RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI – LAGHOUAT

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT : TRONC COMMUN SCIENCES ET TECHNOLOGIE

PHYSIQUE 3

Rappel de cours et séries des exercices corrigés

Destiné aux étudiants de deuxième année universitaire SM, ST, Ingéniorat

Préparé par :

Dr : HELAIMIA TAOUFIK

Année universitaire 2024/2025

Avant-Propos

Ce manuel est destiné aux étudiants de la deuxième année universitaire des spécialités scientifiques et techniques, aux étudiants du tronc commun sciences et technologies, il correspond au programme du module Physique 3, partie vibrations mécaniques.

Il contient quatre principaux chapitre présentés sous forme d'un résumé de l'essentiel du cours sans démonstration, suivi par une série des exercices corrigés, afin de permet aux étudiants de bien comprendre les phénomènes des vibrations mécaniques, et de maitriser l'utilisation du formalisme de Lagrange pour la résolution des différents problèmes.

Le premier chapitre de ce manuel est consacré aux oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres non amortis.

Le deuxième chapitre est réservé aux oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres amortis.

Le troisième chapitre est consacré aux oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté amortis forcés.

Le dernier chapitre du polycopié est attribué aux oscillateurs à deux degrés de liberté.

Dr. Helaimia Taoufik

Liste des figures

Chapitre I : Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres non amortis

Chapitre II : Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres amortis

Chapitre III : Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté amortis forcés

Table des matières

Chapitre III : Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté amortis forcés

Chapitre IV : Oscillateurs linéaires à deux degrés de liberté

Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres non amortis

I. Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres non amortis :

I.1. Rappel de cours :

I.1.1 Définitions :

Oscillateurs : des systèmes mécaniques qui effectuent un mouvement de va et vient autour d'une position d'équilibre stable, qui se répète périodiquement au cours du temps [1, 2].

Linéaires : les forces (pour les mouvements de translation) et les moments (pour les mouvements de rotation) sont proportionnelle à leurs élongations.

$\vec{T} = -Kx\vec{\imath}$, $\vec{M} = -C\theta\vec{K}$

Un seul degré de liberté : le mouvement du système au cours du temps, peut être décrit par une seule coordonnée indépendante (une coordonnée généralisée).

Libres : les forces extérieures exerçant sur le système sont nulles ($\vec{F}_{Ext} = \vec{0}$)

Non amorti : les forces de frottement exerçant sur le système sont négligeables ($\vec{F}_{Frot} = \vec{0}$), et par conséquence l'amplitude d'oscillation est constante au cours du temps.

I.1.2. Positions d'équilibre stables et instables :

Pour déterminer les positions d'équilibre (P.E) on a : $\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q_{eq}} = 0$

Les positions d'équilibres sont stables (P.E.S) si, $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_{eq}} > 0$

Les positions d'équilibres sont instables (P.E.I) si, $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_{eq}} < 0$

I.1.3. Forme quadratique de l'énergie potentielle : dans le cas des oscillations de faibles amplitude, l'énergie potentielle a une forme quadratique $U(q) = Aq^2 + cnst$, où q est la coordonnée généralisée [3].

I.1.4. Nombre des degrés de libertés du système : on détermine le nombre des degrés de liberté d'un système, en utilisant la relation suivante $d = c - l$

d : nombre des degrés de liberté (coordonnées indépendantes) du système.

c : nombre des coordonnées qui caractérisent le système.

l : nombres des liaisons entre les coordonnées décrivant le système.

I.1.5. Formalisme de Lagrange : $L = T - U$ [4]

T : Energie cinétique du système.

U : Energie potentielle du système.

I.1.6. Equation de Lagrange : l'équation de Lagrange d'un oscillateur libre non amorti à un degré de liberté a la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) - \frac{dL}{dq} = 0$, où q est la coordonnée généralisée [4].

I.1.7. Equation différentielle du mouvement : l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur libre non amorti, a toujours la forme générale $\ddot{q} + w_0^2 q = 0$ [5]

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$, est la pulsation propre (fréquence angulaire) du mouvement oscillatoire du système

T_0 est la période propre du mouvement oscillatoire du système (représente le temps d'une oscillation complète)

f_0 est la fréquence du mouvement oscillatoire du système (représente le nombre des oscillations complètes par une seconde), et on a $f_0 = \frac{1}{T_0}$ (sa unité est le Hertz)

I.1.8. Equation horaire du mouvement : représente la solution de l'équation différentielle du mouvement, a une forme sinusoïdale $q(t) = Acos(w_0 t + \varphi)$. On détermine les valeurs des deux constants A et φ à partir des conditions initiales [6].

I.1.9. Condition d'oscillation du système : à partir de l'équation différentielle du mouvement du système $\ddot{q} + w_0^2 q = 0$, le système oscille si la condition suivante est vérifiée

$w_0^2 > 0$, c'est-à-dire que w_0 doit être réelle et positive.

I.2. Série des exercices corrigés :

<u>Exercice (1) :</u>

Soit le système mécanique de la figure 1.1 constitué d'une masse m=5Kg, attachée à un ressort de constante de raideur K=150 N/m.

On écarte la masse m de sa position d'équilibre avec un petit déplacement x, et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Calculer l'énergie potentielle du système
2. Calculer l'énergie cinétique du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien L du système.
4. Donner l'équation différentielle du mouvement.
5. Calculer la période propre de cet oscillateur T_0.

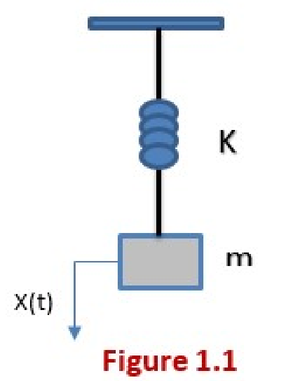


Figure 1.1

Solution de l'exercice (1) :

On a : m=5 Kg, K=150 N/m.

1. calcul de l'énergie potentielle du système :

$$U(x) = U_m + U_K$$

$$U_m = -mgx,\ U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2 - mgx$$

Pour les oscillations de faibles amplitudes, il faut trouver la forme quadratique de l'énergie potentielle suivante : $U(x) = Ax^2$

A l'équilibre on a : $\frac{dU}{dx}_{x=0} = 0$

$\frac{dU}{dx} = K(x + x_0) - mg,\ \frac{dU}{dx}_{x=0} = Kx_0 - mg = 0,\ x_0 = \frac{mg}{K}$ est la position d'équilibre du système. On simplifie l'expression de l'énergie potentielle :

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K{x_0}^2 + Kxx_0 - mgx$$

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}K{x_0}^2 + x(Kx_0 - mx)$$

En utilisant la condition d'équilibre (l'équation nulle), on obtient la forme quadratique :

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 + cnst$$

2. calcul de l'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{x}) = Tm = \frac{1}{2}mv^2,\quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

3. l'expression du Lagrangien L :

$$L = T - U,\ L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 + cnst$$

4. l'équation différentielle du mouvement :

Pour déduire l'équation différentielle du mouvement, on utilise l'équation de Lagrange d'un oscillateur linéaire à un seul degré de liberté libre non amorti, qui a la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) - \frac{dL}{dq} = 0 \qquad (1)$$

où $q = x, y, \theta$ …… est la coordonnée généralisée.

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = m\dot{x},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) = m\ddot{x},\ \frac{dL}{dx} = -Kx$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (2)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$

$\ddot{x} + \left(\frac{K}{m}\right)^2 x = 0$, $w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ est la pulsation propre du mouvement vibratoire de cette oscillateur libre non amorti.

5. Calcul de la période propre de cet oscillateur T₀ :

On a : $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$, $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

Application numérique :

$T_0 = 2(3.14)\sqrt{\frac{5}{150}}$, $T_0 = 1.146$ s, est la période propre de cet oscillateur libre non amorti.

Exercice (2) :

Soit le système mécanique représenté dans la figure 1.2. On écarte la masse m de sa position d'équilibre d'un petit déplacement x_0=10 cm, et on lâche le système à lui-même.

On donne : m= 1 Kg, K= 20 N/m.

1. Calculer le lagrangien L du système.
2. Donner l'équation différentielle du système.
3. Calculer la pulsation propre d'oscillation ω_0.
4. Calculer la période propre d'oscillation T_0.

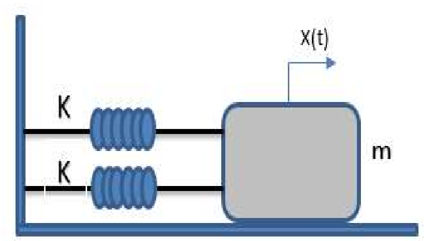


Figure 1.2

Solution de l'exercice (2) :

On a les données : m= 1 Kg, K= 20 N/m

1. Calcul du Lagrangien du système L :

$L = T - U$

L'énergie potentielle du système :

$U(x) = U_m + U_K + U_K = U_m + 2U_K$

$U_m = \pm mgh$, il n y'a aucun déplacement vertical de la masse m pendant son mouvement, donc : $h = 0,\ U_m = 0$

$U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2,\ U(x) = K(x + x_0)^2$

A l'équilibre : $\frac{dU}{dx}_{x=0} = 0$

$\frac{dU}{dx} = K(x + x_0),\ \frac{dU}{dx}_{x=0} = Kx_0 = 0,\ x_0 = 0$

Et la forme quadratique de l'énergie potentielle est : $U(x) = Kx^2$

L'énergie cinétique du système :

$T(\dot{x}) = Tm = \frac{1}{2}mv^2,\ \ v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Donc : $L = T - U,\ L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Kx^2$

2. l'équation différentielle du mouvement du système :

L'équation de Lagrange est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx} = 0$ (1)

On obtient l'équation suivante : $m\ddot{x} + 2Kx = 0$ (2)

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$

On a : $w_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}},\ T_0 = \frac{2\pi}{w_0},\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}$

3. Calcul de la pulsation propre w_0 :

$w_0 = \sqrt{\frac{2(20)}{1}},\ w_0 = 6.32$ Rad/s

4. Calcul de la période propre T_0 :

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \text{ et } T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$$

Application numérique :

$$T_0 = \frac{2(3.14)}{6.32}, \; T_0 = 0.99 \text{ s}$$

Exercice (3) :

Soit un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m=2 Kg, et d'un fil inextensible de longueur l=20 cm (Figure 1.3). On écarte le système par rapport à sa position d'équilibre d'un angle faible θ_0 et on le lâche à lui-même.

1. Calculer le lagrangien L du système.
2. Donner l'équation différentielle du mouvement.
3. Calculer la pulsation propre d'oscillation ω_0.
4. Calculer la période propre d'oscillation T_0.

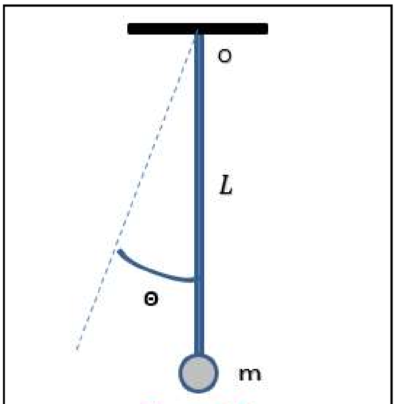


Figure 1.3

Solution de l'exercice (3) :

On a : m= 2 Kg, l = 20 cm.

1. l'expression du Lagrangien du système L :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_m = +mgh, \; h = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta),$$

Pour les faibles angles on a les approximations suivantes : $\cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $\sin\theta \approx \theta$

$$h = l\frac{\theta^2}{2}, \; U(\theta) = U_m = mg\,l\frac{\theta^2}{2}$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{\theta}) = Tm = \frac{1}{2}j_{m/O}\dot{\theta}^2, \; j_{m/O} = ml^2$$

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mg\,l\frac{\theta^2}{2}$$

2. l'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$ (1)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}^2, \quad \frac{dL}{d\theta} = -mgl\theta$

(1) donne $ml^2\ddot{\theta}^2 + mgl\theta = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ (2)

L'équation (2) est l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur libre non amorti, elle a la forma générale : $\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation propre du mouvement.

3. Calcul de la pulsation propre du mouvement :

$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ Rad/s

Application numérique :

$w_0 = \sqrt{\frac{10}{0.2}}, \quad w_0 = 7.07$ Rad/s

4. Calcul de la période propre d'oscillation :

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, et $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$

Application numérique :

$T_0 = \frac{2(3.14)}{7.07}, \; T_0 = 0.89$ s

Elle représente le temps d'une oscillation complète du système.

On peut calculer la valeur de la fréquence f_0 qui représente le nombre des oscillations complète par unité du temps, on a :

$f_0 = \frac{1}{T_0}, \; f_0 = \frac{1}{0.89} = 1.12$ Hertz

Exercice (4) :

Soit le système mécanique représenté dans la figure 1.4. Le cylindre homogène de masse M=1 Kg, et de rayon R=10 cm. Le ressort de raideur K=30 N/m, et la tige sans masse de longueur l=15 cm, porte à son extrémité libre une masse ponctuelle m=150 g.

1. Calculer l'énergie potentielle du système
2. Calculer l'énergie cinétique du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien L.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
5. Donner la pulsation propre d'oscillation ω_0.

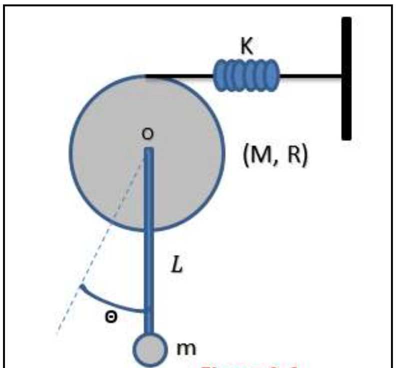


Figure 1.4

Solution de l'exercice (4) :

On a : M=1 Kg, R=10 cm. K=30 N/m. m=150 g, l=15 cm.

1. Calcul de l'énergie potentielle du système:

$$U(\theta) = U_M + U_m + U_K,\ U_M = \pm mgh,\ h = 0,\ U_M = 0$$

$$U_m = +mgh,\ h = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta),$$

Ou : $\cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $\sin\theta \approx \theta$, donc, $h = l\frac{\theta^2}{2}$, $U_m = mg\,l\frac{\theta^2}{2}$

$U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$, $x = R\theta$ est la déformation du ressort en cas de mouvement.

$x_0 = R\theta_0$ est la déformation du ressort à l'équilibre.

$$U_K = \frac{1}{2}K(R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2 + mg\,l\frac{\theta^2}{2}$$

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, donne $\theta_0 = 0$

$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2\theta^2 + mg\,l\frac{\theta^2}{2}$, donc $U(\theta) = \frac{1}{2}(KR^2 + mg\,l)\theta^2$ est la forme quadratique de l'énergie potentielle.

2. Calcul de l'énergie cinétique du système:

$$T(\dot{\theta}) = T_M + T_m, \quad T_M = \frac{1}{2} j_{M/O} \dot{\theta}^2, \; j_{M/O} = \frac{MR^2}{2}, \; T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} j_{m/O} \dot{\theta}^2, \; j_{m/O} = ml^2, \text{ donc } T_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2, \; T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + ml^2\right)\dot{\theta}^2$$

3. l'expression du Lagrangien L :

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + ml^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(KR^2 + mg\, l)\theta^2$$

4. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange pour cet oscillateur est : : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$ (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2} + ml^2\right)\ddot{\theta}, \; \frac{dL}{d\theta} = -(KR^2 + mg\, l)\theta$$

(1) donne : $\left(\frac{MR^2}{2} + ml^2\right)\ddot{\theta} + (KR^2 + mg\, l)\theta = 0$ est l'équation différentielle du mouvement, on peut l'écrire sous la forme générale $\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \left(\frac{KR^2 + mg\, l}{\frac{MR^2}{2} + ml^2}\right)\theta = 0$, ou : $w_0 = \sqrt{\frac{KR^2 + mg\, l}{\frac{MR^2}{2} + ml^2}}$ est la pulsation propre du mouvement.

5. Calcul de la pulsation propre du mouvement w_0 :

Application numérique :

$$w_0 = \sqrt{\frac{30(0.1)^2 + 0.15(10)0.15}{\frac{1(0.1)^2}{2} + 0.15(0.15)^2}}, \quad w_0 = 0.006 \text{ Rad/s.}$$

<u>Exercice (5) :</u>

Soit le circuit électrique représenté dans la figure 1.5, constitué d'un condensateur de capacité C=0.1 µF, d'une bobine d'inductance L=16 *mH.*

1. Déterminer l'équation différentielle du système.
2. Quel est le type de cet oscillateur électrique.
3. Calculer la période propre T_0 de l'oscillateur électrique.

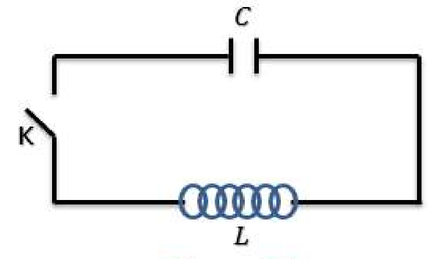


Figure 1.5

Solution de l'exercice (5) :

On a : C=0.1 µF, L=16 mH.

1. l'équation différentielle du système :

En appliquant la loi des mailles, on obtient :

$$\sum U_i = 0, \quad U_l + U_c = 0, \quad L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

On a : $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, donc $\frac{q}{C} + L\frac{d\dot{q}}{dt} = 0, \ \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (1)$$

Cette équation différentielle homogène du deuxième ordre, représente l'équation différentielle de ce système électrique.

2. le type de l'oscillateur électrique :

A partir de l'équation (1), on constate qu'elle a une forme générale :

$\ddot{q} + {w_0}^2 q = 0$, est la même forme que l'équation différentielle d'un oscillateur mécanique à un seul degré de liberté libre non amorti, donc on dit que le circuit (L, C) est un oscillateur électrique libre non amorti.

3. Calcul de la période propre T_0 :

A partir de l'équation différentielle on a, l'expression de la pulsation propre de cet oscillateur électrique est :

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{2\pi}{T_0}, \ T_0 = \frac{2\pi}{w_0}, \quad \text{donc :} \ T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Application numérique :

$T_0 = 2(3.14)\sqrt{0.016(0.1 \ \times 10^{-6})}$, $T_0 = 0.25 \times 10^{-3}$ s

Exercice (6) :

Un cylindre homogène de masse M=1 Kg, de rayon R=10 cm, tourne sans frottement autour d'un axe horizontal passant par son centre (O). Une petite masse ponctuelle m=50 g est soudé au point le plus bas du disque (Figure 1.6). Un ressort de constante de raideur K=20 N/m est relié à l'extrémité du disque. On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle θ très faible, et on lâche le système à lui-même.

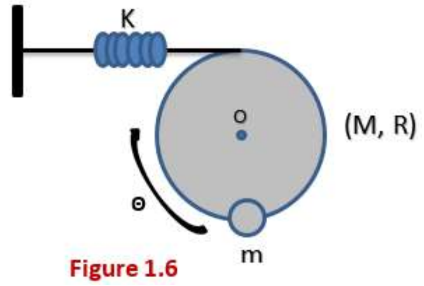


Figure 1.6

1. Calculer l'énergie potentielle du système
2. Calculer l'énergie cinétique du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien L.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
5. Donner la pulsation propre d'oscillation ω_0.
6. Quelle est la condition d'oscillation de cet oscillateur.

Solution de l'exercice (6) :

On a : M= 1 Kg, R= 10 cm, m= 50 g, K= 20 N/m.

1. L'expression de l'énergie potentielle :

$$U(\theta) = U_M + U_m + U_K,\ U_M = \pm mgh,\ h = 0,\ U_M = 0$$

$$U_m = +mgh,\ h = R - Rcos\theta = R(1 - cos\theta),$$

Ou : $cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $sin\theta \approx \theta$, donc, $h = R\frac{\theta^2}{2}$, $U_m = mg\,R\frac{\theta^2}{2}$

$U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2,\ x = R\theta$ est la déformation du ressort en cas de mouvement.

$x_0 = R\theta_0$ est la déformation du ressort à l'équilibre.

$$U_K = \frac{1}{2}K(R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2 + mg\,R\frac{\theta^2}{2}$$

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, donne $\theta_0 = 0$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta)^2 + mg\,R\frac{\theta^2}{2}$$

$U(\theta) = \frac{1}{2}(KR^2 + mg\,R)\theta^2$, est la forme quadratique de l'énergie potentielle.

2. L'expression de l'énergie cinétique :

$T(\dot{\theta}) = T_M + T_m, \;\; T_M = \frac{1}{2} j_{M/O}\dot{\theta}^2, \; j_{M/O} = \frac{MR^2}{2}, \; T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$

$T_m = \frac{1}{2} j_{m/O}\dot{\theta}^2, \; j_{m/O} = mR^2,$ donc $T_m = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2, \; T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\dot{\theta}^2$

3. L'expression du lagrangien L :

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(KR^2 + mg\,R)\theta^2$$

4. L'équation différentielle du mouvement :

On utilise l'équation de Lagrange pour un oscillateur libre non amorti :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0 \qquad (1)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\ddot{\theta}, \; \frac{dL}{d\theta} = -(KR^2 + mg\,R)\theta$

(1) donne : $\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\ddot{\theta} + (KR^2 + mgR)\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \left(\frac{KR^2+mgR}{\frac{MR^2}{2}+mR^2}\right)\theta = 0 \qquad (2)$

L'équation (2) est l'équation différentielle du mouvement.

5. la pulsation propre w_0 :

On peut écrire l'équation (2), sous la forme générale $\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$$w_0 = \sqrt{\frac{KR^2 + mgR}{\frac{MR^2}{2} + mR^2}}$$

Application numérique :

$$w_0 = \sqrt{\frac{20(0.1)^2+0.05(10)(0.1)}{\frac{1(0.1)^2}{2}+0.05(0.1)^2}}$$

$w_0 = 6.74$ Rad/s

6. La condition d'oscillation du système :

Le système oscille si : $w_0{}^2 > 0$, ce qui donne :

$\frac{KR^2+mg}{\frac{MR^2}{2}+mR^2} > 0$, cette relation est toujours vérifiée, et le système peut osciller toujours.

Exercice (7) :

Un cylindre homogène de masse M, et de rayon R, peut tourner librement autour d'un axe horizontal passant par son centre (O). Deux tiges de masses négligeables et de longueurs l_1, l_2, sont rigidement liés au cylindre (Figure 1.7) portent à leurs extrémités respectivement des masses ponctuelles m_1, m_2. Deux ressort K_1, K_2 sont reliés aux extrémités du disque.

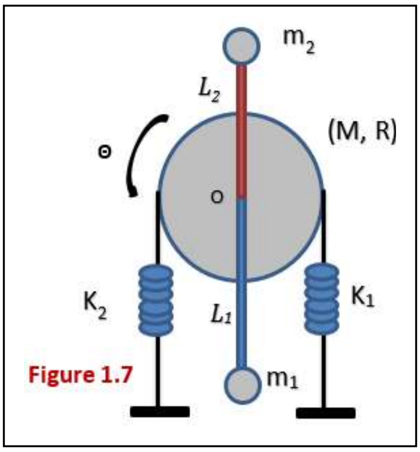


Figure 1.7

On donne : M=1.5 Kg, R=8 cm, l_1=12 cm, l_2=10 cm, m_1=50 g, m_2=30 g, K_1=10 N/m, K_2=15 N/m.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle θ très faible, et on lâche le système à lui-même.

1. Donner l'expression du Lagrangien L.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
3. Donner la pulsation propre d'oscillation ω_0.
4. Quelle est la condition d'oscillation de cet oscillateur.

Solution de l'exercice (7) :

On a : M=1.5 Kg, R=8 cm, l_1=12 cm, l_2=10 cm, m_1=50 g, m_2=30 g, K_1=10 N/m, K_2=15 N/m.

1. Expression du Lagrangien L du système :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle :

$$U(\theta) = U_M + U_{m1} + U_{m2} + U_{K1} + U_{K2}\ ,\ U_M = \pm mgh,\ h = 0,\ U_M = 0$$

$$U_{m1} = +m_1 g h_1\ ,\ h_1 = l_1 - l_1 cos\theta = l_1(1 - cos\theta)$$

Ou : $cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $sin\theta \approx \theta$, donc, $h_1 = l_1 \frac{\theta^2}{2}$, $U_{m1} = m_1 g\ l_1 \frac{\theta^2}{2}$

$$U_{m2} = -m_2 g h_2\ ,\ h_2 = l_2 - l_2 cos\theta = l_2(1 - cos\theta)$$

donc, $h_2 = l_2 \frac{\theta^2}{2}$, $U_{m2} = -m_2 g\, l_2 \frac{\theta^2}{2}$

$U_{K1} = \frac{1}{2} K_1 (x_1 + x_{01})^2$, $x_1 = R\theta$ est la déformation du ressort en cas de mouvement.

