \alpha_i > 0\} \neq \emptyset$, quite à changer le signe de tous les α_i . Soit $\tau = \inf\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0\}$. On a $\lambda_i \geq \tau \alpha_i$ si $\alpha_i > 0$, par définition de τ ; mais $\tau \geq 0$, de sorte

que $\lambda_i \geq 0 \geq \tau\alpha_i$ si $\alpha_i \leq 0$. De plus il existe $i_0 > 0$ tel que $\lambda_{i_0} = \tau\alpha_{i_0}$. L'élément x est donc combinaison linéaire des $n - 1$ éléments x_i , $i \neq i_0$, à coefficients $\lambda_i - \tau\alpha_i$ (positifs ou nuls d'après ce qui précède), et on applique l'hypothèse de récurrence.

ii) Dans l'espace vectoriel augmenté $\widehat{E} = E \oplus \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $\widehat{A} = A \times \{1\}$. Il est clair que $\text{co}\widehat{A} = (\text{co}A) \times \{1\}$. Si $(x, 1) \in \text{cone}\widehat{A}$, par conséquent il existe, d'après le (i) ci-dessus, $p + 1$ points $(a_i, 1)$ dans \widehat{A} dont $(x, 1)$ soit combinaison linéaire à coefficients positifs (μ_i) . Par conséquent :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i \\ 1 = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \end{cases}$$

c'est à dire que x est en fait combinaison convexe des $(p + 1)$ points a_i de A .

Corollaire 3.3.1 Dans un espace de dimension finie p , tout point d'un convexe compact est combinaison convexe d'au plus $p + 1$ points extrémaux du convexe.

Proposition 3.3.3 Dans un espace vectoriel de dimension finie, l'enveloppe convexe de tout compact est encore compacte.

Démonstration 3.3.4 Soit p la dimension de E , K un compact de E ; posons

$$T_p = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in [0, 1]^p / \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1\}$$

T_p est un compact (car fermé dans $[0, 1]^p$). Soit h l'application continue

$$T_{p+1} \times K^{p+1} \longrightarrow E, (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}, x_1, \dots, x_{p+1}) \longrightarrow \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i.$$

On a $\text{co}K = h(T_{p+1} \times K^{p+1})$ d'après le théorème de Carathéodory, donc $\text{co}K$ est compacte (image d'un compact par une application continue).

3.4 Structure des cônes convexes fermés de dimension finie.

Définition 3.4.1 Un cône convexe Γ est dit saillant si $\Gamma \cap (-\Gamma) \subset \{0\}$.

Remarque 3.4.1 Il revient au même de dire qu'un cône convexe Γ est saillant ou que $\Gamma \setminus \{0\}$ est encore (un cône) convexe, ou encore que Γ ne contient aucune droite vectorielle.

Rappelons, (voir 1.1.2) que $N(\Gamma) = \{0\} \cup (\Gamma \cap (-\Gamma))$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E inclus dans Γ .

Proposition 3.4.1 *Tout cône convexe Γ contenant 0 (resp. fermé) d'un espace de dimension finie admet une décomposition de la forme :*

$$\Gamma = V + \Gamma_0$$

où V est un sous-espace vectoriel de E , et Γ_0 un cône convexe saillant (resp. fermé) inclus dans un supplémentaire de V .

Démonstration 3.4.1 *Soit $V = \Gamma \cap (-\Gamma)$ le plus grand sous-espace vectoriel inclus dans Γ et W un supplémentaire de Γ . On pose $\Gamma_0 = \Gamma \cap W$. Il est clair que $V + \Gamma_0 \subset \Gamma$.*

Réciproquement tout élément x de Γ se décompose selon $x = v + y$, avec $v \in V$ et $y \in W$; alors $y = x + v \in \Gamma$ (car $-v \in \Gamma$), et donc $y \in \Gamma_0$. Donc $\Gamma = V + \Gamma_0$. Le cône Γ_0 ne peut contenir de droite vectorielle (elle serait incluse dans V), il est donc saillant.

Remarque 3.4.2 1) Γ_0 est la projection de Γ sur W , parallèlement à V .