$x_{01} = R\theta_0$ est la déformation du ressort à l'équilibre.

$$U_{K1} = \frac{1}{2} K_1 (R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2} K_1 R^2 (\theta + \theta_0)^2$$

$U_{K2} = \frac{1}{2} K_2 (x_2 + x_{02})^2$, $x_2 = R\theta$, $x_{02} = R\theta_0$

$$U_{K2} = \frac{1}{2} K_2 (R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2} K_2 R^2 (\theta + \theta_0)^2$$

Donc, on obtient :

$$U(\theta) = \frac{1}{2} K_1 R^2 (\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2} K_2 R^2 (\theta + \theta_0)^2 + m_1 g\, l_1 \frac{\theta^2}{2} - m_2 g\, l_2 \frac{\theta^2}{2}$$

Il faut déterminer la forme quadratique de l'énergie potentielle, on utilise la condition d'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, ce qui donne $\theta_0 = 0$

$$U(\theta) = \frac{1}{2} K_1 R^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 R^2 \theta^2 + m_1 g\, l_1 \frac{\theta^2}{2} - m_2 g\, l_2 \frac{\theta^2}{2}$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2} (K_1 R^2 + K_2 R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2) \theta^2$$

L'énergie cinétique :

$$T(\dot{\theta}) = T_M + T_{m1} + T_{m2}$$

$T_M = \frac{1}{2} j_{M/O} \dot{\theta}^2$, $j_{M/O} = \frac{MR^2}{2}$, $T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$

$T_{m1} = \frac{1}{2} j_{m1/O} \dot{\theta}^2$, $j_{m1/O} = m_1 {l_1}^2$, donc $T_{m1} = \frac{1}{2} m_1 {l_1}^2 \dot{\theta}^2$

$T_{m2} = \frac{1}{2} j_{m2/O} \dot{\theta}^2$, $j_{m2/O} = m_2 {l_2}^2$, donc $T_{m2} = \frac{1}{2} m_2 {l_2}^2 \dot{\theta}^2$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 {l_1}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 {l_2}^2 \dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2\right)\dot{\theta}^2$$

Donc l'expression du lagrangien sera :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2)\theta^2$$

2. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange de cet oscillateur libre non amorti est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$ (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -(K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2)\theta$$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2\right)\ddot{\theta} + (K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2)}{\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2\right)}\theta = 0 \qquad (2)$$

L'équation (2) représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur.

3. La pulsation propre d'oscillation ω_0 :

L'équation (2) a la forme générale : $\ddot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$$w_0 = \sqrt{\frac{K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2}{\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2}}$$

Application numérique :

$$w_0 = \sqrt{\frac{10(0.08)^2 + 15(0.08)^2 + 0.05(10)(0.12) - 0.03(10)(0.1)}{\frac{1.5(0.08)^2}{2} + 0.05(0.12)^2 + 0.03(0.12)^2}}\ , \quad w_0 = 5.71 \text{ Rad/s}$$

4. Condition d'oscillation du système :

Le système oscille si, ${w_0}^2 > 0$, ce qui donne :

$$\frac{K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2}{\frac{MR^2}{2} + m_1 {l_1}^2 + m_2 {l_2}^2} > 0\ , \quad K_1R^2 + K_2R^2 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2 > 0$$

$K_1R^2 + K_2R^2 + m_1g\, l_1 > m_2g\, l_2$ est la condition d'oscillation du système.

Exercice (8) :

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R peut tourner librement autour d'un axe horizontale passant par son centre O. quatre tiges de masses négligeables et de longueurs l_1, l_2, l_3, l_4 sont rigidement liées aux cylindre. (Voir figure 1.8).

Les tiges portent à leurs extrémités respectivement des masses ponctuelles m_1, m_2, m_3, m_4. Deux ressort K_1 et K_2 sont liés respectivement aux masses m_1 et m_2.

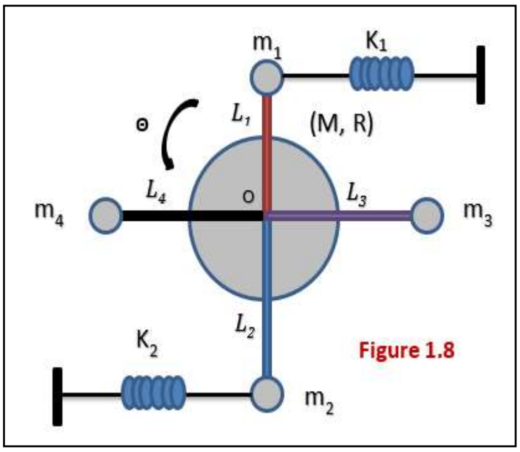


Figure 1.8

On donne : M=2 Kg, R=8 cm, l_1=10 cm, l_2=12 cm, l_3=13 cm, l_4=14 cm, m_1=50 g, m_2=60g, m_3=80 g, m_4=70 g, K_1=10 N/m, K_2=15 N/m.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle faible θ_0 =0.1 Rad et on le lâche sans vitesse initiale.

1. En déduire l'expression du Lagrangien L.
2. Donner l'équation différentielle du mouvement.
3. Calculer la période propre d'oscillation T_0.
4. Donner l'équation horaire du mouvement.

Solution de l'exercice (8) :

On a : M=2 Kg, R=8 cm, l_1=10 cm, l_2=12 cm, l_3=13 cm, l_4=14 cm, m_1=50 g, m_2=60g, m_3=80 g, m_4=70 g, K_1=10 N/m, K_2=15 N/m.

1. L'expression du Lagrangien L du système:

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle :

$$U(\theta) = U_M + U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} + U_{m4} + U_{K1} + U_{K2}$$

$$U_M = \pm mgh,\ \ h = 0,\ \ U_M = 0$$

$$U_{m1} = -m_1gh_1\ ,\ \ h_1 = l_1 - l_1cos\theta = l_1(1 - cos\theta)$$

Ou : $cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $sin\theta \approx \theta$, donc, $h_1 = l_1\frac{\theta^2}{2}$, $U_{m1} = -m_1g\, l_1\frac{\theta^2}{2}$

$U_{m2} = +m_2gh_2$, $h_2 = l_2 - l_2cos\theta = l_2(1 - cos\theta)$

donc, $h_2 = l_2\frac{\theta^2}{2}$, $U_{m2} = +m_2g\ l_2\frac{\theta^2}{2}$

$U_{m3} = +m_3gh_3$, $h_3 = l_3 \sin\theta \approx l_3\theta$, $U_{m3} = +m_3gl_3\theta$

$U_{m4} = -m_4gh_4$, $h_4 = l_4 \sin\theta \approx l_4\theta$, $U_{m4} = -m_4gl_4\theta$

$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2$, $x_1 = l_1\theta$, $x_{01} = l_1\theta_0$

$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(l_1\theta + l_1\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0)^2$

$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2$, $x_2 = l_2\theta$, $x_{02} = l_2\theta_0$

$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(l_2\theta + l_2\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2{l_2}^2(\theta + \theta_0)^2$

On obtient :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2(\theta + \theta_0)^2 - m_1g\ l_1\frac{\theta^2}{2} + m_2g\ l_2\frac{\theta^2}{2} + m_3gl_3\theta - m_4gl_4\theta$$

On utilise la condition d'équilibre pour trouver la forme quadratique de l'énergie potentielle :

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, ce qui donne $K_1{l_1}^2\theta_0 + K_2{l_2}^2\theta_0 + m_3gl_3 - m_4gl_4 = 0$

Cette équation homogène est la condition d'équilibre du système.

On va simplifier l'expression de l'énergie potentielle :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_1{l_1}^2{\theta_0}^2 + K_1{l_1}^2\theta\theta_0 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2{\theta_0}^2 + K_2{l_2}^2\theta\theta_0 - m_1g\ l_1\frac{\theta^2}{2} + m_2g\ l_2\frac{\theta^2}{2} + m_3gl_3\theta - m_4gl_4\theta$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2\theta^2 - m_1g\ l_1\frac{\theta^2}{2} + m_2g\ l_2\frac{\theta^2}{2} + \left(\frac{1}{2}K_1{l_1}^2{\theta_0}^2 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2{\theta_0}^2\right) + \left[K_1{l_1}^2\theta\theta_0 + K_2{l_2}^2\theta\theta_0 + m_3gl_3\theta - m_4gl_4\theta\right]$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2\theta^2 - m_1g\ l_1\frac{\theta^2}{2} + m_2g\ l_2\frac{\theta^2}{2} + (cnst) + \theta\left[K_1{l_1}^2\theta_0 + K_2{l_2}^2\theta_0 + m_3gl_3 - m_4gl_4\right]$$

Dans cette expression, la dernière équation entre parenthèse est la condition d'équilibre, donc égale zéro, et on obtient la forme quadratique de l'énergie potentielle suivante :

$$U(\theta)=\frac{1}{2}K_1{l_1}^2\theta^2+\frac{1}{2}K_2{l_2}^2\theta^2-m_1g\ l_1\frac{\theta^2}{2}+m_2g\ l_2\frac{\theta^2}{2}+cnst$$

$$U(\theta)=\frac{1}{2}(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2-m_1g\ l_1+m_2g\ l_2)\theta^2+cnst$$

L'énergie cinétique :

$$T(\dot{\theta})=T_M+T_{m1}+T_{m2}+T_{m3}+T_{m4}$$

$$T_M=\frac{1}{2}j_{M/O}\dot{\theta}^2,\ j_{M/O}=\frac{MR^2}{2},\ T_M=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T_{m1}=\frac{1}{2}j_{m1/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m1/O}=m_1{l_1}^2,\ \text{donc}\ T_{m1}=\frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta}^2$$

$$T_{m2}=\frac{1}{2}j_{m2/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m2/O}=m_2{l_2}^2,\ \text{donc}\ T_{m2}=\frac{1}{2}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2$$

$$T_{m3}=\frac{1}{2}j_{m3/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m3/O}=m_3{l_3}^2,\ \text{donc}\ T_{m3}=\frac{1}{2}m_3{l_3}^2\dot{\theta}^2$$

$$T_{m4}=\frac{1}{2}j_{m4/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m4/O}=m_4{l_4}^2,\ \text{donc}\ T_{m4}=\frac{1}{2}m_4{l_4}^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta})=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_3{l_3}^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_4{l_4}^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta})=\frac{1}{2}(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2+m_3{l_3}^2+m_4{l_4}^2)\dot{\theta}^2$$

Donc l'expression du Lagrangien est :

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2+m_3{l_3}^2+m_4{l_4}^2\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2$$

$$-m_1g\ l_1+m_2g\ l_2)\theta^2+cnst$$

2. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange de cet oscillateur libre non amorti est : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)-\frac{dL}{d\theta}=0$ (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)=\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2+m_3{l_3}^2+m_4{l_4}^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta}=-(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2-m_1g\ l_1+m_2g\ l_2)\theta$$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2+m_3{l_3}^2+m_4{l_4}^2\right)\ddot{\theta}+(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2-m_1g\,l_1+$$

$$m_2g\,l_2)\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2-m_1g\,l_1+m_2g\,l_2)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2+m_3{l_3}^2+m_4{l_4}^2\right)}\theta=0$$

Est l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur libre non amorti.

3. La période propre T_0 :

L'équation différentielle du mouvement a la forme générale : $\ddot{\theta}+w_0^2\theta=0$

$$w_0=\sqrt{\frac{(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2-m_1g\,l_1+m_2g\,l_2)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2+m_3{l_3}^2+m_4{l_4}^2\right)}}$$

Application numérique :

$$w_0=\sqrt{\frac{10(0.1)^2+1\ \ (0.12)^2-0.05(10)(0.1)+0.06(10)(0.12)}{\frac{2(0.08)^2}{2}+0.05(0.1)^2+0.06(0.12)^2+0.08(0.13)^2+0.07(0.14)^2}}$$

$w_0=5.68$ Rad/s

$T_0=\frac{2\pi}{w_0}=\frac{2(3.14)}{5.68}$, $T_0=1.106$ s.

4. L'équation horaire du mouvement :

L'équation horaire (solution de l'équation différentielle) pour un oscillateur libre non amorti est une fonction sinusoïdale de forme :

$\theta(t)=A\cos(w_0t+\varphi)$

On détermine les valeurs des deux constants A et φ à partir des conditions initiales :

A $t=0$:

$\theta(t=0)=\theta_0=0.1$ Rad, $\dot{\theta}(t=0)=0$

L'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ est :

$\dot{\theta}(t)=-w_0A\sin(w_0t+\varphi)$

A $t=0$:

$\theta(t=0) = Acos(\varphi) = \theta_0 = 0.1$

$\dot{\theta}(t=0) = -w_0 A \sin(\varphi) = 0$

Ce qui donne :

$\sin(\varphi) = 0,\ \varphi = 0$ Rad.

Donc, on a :

$A = \theta_0 = 0.1$ Rad.

On peut écrire la forme finale de l'équation horaire du mouvement vibratoire de cet oscillateur mécanique libre non amorti :

$\theta(t) = 0.1cos(5.68t)$ Rad.

Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres amortis

II. Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté libres amortis :

II.1. Rappel de cours :

II.1.1. Définitions : voici des définitions concernant le titre de ce chapitre

Oscillateurs : des systèmes mécaniques qui effectuent un mouvement de va et vient autour d'une position d'équilibre stable, qui se répète périodiquement au cours du temps.

Linéaires : les forces (pour les mouvements de translation) et les moments (pour les mouvements de rotation) sont proportionnelle à leurs élongations.

$\vec{T} = -Kx\vec{\imath}$, $\vec{M} = -C\theta\vec{K}$

Un seul degré de liberté : le mouvement du système au cours du temps, peut être décrit par une seule coordonnée indépendante (une coordonnée généralisée).

Libres : les forces extérieures exerçant sur le système sont nulles ($\vec{F}_{Ext} = \vec{0}$)

Amorti : le mouvement du système s'effectue en présence des forces de frottement ($\vec{F}_{Frot} \neq \vec{0}$), et par conséquence l'amplitude d'oscillation diminue au cours du temps [7, 8].

II.1.2. Formalisme de Lagrange : $L = T - U$ [9]

T : Energie cinétique du système.

U : Energie potentielle du système.

II.1.3. Equation de Lagrange : l'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti à un degré de liberté a la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = 0$ [10, 11], où q est la coordonnée généralisée.

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$ est l'énergie dissipative [12].

II.1.4. Equation différentielle du mouvement : l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur libre amorti, a toujours la forme générale $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + w_0^2 q = 0$ [11, 12].

β est le facteur d'amortissement du système.

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$, est la pulsation propre (fréquence angulaire) du mouvement oscillatoire du système

II.1.5. Nature du mouvement : selon les valeurs de β et w_0 on a 3 régime de mouvement

$\beta > w_0$: Régime de mouvement apériodique (il n y'a pas de mouvement vibratoire)

$\beta < w_0$: est dite le régime pseudopériodique, ou un mouvement oscillatoire amorti.

$\beta = w_0$: est dite le régime apériodique critique (il n y'a pas de mouvement oscillatoire ou vibratoire)

II.1.6. Equation horaire du mouvement : représente la solution de l'équation différentielle du mouvement, a une forme sinusoïdale. Pour le régime pseudopériodique, (mouvement vibratoire) cette équation horaire est $q(t) = A_0 e^{-\beta} \cos(wt - \varphi)$ [12].

$w = \sqrt{{w_0}^2 - \beta^2}$ est dite la pseudopulsation du mouvement.

On détermine les valeurs de A_0 et φ à partir des condition initiales $q(t = 0)$ et $\dot{q}(t = 0)$

II.2. Série des exercices corrigés :

Exercice (1) :

Soit le système mécanique (masse, ressort, amortisseur) représenté dans la figure 2.1.

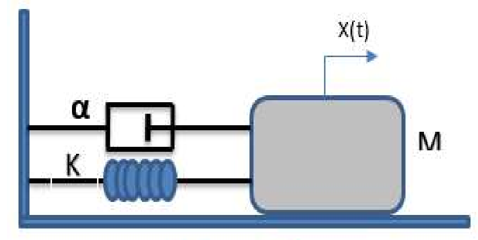


Figure 2.1

On écarte la masse m de sa position d'équilibre d'un petit déplacement $X_0 = 10$ cm, et on lâche le système à lui-même sans vitesse initiale.

1. Etablir le Lagrangien L du système.
2. Donner l'expression de l'énergie dissipative.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
4. Ce dernier est-il pseudo périodique.

On donne : M= 1.5 Kg, K= 30 N/m, α =70.10^{-2} Kg/s.

Solution de l'exercice (1) :

On a : M= 1.5 Kg, K= 30 N/m, α =70.10^{-2} Kg/s.

1. calcul du lagrangien du système :

$L = T - U$

L'énergie potentielle :

$U(x) = U_m + U_K$

$U_M = 0$ j, pas de déplacement vertical. $U_K = \frac{1}{2} K (x + x_0)^2$

$$U(x) = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$$

A l'équilibre on a : $\frac{dU}{dx}_{x=0} = 0$

$$\frac{dU}{dx} = K(x + x_0),\ \frac{dU}{dx}_{x=0} = Kx_0 = 0,\ x_0 = 0$$

La forme quadratique de l'énergie potentielle est :

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{x}) = T_M = \frac{1}{2}Mv^2,\quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$L = T - U,\ L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

2. L'énergie dissipative :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = \dot{x}$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

3. L'équation différentielle du mouvement :

On utilise l'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti, qui a la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = 0 \qquad (1)$$

où $q = x$, $\dot{q} = \dot{x}$ est la coordonnée généralisée.

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = M\dot{x},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) = M\ddot{x},\ \frac{dL}{dx} = -Kx\ ,\ \frac{dD}{d\dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = 0 \qquad (2)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2x = 0$

Donc : $2\beta = \frac{\alpha}{M}$, $\beta = \frac{\alpha}{2M}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ est la pulsation propre.

4. La nature du mouvement du système :

On calcule les valeurs de w_0 et β pour déterminer la nature du mouvement.

Application numérique :

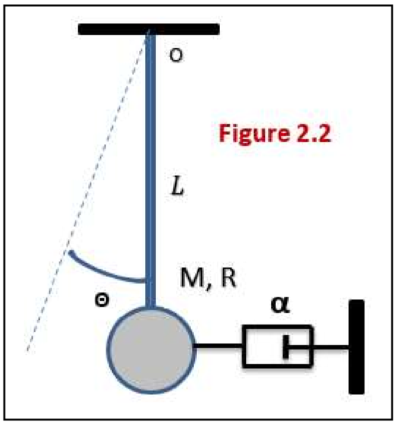
$$w_0 = \sqrt{\frac{30}{1.5}} \quad , \quad w_0 = 4.47 \text{ Rad/s}$$

$$\beta = \frac{70.10^{-2}}{2(1.5)} \quad , \quad \beta = 23.33.10^{-2} \ s^{-1}$$

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

<u>Exercice (2) :</u>

Un pendule simple constitue d'une poulie de masse M et de rayon R, et d'une tige de masse négligeable et de longueur l, le système peut osciller librement autour d'un axe passant par l'extrémité O de la tige. La poulie subit des frottements visqueux de constante α. A l'équilibre la tige est verticale (Voir figure 2.2). On écarte la masse M de sa position d'équilibre d'un angle très faible, puis on lâche le système à lui-même sans vitesse initiale.



On donne : M= 1.5 Kg, R= 10 cm, l= 20 cm, α= 7 N.S/m.

1. Etablir le lagrangien L du système.
2. Donner l'énergie dissipative du système.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
4. Quel est le type de mouvement de ce système.

<u>Solution de l'exercice (2) :</u>

On a les données suivante : M= 1.5 Kg, R= 10 cm, l= 20 cm, α= 7 N.S/m.

1. Calcul du Lagrangien du système L :

$L = T - U$

L'énergie potentielle du système :

$U(\theta) = U_M = Mgh$

$h = (l + R) - (l + R)cos\theta$, $h = (l + R)[1 - cos\theta]$

Pour les faibles angles on a les approximations suivantes : $cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $sin\theta \approx \theta$

$h = (l + R)\frac{\theta^2}{2}$, $U(\theta) = Mg(l + R)\frac{\theta^2}{2}$

Est la forme quadratique de l'énergie potentielle du système.

L'énergie cinétique du système :

$T(\dot{\theta}) = T_M = \frac{1}{2}j_{M/O}\dot{\theta}^2$, $j_{M/O} = \frac{2}{5}MR^2 + M(l + R)^2$ (en appliquant le théorème de Huygens).

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}MR^2 + M(l + R)^2\right]\dot{\theta}^2$

Donc : $L = T - U$, $L = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}MR^2 + M(l + R)^2\right]\dot{\theta}^2 - Mg(l + R)\frac{\theta^2}{2}$

2. L'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = (l + R)\dot{\theta}$, donc :

$D = \frac{1}{2}\alpha(l + R)^2\dot{\theta}^2$

3. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = 0 \qquad (1)$$

où $q = \theta$, $\dot{q} = \dot{\theta}$ est la coordonnée généralisée.

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left[\frac{2}{5}MR^2 + M(l + R)^2\right]\ddot{\theta}$, $\frac{dL}{d\theta} = -Mg(l + R)\theta$,

$$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha(l+R)^2\dot{\theta}$$

On obtient l'équation suivante :

$$\left[\frac{2}{5}MR^2 + M(l+R)^2\right]\ddot{\theta} + \alpha(l+R)^2\dot{\theta} + Mg(l+R)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha(l+R)^2}{\left[\frac{2}{5}MR^2+M(l+R)^2\right]}\dot{\theta} + \frac{Mg(l+R)}{\left[\frac{2}{5}MR^2+M(l+R)^2\right]}\theta = 0 \qquad (2)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{\alpha(l+R)^2}{2\left[\frac{2}{5}MR^2+M(l+R)^2\right]}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{Mg(l+R)}{\left[\frac{2}{5}MR^2+M(l+R)^2\right]}}$ est la pulsation propre.

4. Nature du mouvement du système :

On doit calculer les valeurs de w_0 et β

Application numérique :

$$w_0 = \sqrt{\frac{1.5(10)(0.3)}{\left[\frac{2}{5}(1.5)(0.1)^2+1.5(0.3)^2\right]}} \quad , \quad w_0 = 5.64 \text{ Rad/s}$$

$$\beta = \frac{7(0.3)^2}{2\left[\frac{2}{5}(1.5)(0.1)^2+1.5(0.3)^2\right]} \quad , \quad \beta = 2.234 \ s^{-1}$$

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

<u>Exercice (3) :</u>

Un cylindre homogène de masse M= 1.5 Kg et de rayon R = 12 cm, peut osciller sans frottement autour d'un axe horizontale passant perpendiculairement par son centre O (Voir figure 2.3). Un ressort de constante de raideur K= 16 N/m est relié à l'extrémité du cylindre. Un amortisseur est relié à une distance a< R du centre O.

On écarte le système par rapport à sa position d'équilibre d'un angle faible θ_0 et on le lâche à lui-même.

On donne : α= 1.5 N.S/m, a= 7 cm.

1. Etablir le lagrangien L du système.
2. Calculer l'énergie dissipative D.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
4. On remplace l'ancien amortisseur par un nouveau de constante d'amortissement α= 70 N.S/m, est ce que le système oscille ou non.

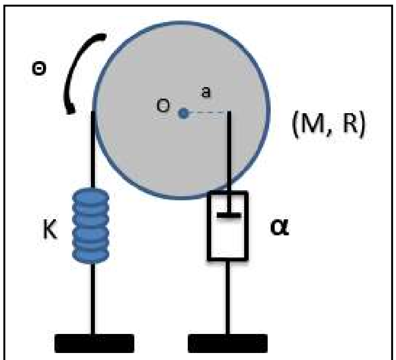


Figure 2.3

Solution de l'exercice (3) :

On a : M= 1.5 Kg, R = 12 cm, a= 7 cm, K= 16 N/m, α= 1.5 N.s/m.

1. l'expression du Lagrangien du système L :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_M + U_K \ , \ \ U_M = 0 \text{ j} \ , \ U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2, \ x = R\theta \ , \ x_0 = R\theta_0$$

$$U_K = \frac{1}{2}K(R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2$$

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, donne $\theta_0 = 0$

$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2\theta^2$ est la forme quadratique de l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{\theta}) = T_M = \frac{1}{2}j_{M/O}\dot{\theta}^2, \ \ j_{M/O} = \frac{MR^2}{2}$$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

L'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 \ , \ v = a\dot{\theta}$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha a^2\dot{\theta}^2$$

3. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = 0 \qquad (1)$$

où $q = \theta$, $\dot{q} = \dot{\theta}$ est la coordonnée généralisée.

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\ddot{\theta}, \quad \frac{dL}{d\theta} = -KR^2\theta ,$$

$$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha a^2\dot{\theta}$$

On obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{MR^2}{2}\right)\ddot{\theta} + \alpha a^2\dot{\theta} + KR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha a^2}{\left(\frac{MR^2}{2}\right)}\dot{\theta} + \frac{KR^2}{\left(\frac{MR^2}{2}\right)}\theta = 0 \quad , \quad \ddot{\theta} + \frac{2\alpha a^2}{MR^2}\dot{\theta} + \frac{2K}{M}\theta = 0 \qquad (2)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{\alpha a^2}{MR^2}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}}$ est la pulsation propre du mouvement.

Application numérique :

$$\beta = \frac{1.5(0.07)^2}{1.5(0.12)^2} \quad , \quad \beta = 0.34 \ s^{-1}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2(16)}{1.5}} \quad , \quad w_0 = 4.62 \ \text{Rad/s.}$$

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

4. Nature du mouvement du système :

On remplace l'ancien amortisseur par un nouveau amortisseur α= 70 N.s/m, et la valeur du facteur d'amortissement changera :

$$\beta = \frac{70(0.07)^2}{1.5(0.12)^2} \quad , \quad \beta = 15.87 \ s^{-1}$$

Dans ce cas on a : $\beta > w_0$ et le régime du mouvement dans ce cas est apériodique.

On n'a pas un mouvement vibratoire.

Exercice (4) :

Soit le circuit électrique (R, L, C) en série (Figure 2.4). Le condensateur est initialement chargé $q(t=0) = q_0$. On ferme l'interrupteur et le système oscille librement.

On donne : R= 1 $K\Omega$, L=20 mh, C= 0.2 μF

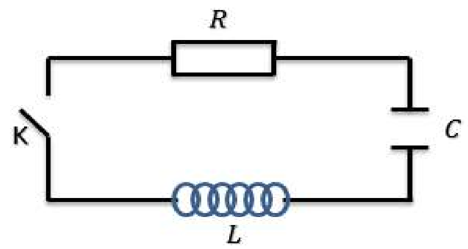


Figure 2.4

1. Etablir l'équation qui régit les variations de la charge q au cours de temps.
2. Calculer le facteur d'amortissement électrique β et la pulsation propre W_0.
3. Quelle est la nature du régime dans ce cas.
4. Donner la solution de l'équation différentielle, sachant que :

   A $t = 0$: $q(t=0) = q_0, \ \dot{q}(t=0) = 0$

Solution de l'exercice (4) :

On a : R= 1 $K\Omega$, L=20 mh, C= 0.2 μF

1. l'équation différentielle du système :

En appliquant la loi des mailles, on obtient :

$$\sum U_i = 0, \quad U_R + U_l + U_c = 0, \quad Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = 0,$$

On a : $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, donc $R\dot{q} + L\frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{q}{c} = 0, \ R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0$

$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ (1)

Cette équation différentielle homogène du deuxième ordre, représente l'équation différentielle de ce système électrique, elle a la forme générale : $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + w_0^2 q = 0$

Donc :

$2\beta = \frac{R}{L}$, $\beta = \frac{R}{2L}$ est le facteur d'amortissement.

$W_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $W_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre.

2. Calcul des valeurs de β et W_0 :

$\beta = \frac{10^3}{2(20.10^{-3})}$, $\beta = 25.10^3\ s^{-1}$

$W_0 = \frac{1}{\sqrt{20.10^{-3}(0.2.10^{-6})}}$, $W_0 = 1.58.10^5$ Rad/s.

3- la nature du régime :

On a : $\beta < w_0$ donc le régime est pseudo périodique.

4. L'équation horaire :

A partir des conditions initiales, à $t = 0$: $q(t = 0) = q_0$, $\dot{q}(t = 0) = 0$

L'équation différentielle (1) de ce circuit électrique, dans le régime pseudo périodique, accepte une solution sinusoïdale de la forme suivante :

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(wt - \varphi)$$

On détermine les valeurs de A_0 et φ à partir des condition initiales.

On a : $\dot{q}(t) = -\beta.A_0 e^{-\beta t}\cos(wt - \varphi) - wA_0 e^{-\beta t}\sin(wt - \varphi)$

$\dot{q}(t) = -\beta.q(t) - wA_0 e^{-\beta t}\sin(wt - \varphi)$

À $t = 0$:

$q(t = 0) = A_0\cos(-\varphi) = A_0\cos(\varphi) = q_0$ (2)

$\dot{q}(t = 0) = -\beta.q_0 - wA_0\sin(-\varphi) = -\beta.q_0 + wA_0\sin(\varphi) = 0$ (3)

On remplace l'équation (2) dans l'équation (3) :

$-\beta.A_0\cos(\varphi) + wA_0\sin(\varphi) = 0$, donc $\beta.A_0\cos(\varphi) = wA_0\sin(\varphi)$

$tg(\varphi) = \frac{\beta}{w}$, ce qui donne $\varphi = actg\left(\frac{\beta}{w}\right)$

A partir de l'équation (2) on a : $A_0 = \frac{q_0}{\cos(\varphi)}$

On calcule la valeur de la pseudo pulsation, on a :

$$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Application numérique :

$w = \sqrt{1.58.10^{5^2} - 25.10^{3^2}}$) , $w = 157.9.10^3$ Rad/s

$\varphi = actg\left(\frac{25.10^3}{157.9.10^3}\right)$, $\varphi = 0.157$ Rad

$A_0 = \frac{q_0}{\cos(0.157)}$, $A_0 = 1.012 q_0$ c

L'équation horaire finale est:

$q(t) = 1.012 q_0 e^{-25.10^3 t} \cos(157.9.10^3 t - 0.157)$ coulomb.

Exercice (5) :

Un tige de longueur l et de masse négligeable peut osciller autour de l'axe (O) (Figure 2.5). Porte à ses deux extrémités deux masses ponctuelles m_1 et m_2. Deux ressorts K_1 et K_2 sont reliés à la masse m_1. La masse m_2 subit des frottements visqueux de constante α.

On suppose que la tige est initialement horizontale. On écarte la masse m1(m2) d'un angle très faible ($\theta < 15°$) et on lâche le système à lui-même.

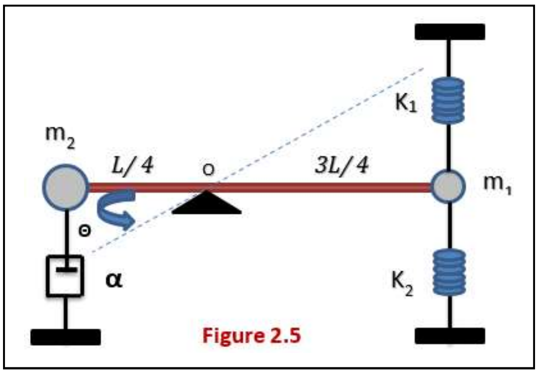


Figure 2.5

On donne : l = 20 cm, m_1= 50 g, m_2 = 70 g, K_1= 15 N/m, K_2 = 20 N/m, α= 15 Kg/s.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Quelle-est la nature de ce mouvement.
3. Donner le circuit électrique équivalent à ce système mécanique dans l'analogie force-tension.

Solution de l'exercice (5) :

On a : l = 20 cm, m_1= 50 g, m_2 = 70 g, K_1= 15 N/m, K_2 = 20 N/m, α= 15 Kg/s.

1. l'équation différentielle du système :

On calcule le Lagrangien du système :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_{m1} + U_{m2} + U_{K1} + U_{K1}$$

$$U_{m1} = m_1 g h_1 \quad , \; h_1 = \frac{3l}{4} sin\theta \approx \frac{3l}{4}\theta \quad , \quad U_{m1} = m_1 g \frac{3l}{4}\theta$$

$$U_{m2} = -m_2 g h_2 \quad , \; h_2 = \frac{l}{4} sin\theta \approx \frac{l}{4}\theta \quad , \quad U_{m2} = -m_2 g \frac{l}{4}\theta$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2, \; x_1 = \frac{3l}{4}\theta \; , \; x_{01} = \frac{3l}{4}\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(\frac{3l}{4}\theta + \frac{3l}{4}\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1\frac{9l^2}{16}(\theta + \theta_0)^2$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2, \; x_2 = \frac{3l}{4}\theta \; , \; x_{02} = \frac{3l}{4}\theta_0$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(\frac{3l}{4}\theta + \frac{3l}{4}\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2\frac{9l^2}{16}(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = m_1 g \frac{3l}{4}\theta - m_2 g \frac{l}{4}\theta + \frac{1}{2}K_1\frac{9l^2}{16}(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2\frac{9l^2}{16}(\theta + \theta_0)^2$$

On détermine la forme quadratique de l'énergie potentielle, donc on passe par la position d'équilibre.

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$

$$\frac{dU}{d\theta} = 3m_1 g \frac{l}{4} - m_2 g \frac{l}{4} + K_1\frac{9l^2}{16}(\theta + \theta_0) + K_2\frac{9l^2}{16}(\theta + \theta_0)$$

$$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 3m_1 g \frac{l}{4} - m_2 g \frac{l}{4} + K_1\frac{9l^2}{16}\theta_0 + K_2\frac{9l^2}{16}\theta_0 = 0$$

$3m_1 g \frac{l}{4} - m_2 g \frac{l}{4} + K_1\frac{9l^2}{16}\theta_0 + K_2\frac{9l^2}{16}\theta_0 = 0$, cette équation est la condition d'équilibre du système.

Après la simplification de l'expression de l'énergie potentielle, on obtient :

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{9l^2}{16}\theta^2 + \frac{1}{2}K_2\frac{9l^2}{16}\theta^2 + cnst$,

$U(\theta) = \frac{9l^2}{32}(K_1 + K_2)\theta^2 + cnst$, est la forme quadratique de l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique du système :

$T(\dot{\theta}) = T_{m1} + T_{m2}$

$T_{m1} = \frac{1}{2}j_{m1/O}\dot{\theta}^2,\ \ j_{m1/O} = m_1\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{9m_1l^2}{16}$, $T_{m1} = \frac{9m_1l^2}{32}\dot{\theta}^2$

$T_{m2} = \frac{1}{2}j_{m2/O}\dot{\theta}^2,\ \ j_{m2/O} = m_2\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{m_2l^2}{16}$, $T_{m2} = \frac{m_2l^2}{32}\dot{\theta}^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{9m_1l^2}{32}\dot{\theta}^2 + \frac{m_2l^2}{32}\dot{\theta}^2$, $T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{9m_1l^2}{16} + \frac{m_2l^2}{16}\right)\dot{\theta}^2$

$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{9m_1l^2}{16} + \frac{m_2l^2}{16}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{9l^2}{32}(K_1 + K_2)\theta^2 + cnst$

L'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = \frac{l}{4}\dot{\theta}$, donc :

$D = \frac{1}{2}\alpha\frac{l^2}{16}\dot{\theta}^2$, $D = \alpha\frac{l^2}{32}\dot{\theta}^2$

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0 \qquad (1)$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{9m_1l^2}{16} + \frac{m_2l^2}{16}\right)\ddot{\theta}$, $\frac{dL}{d\theta} = -\frac{9l^2}{16}(K_1 + K_2)\theta$, $\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha\frac{l^2}{16}\dot{\theta}$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{9m_1l^2}{16} + \frac{m_2l^2}{16}\right)\ddot{\theta} + \alpha\frac{l^2}{16}\dot{\theta} + \frac{9l^2}{16}(K_1 + K_2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{9m_1+m_2}\dot{\theta} + \frac{9(K_1+K_2)}{9m_1+m_2}\theta = 0 \qquad (2)$$

L'équation (2) représente l'équation différentielle du mouvement du système, qui a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{9m_1+m_2}\right)$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{9(K_1+K_2)}{9m_1+m_2}}$ est la pulsation propre du mouvement.

2. La nature du mouvement du système :

On doit calculer les valeurs de w_0 et β

Application numérique :

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{9(0.05)+(0.07)}\right) \quad , \quad \beta = 14.42 \ s^{-1}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{9(15+20)}{9(0.05)+(0.07)}} \quad , \quad w_0 = 24.61 \ \text{Rad/s.}$$

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

3. Le circuit électrique équivalent (analogie force-tension) :

À partir de l'équation (2) qui contient 3 termes, le circuit électrique équivalent contient 3 composés électrique (R, L, C).

Dans l'analogie force-tension, les éléments équivalents sont associés en série. Donc le circuit électrique équivalent à ce système mécanique est un circuit (R, L, C) en série (Voir exercice (4)). Son équation différentielle est :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = 0 \qquad (3)$$

D'autre part, l'équation du système mécanique peut être écrite sous l'expression :

$$(9m_1 + m_2)\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + 9(K_1 + K_2)\theta = 0 \qquad (2)$$

Les deux équations différentielles sont similaires de forme, et on peut donner le tableau d'analogie force-tension entre ces deux systèmes :

Système mécanique	Système électrique
$9m_1 + m_2$	L
α	R
$9(K_1 + K_2)$	$\frac{1}{c}$
θ	q
$\dot{\theta}$	$\dot{q}$

On a : $\beta_{mécanique} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{9m_1+m_2}\right) \quad , \quad w_{0\,mécanique} = \sqrt{\frac{9(K_1+K_2)}{9m_1+m_2}}$

Par conséquence, on écrit :

$$\beta_{électrique} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right) = \frac{R}{2L} \quad , \quad w_{0_{mécanique}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{c}}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Exercice (6) :

Soit le système mécanique représenté dans la figure 2.6. La tige de longueur l sans masse.

A l'équilibre la tige fait un angle initiale θ_0 avec l'axe horizontale. On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle θ très faible, puis on le lâche à lui-même sans vitesse initiale.

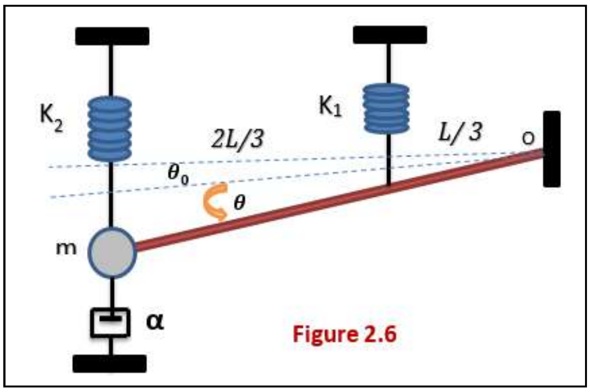


Figure 2.6

On donne : m= 50 g, l = 18 cm, K_1 = 12 N/m, K_2= 15 N/m, α = 0.3 Kg/s.

1. Donner l'expression du Lagrangien L.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
3. Quelle est la nature du mouvement du système (on prend $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ Rad).

Solution de l'exercice (6) :

On a : m= 50 g, l = 18 cm, K_1 = 12 N/m, K_2= 15 N/m, α = 0.3 Kg/s.

A l'équilibre la tige fait un angle initiale θ_0 avec l'axe horizontale.

1. L'expression du Lagrangien L :

$$L = T - U$$

On calcule l'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_m + U_{K1} + U_{K2} \;,\; U_m = -mgh,\; h = lsin(\theta + \theta_0) - lsin(\theta_0)$$

$$h = l[sin(\theta + \theta_0) - sin(\theta_0)] \quad , \quad U_m = -mgl[sin(\theta + \theta_0) - sin(\theta_0)]$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2,\; x_1 = \frac{l}{3}\theta \;,\; x_{01} = \frac{l}{3}\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(\frac{l}{3}\theta + \frac{l}{3}\theta_0)^2 \quad , \quad U_{K1} = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}(\theta + \theta_0)^2$$

$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2,\ x_2 = l\theta\ ,\ \ x_{02} = l\theta_0$

$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(l\theta + l\theta_0)^2\ \ ,\quad U_{K2} = \frac{1}{2}K_2 l^2(\theta + \theta_0)^2$

Donc :

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2(\theta + \theta_0)^2 - mgl[sin(\theta + \theta_0) - sin(\theta_0)]$

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$

$$\frac{dU}{d\theta} = K_1\frac{l^2}{9}(\theta + \theta_0) + K_2 l^2(\theta + \theta_0) - mglcos(\theta + \theta_0)$$

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = K_1\frac{l^2}{9}\theta_0 + K_2 l^2\theta_0 - mglcos\theta_0 = 0$ est la condition d'équilibre du système.

On simplifie l'expression de l'énergie potentielle :

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}{\theta_0}^2 + K_1\frac{l^2}{9}\theta\theta_0 + \frac{1}{2}K_2 l^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2{\theta_0}^2 + K_2 l^2\theta\theta_0 + -mgl[sin(\theta + \theta_0)] + mglsin(\theta_0)$

On : $sin(\theta + \theta_0) = sin\theta cos\theta_0 + cos\theta sin\theta_0$

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}{\theta_0}^2 + K_1\frac{l^2}{9}\theta\theta_0 + \frac{1}{2}K_2 l^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2{\theta_0}^2 + K_2 l^2\theta\theta_0 + -mgl[sin\theta cos\theta_0 + cos\theta sin\theta_0] + mglsin(\theta_0)$

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2\theta^2 + \left(K_1\frac{l^2}{9}\theta\theta_0 + +K_2 l^2\theta\theta_0 - mglsin\theta cos\theta_0 - mglcos\theta sin\theta_0\right) + \left(\frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}{\theta_0}^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2{\theta_0}^2 + mglsin\theta_0\right)$

Où : $cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $sin\theta \approx \theta$, pour $\theta < 15^\circ$

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2\theta^2 + \left(K_1\frac{l^2}{9}\theta\theta_0 + +K_2 l^2\theta\theta_0 - mgl\theta cos\theta_0 - mglsin\theta_0(\frac{1-\theta^2}{2})\right) + \left(\frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}{\theta_0}^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2{\theta_0}^2 + mglsin\theta_0\right)$

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2\theta^2 + mglsin\theta_0\frac{\theta^2}{2} + \theta\left(K_1\frac{l^2}{9}\theta_0 + +K_2 l^2\theta_0 - mglcos\theta_0\right) + cnst$

En utilisant la condition d'équilibre, on obtient la forme quadratique de l'énergie potentielle :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{9}\theta^2 + \frac{1}{2}K_2 l^2\theta^2 + mglsin\theta_0\frac{\theta^2}{2} + cnst$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}(K_1\frac{l^2}{9} + K_2 l^2 + mglsin\theta_0)\theta^2 + cnst$$

L'expression de l'énergie cinétique :

$T(\dot{\theta}) = T_m$, $T_m = \frac{1}{2}j_{m/O}\dot{\theta}^2$, $j_{m/O} = ml^2$, donc $T_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

L'expression du lagrangien L :

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{2}(K_1\frac{l^2}{9} + K_2 l^2 + mglsin\theta_0)\theta^2 + cnst\right]$$

2. L'équation différentielle du mouvement :

On calcule l'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = l\dot{\theta}$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$$

On utilise l'équation de Lagrange pour un oscillateur libre amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0 \qquad (1)$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$, $\frac{dL}{d\theta} = -(K_1\frac{l^2}{9} + K_2 l^2 + mglsin\theta_0)\theta$

$$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha l^2\dot{\theta}$$

L'équation (1) donne : $ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left(K_1\frac{l^2}{9} + K_2 l^2 + mglsin\theta_0\right)\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha l^2}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{K_1\frac{l^2}{9} + K_2 l^2 + mglsin\theta_0}{ml^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{K_1\frac{l^2}{9} + K_2 l^2 + mglsin\theta_0}{ml^2}\theta = 0 \qquad (2)$$

L'équation (2) représente l'équation différentielle du mouvement du système, qui a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{\alpha}{2m}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{K_1\frac{l^2}{9}+K_2l^2+mglsin\theta_0}{ml^2}}$ est la pulsation propre du mouvement.

3. La nature du mouvement du système : on prend $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ Rad

On doit calculer les valeurs de w_0 et β

Application numérique :

$\beta = \frac{0.3}{2(0.05)}$, $\beta = 3\ s^{-1}$

$w_0 = \sqrt{\frac{12\frac{(0.18)^2}{9}+15(0.18)^2+0.05(10)(0.18)(0.5)}{0.05(0.18)^2}}$, $w_0 = 18.33$ Rad/s

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

Exercice (7) :

Soit le système mécanique de la figure 2.7. Le cylindre homogène de masse M, et de rayon R, peut tourner librement autour d'un axe horizontal passant par son centre (O).

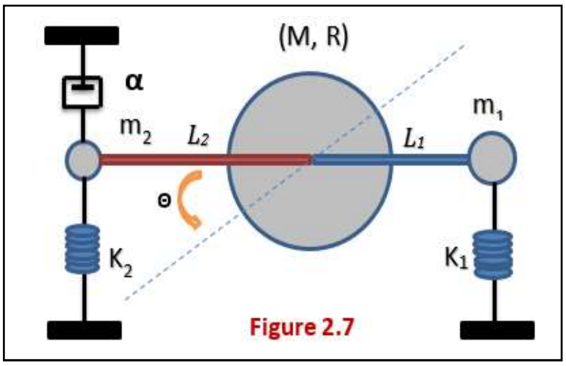


Figure 2.7

La masse ponctuelle m_1 est relié avec un ressort K_1 et la masse ponctuelle m_2 est attachée avec un ressort de constante de raideur K_2 et un amortisseur de constante d'amortissement α. La tige est initialement horizontale.

On donne : M= 2 Kg, R= 14 cm, l_1= 18 cm,

l_2= 20 cm, m_1 = 30 g, m_2 = 25 g. K_1=12 N/m, K_2=15 N/m, α= 0.7 Kg/s.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle θ très faible, et on le lâche à lui-même.

1. Déterminer la condition d'équilibre du système.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3. Donner l'équation horaire du mouvement, sachant que :

   A t = 0 : $\theta(t=0) = \theta_0 = 0.1\ Rad,\ \dot{\theta}(t=0) = 0.$

Solution de l'exercice (7) :

On a : M= 2 Kg, R= 14 cm, l_1= 18 cm, l_2= 20 cm, m_1 = 30 g, m_2 = 25 g. K_1=12 N/m, K_2=15 N/m, α= 0.7 Kg/s.

1. Détermination de la condition d'équilibre du système:

A l'équilibre du système on a : : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$

On calcule l'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_M + U_{m1} + U_{m2} + U_{K1} + U_{K2}\ ,\ U_M = \pm mgh,\ h = 0,\ U_M = 0$$

$$U_{m1} = +m_1 g h_1\ ,\ h_1 = l_1 sin\theta \approx l_1\theta\ ,\ \ U_{m1} = m_1 g\, l_1\theta$$

$$U_{m2} = -m_2 g h_2\ ,\ h_2 = l_2 sin\theta \approx l_2\theta\quad ,\ U_{m2} = -m_2 g\, l_2\theta$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2,\ x_1 = l_1 sin\theta \approx l_1\theta\ ,\ x_{01} = l_1\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(l_1\theta + l_1\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2,\ x_2 = l_2 sin\theta \approx l_2\theta,\ x_{02} = l_2\theta_0$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(l_2\theta + l_2\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2{l_2}^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2{l_2}^2(\theta + \theta_0)^2 + m_1 g\, l_1\theta - m_2 g\, l_2\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0) + K_2{l_2}^2(\theta + \theta_0) + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2$$

$$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = K_1{l_1}^2\theta_0 + K_2{l_2}^2\theta_0 + m_1 g\, l_1 - m_2 g\, l_2 = 0$$

Est la condition d'équilibre du système, et par conséquence la position d'équilibre du système est : $\theta_0 = \frac{m_2 g\, l_2 - m_1 g\, l_1}{K_1{l_1}^2 + K_2{l_2}^2}$

2. L'équation différentielle du mouvement :

Selon les données, la tige est initialement horizontale.

On utilise l'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)+\frac{dD}{d\dot{\theta}}-\frac{dL}{d\theta}=0 \qquad (1)$$

On détermine la forme quadratique de l'énergie potentielle, après la simplification de son expression on obtient :

$$U(\theta)=\frac{1}{2}K_1{l_1}^2\theta^2+\frac{1}{2}K_2{l_2}^2\theta^2+\text{cnst}$$

$$U(\theta)=\frac{1}{2}\left(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2\right)\theta^2+\text{cnst}$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{\theta})=T_M+T_{m1}+T_{m2}$$

$$T_M=\frac{1}{2}j_{M/O}\dot{\theta}^2,\ j_{M/O}=\frac{MR^2}{2},\ T_M=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T_{m1}=\frac{1}{2}j_{m1/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m1/O}=m_1{l_1}^2,\ \text{donc}\ T_{m1}=\frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta}^2$$

$$T_{m2}=\frac{1}{2}j_{m2/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m2/O}=m_2{l_2}^2,\ \text{donc}\ T_{m2}=\frac{1}{2}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta})=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_1{l_1}^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2{l_2}^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta})=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)\dot{\theta}^2$$

L'expression du Lagrangien L :

$$L=T-U$$

Donc l'expression du lagrangien sera :

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}\left(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2\right)\theta^2+\text{cnst}$$

L'énergie dissipative :

$$D=\frac{1}{2}\alpha v^2\ ,\ v=l_2\dot{\theta}\ ,\ \text{donc :}$$

$$D=\frac{1}{2}\alpha{l_2}^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)=\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)\ddot{\theta}$$

$\frac{dL}{d\theta} = -\left(K_1{l_1}^2 + K_2{l_2}^2\right)\theta$, $\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha{l_2}^2\dot{\theta}$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{MR^2}{2} + m_1{l_1}^2 + m_2{l_2}^2\right)\ddot{\theta} + \alpha{l_2}^2\dot{\theta} + \left(K_1{l_1}^2 + K_2{l_2}^2\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha{l_2}^2}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)}\dot{\theta} + \frac{(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)}\theta = 0 \qquad (2)$$

L'équation (2) représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur, elle a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{\alpha{l_2}^2}{2\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{(K_1{l_1}^2+K_2{l_2}^2)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1{l_1}^2+m_2{l_2}^2\right)}}$ est la pulsation propre du mouvement.