2) Réciproquement si $\Gamma = V + \Gamma_0$ où V est un sous-espace vectoriel de E , et Γ_0 un cône convexe saillant inclus dans un supplémentaire W de V , alors $V = \Gamma \cap (-\Gamma)$.

Démonstration 3.4.2 *En effet la projection de $\Gamma \cap (-\Gamma)$ sur W parallèlement à V est un sous-espace inclus dans Γ_0 , donc est réluit à $\{0\}$; d'où $\Gamma \cap (-\Gamma) \subset V$, et l'inclusion inverse est claire.*

Corollaire 3.4.1 *Le cône convexe $\text{cone}(u_1, \dots, u_s)$ engendré par un ensemble fini de points est fermé.*

Démonstration 3.4.3 *Soit $\Gamma = \text{cone}(u_1, \dots, u_s)$, et considérons une décomposition $\Gamma = N(\Gamma) + \Gamma_0$ donnée par la proposition 3.4.1. Comme Γ_0 est la projection de Γ sur un supplémentaire W de $N(\Gamma)$, on a $\Gamma_0 = \text{cone}(y_1, \dots, y_s)$, où les y_i sont les projections des u_i .*

Montrons que Γ_0 est fermé. On peut supposer les y_i non nuls pour $i \leq k$, et nuls pour $k < i \leq s$. Alors $\Gamma_0 = \text{cone}(y_1, \dots, y_k)$. Le convexe $K = \text{co}(y_1, \dots, y_k)$ est compact, et ne contient pas 0 (car $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \Gamma_0 \setminus \{0\}$, qui est convexe car Γ_0 est saillant). La distance $\delta = d(0, K)$ est donc strictement positive. Soit (z_n) une suite dans Γ_0 convergeant vers le point $z \in E$. On peut écrire $z_n = \lambda_n x_n$, avec $\lambda_n \geq 0$ et $x_n \in K$. Alors la suite (λ_n) est bornée

($\lambda_n = \frac{\|z_n\|}{\|x_n\|} \leq \frac{\sup_n \|z_n\|}{\delta}$). Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer $\lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x_n \rightarrow x \in K$. Alors $z_n \rightarrow z \in \Gamma_0$, qui est donc bien fermé.

Comme $N(\Gamma)$ est fermé et Γ_0 est inclus dans le supplémentaire W de $N(\Gamma)$, la somme $\Gamma = N(\Gamma) + \Gamma_0$ est fermée (si une suite de Γ converge dans E , les suites projetées sur $N(\Gamma)$ et W convergent, et leurs limites sont nécessairement dans $N(\Gamma)$, resp W).

Remarque 3.4.3 *Le fait que A soit compact n'entraîne pas que $\text{cone}A$ soit fermé.*

Soit par exemple dans $E = \mathbb{R}^2$ un disque fermé D centré sur l'axe $0x$, et tangent à l'axe $0y$. Alors $\text{cone}D$ est le demi-plan ouvert $\{(x, y) / x > 0, y \in \mathbb{R}\}$, auquel on rejoute le point 0 . Le seul point extrémal d'un cône convexe fermé saillant est son sommet. Un théorème de structure ne peut donc être obtenu à partir des points extrémaux, il faut faire intervenir des faces particulières, de dimension un, les génératrices extrémales.

Notation : Si u est un vecteur non nul, notons γ_u la demi-droite $\{\lambda.u / \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$ issue de 0 , de vecteur directeur u .

Définition 3.4.2 Une direction du cône pointé Γ est une demi-droite γ_u , avec $u \in \Gamma, u \neq 0$. Une direction γ du cône est dite extrémale si c'est une face de Γ . Une direction extrémale de Γ est aussi appelée génératrice extrémale de Γ . On notera $G_{\text{ext}}(\Gamma)$ l'ensemble des génératrices extrémales de Γ .