Application numérique :

$\beta = \frac{0.7(0.2)^2}{2\left(\frac{2(0.14)^2}{2}+0.03(0.18)^2+0.025(0.2)^2\right)}$, $\beta = 0.65 \quad s^{-1}$

$w_0 = \sqrt{\frac{(12(0.18)^2+15(0.2)^2)}{\left(\frac{2(0.14)^2}{2}+0.03(0.18)^2+0.025(0.2)^2\right)}}$, $w_0 = 6.77$ Rad/s

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

3. L'équation horaire du mouvement :

L'équation différentielle (2) de ce système, dans le régime pseudo périodique, accepte une solution sinusoïdale de la forme suivante :

$$\theta(t) = A_0e^{-\beta t}\cos(wt - \varphi)$$

On détermine les valeurs de A_0 et φ à partir des condition initiales.

On a : $\dot{\theta}(t) = -\beta.A_0e^{-\beta}\ \cos(wt - \varphi) - wA_0e^{-\beta t}\sin(wt - \varphi)$

$$\dot{\theta}(t) = -\beta.\theta(t) - wA_0e^{-\beta t}\sin(wt - \varphi)$$

À $t = 0$:

$$\theta(t=0) = A_0\cos(-\varphi) = A_0\cos(\varphi) = \theta_0 = 0.1 \qquad (3)$$

$$\dot{\theta}(t=0) = -\beta.\theta_0 - wA_0\sin(-\varphi) = -\beta.\theta_0 + wA_0\sin(\varphi) = 0 \qquad (4)$$

On remplace l'équation (3) dans l'équation (4) :

$-\beta.A_0\cos(\varphi) + wA_0\sin(\varphi) = 0$, donc $\beta.A_0\cos(\varphi) = wA_0\sin(\varphi)$

$tg(\varphi) = \frac{\beta}{w}$, ce qui donne $\varphi = actg\left(\frac{\beta}{w}\right)$

A partir de l'équation (3) on a : $A_0 = \frac{\theta_0}{\cos(\varphi)}$

On calcule la valeur de la pseudo pulsation, on a :

$$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Application numérique :

$w = \sqrt{6.77^2 - 0.65^2}$) , $w = 6.738$ Rad/s

$\varphi = actg\left(\frac{0.65}{6.738}\right)$, $\varphi = 0.096$ Rad

$A_0 = \frac{0.1}{\cos(0.096)}$, $A_0 = 0.1$ Rad

L'équation horaire finale est:

$$\theta(t) = 0.1e^{-0.65}\ \cos(6.738t - 0.096) \text{ Rad}$$

Exercice (8) :

Deux cylindres homogènes de masses M_1, M_2 respectivement et de rayons R_1, R_2, tournent librement autour d'un axe horizontale passant par leurs centre O. une tige de longueur l, et de masses négligeable est rigidement liée au cylindre et porte à son extrémité une masse ponctuelle m (Voir figure 2.8).

Deux ressort K_1 et K_2 sont respectivement liés aux extrémités des deux cylindres. Le système peut effectuer des oscillations amortis de faibles amplitudes.

On donne : M_1=1 Kg, M_2=1.5 Kg, R_1=10 cm, R_2= 14 cm, K_1 = 15 N/m, K_2 = 20 N/m, l=18 cm, m= 70 g, α= 25.10^{-2}Kg/s.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle faible θ_0 =0.15 Rad et on le lâche sans vitesse initiale.

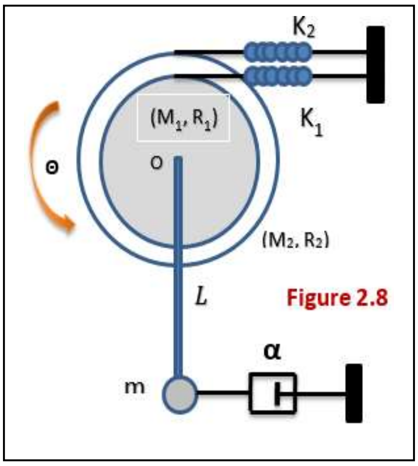


Figure 2.8

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner la nature du mouvement du système.
3. Donner l'équation horaire du mouvement.

Solution de l'exercice (8) :

On a : M_1=1 Kg, M_2=1.5 Kg, R_1=10 cm, R_2= 14 cm, K_1 = 15 N/m, K_2 = 20 N/m, l=18 cm, m= 70 g, α= 25.10^{-2} Kg/s.

1. L'équation différentielle du mouvement :

On a l'expression du lagrangien est :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle :

$$U(\theta) = U_{M1} + U_{M2} + U_m + U_{K1} + U_{K2}$$

$$U_{M1} = U_{M2} = 0 \text{ j}$$

$$U_m = mgh\ ,\ \ h = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$$

Où : $\cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, donc, $h = l\frac{\theta^2}{2}$, $U_m = mgl\frac{\theta^2}{2}$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2,\ x_1 = R_1\theta\ ,\ x_{01} = R_1\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(R_1\theta + R_1\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1{R_1}^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2,\ x_2 = R_2\theta\ ,\ x_{02} = R_2\theta_0$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(R_2\theta + R_2\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2{R_2}^2(\theta + \theta_0)^2$$

On obtient :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{R_1}^2(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2{R_2}^2(\theta + \theta_0)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

On utilise la condition d'équilibre pour trouver la forme quadratique de l'énergie potentielle :

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, ce qui donne $K_1{R_1}^2\theta_0 + K_2{R_2}^2\theta_0 = 0$, donc : $\theta_0 = 0$

On obtient l'expression de l'énergie potentielle suivante :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{R_1}^2\theta^2 + \frac{1}{2}K_2{R_2}^2\theta^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}\left(K_1{R_1}^2 + K_2{R_2}^2 + mgl\right)\theta^2$$

L'énergie cinétique :

$$T(\dot{\theta}) = T_{M1} + T_{M2} + T_m$$

$$T_{M1} = \frac{1}{2}j_{M1/O}\dot{\theta}^2,\ j_{M1/O} = \frac{M_1R_1^2}{2},\ T_{M1} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T_{M2} = \frac{1}{2}j_{M2/O}\dot{\theta}^2,\ j_{M2/O} = \frac{M_2R_2^2}{2},\ T_{M2} = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2R_2^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$T_m = \frac{1}{2}j_{m/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m/O} = ml^2,$ donc $T_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M_2R_2^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1R_1^2}{2} + \frac{M_2R_2^2}{2} + ml^2\right)\dot{\theta}^2$$

Donc l'expression du Lagrangien est :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1R_1^2}{2} + \frac{M_2R_2^2}{2} + ml^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(K_1{R_1}^2 + K_2{R_2}^2 + mgl\right)\theta^2$$

On utilise l'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M_1R_1^2}{2} + \frac{M_2R_2^2}{2} + ml^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -(K_1{R_1}^2 + K_2{R_2}^2 + mgl)\theta$$

L'énergie dissipative du système est :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = l\dot{\theta}$, donc :

$D = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$, $\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha l^2\dot{\theta}^2$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{M_1R_1^2}{2}+\frac{M_2R_2^2}{2}+ml^2\right)\ddot{\theta}+\alpha l^2\dot{\theta}^2+\left(K_1{R_1}^2+K_2{R_2}^2+mgl\right)\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha l^2}{\left(\frac{M_1R_1^2}{2}+\frac{M_2R_2^2}{2}+ml^2\right)}\dot{\theta}^2+\frac{\left(K_1{R_1}^2+K_2{R_2}^2+mgl\right)}{\left(\frac{M_1R_1^2}{2}+\frac{M_2R_2^2}{2}+ml^2\right)}\theta=0$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur libre amorti, elle a la forme générale : : $\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+w_0^2\theta=0$

$$\beta=\frac{\alpha l^2}{2\left(\frac{M_1R_1^2}{2}+\frac{M_2R_2^2}{2}+ml^2\right)}$$ est le facteur d'amortissement.

$$w_0=\sqrt{\frac{\left(K_1{R_1}^2+K_2{R_2}^2+mgl\right)}{\left(\frac{M_1R_1^2}{2}+\frac{M_2R_2^2}{2}+ml^2\right)}}$$ est la pulsation propre du mouvement.

Application numérique :

$$\beta=\frac{25.10^{-2}(0.18)^2}{2\left(\frac{1(0.1)^2}{2}+\frac{1.5(0.14)^2}{2}+0.07(0.18)^2\right)}\quad,\quad\beta=0.184\quad s^{-1}$$

$$w_0=\sqrt{\frac{\left(15(0.1)^2+20(0.14)^2+0.07(10)(0.18)\right)}{\left(\frac{1(0.1)^2}{2}+\frac{1.5(0.14)^2}{2}+0.07(0.18)^2\right)}}\quad,\quad w_0=2.08\ \text{Rad/s}$$

On a : $\beta<w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

3. L'équation horaire du mouvement :

L'équation différentielle de ce système, dans le régime pseudo périodique, accepte une solution sinusoïdale de la forme suivante :

$$\theta(t)=A_0e^{-\beta t}\cos(wt-\varphi)$$

On détermine les valeurs de A_0 et φ à partir des condition initiales.

On a : $\dot{\theta}(t)=-\beta.A_0e^{-\beta}\ \cos(wt-\varphi)-wA_0e^{-\beta t}\sin(wt-\varphi)$

$$\dot{\theta}(t)=-\beta.\theta(t)-wA_0e^{-\beta t}\sin(wt-\varphi)$$

À $t = 0$:

$$\theta(t=0) = A_0\cos(-\varphi) = A_0\cos(\varphi) = \theta_0 = 0.15 \qquad (2)$$

$$\dot{\theta}(t=0) = -\beta.\theta_0 - wA_0\sin(-\varphi) = -\beta.\theta_0 + wA_0\sin(\varphi) = 0 \qquad (3)$$

On remplace l'équation (2) dans l'équation (3) :

$-\beta.A_0\cos(\varphi) + wA_0\sin(\varphi) = 0$, donc $\beta.A_0\cos(\varphi) = wA_0\sin(\varphi)$

$tg(\varphi) = \frac{\beta}{w}$, ce qui donne $\varphi = actg\left(\frac{\beta}{w}\right)$

A partir de l'équation (2) on a : $A_0 = \dfrac{\theta_0}{\cos(\varphi)}$

On calcule la valeur de la pseudo pulsation, on a :

$$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Application numérique :

$w = \sqrt{2.08^2 - 0.184^2}$) , $w = 2.072$ Rad/s

$\varphi = actg\left(\frac{0.184}{2.072}\right)$, $\varphi = 0.088$ Rad

$A_0 = \dfrac{0.15}{\cos(0.088)}$, $A_0 = 0.15$ Rad

L'équation horaire finale est:

$$\theta(t) = 0.15e^{-0.184t}\cos(2.072t - 0.088) \quad \text{Rad}$$

<u>Exercice (9) :</u>

Soit le système mécanique de la figure 2.9. Le cylindre homogène de masse M et de rayon R peut tourner librement autour d'un axe horizontale passant par son centre O, et subit des frottements visqueux de constante α.

Deux tiges de masses négligeables et de longueurs l_1, l_2 sont rigidement liées aux cylindre, et portent à leurs extrémités libres deux masses ponctuelle m_1 et m_2 respectivement.

Deux ressort K_1 et K_2 sont liés respectivement à la masse m_1 et à l'extrémité du cylindre. Le système peut effectuer des oscillations amortis de faibles amplitudes.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle faible θ_0 et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner l'équation horaire du mouvement.
3. Donner le circuit électrique équivalent à ce système mécanique dans l'analogie force-tension.

On donne : M= 1.5 Kg, R= 10 cm, m_1 = 50 g, m_2 = 80 g, l_1 = 15 cm, l_2 = 17 cm, K_1 = 10 N/m, K_2 = 16 N/m,

α = 53.4.10^{-2} Kg/s.

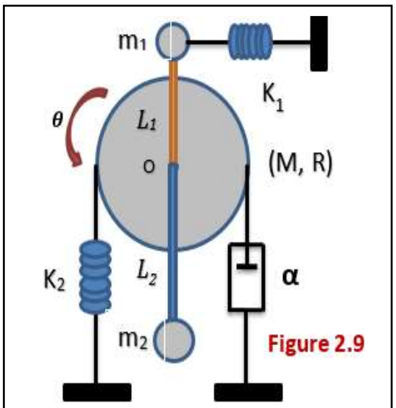


Figure 2.9

Solution de l'exercice (9):

On a : M= 1.5 Kg, R= 10 cm, m_1 = 50 g, m_2 = 80 g, l_1 = 15 cm, l_2 = 17 cm, K_1 = 10 N/m, K_2 = 16 N/m, α = 53.4.10^{-2} Kg/s.

1. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)+\frac{dD}{d\dot{\theta}}-\frac{dL}{d\theta}=0 \qquad (1)$$

Le lagrangien à l'expression :

$$L=T-U$$

L'énergie potentielle :

$$U(\theta)=U_M+U_{m1}+U_{m2}+U_{K1}+U_{K2}$$

$$U_M=0\text{ j}$$

$$U_{m1}=-m_1gh_1\ ,\ h_1=l_1-l_1cos\theta=l_1(1-cos\theta)$$

Où : $cos\theta\approx\frac{1-\theta^2}{2}$, donc, $h_1=l_1\frac{\theta^2}{2}$, $U_{m1}=-m_1gl_1\frac{\theta^2}{2}$

$$U_{m2}=+m_2gh_2\ ,\ h_2=l_2-l_2cos\theta=l_2(1-cos\theta)$$

$$h_2=l_2\frac{\theta^2}{2},\ \ U_{m2}=m_2gl_2\frac{\theta^2}{2}$$

$$U_{K1}=\frac{1}{2}K_1(x_1+x_{01})^2,\ x_1=l_1\theta\ ,\ x_{01}=l_1\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(l_1\theta + l_1\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2,\ x_2 = R\theta\ ,\ x_{01} = R\theta_0$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2R^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1{l_1}^2(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2R^2(\theta + \theta_0)^2 - m_1gl_1\frac{\theta^2}{2} + m_2gl_2\frac{\theta^2}{2}$$

A l'équilibre, on a :

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, ce qui donne : $\theta_0 = 0$

On obtient la forme quadratique de l'énergie potentielle suivante :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}\left(K_1{l_1}^2 + K_2R^2 - m_1gl_1 + m_2gl_2\right)\theta^2$$

L'énergie cinétique :

$$T(\dot{\theta}) = T_M + T_{m1} + T_{m2}$$

$$T_M = \frac{1}{2}j_{M/O}\dot{\theta}^2,\ j_{M/O} = \frac{MR^2}{2},\ T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$$

$$T_{m1} = \frac{1}{2}j_{m1/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m1/O} = m_1l_1^2\ ,\ T_{m1} = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}^2$$

$$T_{m2} = \frac{1}{2}j_{m2/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m2/O} = m_2l_2^2\ ,\ T_{m2} = \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}^2$$

$$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1l_1^2 + m_2l_2^2\right)\dot{\theta}^2$$

Le Lagrangien L :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1l_1^2 + m_2l_2^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(K_1{l_1}^2 + K_2R^2 - m_1gl_1 + m_2gl_2\right)\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2} + m_1l_1^2 + m_2l_2^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -(K_1{l_1}^2 + K_2R^2 - m_1gl_1 + m_2gl_2)\theta$$

L'énergie dissipative du système est :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2\ ,\ v = R\dot{\theta}\ $, donc :

$D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$, $\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2\right)\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + (K_1 {l_1}^2 + K_2R^2 - m_1gl_1 + m_2gl_2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha R^2}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)}\dot{\theta} + \frac{(K_1{l_1}^2+K_2R^2-m_1gl_1+m_2gl_2)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)}\theta = 0$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur libre amorti, elle a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{\alpha R^2}{2\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{(K_1{l_1}^2+K_2R^2-m_1gl_1+m_2gl_2)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)}}$ est la pulsation propre du mouvement.

Application numérique :

$$\beta = \frac{53.4.10^{-2}(0.1)^2}{2\left(\frac{1.5(0.1)^2}{2}+(0.05)(0.15)^2+(0.08)(0.17)^2\right)} \quad , \quad \beta = 0.244 \quad s^{-1}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{(10(0.15)^2+16(0.1)^2-0.05(10)(0.15)+0.08(10)(0.17))}{\left(\frac{1.5(0.1)^2}{2}+(0.05)(0.15)^2+(0.08)(0.17)^2\right)}} \quad , \quad w_0 = 6.386 \text{ Rad/s}$$

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

2. L'équation horaire du mouvement :

$$\theta(t) = A_0e^{-\beta t}\cos(wt - \varphi)$$

On détermine les valeurs de A_0 et φ à partir des condition initiales.

On a : $\dot{\theta}(t) = -\beta.A_0e^{-\beta t}\cos(wt-\varphi) - wA_0e^{-\beta t}\sin(wt-\varphi)$

$$\dot{\theta}(t) = -\beta.\theta(t) - wA_0e^{-\beta t}\sin(wt-\varphi)$$

À $t = 0$:

$\theta(t=0) = A_0 \cos(-\varphi) = A_0 \cos(\varphi) = \theta_0$ (2)

$\dot{\theta}(t=0) = -\beta.\theta_0 - wA_0 \sin(-\varphi) = -\beta.\theta_0 + wA_0 \sin(\varphi) = 0$ (3)

On remplace l'équation (2) dans l'équation (3), on obtient les résultats suivants :

$\varphi = actg\left(\frac{\beta}{w}\right)$, $A_0 = \frac{\theta_0}{\cos(\varphi)}$

On calcule la valeur de la pseudo pulsation, on a :

$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2}$

Application numérique :

$w = \sqrt{6.386^2 - 0.244^2}$) , $w = 6.381$ Rad/s

$\varphi = actg\left(\frac{0.244}{6.381}\right)$, $\varphi = 0.038$ Rad

$A_0 = \frac{\theta_0}{\cos(0.038)}$, $A_0 = \theta_0$ Rad

L'équation horaire finale est:

$\theta(t) = \theta_0 e^{-0.244t} \cos(6.381t - 0.038)$ Rad

3. Le circuit électrique équivalent dans l'analogie force-courant :

L'équation différentielle du mouvement du système mécanique contient 3 termes, et donc le circuit électrique équivalent contient 3 éléments sont (R, L, C).

Analogie force-courant, donne une association en série des éléments électriques dans le circuit équivalent.

Par conséquence, le circuit électrique équivalent est un circuit (R, L, C) associé en série.

En appliquant la loi des nœuds, on a :

$\sum I_i = 0$, $I_R + I_L + I_C = 0$ (4).

À partir des expressions des tensions des trois éléments on a :

$U_R = R.I_R$, donne : $I_R = \frac{U_R}{R}$

$U_L = L.\frac{dI_L}{dt}$, donne : $I_L = \frac{1}{L}\int U_L dt$

$U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int I_C dt$, $I_C = C.\frac{dU_C}{dt}$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (4), on obtient :

$\frac{U_R}{R}+\frac{1}{L}\int U_L dt + C.\frac{dU_C}{dt}=0$, avec : $U_R = U_L = U_C = U$

On a : $\frac{U}{R}+\frac{1}{L}\int U dt + C.\frac{dU}{dt}=0$, $C.\frac{dU}{dt}+\frac{U}{R}+\frac{1}{L}\int U dt=0$ (5)

L'équation (5) représente l'équation intégro-différentielle du circuit électrique.

A partir de l'équation différentielle du système mécanique, on peut écrire l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)\frac{d\dot{\theta}}{dt}+\alpha R^2\dot{\theta}+\left(K_1{l_1}^2+K_2R^2-m_1gl_1+m_2gl_2\right)\int\dot{\theta}dt=0 \qquad (6)$$

A partir de ces deux équations intégro-différentielles des deux systèmes électrique et mécanique, on détermine les valeurs du tableau d'analogie force-courant :

Système mécanique	Système électrique
$\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2$	C
αR^2	$\frac{1}{R}$
$K_1{l_1}^2+K_2R^2-m_1gl_1+m_2gl_2$	$\frac{1}{L}$
$\dot{\theta}$	U

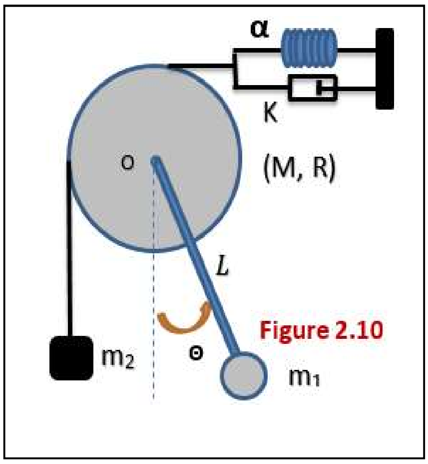
$$\beta_{mécanique}=\frac{\alpha R^2}{2\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)} \quad , \quad \beta_{électrique}=\frac{\frac{1}{R}}{2C}=\frac{1}{2RC}$$

$$w_{0\ mécanique}=\sqrt{\frac{\left(K_1{l_1}^2+K_2R^2-m_1gl_1+m_2gl_2\right)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l_1^2+m_2l_2^2\right)}} \quad , \quad w_{0\ électrique}=\sqrt{\frac{1/L}{C}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Exercice (10) :

Un cylindre homogène de masse M, et de rayon R peut tourner librement sur un axe horizontale passant par son centre O. Une tige de masse négligeable et de longueur l, est rigidement liée au cylindre et porte à son extrémité libre une masse ponctuelle m_1. Un fil inextensible est enroulé sur le cylindre et porte à son extrémité une masse ponctuelle m_2. (Voir la figure 2.10). Un ressort K et un amortisseur α sont liés à l'extrémité du cylindre. A l'équilibre la tige fait un angle θ_0 avec la verticale.

On écarte le système de sa position d'équilibre avec un angle faible, puis on le lâche sans vitesse initiale.



1. Calculer l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système.
2. En déduire l'expression du lagrangien L.
3. Trouver l'équation différentielle du mouvement du système.
4. Quel est le régime du mouvement dans ce cas (on prend $\theta_0 = 20^{\circ}$).

On donne : M = 2 Kg, R= 12 cm, l= 16 cm, m_1 = 60 g, m_2 = 70 g, K = 12 N/m, α = 5.10^{-2} Kg/s.

Solution de l'exercice (10) :

On a : M = 2 Kg, R= 12 cm, l= 16 cm, m_1 = 60 g, m_2 = 70 g, K = 12 N/m, α = 5.10^{-2} Kg/s.

1. Calcul de l'énergie potentielle du système:

$$U(\theta) = U_M + U_{m1} + U_{m2} + U_K$$

$$U_M = 0 \text{ j}$$

$$U_{m1} = +m_1 g h_1 \ , \ h_1 = l cos\theta_0 - l cos(\theta + \theta_0) = l(cos\theta_0 - cos(\theta + \theta_0))$$
$$U_{m1} = m_1 g l(cos\theta_0 - cos(\theta + \theta_0))$$

$$U_{m2} = -m_2 g h_2 \ , \ h_2 = y = R\theta \ , \quad U_{m2} = -m_2 g R\theta$$

$$U_K = \frac{1}{2}K(x_1 + x_{01})^2, \ x_1 = R\theta \ , \ x_{01} = R\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K(R\theta + R\theta_0)^2 = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2 + m_1 g l(cos\theta_0 - cos(\theta + \theta_0)) - m_2 g R\theta$$

On a : $cos(\theta + \theta_0) = cos\theta . cos\theta_0 - sin\theta . sin\theta_0$

Où : $cos\theta \approx \frac{1-\theta^2}{2}$, et $sin\theta \approx \theta$ pour des faibles angles

$$cos(\theta + \theta_0) = \left(\frac{1-\theta^2}{2}\right). cos\theta_0 - \theta . sin\theta_0 = cos\theta_0 - \frac{\theta^2}{2} cos\theta_0 - \theta . sin\theta_0$$

$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2 + m_1gl(cos\theta_0 - cos\theta_0 + \frac{\theta^2}{2}cos\theta_0 + \theta.sin\theta_0\ ) - m_2gR\theta$

$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2 + m_1gl\frac{\theta^2}{2}cos\theta_0 + m_1gl\theta.sin\theta_0 - m_2gR\theta$

A l'équilibre, on a :

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, ce qui donne :

$\frac{dU}{d\theta} = KR^2(\theta + \theta_0) + m_1gl\theta.cos\theta_0 + m_1gl.sin\theta_0 - m_2gR$

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = KR^2\theta_0 + m_1gl.sin\theta_0 - m_2gR = 0$

Après simplification de l'expression de l'énergie potentielle on obtient la forme quadratique suivante :

$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2\theta^2 + m_1gl\frac{\theta^2}{2}cos\theta_0 + cnst$

$U(\theta) = \frac{1}{2}(KR^2 + m_1glcos\theta_0)\theta^2 + +cnst$

L'énergie cinétique :

$T(\dot{\theta}) = T_M + T_{m1} + T_{m2}$

$T_M = \frac{1}{2}j_{M/O}\dot{\theta}^2,\ j_{M/O} = \frac{MR^2}{2},\ T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$

$T_{m1} = \frac{1}{2}j_{m1/O}\dot{\theta}^2,\ j_{m1/O} = m_1l^2\ ,\ T_{m1} = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}^2$

$T_{m2} = \frac{1}{2}m_2v^2\ ,\ v = R\dot{\theta}\ ,\ T_{m2} = \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1l^2 + m_2R^2\right)\dot{\theta}^2$

2. L'expression du lagrangien L :

$L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1l^2 + m_2R^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(KR^2 + m_1glcos\theta_0)\theta^2 + +cnst$

3. L'équation différentielle du mouvement du système :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)+\frac{dD}{d\dot{\theta}}-\frac{dL}{d\theta}=0 \qquad (1)$$

Nous calculons l'énergie dissipative D :

$D=\frac{1}{2}\alpha v^2$, $v=R\dot{\theta}$, donc : $D=\frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right)=\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l^2+m_2R^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta}=-(KR^2+m_1glcos\theta_0)\theta \quad , \quad \frac{dD}{d\dot{\theta}}=\alpha R^2\dot{\theta}$$

L'équation (1) donne :

$$\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l^2+m_2R^2\right)\ddot{\theta}+\alpha R^2\dot{\theta}+(KR^2+m_1glcos\theta_0)\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha R^2}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l^2+m_2R^2\right)}\dot{\theta}+\frac{(KR^2+m_1glcos\theta_0)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l^2+m_2R^2\right)}\theta=0$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur libre amorti, elle a la forme générale : : $\ddot{\theta}+2\beta\dot{\theta}+w_0^2\theta=0$

$\beta=\frac{\alpha R^2}{2\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l^2+m_2R^2\right)}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0=\sqrt{\frac{(KR^2+m_1glcos\theta_0)}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1l^2+m_2R^2\right)}}$ est la pulsation propre du mouvement.