On voit donc que $u \in \Gamma, u \neq 0$ définit une génératrice extrémale si et seulement si

$$x, y \in \Gamma, u = x + y \implies \exists \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \text{ tels que } x = \lambda_1 u, y = \lambda_2 u.$$

Théorème 3.4.1 Dans un espace de dimension finie, tout cône convexe fermé saillant est l'enveloppe convexe de ses génératrices extrémales. Plus précisément tout point du cône est dans l'enveloppe convexe d'au plus $p = \dim E$ génératrices extrémales.

Remarque 3.4.4 Un cône convexe non saillant n'admet aucune génératrice extrémale.

Démonstration 3.4.4 En effet si Γ est non saillant, il existe $u \in \Gamma \cap (-\Gamma), u \neq 0$, alors pour tout $x \in \Gamma$ et tout $\alpha > 0$, les vecteurs $x \pm \alpha u$ appartiennent à Γ . Si x définit une direction extrémale, ces vecteurs doivent appartenir à la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}_+.x$, pour tout $\alpha > 0$. Il en résulte que $\pm u \in \mathbb{R}_+.x$, ce qui est impossible.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de deux lemmes. Le premier lemme permet de ramener l'étude des cônes convexes fermés saillants à celle des convexes compacts :

Lemme 3.4.1 Soit Γ un cône convexe fermé saillant d'un espace de dimension finie. Il existe un hyperplan affine H , ne contenant pas 0 , dont l'intersection avec Γ soit un convexe compact K . De plus Γ est le cône convexe engendré par K .

Démonstration 3.4.5 Soit $S_E = \{x \in E / \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E . Alors $A = S_E \cap \Gamma$ est un compact de E (un fermé borné). Il résulte de la Proposition 3.3.3 que $L = \text{co}A$ est aussi compact. De plus on a $0 \notin L$: en effet A est inclus dans $\Gamma \setminus \{0\}$ qui est convexe puisque Γ est saillant, de sorte que l'on a aussi $L \subset (\Gamma \setminus \{0\})$.

On peut alors séparer strictement le point 0 du convexe fermé L , et par conséquent trouver une forme linéaire φ sur E telle que :

$$\inf_{x \in L} \varphi(x) > \varphi(0) = 0$$

On peut supposer que $\inf_{x \in L} \varphi(x) = 1$. (On posera $H = \{x \in E / \varphi(x) = 1\}$). A fortiori $\inf_{x \in A} \varphi(x) \geq 1$, ce que entraîne par homogénéité que $\forall x \in \Gamma$, $\|x\| \leq \varphi(x)$. Alors le fermé $K = \{x \in \Gamma / \varphi(x) = 1\}$ est inclus dans la boule unité de E , donc est compact.

Si $x \in \Gamma$, $x \neq 0$ on a $\varphi(x) \geq \|x\| > 0$, donc $r(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$ est bien défini, et appartient clairement à $H \cap \Gamma = K$. Comme $x = \varphi(x)r(x)$ pour tout $x \in \Gamma$, $x \neq 0$, on a bien $\Gamma = \text{cone}K$.

Lemme 3.4.2 Soit C un convexe d'un hyperplan ne contenant pas 0, et $\Gamma = \text{cone}C$. La bijection naturelle $\gamma \rightarrow \gamma \cap H$ entre les directions de Γ et les points de C fait correspondre les génératrices extrémales de Γ avec les points extrémaux de C .

Démonstration 3.4.6 Soit $\varphi(x) = 1$ une équation de H . Si γ_x est une génératrice extrémale, donc une face, de Γ , il est trivial que $x \in \text{Ext}C$. Réciproquement, si x est un point extrémale de C ; et $x = x_1 + x_2$ ($x_1, x_2 \in \Gamma \setminus \{0\}$), on a $1 = \varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, de sorte que : $x = \varphi(x_1)r(x_1) + \varphi(x_2)r(x_2)$ est barycentre à coefficients non nuls des points $r(x_1) = \frac{x_1}{\varphi(x_1)}$ et $r(x_2) = \frac{x_2}{\varphi(x_2)}$: ceci entraîne $r(x_1) = x = r(x_2)$, donc x_1, x_2 appartiennent à la direction γ_x , qui est donc extrémale.

On peut passer à la démonstration du théorème 3.4.1 :

Démonstration 3.4.7 théorème 3.4.1 Soit K comme dans le lemme 3.4.1. on a $K = \text{co}(\text{Ext}K)$ d'après le théorème de Krein-Milman (Théorème 3.3.1), d'où

$$\Gamma = \mathbb{R}_+.K = \text{co}\{\mathbb{R}_+.x / x \in \text{Ext}K\} = \text{co}\left(\bigcup_{\gamma \in \text{Gext}(\Gamma)} \gamma\right)$$

Chapitre 4

Applications à l'optimisation d'une forme quadratique.

4.1 Projection d'un point sur un hyperplan.

Soit H l'hyperplan l'équation $\langle a, x \rangle = b$, et soit $x^* \notin H$ c'est-à-dire $\langle a, x^* \rangle - b > 0$.
Considérons le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x^* - x_0 = ka$ où k est une constante positive.
(C-à-d $x^* - x_0 \parallel a$) et tel que $x_0 \in H$.

Pour cela on doit avoir

$$\begin{aligned}x_0 &= x^* - ka. \\ \langle a, x_0 \rangle = b &\iff \langle x^* - ka, a \rangle = b. \\ &\implies \langle x^*, a \rangle - k\langle a, a \rangle = b. \quad \langle a, a \rangle = \|a\|^2. \\ &\implies k = \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|^2}.\end{aligned}$$

Pour cette valeur de k ; $x_0 \in H$

$$\|x^* - x_0\| = k\|a\| = \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|}.$$

Posons $d(x^*, H) = d(x^*, \bar{x})$. Alors $\|x^* - x_0\| \geq d(x^*, \bar{x})$ car $x_0 \in H$ d'où

$$\frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|} \geq d(x^*, \bar{x}) = \|x^* - \bar{x}\| \tag{4.1}$$

Mais l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}. \\ x &\longmapsto ax = \langle a, x \rangle.\end{aligned}$$

est linéaire continue donc

$$|\langle a, x^* \rangle - \langle a, \bar{x} \rangle| = \|ax^* - a\bar{x}\| = |ax^* - b| = ax^* - b$$

car $\bar{x} \in H$ et $ax^* - b > 0$

$$\begin{aligned}
\|ax^* - a\bar{x}\| &= \|a(x^* - \bar{x})\| \leq \|a\| \|x^* - \bar{x}\|. \\
\|ax^* - a\bar{x}\| &= ax^* - b \leq \|a\| \|x^* - \bar{x}\|. \\
\implies \frac{ax^* - b}{\|a\|} &= \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|} \leq \|x^* - \bar{x}\|. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

$$(4.1) \text{ et } (4.2) \implies \|x^* - \bar{x}\| = \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|}.$$

Donc

$$x_0 = x^* - \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|^2} a.$$

4.2 Optimisation de la fonction concave φ .

Soit Ω un ensemble convexe fermé borné de \mathbb{R}^n . Posons :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta_i x_i^2. & \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i < 0, \text{ pour tout } i. \\
x^* &= (x_i^*)_i = \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i} \right)_i; & y^* &= (y_i^*)_i = \left(\frac{\alpha_i}{2\sqrt{-\beta_i}} \right)_i \\
y &= (y_i)_i = (\sqrt{-\beta_i} x_i)_i; & \max_{x \in \Omega} \varphi(x) &= \varphi(\bar{x}); \quad \bar{x} = (\bar{x}_i)_i \in \Omega.
\end{aligned}$$

Théorème 4.2.1 *Il existe un ensemble convexe fermé borné Ω' de \mathbb{R}^n , et un vecteur $y_0 = (y_{0i})_i \in \Omega'$, tel que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1. $\max_{x \in \Omega} \varphi(x) = \varphi(x^*) - \|y^* - y_0\|^2;$ (Propriété 1)
2. $\|y^* - y_0\| = \inf_{y \in \Omega'} \|y^* - y\|$ (Propriété 2)
3. $\bar{x}_i = \frac{y_{0i}}{\sqrt{-\beta_i}},$ pour tout $i, i = 1, 2, \dots, n.$ (Propriété 3)