Application numérique : On prend $\theta_0=20^\circ$, $cos\theta_0=0.94$

$$\beta=\frac{5.10^{-2}(0.12)^2}{2\left(\frac{2(0.12)^2}{2}+0.06(0.16)^2+0.07(0.12)^2\right)} \quad , \quad \beta=0.021 \quad s^{-1}$$

$$w_0=\sqrt{\frac{(12(0.12)^2+0.06(10)(0.16)(0.94)}{\left(\frac{2(0.12)^2}{2}+0.06(0.16)^2+0.07(0.12)^2\right)}} \quad , \quad w_0=3.94 \text{ Rad/s}$$

On a : $\beta<w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un vibratoire amorti).

Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté amortis forcés

III. Oscillateurs linéaires à un seul degré de liberté amortis forcés :

III.1. Rappel de cours :

III.1.1. Définitions : voici des définitions des mots concernant le titre de ce chapitre

Oscillateurs : des systèmes mécaniques qui effectuent un mouvement de va et vient autour d'une position d'équilibre stable, qui se répète périodiquement au cours du temps.

Linéaires : les forces (pour les mouvements de translation) et les moments (pour les mouvements de rotation) sont proportionnelle à leurs élongations.

$\vec{T} = -Kx\vec{i}$, $\vec{M} = -C\theta\vec{K}$

Un seul degré de liberté : le mouvement du système au cours du temps, peut être décrit par une seule coordonnée indépendante (une coordonnée généralisée).

Amorti : le mouvement du système s'effectue en présence des forces de frottement ($\vec{F}_{Frot} \neq \vec{0}$).

Forcés : le système est soumis à une force excitatrice extérieure, généralement a une forme sinusoïdale $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$. [13, 14, 15].

III.1.2. Formalisme de Lagrange : $L = T - U$

T : Energie cinétique du système.

U : Energie potentielle du système.

III.1.3. Equation de Lagrange : l'équation de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé à un degré de liberté a la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = F(t)$ [16].pour un mouvement de translation, et la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = M(F(t))$ dans le cas d'un mouvement de rotation, où q est la coordonnée généralisée. $M(F(t))$ est le moment de la force $F(t)$.

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$ est l'énergie dissipative.

III.1.4. Equation différentielle du mouvement : l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur amorti forcé, a toujours la forme générale $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + w_0^2 q = A_0\cos(\Omega t)$

β est le facteur d'amortissement du système. [17].

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$, est la pulsation propre (fréquence angulaire) du mouvement oscillatoire du système

III.1.5. Equation horaire du mouvement dans le régime permanent :

L'équation différentielle de ce système dans le régime permanent accepte une solution sinusoïdale de la forme : $q(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$. [17, 18].

Avec :

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(w_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad , \ \varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2 - \Omega^2}\right)$$

III.1.6. Fréquence de résonnance du déplacement :

A la résonnance, l'amplitude de déplacement A est maximale, et la fréquence de résonnance est :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$$

III.1.7. Facteur de qualité du système :

A l'expression suivante $Q = \frac{w_0}{2\beta}$

III.2. Série des exercices corrigés :

Exercice (1) :

Soit le système mécanique (masse, ressort, amortisseur) représenté dans la figure 3.1. La masse M est soumise à une force excitatrice extérieure de forme sinusoïdale.

$F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.

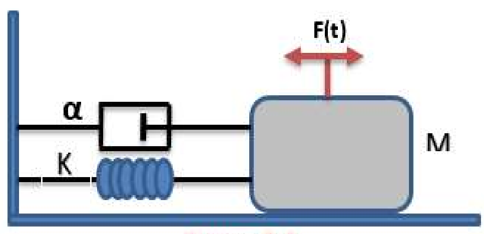


Figure 3.1

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner l'équation horaire dans le régime permanent.
3. Calculer le facteur de qualité Q.

On donne : M= 1.2 Kg, K= 30 N/m, α =1.2 Kg/s, Ω =10 Rad/s.

Solution de l'exercice (1) :

On a : M= 1.2 Kg, K= 30 N/m, α =1.2 Kg/s.

1. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé, est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right)+\frac{dD}{d\dot{q}}-\frac{dL}{dq}=F(t) \qquad (1)$$

où $q = x$, $\dot{q} = \dot{x}$ est la coordonnée généralisée.

On calcule le lagrangien L :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle :

$$U(x) = U_M + U_K$$

$U_M = 0$ j, pas de déplacement vertical.

$$U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$$

Donc, on a :

$$U(x) = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$$

A l'équilibre on a : $\frac{dU}{dx}_{x=0} = 0$

$$\frac{dU}{dx} = K(x + x_0),\ \frac{dU}{dx}_{x=0} = Kx_0 = 0,\ x_0 = 0$$

La forme quadratique de l'énergie potentielle est :

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{x}) = T_M = \frac{1}{2}Mv^2,\ \ v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$L = T - U,\ L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

Est l'expression du lagrangien du système.

L'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = \dot{x}$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

La force excitatrice est : $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.

$\frac{dL}{d\dot{x}} = M\dot{x}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) = M\ddot{x}$, $\frac{dL}{dx} = -Kx$, $\frac{dD}{d\dot{x}} = \alpha\dot{x}$

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Kx = F_0\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = \frac{F_0}{M}\cos(\Omega t) \qquad (2)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur amorti forcé, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = A_0\cos(\Omega t)$

Donc : $2\beta = \frac{\alpha}{M}$, $\beta = \frac{\alpha}{2M}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ est la pulsation propre, et $A_0 = \frac{F_0}{M}$.

Application numérique :

$w_0 = \sqrt{\frac{30}{1.2}}$, $w_0 = 5$ Rad/s

$\beta = \frac{1.2}{2(1.2)}$, $\beta = 0.5 \ s^{-1}$

$A_0 = \frac{F_0}{1.2}$, $A_0 = 0.83F_0$

2. L'équation horaire dans le régime permanent :

L'équation différentielle de ce système dans le régime permanent accepte une solution sinusoïdale de la forme : $X(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$.

Avec :

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(w_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \ , \ \varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Application numérique : On prend Ω =10 Rad/s.

$$A = \frac{0.83F_0}{\sqrt{(5^2-10^2)^2+4(0.5)^2 10^2}} \quad , \quad A = 0.01F_0$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2(0.5)10}{5^2-10^2}\right) \quad , \quad \varphi = -0.132 \text{ Rad}$$

L'équation horaire seras : $X(t) = 0.01F_0\cos(10t + 0.132)$ m.

3. Le facteur de qualité du système Q :

On a : $Q = \frac{w_0}{2\beta}$

Application numérique :

$$Q = \frac{5}{2(0.5)} \quad , \quad Q = 5 \text{ Rad.}$$

Exercice (2) :

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R peut tourner sans glissement autour de l'axe passant perpendiculairement par son centre (O).

Une tige de longueur l de masse négligeable est rigidement liée au cylindre, porte à son extrémité libre une masse ponctuelle m.

Le cylindre subit des frottements visqueux de constante α. Un ressort vertical de constante de raideur K est relié au cylindre. Une force excitatrice extérieure sinusoïdale de forme $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ exerce sur la masse m. (Voir la figure 3.2).

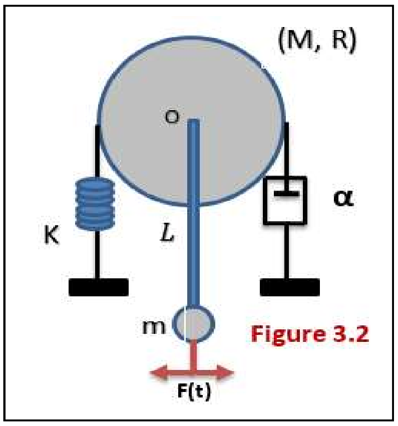


Figure 3.2

On donne : M= 1.5 Kg, R= 14 cm, K= 25 N/m, α= 3 N.s/m, m =110 g, l=20 cm,

$\Omega = 10$ Rad/s.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner l'équation horaire dans le régime permanent (on prend $\Omega = 10$ Rad/s).
3. Calculer la fréquence de résonance du déplacement.
4. Calculer le facteur de qualité Q.

Solution de l'exercice (2) :

On a : M= 1.5 Kg, R= 14 cm, K= 25 N/m, α= 3 N.s/m, m =110 g, l=20 cm, $\Omega = 10$ Rad/s

1. L'équation différentielle du mouvement :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right)+\frac{dD}{d\dot{q}}-\frac{dL}{dq}=M(F(t)) \qquad (1)$$

où $q=\theta$, $\dot{q}=\dot{\theta}$ est la coordonnée généralisée.

$M(F(t))$ est le moment de la force excitatrice F (mouvement de rotation)

Nous calculons le lagrangien du système L :

$$L=T-U$$

L'énergie potentielle :

$$U(\theta)=U_M+U_m+U_K$$

$U_M=0$ j, pas de déplacement vertical.

$$U_m=mgh$$

$$h=l-l\cos\theta \quad , \quad h=l[1-\cos\theta]$$

Pour les faibles angles d'oscillation, on a les approximations suivantes : $\cos\theta\approx\frac{1-\theta^2}{2}$, et $\sin\theta\approx\theta$

$$h=l\frac{\theta^2}{2} \quad , \quad U_m=mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$U_K=\frac{1}{2}K(x+x_0)^2, \qquad x=R\theta \ , \ \ x_0=R\theta_0$$

$$U_K=\frac{1}{2}K(R\theta+R\theta_0)^2 \quad , \quad U_K=\frac{1}{2}KR^2(\theta+\theta_0)^2$$

Donc, on a :

$$U(\theta)=\frac{1}{2}KR^2(\theta+\theta_0)^2+mgl\frac{\theta^2}{2}$$

A l'équilibre on a : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0}=0$, on obtient $\theta_0=0$

La forme quadratique de l'énergie potentielle est :

$$U(\theta)=\frac{1}{2}KR^2\theta^2+mgl\frac{\theta^2}{2} \quad , \qquad U(\theta)=\frac{1}{2}(KR^2+mgl)\theta^2$$

L'énergie cinétique du système :

$T(\dot{\theta}) = T_M + T_m$

$T_M = \frac{1}{2} j_{M/O}\dot{\theta}^2, \; j_{M/O} = \frac{MR^2}{2} \;, \quad T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$

$T_m = \frac{1}{2} j_{m/O}\dot{\theta}^2, \; j_{m/O} = ml^2 \;, \quad T_m = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + ml^2\right)\dot{\theta}^2$

L'expression du lagrangien :

$L = T - U, \; L = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + ml^2\right)\dot{\theta}^2 \; - \frac{1}{2}(KR^2 + mgl)\theta^2$

L'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2 \;, \; v = R\dot{\theta} \;$, donc :

$D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left[\frac{MR^2}{2} + ml^2\right]\ddot{\theta}\,, \quad \frac{dL}{d\theta} = -(KR^2 + mgl)\theta \;,$

$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$

On obtient l'équation suivante :

$\left[\frac{MR^2}{2} + ml^2\right]\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + (KR^2 + mgl)\theta = lF_0\cos(\Omega t)$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha R^2}{\left[\frac{MR^2}{2}+ml^2\right]}\dot{\theta} + \frac{KR^2+mgl}{\left[\frac{MR^2}{2}+ml^2\right]}\theta = \frac{lF_0}{\left[\frac{MR^2}{2}+ml^2\right]}\cos(\Omega t) \qquad (2)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur amorti forcé, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

$\beta = \frac{\alpha R^2}{2\left[\frac{MR^2}{2}+ml^2\right]}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{KR^2+mgl}{\left[\frac{MR^2}{2}+ml^2\right]}}$ est la pulsation propre. $A_0 = \frac{lF_0}{\left[\frac{MR^2}{2}+ml^2\right]}$

Application numérique :

$$\beta = \frac{3(0.14)^2}{2\left[\frac{1.5(0.14)^2}{2}+(0.11)(0.2)^2\right]} \quad , \quad \beta = 1.54\ s^{-1}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{25(0.14)^2+0.11(10)(0.2)}{\left[\frac{1.5(0.14)^2}{2}+(0.11)(0.2)^2\right]}} \quad , \quad w_0 = 2.55 \text{ Rad/s}$$

$$A_0 = \frac{0.2F_0}{\left[\frac{1.5(0.14)^2}{2}+(0.11)(0.2)^2\right]} \quad , \quad A_0 = 1.83F_0$$

2. L'équation horaire dans le régime permanent :

L'équation différentielle de ce système dans le régime permanent accepte une solution sinusoïdale de la forme : $\theta(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$.

Avec :

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}} \quad , \quad \varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2-\Omega^2}\right)$$

Application numérique : On a : Ω =10 Rad/s.

$$A = \frac{1.83F_0}{\sqrt{(2.55^2-1\ \ ^2)^2+4(1.54)^2 10^2}} \quad , \quad A = 1.8.10^{-4}F_0$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2(1.54)10}{2.55^2-10^2}\right) \quad , \quad \varphi = -0.32 \text{ Rad}$$

Et l'équation horaire est : $\theta(t) = 1.8.10^{-4}F_0\cos(10t + 0.32)$ Rad.

3. Calcul de la fréquence de résonance du déplacement :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$$

Application numérique :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{(2.55)^2 - 2(1.54)^2} \quad , \quad \Omega_{rés} = 1.326 \text{ Rad/s}$$

4. Calcul du facteur de qualité du système Q :

L'expression du facteur de qualité du système est :

$Q = \frac{w_0}{2\beta}$

Application numérique :

$Q = \frac{2.55}{2(1.54)}$, $Q = 0.83$ Rad.

Exercice (3) :

Une tige de longueur $3l$ et de masse négligeable peut osciller sans frottement autour d'un axe passant par le point (O) (Voir la figure 3.3). la tige porte deux masses ponctuelles m_1, m_2 à ses deux extrémités. Deux ressort K_1 et K_2 sont respectivement liés au deux masses m_1, m_2.

La masse m_1 subit des frottement visqueux de constante α. Une force excitatrice extérieure de forme sinusoïdale

$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ exerce sur la masse m_2.

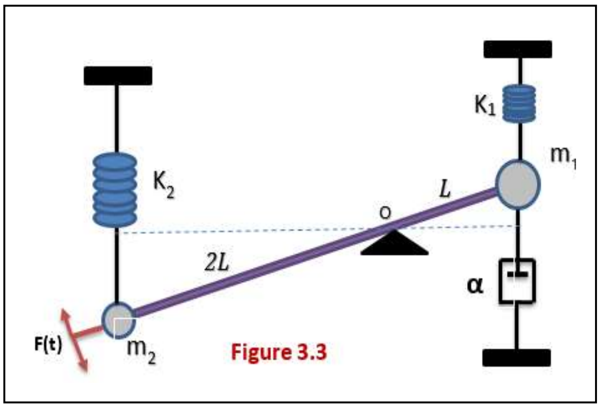


Figure 3.3

On donne : m_1=70 g, m_2=40 g, α= 1.5 Kg/s,

l = 7 cm, K_1= 10 N/m, K_2=14 N/m.

1. Cas de $F = 0$:

   1.1. Trouver la position d'équilibre du système.

2. Pour $F \neq 0$:

   2.1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
   2.2. Donner l'équation horaire dans le régime permanent.
   2.3. Donner la fréquence de résonance du déplacement.
   2.4. Donner la valeur de F_0 pour que l'amplitude maximale du déplacement, soit égale à $\frac{\pi}{10}$ Rad.

Solution de l'exercice (3) :

On a : m_1=70 g, m_2=40 g, α= 1.5 Kg/s, l = 7 cm, K_1= 10 N/m, K_2=14 N/m.

1. Cas de $F = 0$: (système libre)

1.1. La position d'équilibre du système :

On calcule l'énergie potentielle du système.

A l'équilibre : : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$

$U(\theta) = U_{m1} + U_{m2} + U_{K1} + U_{K2}$,

$U_{m1} = m_1 g h_1$, $h_1 = l.sin\theta \approx l\theta$, $U_{m1} = m_1 g l\theta$

$U_{m2} = -m_2 g h_2$, $h_2 = 2l.sin\theta \approx 2l\theta$, $U_{m2} = -2m_2 g l\theta$

$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2,\ x_1 = l\theta\ ,\ x_{01} = l\theta_0$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(l\theta + l\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1 l^2(\theta + \theta_0)^2$$

$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2,\ x_2 = 2l\theta\ ,\ x_{02} = 2l\theta_0$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(2l\theta + 2l\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2 4l^2(\theta + \theta_0)^2$$

$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1 l^2(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2 4l^2(\theta + \theta_0)^2 + m_1 g l\theta - 2m_2 g l\theta$

$\frac{dU}{d\theta} = K_1 l^2(\theta + \theta_0) + K_2 4l^2(\theta + \theta_0) + m_1 g l - 2m_2 g l$

$$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = K_1 l^2\theta_0 + K_2 4l^2\theta_0 + m_1 g l - 2m_2 g l = 0$$

$\theta_0 = \frac{2m_2 g l - m_1 g l}{K_1 l^2 + K_2 4l^2}$, $\theta_0 = \frac{(2m_2 - m_1)g}{(K_1 + 4K_2)l}$, est la position d'équilibre du système.

2. Pour $F \neq 0$: (système forcé)

2.1. L'équation différentielle du mouvement :

On détermine la forme quadratique de l'énergie potentielle :

Nous avons : $U(\theta) = \frac{1}{2}K_1 l^2(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2 4l^2(\theta + \theta_0)^2 + m_1 g l\theta - 2m_2 g l\theta$

Après la simplification de cette expression, on obtient :

$U(\theta) = \frac{1}{2}(K_1 l^2 + 4K_2 l^2)\theta^2 + cnst$

L'énergie cinétique du système :

$T(\dot{\theta}) = T_{m1} + T_{m2} = \frac{1}{2}j_{m1/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}j_{m2/O}\dot{\theta}^2$

$j_{m1/O} = m_1 l^2$, $j_{m2/O} = m_1(2l)^2$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 4 l^2 \dot{\theta}^2$, $T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}(m_1 l^2 + 4 m_2 l^2)\dot{\theta}^2$

L'expression du Lagrangien du système L :

$L = T - U$

$L = \frac{1}{2}(m_1 l^2 + 4 m_2 l^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(K_1 l^2 + 4 K_2 l^2)\theta^2 + cnst$

L'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = l\dot{\theta}$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

L'équation de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}} - \frac{dL}{dq} = M(F(t)) \qquad (1)$$

où $q = \theta$, $\dot{q} = \dot{\theta}$ est la coordonnée généralisée.

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = M(F(t))$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = (m_1 l^2 + 4 m_2 l^2)\ddot{\theta} \ , \quad \frac{dL}{d\theta} = -(K_1 l^2 + 4 K_2 l^2)\theta \ , \quad \frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha l^2 \dot{\theta}$$

$M(F(t)) = 2 l F_0 \cos(\Omega t)$

On obtient l'équation suivante :

$$(m_1 l^2 + 4 m_2 l^2)\ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + (K_1 l^2 + 4 K_2 l^2)\theta = 2 l F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m_1 + 4 m_2)}\dot{\theta} + \frac{(K_1 + 4K_2)}{(m_1 + 4 m_2)}\theta = \frac{2F_0}{(m_1 + 4 m_2) l}\cos(\Omega t)$$

Cette équation représente l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur amorti forcé, on peut l'écrire sous la forme générale : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

$\beta = \frac{\alpha}{2(m_1 + 4 m_2)}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{(K_1 + 4K_2)}{(m_1 + 4 m_2)}}$ est la pulsation propre. $\quad A_0 = \frac{2F_0}{(m_1 + 4 m_2) l}$

Application numérique :

$$\beta = \frac{1.5}{2(0.07+4(0.04))} \quad , \quad \beta = 3.26\ s^{-1}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{(10+4(14))}{(0.07+4(0.04))}} \quad , \quad w_0 = 16.94\ \text{Rad/s}$$

$$A_0 = \frac{2F_0}{(0.07+4(0.04))(0.07)} \quad , \quad A_0 = 124.2F_0$$

2.2. L'équation horaire du mouvement :

L'équation différentielle de ce système dans le régime permanent accepte une solution sinusoïdale de la forme : $\theta(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$.

Avec :

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}} \quad , \quad \varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2-\Omega^2}\right)$$

Application numérique : On a : Ω =20 Rad/s.

$$A = \frac{124.2F_0}{\sqrt{(16.94^2-20^2)^2+4(3.26)^2 20^2}} \quad , \quad A = 0.72F_0$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2(3.26)20}{16.94^2-20^2}\right) \quad , \quad \varphi = -0.86\ \text{Rad}$$

Et l'équation horaire est : $\theta(t) = 0.72F_0\cos(20t + 0.86)$ Rad.

2.3. La fréquence de résonnance du déplacement :

On a, l'expression de la fréquence de résonnance du déplacement est :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$$

Application numérique :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{16.94^2 - 2(3.26)^2} \quad , \quad \Omega_{rés} = 16.3\ \text{Rad/s}$$

2.4. Calcul de la valeur de F_0 pour une amplitude maximale du déplacement $A_{Max} = \frac{\pi}{10}$ Rad :

A la résonnance du déplacement, l'expression de l'amplitude maximale du déplacement est :

$$A_{Max} = \frac{A_0}{2\beta\sqrt{w_0^2-\beta^2}}$$

Application numérique :

$$A_{Max} = \frac{124.2F_0}{2(3.26)\sqrt{16.94^2-3.26^2}} = \frac{\pi}{10} \quad , \qquad F_0 = 0.274 \text{ N}$$

Exercice (4) :

Soit le circuit électrique (R, L, C) associé en série avec un générateur de tension alternative $E(t) = E_0\cos(\Omega t)$ (Voir la figure 3.4).

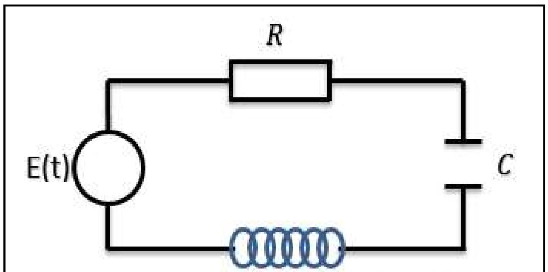


Figure 3.4

On donne : R= 200 Ω, L=16 mh, C= 0.2 μF, Ω =20.10^3 Rad/s.

1. Etablir l'équation différentielle du système.
2. Donner l'équation horaire dans le régime permanent.
3. Est-ce que le phénomène de résonance aura lieu.
4. Calculer la fréquence de résonance.
5. Calculer le facteur de qualité du système Q.

Solution de l'exercice (4) :

On a : R= 200 Ω, L=16 mh, C= 0.2 μF, $E(t) = E_0\cos(\Omega t)$, Ω =20.10^3 Rad/s.

1. l'équation différentielle du système :

En appliquant la loi des mailles, on obtient :

$$\sum U_i = 0, \quad U_R + U_l + U_c - E = 0, \quad Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = E_0\cos(\Omega t)$$

On a : $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, donc $R\dot{q} + L\frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{q}{c} = E_0\cos(\Omega t)$, $R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{c} = E_0\cos(\Omega t)$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}\cos(\Omega t) \qquad (1)$$

Cette équation différentielle du deuxième ordre, représente l'équation différentielle de ce système électrique, elle a la forme générale : $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + w_0^2 q = A_0\cos(\Omega t)$

Donc :

$2\beta = \frac{R}{L}$, $\beta = \frac{R}{2L}$ est le facteur d'amortissement.

$W_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $W_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre.

$A_0 = \frac{E_0}{L}$

Application numérique :

$\beta = \frac{200}{2(0.016)}$, $\beta = 6250\ s^{-1}$

$W_0 = \frac{1}{\sqrt{0.016(0.2\times10^{-6})}}$, $W_0 = 17.68 \times 10^3$ Rad/s.