Preuve 16 *Pour tout $x \in \Omega$, soit*

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_i &= (\alpha_i x_i^* + \beta_i x_i^{*2}) - (\alpha_i x_i + \beta_i x_i^2). \\
\Delta\varphi_i &= \alpha_i \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i} \right) + \beta_i \left(\frac{-\alpha_i}{2\beta_i} \right)^2 - \alpha_i x_i - \beta_i x_i^2. \\
&= -\beta_i \left(x_i + \frac{\alpha_i}{2\beta_i} \right)^2. \\
&= -\beta_i (x_i - x_i^*)^2.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\varphi(x^*) - \varphi(x) &= \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i \\
\varphi(x^*) - \varphi(x) &= \sum_{i=1}^n -\beta_i (x_i - x_i^*)^2; \text{ Pour tout } x \in \Omega,
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\inf_{x \in \Omega} (\varphi(x^*) - \varphi(x)) = \inf_{x \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^n -\beta_i (x_i - x_i^*)^2 \right)$$

Peut être écrite sous la forme suivante :

$$\varphi(x^*) - \max_{x \in \Omega} \varphi(x) = \inf_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n (\sqrt{-\beta_i} (x_i^* - x_i))^2 = \inf_{y \in \Omega'} \sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2.$$

Soit $\Omega' = \{y = (y_i)_i \in \mathbb{R}^n : y_i = \sqrt{-\beta_i} x_i, x = (x_i)_i \in \Omega\}$;

parce que $\inf_{y \in \Omega'} \sum_{i=1}^n (y_i^* - y_i)^2 = \|y^* - y_0\|^2$, $y_0 \in \Omega'$.

alors $\max_{x \in \Omega} \varphi(x) = \varphi(x^*) - \|y^* - y_0\|^2$, d'où la propriété (1).

$\inf_{y \in \Omega'} \|y^* - y\|^2 = \|y^* - y_0\|^2$, alors $\|y^* - y_0\|^2 \leq \|y^* - y\|^2$, pour tout $y \in \Omega'$. Ceci implique que $\|y^* - y_0\| \leq \|y^* - y\|$, pour tout $y \in \Omega'$.

Nous avons par conséquent $\|y^* - y_0\| \leq \inf_{y \in \Omega'} \|y^* - y\|$.

Puisque $y \in \Omega'$ alors

$\|y^* - y_0\| \geq \inf_{y \in \Omega'} \|y^* - y\|$; donc $\|y^* - y_0\| = \inf_{y \in \Omega'} \|y^* - y\|$.

D'où la propriété (2).

Le vecteur y_0 est la projection du vecteur y^* sur le nouveau convexe Ω' .

Nous avons

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Omega} \varphi(x) = \varphi(\bar{x}) &= \varphi(x^*) - \|y^* - y_0\|^2. \\ &= \varphi(x^*) - \inf_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n (y_i^* - \sqrt{-\beta_i} x_i)^2. \\ &= \varphi(x^*) - \sum_{i=1}^n (y_i^* - \sqrt{-\beta_i} \bar{x}_i)^2. \end{aligned}$$

D'où la propriété (3).

Remarque 4.2.1 Si $x^* \in \Omega$, alors $\inf_{x \in \Omega} \sum_i -\beta(x_i^* - x_i)^2 = 0$ et $\max_{x \in \Omega} \varphi(x) = \varphi(x^*)$.

Remarque 4.2.2 La transformation $T : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, qui pour tout $x \in \Omega$, associe $T(x) = \Lambda x$, $\Lambda = (\sqrt{-\beta_1}, \dots, \sqrt{-\beta_n})$ a comme matrice Jacobéenne.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{-\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{-\beta_n} \end{bmatrix}$$

Son déterminant est $\prod_{i=1}^n \sqrt{-\beta_i} \neq 0$. Donc elle est conforme.

Remarque 4.2.3 Le convexe Ω est borné. On peut se restreindre au cas $\alpha_i \geq 0$ pour tout i .

En effet, supposons que nous avons $\alpha_i x_i + \beta_i x_i^2$ avec $\alpha_i < 0$.

Soit $\max(x_i) = \delta_i^*$, $y_i = \delta_i^* - x_i \geq 0$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\alpha_i x_i + \beta_i x_i^2 &= \alpha_i x_i + \beta_i x_i^2 - \alpha_i \delta_i^* + \alpha_i \delta_i^* \\ &= \beta_i y_i^2 + (-\alpha_i - 2\beta_i \delta_i^*) y_i + \alpha_i \delta_i^* + \beta_i \delta_i^{*2}. \\ &= \beta_i y_i^2 + \alpha'_i y_i + K_i.\end{aligned}$$

où $\alpha'_i = -\alpha_i - 2\beta_i \delta_i^* \geq 0$ et $K_i = \alpha_i \delta_i^* + \beta_i \delta_i^{*2}$.

Par conséquent, il suffit de remplacer : x_i par $\delta_i^* - y_i$, et

$\alpha_i x_i + \beta_i x_i^2$ par $\beta_i y_i^2 + \alpha'_i y_i + K_i$.

Exemple 4.2.1

$$\begin{cases} \max \varphi(x_1, x_2) = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1 + x_2 - 9 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 8 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas $\beta_1 = \beta_2 = -1$, donc $\Omega = \Omega'$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 5 - 2x_1 = 0 \implies x_1^* = \frac{5}{2}; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 5 - 2x_2 = 0 \implies x_2^* = \frac{5}{2};\end{aligned}$$

Le point critique $x^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \notin \Omega$ parce que $3\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 9 = 1 > 0$,

$$\begin{aligned}x_0 &= P_\Omega(x^*) = x^* - \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|^2} a \text{ où } a = (3, 1), b = 9. \\ \langle x^*, a \rangle &= \frac{5}{2} * 3 + \frac{5}{2} * 1 = 10, \quad \|a\|^2 = 10. \\ x_0 &= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) - \frac{1}{10}(3, 1) = (2.2, 2.4). \\ \max_{(x_1, x_2) \in \Omega} \varphi(x_1, x_2) &= \varphi(\bar{x}) = 12.40.\end{aligned}$$

Ici nous avons

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 + x_2 - 9 \leq 0, x_1 + 2x_2 - 8 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Exemple 4.2.2

$$\begin{cases} \max \varphi(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas $\beta_1 = -1$ et $\beta_2 = -2$, donc $\Omega \neq \Omega'$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 5 - 2x_1 = 0 \implies x_1^* = \frac{5}{2}; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 8 - 4x_2 = 0 \implies x_2^* = 2;\end{aligned}$$

Le point critique $x^* = \left(\frac{5}{2}, 2\right) \notin \Omega$ parce que $3\frac{5}{2} + 2 \cdot 2 > 6$,

$$\begin{aligned}x_0 &= P_\Omega(x^*) = x^* - \frac{\langle x^*, a \rangle - b}{\|a\|^2} a \text{ où } (3, 2), b = 6. \\ \langle x^*, a \rangle &= \frac{5}{2} * 3 + 2 * 2 = \frac{23}{2}, \quad \|a\|^2 = 13. \\ x_0 &= \left(\frac{5}{2}, 2\right) - \frac{11}{2 * 13}(3, 2) = \left(\frac{5}{2} - \frac{33}{26}, 2 - \frac{11}{13}\right) = \left(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}\right). \\ \Omega' &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / 3y_1 + \frac{2}{\sqrt{2}}y_2 \leq 6, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

De plus $y^* \left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

La projection de ce point sur Ω' donne le point suivant y_0 :

$$y_0 = \left(1, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \bar{x} \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ et } \max_{x \in \Omega} \varphi(x) = \varphi\left(1, \frac{3}{2}\right) = 11, 500.$$

Notons que la projection du point x^* sur Ω donne le point $\left(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}\right)$, et $\varphi\left(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}\right) = 11, 207$.

Evidemment $\max_{x \in \Omega} \varphi(x) \leq \varphi(x^*) = \varphi\left(\frac{5}{2}, 2\right) = 14, 250$.

Le point $x_0 = \left(\frac{16}{13}, \frac{15}{13}\right)$ de l'ensemble convexe Ω est le plus proche point du point critique x^* , mais il n'est pas la solution optimale de φ .