$A_0 = \frac{E_0}{0.016}$, $A_0 = 62.5E_0$

2. L'équation horaire en régime permanent :

La solution de l'équation différentielle en régime permanent est une fonction sinusoïdale de la forme :

$q(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$

Avec :

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}} \ , \ \varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2-\Omega^2}\right)$$

Application numérique : On a : $\Omega = 20\times 10^3$ Rad/s.

$$A = \frac{62.5E_0}{\sqrt{\left((17.68\times10^3)^2-(20\times10^3)^2\right)^2+4(6250)^2(20\times10^3)^2}} \quad , \quad A = 0.687 \times 10^{-6}E_0$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2(6250)20\times10^3}{(17.68\times10^3)^2-(20\times10^3)^2}\right) \quad , \quad \varphi = -1.23 \text{ Rad}$$

L'équation horaire est : $q(t) = 0.687 \times 10^{-6}E_0\cos(20 \times 10^3 t + 1.23)$ Rad.

3. Le phénomène de résonnance :

A partir de l'expression de la fréquence de résonnance $\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$

Il y'a une résonnance du déplacement si : $\Omega_{rés} > 0$, $w_0^2 - 2\beta^2 > 0$

Donc la condition de résonnance est $\beta < \frac{w_0}{\sqrt{2}}$

Application numérique :

On a : $\beta = 6250 \ s^{-1}$, $\frac{w_0}{\sqrt{2}} = \frac{17.68\times 10^3}{\sqrt{2}} = 12.5 \times 10^3$

La condition est vérifiée et le phénomène de résonnance aura lieu.

4. Calcul de la fréquence de résonnance :

La fréquence de résonnance du déplacement est :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$$

Application numérique :

$\Omega_{rés} = \sqrt{(17.68 \times 10^3)^2 - 2(6250)^2}$, $\Omega_{rés} = 15.31 \times 10^3$ Rad/s

5. Le facteur de qualité du système Q :

L'expression du facteur de qualité est :

$$Q = \frac{w_0}{2\beta}$$

Application numérique :

$Q = \frac{17.68\times 10^3}{2(6250)}$, $Q = 1.414$ Rad.

Exercice (5) :

Une tige verticale de longueur l et de masse négligeable porte une masse ponctuelle m à son extrémité libre, peut osciller sans frottement autour d'un axe passant par l'autre extrémité (O). (Figure 3.5)

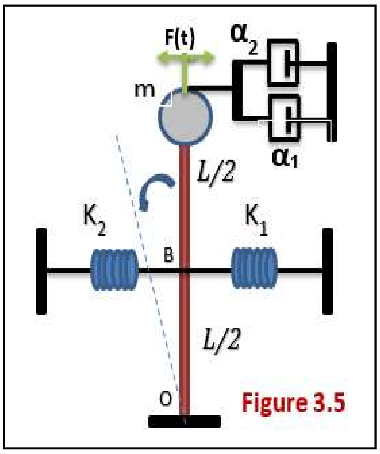


Figure 3.5

deux ressort horizontales K_1 et K_2 sont liés au point B, avec : $OB = \frac{l}{2}$. La masse m subit des frottements visqueux de constantes α_1 et α_2. Cette masse est soumise à une force excitatrice extérieure sinusoïdale de forme :

$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

On donne : l = 18 cm, m =100 g, K_1= 15 N/m, K_2 = 22 N/m, α_1= 0.12 Kg/s, α_2 =0.15 Kg/s.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Calculer le facteur de qualité du système Q.
3. Donner l'équation horaire dans le régime permanent.
4. Calculer la fréquence de résonance du déplacement.

5. Quelle est la valeur de F_0 pour que l'amplitude maximale de déplacement soit égale à $\frac{\pi}{9}$ Rad.

Solution de l'exercice (5) :

On a : l = 18 cm, m =100 g, K1= 15 N/m, K2 = 22 N/m, α_1= 0.12 Kg/s, α_2 =0.15 Kg/s.

1. l'équation différentielle du système :

On calcule le Lagrangien du système :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_m + U_{K1} + U_{K1}$$

$$U_m = -mgh \ \ , \ h = l - lcos\theta \approx l\frac{\theta^2}{2} \ , \ \ U_m = -mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2, \ x_1 = \frac{l}{2}\theta \ , \ x_{01} = \frac{l}{2}\theta_0$$

$$U_{K1} = \frac{1}{2}K_1(\frac{l}{2}\theta + \frac{l}{2}\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{4}(\theta + \theta_0)^2$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2, \ x_2 = \frac{l}{2}\theta \ , \ x_{02} = \frac{l}{2}\theta_0$$

$$U_{K2} = \frac{1}{2}K_2(\frac{l}{2}\theta + \frac{l}{2}\theta_0)^2 = \frac{1}{2}K_2\frac{l^2}{4}(\theta + \theta_0)^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{4}(\theta + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}K_2\frac{l^2}{4}(\theta + \theta_0)^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$$

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$, ce qui donne $\theta_0 = 0$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K_1\frac{l^2}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}K_2\frac{l^2}{4}\theta^2 - mgl\frac{\theta^2}{2} \ ,$$

$U(\theta) = \frac{1}{2}\left(K_1\frac{l^2}{4} + K_2\frac{l^2}{4} - mgl\right)\theta^2$, est la forme quadratique de l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{\theta}) = T_m$$

$$T_m = \frac{1}{2}j_{m/O}\dot{\theta}^2, \ \ j_{m/O} = ml^2 \ \ \ , \ T_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(K_1\frac{l^2}{4} + K_2\frac{l^2}{4} - mgl\right)\theta^2$$

L'énergie dissipative du système :

$$D = D_1 + D_2$$

$D_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 v_1^2$, $v_1 = l\dot{\theta}$, donc : $D_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 l^2\dot{\theta}^2$

$D_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 v_2^2$, $v_2 = l\dot{\theta}$, donc : $D_2 = \frac{1}{2}\alpha_2 l^2\dot{\theta}^2$

$$D = \frac{1}{2}\alpha_1 l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 l^2\dot{\theta}^2$$

$$D = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)l^2\dot{\theta}^2$$

L'équation de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = M(F(t)) \qquad (1)$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$, $\frac{dD}{d\dot{\theta}} = -(K_1\frac{l^2}{4} + K_2\frac{l^2}{4} - mgl)\theta$, $\frac{dL}{d\theta} = (\alpha_1 + \alpha_2)l^2\dot{\theta}$

$$M\big(F(t)\big) = lF_0\cos(\Omega t)$$

L'équation (1) donne :

$$ml^2\ddot{\theta} + (\alpha_1 + \alpha_2)l^2\dot{\theta} + (K_1\frac{l^2}{4} + K_2\frac{l^2}{4} - mgl)\theta = lF_0\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(\alpha_1+\alpha_2)l^2}{ml^2}\,\dot{\theta} + \frac{(K_1\frac{l^2}{4}+K_2\frac{l^2}{4}-mgl)}{ml^2}\theta = \frac{lF_0}{ml^2}\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{m}\,\dot{\theta} + \frac{(K_1+K_2)l-4mg}{4ml}\theta = \frac{F_0}{ml}\cos(\Omega t) \qquad (2)$$

L'équation (2) représente l'équation différentielle du mouvement du système, qui a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

$\beta = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2m}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{(K_1+K_2)l-4mg}{4ml}}$ est la pulsation propre du mouvement.

$$A_0 = \frac{F_0}{ml}$$

Application numérique :

$\beta = \frac{(0.12+0.15)}{2(0.1)}$, $\beta = 1.35\ s^{-1}$

$w_0 = \sqrt{\frac{(15+22)(0.18)-4(0.1)10}{4(0.1)(0.18)}}$, $w_0 = 6.08$ Rad/s.

$A_0 = \frac{F_0}{0.1(0.18)}$, $A_0 = 55.5F_0$

2. Le facteur de qualité du système Q :

L'expression du facteur de qualité est :

$$Q = \frac{w_0}{2\beta}$$

Application numérique :

$Q = \frac{6.08}{2(1.35)}$, $Q = 2.25$ Rad.

3. L'équation horaire du mouvement dans le régime permanent :

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$$

Avec :

$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}$, $\varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2-\Omega^2}\right)$

Application numérique : On a : $\Omega = 10$ Rad/s.

$A = \frac{55.5F_0}{\sqrt{(6.08^2-1\ \ ^2)^2+4(1.35)^2 10^2}}$, $A = 0.809F_0$

$\varphi = arctg\left(\frac{2(1.35)10}{6.08^2-10^2}\right)$, $\varphi = -0.40$ Rad

L'équation horaire est : $\theta(t) = 0.809F_0\cos(10t + 0.4)$ Rad.

4. La fréquence de résonnance :

La fréquence de résonnance du déplacement est :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$$

Application numérique :

$\Omega_{rés} = \sqrt{(6.08)^2 - 2(1.35)^2}$, $\Omega_{rés} = 5.77$ Rad/s

5. Calcul de la valeur de F_0 pour une amplitude maximale de déplacement égale $\frac{\pi}{9}$ Rad :

A la résonnance du déplacement, l'expression de l'amplitude maximale du déplacement est :

$$A_{Max} = \frac{A_0}{2\beta\sqrt{w_0^2 - \beta^2}}$$

Application numérique :

$$A_{Max} = \frac{55.5F_0}{2(1.35)\sqrt{6.08^2 - 1.35^2}} = \frac{\pi}{9} \quad , \qquad F_0 = 0.1 \text{ N}$$

Exercice (6) :

Soit le système mécanique représenté dans la figure 3.6. Le système peut osciller autour de l'axe horizontale passant par (O). La masse m_1 est soumise à une force sinusoïdale de la forme $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.

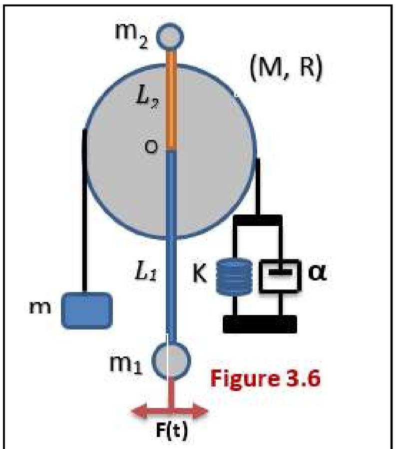


Figure 3.6

On donne : M= 2 Kg, R = 8 cm, m_1=100 g, $m_2 = 60\ g$, m=120 g, l_1 = 14 cm, l_2 = 10 cm, K=25 N/m, α = 0.7 Kg/s.

1. soit $F(t) = 0$:

1.1. Trouver la position d'équilibre du système.

1.2. Trouver l'équation différentielle du mouvement du système dans ce cas.

2. soit $F(t) \neq 0$:

2.1. Trouver la nouvelle équation différentielle du mouvement du système.

2.2. Calculer le facteur de qualité Q.

3.3. Donner l'équation horaire dans le régime permanent.

3.4. Calculer la fréquence de résonance.

3.5. Calculer l'amplitude maximale du déplacement pour F_0 =15 N.

Solution de l'exercice (6) :

On a : M= 2 Kg, R = 8 cm, m_1=100 g, $m_2 = 60\ g$, m=120 g, l_1 = 14 cm, l_2 = 10 cm, K=25 N/m2, α = 0.7 Kg/s.

1. soit $F(t) = 0$:

1.1. Détermination de la position d'équilibre du système :

On calcule l'énergie potentielle du système :

$$U(\theta) = U_M + U_m + U_{m1} + U_{m2} + U_K \ , \ \ U_M = 0 \text{ j}$$

$$U_m = -mgh, \ h = y = R\theta \ , \ U_m = -mgR\theta$$

$$U_{m1} = m_1gh_1 \ , \ h_1 = l_1 - l_1cos\theta = l_1(1 - cos\theta) \approx l_1\frac{\theta^2}{2} \ , \ U_{m1} = m_1gl_1\frac{\theta^2}{2}$$

$$U_{m2} = -m_2gh_2 \ , \ h_2 = l_2(1 - cos\theta) \approx l_2\frac{\theta^2}{2} \ , \ U_{m2} = -m_2gl_2\frac{\theta^2}{2}$$

$$U_K = \frac{1}{2}K(x + x_0)^2, \ x = R\theta \ , \ x_0 = R\theta_0 \ , \ U_K = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2$$

Donc :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}KR^2(\theta + \theta_0)^2 - mgR\theta \ + m_1gl_1\frac{\theta^2}{2} - m_2gl_2\frac{\theta^2}{2}$$

A l'équilibre : $\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = 0$

$$\frac{dU}{d\theta} = KR^2(\theta + \theta_0) - mgR + m_1gl_1\theta - m_2gl_2\theta$$

$\frac{dU}{d\theta}_{\theta=0} = KR^2\theta_0 - mgR = 0 \ , \ \ \theta_0 = \frac{mg}{KR}$ est la position d'équilibre du système.

1.2. L'équation différentielle du mouvement du système libre amorti :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre amorti est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}} - \frac{dL}{d\theta} = 0 \qquad (1)$$

Après la simplification de l'expression de l'énergie potentielle, on obtient la forme quadratique suivante :

$$U(\theta) = \frac{1}{2}(KR^2 + m_1gl_1 - m_2gl_2)\theta^2$$

L'expression de l'énergie cinétique :

$T(\dot{\theta}) = T_M + T_{m1} + T_{m2} + T_m$

$T_M = \frac{1}{2} j_{M/O} \dot{\theta}^2$, $j_{M/O} = \frac{MR^2}{2}$, donc $T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\dot{\theta}^2$

$T_{m1} = \frac{1}{2} j_{m1/O} \dot{\theta}^2$, $j_{m1/O} = m_1 l_1^2$, donc $T_{m1} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2$

$T_{m2} = \frac{1}{2} j_{m2/O} \dot{\theta}^2$, $j_{m2/O} = m_2 l_2^2$, donc $T_{m2} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2$

$T_m = \frac{1}{2} m v^2$, $v = R\dot{\theta}$, $T_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^{\,2}$

$T(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + mR^2\right)\dot{\theta}^2$

L'expression du lagrangien L :

$L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + mR^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(KR^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2)\theta^2$

On calcule l'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = R\dot{\theta}$, donc :

$D = \frac{1}{2}\alpha R^2 \dot{\theta}^2$

On utilise l'équation de Lagrange pour un oscillateur libre amorti, pour trouver l'équation différentielle du mouvement.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + mR^2\right)\ddot{\theta}$

$\frac{dL}{d\theta} = -(KR^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2)\theta$

$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = \alpha R^2 \dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha R^2}{\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + mR^2\right)}\dot{\theta} + \frac{KR^2 + m_1 g l_1 - m_2 g l_2}{\left(\frac{MR^2}{2} + m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + mR^2\right)}\theta = 0 \qquad (2)$$

L'équation (2) représente l'équation différentielle du mouvement du système, qui a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$

$\beta = \frac{\alpha R^2}{2\left(\frac{MR^2}{2}+m_1 l_1^2+m_2 l_2^2+mR^2\right)}$ est le facteur d'amortissement.

$w_0 = \sqrt{\frac{KR^2+m_1 g l_1 - m_2 g l_2}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1 l_1^2+m_2 l_2^2+mR^2\right)}}$ est la pulsation propre du mouvement.

Application numérique :

$\beta = \frac{0.7(0.08)^2}{2\left(\frac{2(0.08)^2}{2}+0.1(0.14)^2+0.06(0.1)^2+0.12(0.08)^2\right)}$, $\beta = 0.23\ s^{-1}$

$w_0 = \sqrt{\frac{25(0.08)^2+0.1(10)(0.14)-0.06(10)(0.1)}{\left(\frac{2(0.08)^2}{2}+0.1(0.14)^2+0.06(0.1)^2+0.12(0.08)^2\right)}}$, $w_0 = 3.51$ Rad/s

On a : $\beta < w_0$ donc le régime du mouvement du système est pseudo périodique (un mouvement oscillatoire amorti).

2. soit $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$: $\Omega = 15$ Rad/s

2.1. Nouvelle équation différentielle du mouvement du système amorti forcé :

D'après l'équation (2), on a :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha R^2}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1 l_1^2+m_2 l_2^2+mR^2\right)}\dot{\theta} + \frac{KR^2+m_1 g l_1 - m_2 g l_2}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1 l_1^2+m_2 l_2^2+mR^2\right)}\theta = \frac{l_1 F_0}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1 l_1^2+m_2 l_2^2+mR^2\right)}\cos(\Omega t) \qquad (3)$$

Cette équation a la forme générale : : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + w_0^2\theta = A_0 \cos(\Omega t)$

$A_0 = \frac{l_1 F_0}{\left(\frac{MR^2}{2}+m_1 l_1^2+m_2 l_2^2+mR^2\right)}$

Application numérique :

$A_0 = \frac{0.14 F_0}{\left(\frac{2(0.08)^2}{2}+0.1(0.14)^2+0.06(0.1)^2+0.12(0.08)^2\right)}$, $A_0 = 14.39 F_0$

2.2. Le facteur de qualité du système Q :

L'expression du facteur de qualité est :

$Q = \frac{w_0}{2\beta}$

Application numérique :

$Q = \frac{3.51}{2(0.23)}$, $Q = 7.63$ Rad.

2.3. L'équation horaire du mouvement dans le régime permanent :

$\theta(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$

Avec :

$A = \frac{A_0}{\sqrt{(w_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$, $\varphi = arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{w_0^2-\Omega^2}\right)$

Application numérique :

$A = \frac{14.39F_0}{\sqrt{(3.51^2-15^2)^2+4(0.23)^2 15^2}}$, $A = 0.07F_0$

$\varphi = arctg\left(\frac{2(0.23)15}{3.51^2-15^2}\right)$, $\varphi = -0.03$ Rad

L'équation horaire est : $\theta(t) = 0.07F_0\cos(15t + 0.03)$ Rad.

2.4. La fréquence de résonnance :

$\Omega_{rés} = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2}$

Application numérique :

$\Omega_{rés} = \sqrt{(3.51)^2 - 2(0.23)^2}$, $\Omega_{rés} = 3.49$ Rad/s

2.5. Calcul de la valeur de l'amplitude maximale de déplacement pour $F_0 = 15$ N :

A la résonnance du déplacement, l'expression de l'amplitude maximale du déplacement est :

$A_{Max} = \frac{A_0}{2\beta\sqrt{w_0^2-\beta^2}}$

Application numérique :

$A_{Max} = \frac{0.07(15)}{2(0.23)\sqrt{3.51^2-0.23^2}}$, $A_{Max} = 0.65$ Rad

Oscillateurs linéaires à deux degrés de liberté

IV. Oscillateurs linéaires à deux degrés de liberté :

IV.1. Rappel de cours :

IV.1.1. Définitions : voici des définitions des mots concernant le titre de ce chapitre

Oscillateurs : des systèmes mécaniques qui effectuent un mouvement de va et vient autour d'une position d'équilibre stable, qui se répète périodiquement au cours du temps.

Linéaires : les forces (pour les mouvements de translation) et les moments (pour les mouvements de rotation) sont proportionnelle à leurs élongations.

$\vec{T} = -Kx\vec{\imath}$, $\vec{M} = -C\theta\vec{K}$

Deux degrés de liberté : Le mouvement du système peut être décrit au cours du temps par deux coordonnées généralisées q_1 et q_2

Lagrangien du système : $L = T - U$

T : Energie cinétique du système.

U : Energie potentielle du système.

IV.1.2. Equations de Lagrange :

Les équations de Lagrange d'un oscillateur libre non amorti à deux degré de liberté ont la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dL}{dq_i} = 0$, $i = 1, 2$ [19, 20].

Les équations de Lagrange d'un oscillateur libre amorti à deux degré de liberté ont la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}_i} - \frac{dL}{dq_i} = 0$, $i = 1, 2$ [21].

Les équations de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé à deux degré de liberté ont la forme $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right) + \frac{dD}{d\dot{q}_i} - \frac{dL}{dq_i} = F_i(t)$, $i = 1, 2$ [21].

IV.1.3. Types des couplages et équations différentielles du mouvement :

Généralement il y'a deux types de couplage entre les deux masses dans les oscillateurs à deux degrés de libertés, sont le couplage simple, et le couplage mixte.

On commence par le couplage simple, qui contient 3 types de couplages sont :

Couplage élastique : les deux masses sont couplées au moyen d'un ressort, dans ce cas les équations différentielles de mouvement ont les formes :

$$\ddot{q}_1 + 2\beta_1\dot{q}_1 + w_{01}^2 q_1 = a_1 q_2 \quad , \quad \ddot{q}_2 + 2\beta_2\dot{q}_2 + w_{02}^2 q_2 = a_2 q_1$$

Couplage visqueux : les deux masses sont couplées au moyen d'un amortisseur, dans ce cas les équations différentielles de mouvement ont les formes :

$$\ddot{q_1} + 2\beta_1\dot{q_1} + w_{01}^2 q_1 = a_1\dot{q}_2 \quad , \quad \ddot{q_2} + 2\beta_2\dot{q_2} + w_{02}^2 q_2 = a_2\dot{q}_1$$

Couplage par inertie : dans ce cas les équations différentielles de mouvement ont les formes :

$$\ddot{q_1} + 2\beta_1\dot{q_1} + w_{01}^2 q_1 = a_1\ddot{q}_2 \quad , \quad \ddot{q_2} + 2\beta_2\dot{q_2} + w_{02}^2 q_2 = a_2\ddot{q}_1$$

En passe au couplage mixte, dans lequel les deux masses sont reliées par un ressort et un amortisseur, dans ce cas les équations différentielles des mouvements des deux masses ont les formes générales :

$$\ddot{q_1} + 2\beta_1\dot{q_1} + w_{01}^2 q_1 = a_1 q_2 + b_1\dot{q}_2 \quad , \quad \ddot{q_2} + 2\beta_2\dot{q_2} + w_{02}^2 q_2 = a_2 q_1 + b_2\dot{q}_1$$

IV.1.4. Equations horaires de mouvement :

Généralement les équations horaires de mouvement des deux masses ont des formes sinusoïdales, on écrit [22, 23] :

$$q_1(t) = A\cos(w_1 t + \varphi) + B\cos(w_2 t + \varphi')$$

$$q(t) = \grave{A}\cos(w_1 t + \varphi) - \grave{B}\cos(w_2 t + \varphi')$$

IV.1.5. Impédance d'entrée $\widetilde{Z_e}$:

Par définition l'impédance d'entrée est $\widetilde{Z_e} = \frac{\widetilde{F(t)}}{\widetilde{V_1(t)}} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}}$

IV.1.6. Impédance de sortie $\widetilde{Z_s}$:

Par définition l'impédance de sortie est $\widetilde{Z_s} = \frac{\widetilde{F(t)}}{\widetilde{V_2(t)}} = \frac{F_0}{\widetilde{V_2}}$

IV.2. Série des exercices corrigés :

<u>Exercice (1) :</u>

Soit le système mécanique représenté dans la figure 4.1.

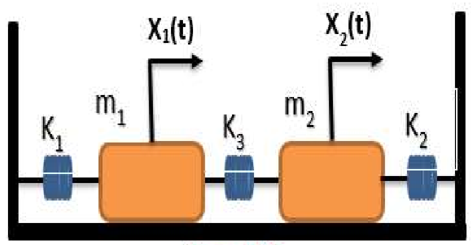


Figure 4.1

1. Quel est le nombre des degrés de liberté et le type de couplage dans le système
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer les pulsations propres du système w_1 et w_2
4. Calculer le rapport des amplitudes dans chaque mode.

5. Donner les équations horaires de mouvement.

Solution de l'exercice (1) :

1. Nombre des degrés de liberté et type de couplage dans le système :

A partir de la figure 4.1, on remarque que le déplacement de la masse m_1 est décrit par la coordonnée $x_1(t)$, et le déplacement de la masse m_2 est décrit par une autre coordonnée différente est indépendante $x_2(t)$, donc le système à deux degrés de liberté :

$d = c - l$, $d = 2$ (deux coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$)

$l = 0$ On n'a pas une liaison entre ces coordonnées

$d = 2 - 0$, $d = 2$ (deux degrés de liberté)

Le couplage entre les deux masses m_1, m_2 est simple par un ressort, donc le type de couplage est élastique.

2. Les équations différentielles du mouvement :

L'équation de Lagrange d'un oscillateur libre non amorti à plusieurs degrés de liberté est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dL}{dq_i} = 0 \ , \ i = 1,2$$

D'où : $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$ sont les coordonnées généralisées.

$\dot{q}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{q}_2 = \dot{x}_2$ sont les vitesses généralisées.

Donc nous avons deux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_1}\right) - \frac{dL}{dx_1} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}_2}\right) - \frac{dL}{dx_2} = 0 \qquad (2)$$

On calcule le lagrangien L du système :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(x_1, x_2) = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3}$$

$U_{m_1} = U_{m_2} = 0$ j (pas de déplacement vertical)

$U_{K_1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2$, $U_{K_2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2$

$U_{K_3} = \frac{1}{2}K_3[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]^2$

Donc, on a :

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2 + \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2 + \frac{1}{2}K_3[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]^2$$

A l'équilibre on a : $\frac{dU}{dx_1}_{x_1=x_2=0} = 0$, $\frac{dU}{dx_2}_{x_1=x_2=0} = 0$

$$\frac{dU}{dx_1} = K_1(x_1 + x_{01}) + K_3[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]$$

$$\frac{dU}{dx_2} = K_2(x_2 + x_{02}) - K_3[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]$$

Pour $x_1 = x_2 = 0$ on obtient le système des équations suivant :

$K_1x_{01} + K_3(x_{01} - x_{02}) = 0$, $K_2x_{02} - K_3(x_{01} - x_{02}) = 0$

Donc :

$(K_1 + K_3)x_{01} - K_3x_{02} = 0$, $-K_3x_{01} + (K_2 + K_3)x_{02} = 0$

$K_3(K_1 + K_3)x_{01} - K_3{}^2x_{02} = 0$, $-K_3(K_1 + K_3)x_{01} + (K_1 + K_3)(K_2 + K_3)x_{02} = 0$

Après simplification on assomme les 2 équations, on obtient :

$(K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3)x_{02} = 0$, donc $x_{02} = 0$, $x_{01} = 0$

On écrit la forme quadratique de l'énergie potentielle du système :

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1x_1{}^2 + \frac{1}{2}K_2x_2{}^2 + \frac{1}{2}K_3(x_1 - x_2)^2$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{x_1}, \dot{x_2}) = T_{m_1} + T_{m_2}$$

$T_{m_1} = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2$, $T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2$

$$T(\dot{x_1}, \dot{x_2}) = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2$$

Le Lagrangien du système :

$$L = T - U,\ L = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2 - \left[\frac{1}{2}K_1x_1{}^2 + \frac{1}{2}K_2x_2{}^2 + \frac{1}{2}K_3(x_1 - x_2)^2\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_1}}\right) = m_1\ddot{x_1} \quad , \quad \frac{dL}{dx_1} = -(K_1x_1 + K_3(x_1 - x_2))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_2}}\right) = m_2\ddot{x_2} \quad , \quad \frac{dL}{dx_2} = -(K_2x_2 - K_3(x_1 - x_2))$$

On obtient les équations suivantes :

$$m_1\ddot{x_1} + K_1x_1 + K_3(x_1 - x_2) = 0 \ , \quad m_2\ddot{x_2} + K_2x_2 - K_3(x_1 - x_2) = 0$$

$$m_1\ddot{x_1} + (K_1 + K_3)x_1 = K_3x_2 \qquad , \qquad m_2\ddot{x_2} + (K_2 + K_3)x_2 = K_3x_1$$

$$\ddot{x_1} + \frac{(K_1+K_3)}{m_1}x_1 = \frac{K_3}{m_1}x_2 \qquad , \qquad \ddot{x_2} + \frac{(K_2+K_3)}{m_2}x_2 = \frac{K_3}{m_2}x_1$$

Ces deux équations différentielles ont la forme générale :

$$\ddot{x_1} + w_{01}^2x_1 = a_1x_2 \quad , \quad \ddot{x_2} + w_{02}^2x_2 = a_2x_1$$

On a : $w_{01} = \sqrt{\frac{(K_1+K_3)}{m_1}}$, $w_{02} = \sqrt{\frac{(K_2+K_3)}{m_2}}$, $a_1 = \frac{K_3}{m_1}$, $a_2 = \frac{K_3}{m_2}$

3. Calcul des pulsations propres du système w_1 et w_2:

Les solutions de ce système des équations sont :

$$x_1(t) = A_1\cos(wt + \varphi_1) \quad , \quad x_2(t) = A_2\cos(wt + \varphi_2)$$

On utilise les formes complexes pour simplifications :

$$\widetilde{x_1}(t) = \widetilde{A_1}e^{jwt} \ , \ \widetilde{x_2}(t) = \widetilde{A_2}e^{jwt} \ , \ \ddot{\widetilde{x_1}} = -w^2\widetilde{A_1}e^{jwt} \ , \ \ddot{\widetilde{x_2}} = -w^2\widetilde{A_2}e^{jwt}$$

On obtient le système des équations suivant :

$$-w^2\widetilde{A_1} + w_{01}^2\widetilde{A_1} - a_1\widetilde{A_2} = 0 \qquad , \qquad -w^2\widetilde{A_2} + w_{02}^2\widetilde{A_2} - a_2\widetilde{A_1} = 0$$

Donc : $\widetilde{A_1}(w_{01}^2 - w^2) - a_1\widetilde{A_2} = 0$, $-a_2\widetilde{A_1} + (w_{02}^2 - w^2)\widetilde{A_2} = 0$

Ce système de Cramer accepte une solution, si le déterminant est nul :

$$det = \begin{vmatrix} (w_{01}^2 - w^2) & -a_1 \\ -a_2 & (w_{02}^2 - w^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(w_{01}^2 - w^2)(w_{02}^2 - w^2) - a_1a_2 = 0$$

$$w_{01}^2w_{02}^2 - w_{01}^2w^2 - w^2w_{02}^2 + w^4 - a_1a_2 = 0$$

$$w^4 - (w_{01}^2 + w_{02}^2)w^2 + w_{01}^2w_{02}^2 - a_1a_2 = 0$$

On pose : $w^2 = \Omega$

$$\Omega^2 - (w_{01}^2 + w_{02}^2)\Omega + w_{01}^2 w_{02}^2 - a_1 a_2 = 0$$

$$\Delta = \left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right)^2 - 4(w_{01}^2 w_{02}^2 - a_1 a_2)$$

$$\Delta = w_{01}^4 + w_{02}^4 + 2w_{01}^2 w_{02}^2 - 4w_{01}^2 w_{02}^2 + 4a_1 a_2 = 0$$

$$\Delta = \left(w_{01}^2 - w_{02}^2\right)^2 + 4a_1 a_2 > 0$$

$$\Omega_1 = \frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) - \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \Omega_2 = \frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Et par conséquence on a :

$$w_1 = \sqrt{\Omega_1} = \sqrt{\frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) - \sqrt{\left(w_{01}^2 - w_{02}^2\right)^2 + 4a_1 a_2}}{2}}$$

$$w_2 = \sqrt{\Omega_2} = \sqrt{\frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) + \sqrt{\left(w_{01}^2 - w_{02}^2\right)^2 + 4a_1 a_2}}{2}}$$

w_1 et w_2 sont dites les pulsations propres de ce système libre non amorti à deux degrés de liberté.

4. Calcul de rapport des amplitudes dans chacun des deux modes de mouvement :

Pour des raisons de simplifications on prend : $m_1 = m_1 = m$, $K_1 = K_2 = K_3 = K$

On obtient : $w_{01} = w_{02} = w_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, $a_1 = a_1 = \frac{w_0^2}{2} = \frac{K}{m}$

$$w_1 = \sqrt{\frac{2w_0^2 - \sqrt{4\frac{w_0^4}{4}}}{2}}$$, donc, $w_1 = \frac{w_0}{\sqrt{2}}$, $w_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (premier mode du mouvement)

$$w_2 = \sqrt{\frac{2w_0^2 + \sqrt{4\frac{w_0^4}{4}}}{2}}$$, donc, $w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}w_0$, $w_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$ (deuxième mode de mouvement)

On calcule le rapport des amplitudes dans le premier mode $w = w_1 = \frac{w_0}{\sqrt{2}}$

$$-(\frac{w_0}{\sqrt{2}})^2\widetilde{A_1} + w_0^2\widetilde{A_1} - \frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_2} = 0 \quad , \quad -(\frac{w_0}{\sqrt{2}})^2\widetilde{A_2} + w_0^2\widetilde{A_2} - \frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_1} = 0$$

La première équation donne :

$\widetilde{A_1}\left(w_0^2 - \frac{w_0^2}{2}\right) - \frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_2} = 0$, $\frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_1} = \frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_2}$, donc $\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}} = 1 > 0$

La deuxième équation donne :

$$-\frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_1}+(w_0^2-\frac{w_0^2}{2})\widetilde{A_2}=0 \quad , \quad -\frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_1}=-\frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_2} \quad , \text{ donc } \quad \frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}}=1 \ >0$$

Dans ce mode de mouvement les deux masses vibrent en phase.

On a : $\widetilde{A_1}=A_1e^{j\varphi_1}$ et $\widetilde{A_2}=A_2e^{j\varphi_2}$

$$\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}}=\frac{A_1e^{j\varphi_1}}{A_2e^{j\varphi_2}}=\frac{A_1}{A_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}=1 \quad , \quad \varphi_1-\varphi_2=0 \ \text{, donc } \ \varphi_1=\varphi_2$$

On calcule le rapport des amplitudes dans le deuxième mode $w=w_2=\sqrt{\frac{3}{2}}w_0$

$$\widetilde{A_1}\left(w_0^2-\frac{3w_0^2}{2}\right)-\frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_2}=0 \quad , \quad -\frac{w_0^2}{2}\widetilde{A_1}+(w_0^2-\frac{3w_0^2}{2})\widetilde{A_2}=0$$

donc $\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}}=-1\ <0$ dans ce mode les deux masses vibrent en opposition de phase.

$$\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}}=\frac{A_1e^{j\varphi_1}}{A_2e^{j\varphi_2}}=\frac{A_1}{A_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}=-1 \quad , \quad e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}=\cos(\varphi_1-\varphi_2)=-1$$

$\varphi_1-\varphi_2=\pi$,donc : $\varphi_1=\varphi_2+\pi$

5. Les équations horaires de mouvement :

Généralement les équations horaires ont la forme :

$$x_1(t)=A_1^{(1)}\cos\left(w_1t+\varphi_1^{(1)}\right)+A_1^{(2)}\cos\left(w_2t+\varphi_1^{(2)}\right)$$

$$x_2(t)=A_2^{(1)}\cos\left(w_1t+\varphi_2^{(1)}\right)+A_2^{(2)}\cos\left(w_2t+\varphi_2^{(2)}\right)$$

On écrit :

$$x_1(t)=A\cos(w_1t+\varphi)+B\cos(w_2t+\varphi')$$

$$x_2(t)=A\cos(w_1t+\varphi)+B\cos(w_2t+\varphi'+\pi)$$

Ou encore :

$$x_1(t)=A\cos(w_1t+\varphi)+B\cos(w_2t+\varphi')$$

$$x_2(t)=A\cos(w_1t+\varphi)-B\cos(w_2t+\varphi')$$

Exercice (2) :

Soit le système mécanique à deux degrés de liberté représenté dans la figure 4.2. A l'équilibre les deux tiges identiques de longueur l sont verticales, et les ressorts ne sont pas déformés.

1. Calculer le Lagrangien du système L
2. Etablir les équations différentielles du mouvement.
3. Déterminer les pulsations propres du système w_1 et w_2
4. Calculer le rapport des amplitudes dans chaque mode.
5. Donner les équations horaires de mouvement.

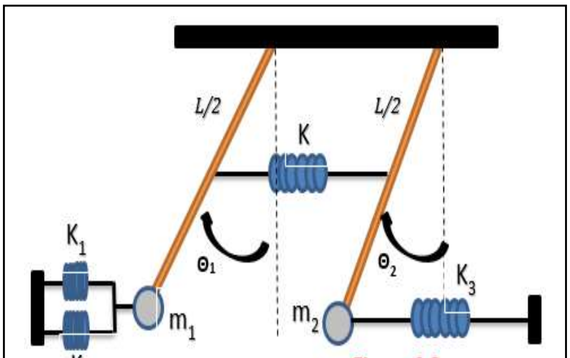


Figure 4.2

Solution de l'exercice (2) :

1. Calcul du Lagrangien du système L :

On a, l'expression du lagrangien L du système :

$$L = T - U$$

On choisit les coordonnées généralisées θ_1, θ_2 pour décrire le mouvement des deux masses au cours de temps.

L'énergie potentielle du système :

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{K_1} + U_{K_2} + U_{K_3} + U_K$$

$$U_{m_1} = m_1 g l \frac{{\theta_1}^2}{2} \quad , \quad U_{m_2} = m_2 g l \frac{{\theta_2}^2}{2} \ , \ U_{K_1} = \frac{1}{2} K_1 l^2 (\theta_1 + \theta_{01})^2$$

$$U_{K_2} = \frac{1}{2} K_2 l^2 (\theta_1 + \theta_{01})^2 \ , \ U_{K_3} = \frac{1}{2} K_3 l^2 (\theta_2 + \theta_{02})^2$$

$$U_K = \frac{1}{2} K \frac{l^2}{4} [(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_{01} - \theta_{02})]^2$$

Donc, on a :

$$U(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} K_1 l^2 (\theta_1 + \theta_{01})^2 + \frac{1}{2} K_2 l^2 (\theta_1 + \theta_{01})^2 + \frac{1}{2} K_3 l^2 (\theta_2 + \theta_{02})^2 + \frac{1}{2} K \frac{l^2}{4} [(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_{01} - \theta_{02})]^2 + m_1 g l \frac{{\theta_1}^2}{2} + m_2 g l \frac{{\theta_2}^2}{2}$$

A l'équilibre on a : $\left.\frac{dU}{d\theta_1}\right|_{\theta_1=\theta_2=0} = 0 \ , \quad \left.\frac{dU}{d\theta_2}\right|_{\theta_1=\theta_2=0} = 0$

Après la simplification de l'expression de l'énergie potentielle on obtient la forme quadratique suivante :

$$U(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{2}K_1l^2{\theta_1}^2+\frac{1}{2}K_2l^2{\theta_1}^2+\frac{1}{2}K_3l^2{\theta_2}^2+\frac{1}{2}K\frac{l^2}{4}(\theta_1-\theta_2)^2+m_1gl\frac{{\theta_1}^2}{2}+$$
$$m_2gl\frac{{\theta_2}^2}{2}+cnst$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{\theta_1},\dot{\theta_2})=T_{m_1}+T_{m_2}$$

$$T_{m_1}=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta_1}^2\ ,\quad T_{m_2}=\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta_2}^2$$

$$T(\dot{x_1},\dot{x_2})=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta_1}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta_2}^2$$

Le Lagrangien du système :

$$L=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta_1}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta_2}^2-\Big[\frac{1}{2}K_1l^2{\theta_1}^2+\frac{1}{2}K_2l^2{\theta_1}^2+\frac{1}{2}K_3l^2{\theta_2}^2+$$
$$\frac{1}{2}K\frac{l^2}{4}(\theta_1-\theta_2)^2+m_1gl\frac{{\theta_1}^2}{2}+m_2gl\frac{{\theta_2}^2}{2}+cnst\Big]$$

2. Les équations différentielles du mouvement :

Les équations de Lagrange de cet oscillateur libre non amorti à deux degrés de liberté sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta_1}}\right)-\frac{dL}{d\theta_1}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta_2}}\right)-\frac{dL}{d\theta_2}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta_1}}\right)=m_1l^2\ddot{\theta_1}\quad ,\frac{dL}{d\theta_1}=-\left[K_1l^2\theta_1+K_2l^2\theta_1+K\frac{l^2}{4}(\theta_1-\theta_2)+m_1gl\theta_1\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta_2}}\right)=m_2l^2\ddot{\theta_2}\quad ,\frac{dL}{d\theta_2}=-\left[K_3l^2\theta_2-K\frac{l^2}{4}(\theta_1-\theta_2)+m_2gl\theta_2\right]$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$m_1l^2\ddot{\theta_1}+\left[K_1l^2\theta_1+K_2l^2\theta_1+K\frac{l^2}{4}(\theta_1-\theta_2)+m_1gl\theta_1\right]=0$$

$$m_2l^2\ddot{\theta_2}+\left[K_3l^2\theta_2-K\frac{l^2}{4}(\theta_1-\theta_2)+m_2gl\theta_2\right]=0$$

On écrit :

$$m_1l^2\ddot{\theta_1}+\left[K_1l^2+K_2l^2+K\frac{l^2}{4}+m_1gl\right]\theta_1=K\frac{l^2}{4}\theta_2$$

$$m_2l^2\ddot{\theta_2}+\left[K_3l^2+K\frac{l^2}{4}+m_2gl\right]\theta_2=K\frac{l^2}{4}\theta_1$$

Donc :

$$\ddot{\theta_1} + \frac{(4K_1l^2+4K_2l^2+Kl^2+4m_1gl)}{4m_1l^2}\theta_1 = \frac{K}{4m_1}\theta_2$$

$$\ddot{\theta_2} + \frac{(4K_3l^2+Kl^2+4m_2gl)}{4m_2l^2}\theta_2 = \frac{K}{4m_2}\theta_1$$

Ces deux équations différentielles ont les formes générales suivantes :

$$\ddot{\theta_1} + w_{01}^2\theta_1 = a_1\theta_2 \quad , \quad \ddot{\theta_2} + w_{02}^2\theta_2 = a_2\theta_1$$

On a : $w_{01} = \sqrt{\frac{(4K_1l^2+4K_2l^2+Kl^2+4m_1gl)}{4m_1l^2}}$, $w_{02} = \sqrt{\frac{(4K_3l^2+Kl^2+4m_2gl)}{4m_2l^2}}$, $a_1 = \frac{K}{4m_1}$, $a_2 = \frac{K}{4m_2}$

3. Calcul des pulsations propres du système w_1 et w_2:

Les solutions de ce système des équations sont :

$$\theta_1(t) = A_1\cos(wt+\varphi_1) \quad , \quad \theta_2(t) = A_2\cos(wt+\varphi_2)$$

On utilise les formes complexes pour simplifications :

$$\widetilde{\theta_1}(t) = \widetilde{A_1}e^{jwt} \; , \; \widetilde{\theta_2}(t) = \widetilde{A_2}e^{jwt} \; , \; \ddot{\widetilde{\theta_1}} = -w^2\widetilde{A_1}e^{jwt} \; , \; \ddot{\widetilde{\theta_2}} = -w^2\widetilde{A_2}e^{jwt}$$

On obtient le système des équations suivant :

$$-w^2\widetilde{A_1} + w_{01}^2\widetilde{A_1} - a_1\widetilde{A_2} = 0 \quad , \quad -w^2\widetilde{A_2} + w_{02}^2\widetilde{A_2} - a_2\widetilde{A_1} = 0$$

Donc :

$$\widetilde{A_1}(w_{01}^2 - w^2) - a_1\widetilde{A_2} = 0 \quad , \quad -a_2\widetilde{A_1} + (w_{02}^2 - w^2)\widetilde{A_2} = 0$$

Ce système de Cramer accepte une solution, si le déterminant est nul :

$$det = \begin{vmatrix} (w_{01}^2 - w^2) & -a_1 \\ -a_2 & (w_{02}^2 - w^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(w_{01}^2 - w^2)(w_{02}^2 - w^2) - a_1a_2 = 0$$

$$w_{01}^2w_{02}^2 - w_{01}^2w^2 - w^2w_{02}^2 + w^4 - a_1a_2 = 0$$

$$w^4 - (w_{01}^2 + w_{02}^2)w^2 + w_{01}^2w_{02}^2 - a_1a_2 = 0$$

On pose : $w^2 = \Omega$

$$\Omega^2 - (w_{01}^2 + w_{02}^2)\Omega + w_{01}^2w_{02}^2 - a_1a_2 = 0$$

$$\Delta = \left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right)^2 - 4(w_{01}^2 w_{02}^2 - a_1 a_2)$$

$$\Delta = w_{01}^4 + w_{02}^4 + 2w_{01}^2 w_{02}^2 - 4w_{01}^2 w_{02}^2 + 4a_1 a_2 = 0$$

$$\Delta = \left(w_{01}^2 - w_{02}^2\right)^2 + 4a_1 a_2 > 0$$

$$\Omega_1 = \frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) - \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad \Omega_2 = \frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Et par conséquence on a :

$$w_1 = \sqrt{\Omega_1} = \sqrt{\frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) - \sqrt{\left(w_{01}^2 - w_{02}^2\right)^2 + 4a_1 a_2}}{2}}$$

$$w_2 = \sqrt{\Omega_2} = \sqrt{\frac{\left(w_{01}^2 + w_{02}^2\right) + \sqrt{\left(w_{01}^2 - w_{02}^2\right)^2 + 4a_1 a_2}}{2}}$$

w_1 et w_2 sont dites les pulsations propres de ce système libre non amorti à deux degrés de liberté.

4. Calcul de rapport des amplitudes dans chacun des deux modes :

On prend : $m_1 = m_1 = m$, $K_1 = K_2 = K$, $K_3 = 2K$

On obtient :

$$w_{01} = \sqrt{\frac{(9Kl^2 + 4mgl)}{4ml^2}} \quad , \quad w_{02} = \sqrt{\frac{(9Kl^2 + 4mgl)}{4ml^2}} \quad , \quad a_1 = \frac{K}{4m} \quad , \quad a_2 = \frac{K}{4m}$$

$$w_{01} = w_{02} = w_0 \quad , \quad a_1 = a_2 = \frac{K}{4m}$$

Dans le premier mode $w = w_1$:

Dans ce cas, $w_1 = \sqrt{\frac{2w_0^2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2}} = \sqrt{w_0^2 - \sqrt{a_1 a_2}}$

Donc : $\widetilde{A_1}(w_{01}^2 - w_1^2) - a_1\widetilde{A_2} = 0$, $-a_2\widetilde{A_1} + (w_{02}^2 - w_1^2)\widetilde{A_2} = 0$

Ce qui donne :

$$\widetilde{A_1}\left(w_0^2 - w_1^2\right) = a_1\widetilde{A_2} \quad , \text{ et } \quad a_2\widetilde{A_1} = (w_0^2 - w_1^2)\widetilde{A_2}$$

On remplace w_1 par sa valeur :

$$\widetilde{A_1}\left(w_0^2 - \left(w_0^2 - \sqrt{a_1 a_2}\right)\right) = a_1\widetilde{A_2} \quad , \text{et } \quad a_2\widetilde{A_1} = \left(w_0^2 - \left(w_0^2 - \sqrt{a_1 a_2}\right)\right)\widetilde{A_2}$$

Après simplification, on a :

$(\sqrt{a_1 a_2})\widetilde{A_1} = a_1 \widetilde{A_2}$, et $a_2 \widetilde{A_1} = (\sqrt{a_1 a_2})\widetilde{A_2}$

Avec : $a_1 = a_2$

Donc :

donc $\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}} = 1 > 0$

Dans ce mode de mouvement les deux masses vibrent en phase.

On a : $\widetilde{A_1} = A_1 e^{j\varphi_1}$ et $\widetilde{A_2} = A_2 e^{j\varphi_2}$

$\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}} = \frac{A_1 e^{j\varphi_1}}{A_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = 1$, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, donc $\varphi_1 = \varphi_2$

Dans le deuxième mode $w = w_2 \sqrt{\frac{2w_0^2 + 2\sqrt{a_1 a_2}}{2}} = \sqrt{w_0^2 + \sqrt{a_1 a_2}}$

On calcule le rapport des amplitudes, on obtient :

$-(\sqrt{a_1 a_2})\widetilde{A_1} = a_1 \widetilde{A_2}$, et $a_2 \widetilde{A_1} = -(\sqrt{a_1 a_2})\widetilde{A_2}$

donc $\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}} = -1 < 0$

Dans ce cas les deux masses oscillent en opposition de phase.

$\frac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}} = \frac{A_1 e^{j\varphi_1}}{A_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = -1$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$

5. Les équations horaires de mouvement :

Les équations horaires ont la forme :

$$\theta_1(t) = A_1^{(1)} \cos\left(w_1 t + \varphi_1^{(1)}\right) + A_1^{(2)} \cos\left(w_2 t + \varphi_1^{(2)}\right)$$

$$\theta_2(t) = A_2^{(1)} \cos\left(w_1 t + \varphi_2^{(1)}\right) + A_2^{(2)} \cos\left(w_2 t + \varphi_2^{(2)}\right)$$

On écrit :

$$\theta_1(t) = A\cos(w_1 t + \varphi) + B\cos(w_2 t + \varphi')$$

$$\theta_2(t) = A\cos(w_1 t + \varphi) - B\cos(w_2 t + \varphi')$$

<u>Exercice (3) :</u>

Soit le système mécanique à deux degrés de liberté représenté dans la figure 4.3.

La masse m_1 subit des frottement visqueux de constante α. Une force excitatrice extérieure de forme sinusoïdale $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ exerce sur cette masse.