Exemple 4.2.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 14 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous avons $\varphi(x_3) = 3x_3 - x_3^2$,

Le point critique est

$$x^* = \left(\frac{3}{2}\right) \text{ et } \max_{x_3 \in \Omega} \varphi(x_3) = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

D'autre part $\Psi(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + x_1^2 + 2x_2^2$.

Ψ est une fonction convexe, et sa solution optimale est un point extrême (sommet de Ω).

$$\max_{(x_1, x_2) \in \Omega} \Psi(x_1, x_2) = \Psi(0, 6) = 90$$

Mais

$$\max_{x \in \Omega} f(x) \leq \max_{x \in \Omega} \Psi(x) + \max_{x \in \Omega} \varphi(x).$$

Par conséquent

$$\max f(x) \leq 92.25.$$

Aussi $\left(0, 6, \frac{3}{2}\right) \in \Omega$, $f\left(0, 6, \frac{3}{2}\right) \leq \max_{x \in \Omega} f(x)$.

alors

$$\max_{x \in \Omega} f(x) = f\left(0, 6, \frac{3}{2}\right) = 92, 25.$$

Remarque 4.2.4 Si nous posons

$$\Psi(x) = \sum_{\beta_i > 0} \alpha_i x_i + \beta_i x_i^2$$

alors $\Psi(x^*) - \Psi(x) = \sum_{i=1}^n -\beta(x_i^* - x_i)^2$ pour tout $x \in \Omega$; et

$$\Psi(x^*) - \max_{x \in \Omega} \Psi(x) = - \max_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\beta_i} x_i^* - \sqrt{\beta_i} x_i \right)^2.$$

Donc

$$\max_{x \in \Omega} \Psi(x) = \Psi(x^*) + \max_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\beta_i} x_i^* - \sqrt{\beta_i} x_i \right)^2.$$

Soit $y^* = (y_i^*)_i = \left(\alpha_i / 2\sqrt{\beta_i} \right)$ et $y = (y_0)_i = \left(\sqrt{\beta_i} x_i \right)_i$.

Notons que y_0 est le point le plus éloigné du convexe

$$\Omega' = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y_i = \sqrt{\beta_i} x_i, \quad x = (x_i)_i \in \Omega \right\}.$$

Conclusion

On a rappelé la notion d'ensembles convexes et fonctions convexes pour les appliquer en optimisation non linéaire. Ceci nous a permis de nous placer dans un contexte de programmation quadratique.

Nous avons ensuite présenté certaines méthodes de calcul de la solution optimale en programmation quadratique. Cette solution appartient à un hyperplan séparateur.

La connaissance de l'hyperplan qui contient la solution optimale du problème d'optimisation est importante pour sa localisation.

Les théorèmes du chapitre 3 et le théorème de projection sont aussi importants pour l'existence de la solution des problèmes d'optimisation.

Notons également qu'un problème aux limites peut être transformé sous la forme d'un problème quadratique.

Bibliographie

- [1] S Achmanov. Programmation linéaire traduction française. *MIR, Moscou*, 1984.
- [2] Jean Bass. Cours de mathématiques tome 1. 1977.
- [3] Ahmed Chikhaoui and Abdelkader Mokhtari. Classification with support vector machines, new quadratic programming algorithm. *Models & Optimisation and Mathematical Analysis Journal*, 2(2) :1–6, 2012.
- [4] G Chilov. Analyse mathématique, fonction d'une variable, t. 1. *Mir, Moscou*, 1973.
- [5] Georges CHILOV and Vitali KHARINE. *Fonctions d'une variable [tome 1], 1ère et 2ème parties*. Mir, 1973.
- [6] Sylvie Delabriere and Yves Raynaud. Analyse convexe, cours polycopié. *Université Paris VI*, 2000.
- [7] Andrej Nikolaevich Kolmogorov and Sergueï Vasilievitch Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. 1994.
- [8] Walter Rudin, Nicole Dhombres, and François Hoffman. *Analyse réelle et complexe*. 1975.