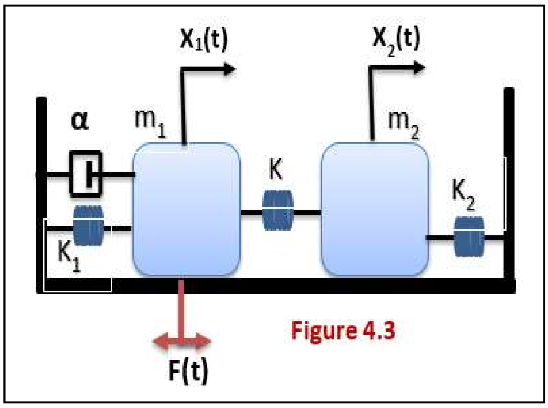


Figure 4.3

1. Etablir le Lagrangien du système L
2. Donner les équations différentielles des mouvements.
3. Donner les amplitudes des déplacements des deux masses.
   (On prend pour simplification : $m_1 = m_2 = m$, $K_1 = K_2 = K$)
4. Donner les amplitudes des vitesses des deux masses.
5. Calculer l'impédance d'entrée $\widetilde{Z_e}$ et de sortie $\widetilde{Z_s}$
6. Etudier la résonnance de la vitesse de la masse m_1

Solution de l'exercice (3) :

1. calcul du lagrangien L du système :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(x_1, x_2) = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{K_1} + U_{K_2} + U_K$$

$U_{m_1} = U_{m_2} = 0$ j (pas de déplacement vertical)

$$U_{K_1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2 \quad , \quad U_{K_2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2$$

$$U_K = \frac{1}{2}K[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]^2$$

Donc, on a :

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2 + \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2 + \frac{1}{2}K[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]^2$$

A l'équilibre on a : $\left.\frac{dU}{dx_1}\right|_{x_1=x_2=0} = 0$, $\left.\frac{dU}{dx_2}\right|_{x_1=x_2=0} = 0$

$$\frac{dU}{dx_1} = K_1(x_1 + x_{01}) + K[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]$$

$$\frac{dU}{dx_2} = K_2(x_2 + x_{02}) - K[(x_1 - x_2) + (x_{01} - x_{02})]$$

Pour $x_1 = x_2 = 0$ on obtient le système des équations suivant :

$K_1 x_{01} + K(x_{01} - x_{02}) = 0$, $K_2 x_{02} - K(x_{01} - x_{02}) = 0$

Donc :

$(K_1 + K)x_{01} - K x_{02} = 0$, $-K x_{01} + (K_2 + K)x_{02} = 0$

$K(K_1 + K)x_{01} - K^2 x_{02} = 0$, $-K(K_1 + K)x_{01} + (K_1 + K)(K_2 + K)x_{02} = 0$

Après simplification on assomme les 2 équations, on obtient :

$(K_1 K_2 + K_1 K + K_2 K)x_{02} = 0$, donc $x_{02} = 0$, $x_{01} = 0$

On écrit la forme quadratique de l'énergie potentielle du système :

$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K_1 {x_1}^2 + \frac{1}{2}K_2 {x_2}^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$

L'énergie cinétique du système :

$T(\dot{x_1}, \dot{x_2}) = T_{m_1} + T_{m_2}$

$T_{m_1} = \frac{1}{2}m_1 \dot{x_1}^2$, $T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2 \dot{x_2}^2$

$T(\dot{x_1}, \dot{x_2}) = \frac{1}{2}m_1 \dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x_2}^2$

Le Lagrangien du système :

$L = T - U,\ L = \frac{1}{2}m_1 \dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x_2}^2 - \left[\frac{1}{2}K_1 {x_1}^2 + \frac{1}{2}K_2 {x_2}^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2\right]$

2. Les équations différentielles des mouvements :

On a l'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = \dot{x_1}$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x_1}^2$$

Les équations de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé à deux degrés de liberté sont :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_i}}\right) + \frac{dD}{d\dot{x_i}} - \frac{dL}{dx_i} = F_i(t)$, $i = 1, 2$

Donc, on a :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_1}}\right) + \frac{dD}{d\dot{x_1}} - \frac{dL}{dx_1} = F(t)$ (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_2}}\right)+\frac{dD}{d\dot{x_2}}-\frac{dL}{dx_2}=0 \qquad (2)$$

D'où : $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$

D'après ces équations, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_1}}\right)=m_1\ddot{x_1} \quad , \quad \frac{dL}{dx_1}=-(K_1x_1+K(x_1-x_2)) \ , \ \frac{dD}{d\dot{x_1}}=\alpha\dot{x_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x_2}}\right)=m_2\ddot{x_2} \quad , \quad \frac{dL}{dx_2}=-(K_2x_2-K(x_1-x_2)) \ , \ \frac{dD}{d\dot{x_2}}=0$$

On obtient les équations suivantes :

$$m_1\ddot{x_1}+\alpha\dot{x_1}+K_1x_1+K(x_1-x_2)=F_0\cos(\Omega t)$$

$$m_2\ddot{x_2}+K_2x_2-K(x_1-x_2)=0$$

On a : $K_1=K_2=K$, $m_1=m_2=m$ (pour la simplification)

$$m_1\ddot{x_1}+\alpha\dot{x_1}+(K_1+K)x_1-Kx_2=F_0\cos(\Omega t) \qquad (3)$$

$$m\ddot{x_2}+(K_2+K)x_2-Kx_1=0 \qquad (4)$$

Les équations (3), (4) sont les deux équations différentielles de mouvements des deux masses m_1 et m_2

3. Calcul des amplitudes des déplacements des deux masses m_1 et m_2 :

On prend pour simplification : $K_1=K_2=K$, $m_1=m_2=m$. Les deux équations différentielles de mouvement seront :

$$m\ddot{x_1}+\alpha\dot{x_1}+2Kx_1-Kx_2=F_0\cos(\Omega t) \qquad (5)$$

$$m\ddot{x_2}+2Kx_2-Kx_1=0 \qquad (6)$$

On utilise les représentations complexes :

$$\widetilde{x_1}(t)=\widetilde{A_1}e^{j\Omega t} \quad , \quad \widetilde{\dot{x_1}}(t)=j\Omega\widetilde{A_1}e^{j\Omega t} \quad , \quad \widetilde{\ddot{x_1}}=-\Omega^2\widetilde{A_1}e^{j\Omega t}$$

$$\widetilde{x_2}(t)=\widetilde{A_2}e^{j\Omega t} \quad , \quad \widetilde{\dot{x_2}}(t)=j\Omega\widetilde{A_2}e^{j\Omega t} \quad , \quad \widetilde{\ddot{x_2}}=-\Omega^2\widetilde{A_2}e^{j\Omega t}$$

On obtient le système des équations suivant :

$$-m\Omega^2\widetilde{A_1}+j\alpha\Omega\widetilde{A_1}+2K\widetilde{A_1}-K\widetilde{A_2}=F_0$$

$$-m\Omega^2\widetilde{A_2}+2K\widetilde{A_2}-K\widetilde{A_1}=0$$

Donc :

$\widetilde{A_1}(2K - m\Omega^2 + j\alpha\Omega) - K\widetilde{A_2} = F_0$ (7)

$-K\widetilde{A_1} + (2K - m\Omega^2)\widetilde{A_2} = 0$ (8)

L'équation (8) donne : $\widetilde{A_2} = \frac{K\widetilde{A_1}}{(2K - m\Omega^2)}$, on remplace cette valeur dans l'équation (7) :

$$\widetilde{A_1}(2K - m\Omega^2 + j\alpha\Omega) - \frac{K^2\widetilde{A_1}}{(2K - m\Omega^2)} = F_0$$

On a : $\widetilde{A_1}\left[\frac{(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)}{(2K - m\Omega^2)}\right] = F_0$

$\widetilde{A_1} = \frac{(2K - m\Omega^2)F_0}{\left[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)\right]}$ est l'amplitude de déplacement de la première masse m_1 , et par conséquence l'amplitude de déplacement de la deuxième masse m_2 est :

$$\widetilde{A_2} = \frac{KF_0}{\left[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)\right]}$$

4. Calcul des amplitudes des vitesses $\widetilde{V_1}$ et $\widetilde{V_2}$ des deux masses m_1 et m_2 :

$\widetilde{V_1} = j\Omega\widetilde{A_1}$, $\widetilde{V_2} = j\Omega\widetilde{A_2}$

$$\widetilde{V_1} = \frac{j\Omega(2K - m\Omega^2)F_0}{[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)]}$$

$$\widetilde{V_2} = \frac{j\Omega K F_0}{[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)]}$$

5. Calcul des impédances d'entrée $\widetilde{Z_e}$ et de sortie $\widetilde{Z_s}$:

On a : $\widetilde{Z_e} = \frac{\widetilde{F(t)}}{\widetilde{V_1(t)}} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}}$ est l'impédance d'entrée

$\widetilde{Z_s} = \frac{\widetilde{F(t)}}{\widetilde{V_2(t)}} = \frac{F_0}{\widetilde{V_2}}$ est l'impédance de sortie.

Par conséquence on a :

$$\widetilde{Z_e} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}} = \frac{F_0[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)]}{j\Omega(2K - m\Omega^2)F_0}$$

On écrit : $\widetilde{Z_e} = \alpha - j\frac{[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2]}{\Omega(2K - m\Omega^2)}$

D'autre part :

$$\widetilde{Z_s} = \frac{F_0}{\widetilde{V_2}} = \frac{F_0[(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 + j\alpha\Omega(2K - m\Omega^2)]}{j\Omega K F_0}$$

$\widetilde{Z_s} = \frac{\alpha}{K}(2K - m\Omega^2) - j\,\frac{[(2K-m\Omega^2)^2 - K^2]}{\Omega K}$

6. Etude de la résonnance de la vitesse de la masse m_1 :

On a : $\widetilde{Z_e} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}}$, $\widetilde{V_1} = \frac{F_0}{\widetilde{Z_e}}$, avec $F_0 = cnst$ (l'amplitude de la force excitatrice est constante)

Par conséquence on a :

$\widetilde{V_1}$ est maximale (cas de résonnance), si $\widetilde{Z_e}$ est minimale

$\widetilde{V_1}$ est minimale (cas d'anti résonnance), si $\widetilde{Z_e}$ est maximale

On commence par le cas de la résonnance de la vitesse de la masse m_1 :

On a : $\widetilde{Z_e}$ est minimale, $\left|\widetilde{Z_e}\right| = \sqrt{\alpha^2 + \left[\frac{\left[(2K-m\Omega^2)^2 - K^2\right]}{\Omega(2K-m\Omega^2)}\right]^2}$ est minimale

Donne : $(2K - m\Omega^2)^2 - K^2 = 0$, $(2K - m\Omega^2 - K)(2K - m\Omega^2 + K) = 0$

Cette équation accepte deux solution sont :

$\Omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$

D'après les équations différentielles du mouvement du système, on a les expressions des pulsations propres :

$w_{01} = w_{02} = w_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, donc on écrit :

$\Omega_1 = \frac{w_0}{\sqrt{2}}$, $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,w_0$

Ω_1 et Ω_2 représentent les deux fréquences de résonnance.

On passe au cas de l'anti résonnance de la vitesse de la masse m_1 :

$\widetilde{Z_e}$ est maximale (tant vers l'infini), par conséquence, on écrit :

$\Omega(2K - m\Omega^2) = 0$, cette équation accepte deux solutions sont :

$\Omega = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'excitation extérieur $F(t) = 0$

$(2K - m\Omega^2) = 0$, $\Omega = w_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, dans ce cas : $\widetilde{V_1} = 0$ et par conséquence la masse m_1 est immobile.

On peut calculer les valeurs des impédances d'entrée $\widetilde{Z_e}$ et de sortie $\widetilde{Z_s}$ à la résonnance et à l'anti résonnance :

On commence par le cas de la résonnance :

On a, $\widetilde{Z_e} = \alpha$, et $\widetilde{Z_s} = \alpha$ (pour $\Omega_1 = \frac{w_0}{\sqrt{2}}$) , $\widetilde{Z_s} = -\alpha$ (pour $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}w_0$)

Concernant le cas de l'anti résonnance : $\Omega = w_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, l'impédance de sortie a la valeur :

$$\widetilde{Z_s} = +j\frac{K}{w_0}$$

Exercice (4) :

Soit le système mécanique à deux degrés de liberté représenté dans la figure 4.4. Le cylindre M_1 subit des frottements visqueux de constante α. Une force excitatrice de forme sinusoïdale $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$ exerce sur ce cylindre.

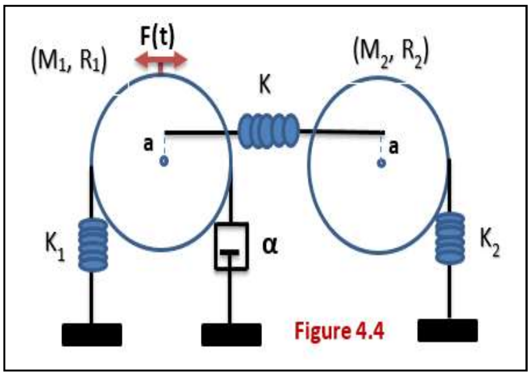


Figure 4.4

1. Etablir le Lagrangien du système L
2. Donner les équations différentielles du mouvement.
3. Donner les amplitudes des déplacements des deux masses (on prend : $M_1 = M_2 = M$ et $K_1 = K_2 = K$, $R_1 = R_2 = R$, $a = \frac{R}{2}$ pour des raisons de simplification).
4. Donner les amplitudes des vitesses des deux masses.
5. Calculer l'impédance d'entrée $\widetilde{Z_e}$ et de sortie $\widetilde{Z_s}$
6. Etudier la résonnance de la vitesse de la masse M_1

Solution de l'exercice (4) :

1. l'expression du Lagrangien du système :

$$L = T - U$$

L'énergie potentielle du système :

$$U(\theta_1, \theta_2) = U_{M_1} + U_{M_2} + U_{K_1} + U_{K_2} + U_K$$

$U_{M_1} = U_{M_2} = 0$ j (pas de déplacement vertical)

$$U_{K_1} = \frac{1}{2}K_1(x_1 + x_{01})^2 \ , \ x_1 = R_1\theta_1 \ , x_{01} = R_1\theta_{01}$$

$$U_{K_1} = \frac{1}{2}K_1(R_1\theta_1 + R_1\theta_{01})^2 \ , \ U_{K_1} = \frac{1}{2}K_1{R_1}^2(\theta_1 + \theta_{01})^2$$

$$U_{K_2} = \frac{1}{2}K_2(x_2 + x_{02})^2 \ , \ x_2 = R_2\theta_2 \ , x_{02} = R_2\theta_{02}$$

$$U_{K_2} = \frac{1}{2}K_2(R_2\theta_2 + R_2\theta_{02})^2 \ , \ U_{K_2} = \frac{1}{2}K_2{R_2}^2(\theta_2 + \theta_{02})^2$$

$$U_K = \frac{1}{2}K[(a\theta_1 - a\theta_2) + (a\theta_{01} - a\theta_{02})]^2$$

$$U_K = \frac{1}{2}Ka^2[(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_{01} - \theta_{02})]^2$$

$$U(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}K_1{R_1}^2(\theta_1 + \theta_{01})^2 + \frac{1}{2}K_2{R_2}^2(\theta_2 + \theta_{02})^2 + \frac{1}{2}Ka^2[(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_{01} - \theta_{02})]^2$$

A l'équilibre on a : $\frac{dU}{d\theta_1}_{\theta_1=\theta_2=0} = 0 \ , \quad \frac{dU}{d\theta_2}_{\theta_1=\theta_2=0} = 0$

Après simplification on obtient la forme quadratique de l'énergie potentielle :

$$U(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}K_1{R_1}^2{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}K_2{R_2}^2{\theta_2}^2 + \frac{1}{2}Ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + cnst$$

L'énergie cinétique du système :

$$T(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = T_{M_1} + T_{M_2}$$

$$T_{M_1} = \frac{1}{2}J_{M1/0}{\dot{\theta}_1}^2 \ , J_{M1/0} = \frac{M_1R_1^2}{2} \quad , \ T_{M_1} = \frac{1}{2}(\frac{M_1R_1^2}{2}){\dot{\theta}_1}^2$$

$$T_{M_2} = \frac{1}{2}J_{M2/ò}{\dot{\theta}_2}^2 \ , J_{M2/ò} = \frac{M_2R_2^2}{2} \quad , \ T_{M_2} = \frac{1}{2}(\frac{M_2R_2^2}{2}){\dot{\theta}_2}^2$$

$$T(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right){\dot{\theta}_1}^2 + \frac{1}{2}(\frac{M_2R_2^2}{2}){\dot{\theta}_2}^2$$

On obtient l'expression du Lagrangien du système, suivante :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right){\dot{\theta}_1}^2 + \frac{1}{2}(\frac{M_2R_2^2}{2}){\dot{\theta}_2}^2 - \left[\frac{1}{2}K_1{R_1}^2{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}K_2{R_2}^2{\theta_2}^2 + \frac{1}{2}Ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + cnst\right]$$

2. Les équations différentielles du mouvement :

On calcule l'énergie dissipative du système :

$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = R_1\dot{\theta}_1$, donc :

$$D = \frac{1}{2}\alpha R_1^2\dot{\theta}_1{}^2$$

Les équations de Lagrange d'un oscillateur amorti forcé à deux degrés de liberté sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_i}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}_i} - \frac{dL}{d\theta_i} = M(F_i(t)) \quad , i = 1, 2$$

Donc, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_1}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}_1} - \frac{dL}{d\theta_1} = R_1F_0\cos(\Omega t) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_2}\right) + \frac{dD}{d\dot{\theta}_2} - \frac{dL}{d\theta_2} = 0 \qquad (2)$$

D'après ces équations, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_1}\right) = \left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right)\ddot{\theta}_1 \quad , \quad \frac{dL}{d\theta_1} = -(K_1R_1{}^2\theta_1 + Ka^2(\theta_1 - \theta_2)) \quad , \quad \frac{dD}{d\dot{\theta}_1} = \alpha R_1^2\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_2}\right) = (\frac{M_2R_2^2}{2})\ddot{\theta}_2 \quad , \quad \frac{dL}{d\theta_2} = -(K_2R_2^2\theta_2 - Ka^2(\theta_1 - \theta_2)) \quad , \quad \frac{dD}{d\dot{\theta}_2} = 0$$

On obtient les équations suivantes :

$$\left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right)\ddot{\theta}_1 + \alpha R_1^2\dot{\theta}_1 + K_1R_1{}^2\theta_1 + Ka^2(\theta_1 - \theta_2) = R_1F_0\cos(\Omega t)$$

$$(\frac{M_2R_2^2}{2})\ddot{\theta}_2 + K_2R_2^2\theta_2 - Ka^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

On écrit :

$$\left(\frac{M_1R_1^2}{2}\right)\ddot{\theta}_1 + \alpha R_1^2\dot{\theta}_1 + \left(K_1R_1{}^2 + Ka^2\right)\theta_1 - Ka^2\theta_2 = R_1F_0\cos(\Omega t) \qquad (3)$$

$$\left(\frac{M_2R_2^2}{2}\right)\ddot{\theta}_2 + (K_2R_2^2 + Ka^2)\theta_2 - Ka^2\theta_1 = 0 \qquad (4)$$

Les équations (3), (4) sont les deux équations différentielles de mouvements des deux masses (cylindres) M_1 et M_2

3. Calcul des amplitudes des déplacements des deux masses M_1 et M_2 :

On prend pour la simplification des expressions : $K_1 = K_2 = K$, $M_1 = M_2 = M$,

$R_1 = R_2 = R$, $a = \frac{R}{2}$. Les deux équations différentielles de mouvement seront :

$$\frac{MR}{2}\ddot{\theta}_1+\alpha R\dot{\theta}_1+\frac{5KR}{4}\theta_1-\frac{KR}{4}\theta_2=F_0\cos(\Omega t) \qquad (5)$$

$$\frac{MR}{2}\ddot{\theta}_2+\frac{5KR}{4}\theta_2-\frac{KR}{4}\theta_1=0 \qquad (6)$$

On utilise les formes complexes :

$$\widetilde{\theta_1}(t)=\widetilde{A_1}e^{j\Omega t}\ ,\ \widetilde{\dot{\theta}_1}(t)=j\Omega\widetilde{A_1}e^{j\Omega t}\ ,\ \widetilde{\ddot{\theta}_1}=-\Omega^2\widetilde{A_1}e^{j\Omega t}$$

$$\widetilde{\theta_2}(t)=\widetilde{A_2}e^{j\Omega t}\ ,\ \widetilde{\dot{\theta}_2}(t)=j\Omega\widetilde{A_2}e^{j\Omega t}\ ,\ \widetilde{\ddot{\theta}_2}=-\Omega^2\widetilde{A_2}e^{j\Omega t}$$

On obtient le système des équations suivant :

$$-(\frac{MR}{2})\Omega^2\widetilde{A_1}+j\alpha R\Omega\widetilde{A_1}+\frac{5KR}{4}\widetilde{A_1}-\frac{KR}{4}\widetilde{A_2}=F_0$$

$$-(\frac{MR}{2})\Omega^2\widetilde{A_2}+\frac{5KR}{4}\widetilde{A_2}-\frac{KR}{4}\widetilde{A_1}=0$$

Donc :

$$\widetilde{A_1}\left(-\frac{MR\Omega^2}{2}+\frac{5KR}{4}+j\alpha R\Omega\right)-\frac{KR}{4}\widetilde{A_2}=F_0 \qquad (7)$$

$$-\frac{KR}{4}\widetilde{A_1}+(\frac{5KR}{4}-\frac{MR\Omega^2}{2})\widetilde{A_2}=0 \qquad (8)$$

L'équation (8) donne : $\widetilde{A_2}=\frac{KR\widetilde{A_1}}{(5KR-2MR\Omega^2)}$, on remplace cette valeur dans l'équation (7) :

$$\widetilde{A_1}(5KR-2MR\Omega^2+4j\alpha R\Omega)-\frac{K^2R^2}{(5KR-2MR\Omega^2)}\widetilde{A_1}=F_0$$

On a : $\widetilde{A_1}\left[\frac{(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\Omega(5KR-2MR\Omega^2)}{(5KR-2MR\Omega^2)}\right]=F_0$

$\widetilde{A_1}=\frac{(5KR-2MR\Omega^2)F_0}{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\ \ (5KR-2MR\Omega^2)\right]}$ est l'amplitude de déplacement de la première masse M_1 , et par conséquence l'amplitude de déplacement de la deuxième masse M_2 est :

$$\widetilde{A_2}=\frac{KRF_0}{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\Omega(5KR-2MR\Omega^2)\right]}$$

4. Calcul des amplitudes des vitesses $\widetilde{V_1}$ et $\widetilde{V_2}$ des deux masses M_1 et M_2 :

$\widetilde{V_1}=j\Omega\widetilde{A_1}\ ,\ \widetilde{V_2}=j\Omega\widetilde{A_2}$

$$\widetilde{V_1}=\frac{j\Omega(5KR-2MR\Omega^2)F_0}{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\Omega(5KR-2MR\Omega^2)\right]}$$

$$\widetilde{V_2} = \frac{j\Omega KRF_0}{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\ \ (5KR-2MR\Omega^2)\right]}$$

5. Calcul des impédances d'entrée $\widetilde{Z_e}$ et de sortie $\widetilde{Z_s}$:

On a : $\widetilde{Z_e} = \frac{\widetilde{F(t)}}{\widetilde{V_1(t)}} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}}$ est l'impédance d'entrée

$\widetilde{Z_s} = \frac{\widetilde{F(t)}}{\widetilde{V_2(t)}} = \frac{F_0}{\widetilde{V_2}}$ est l'impédance de sortie.

Par conséquence on a :

$$\widetilde{Z_e} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}} = \frac{F_0\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\ \ (5KR-2MR\Omega^2)\right]}{j\Omega(5KR-2MR\Omega^2)F_0}$$

On écrit : $\widetilde{Z_e} = 4\alpha R - j\,\frac{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2\right]}{\Omega(5KR-2MR\Omega^2)}$

D'autre part :

$$\widetilde{Z_s} = \frac{F_0}{\widetilde{V_2}} = \frac{F_0\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2+4j\alpha R\Omega(5KR-2MR\Omega^2)\right]}{j\Omega KRF_0}$$

$$\widetilde{Z_s} = \frac{4\alpha}{K}(5KR-2mR\Omega^2) - j\,\frac{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2\right]}{\Omega KR}$$

5. Etude de la résonnance de la vitesse de la masse M_1 :

On a : $\widetilde{Z_e} = \frac{F_0}{\widetilde{V_1}}$, $\widetilde{V_1} = \frac{F_0}{\widetilde{Z_e}}$, avec $F_0 = cnst$ (l'amplitude de la force excitatrice est constante)

Par conséquence on a :

$\widetilde{V_1}$ est maximale (cas de résonnance), si $\widetilde{Z_e}$ est minimale

$\widetilde{V_1}$ est minimale (cas d'anti résonnance), si $\widetilde{Z_e}$ est maximale

On commence par le cas de la résonnance de la vitesse de la masse M_1 :

On a : $\widetilde{Z_e}$ est minimale, $\left|\widetilde{Z_e}\right| = \sqrt{(4\alpha R)^2 + \left[\frac{\left[(5KR-2MR\Omega^2)^2-K^2R^2\right]}{\Omega(5KR-2MR\Omega^2)}\right]^2}$ est minimale

Donne : $(5KR-2MR\Omega^2)^2 - K^2R^2 = 0$

$$(5KR-2MR\Omega^2-KR)(5KR-2MR\Omega^2+KR) = 0$$

Cette équation accepte deux solution sont :

$\Omega_1 = \sqrt{\frac{4K}{2M}}$, $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3K}{2M}}$

D'après les équations différentielles du mouvement du système, on a les expressions des pulsations propres :

$w_{01} = w_{02} = w_0 = \sqrt{\frac{5K}{2M}}$, donc on écrit :

$\Omega_1 = \sqrt{\frac{4}{5}}w_0$, $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}w_0$

Ω_1 et Ω_2 représentent les deux fréquences de résonnance.

On passe au cas de l'anti résonnance de la vitesse de la masse M_1 :

$\widetilde{Z_e}$ est maximale (tant vers l'infini), par conséquence, on écrit :

$\Omega(5KR - 2MR\Omega^2) = 0$, cette équation accepte deux solutions sont :

$\Omega = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'excitation extérieur $F(t) = 0$

$(5KR - 2MR\Omega^2) = 0$, $\Omega = w_0 = \sqrt{\frac{5K}{2M}}$, dans ce cas : $\widetilde{V_1} = 0$ et par conséquence la masse M_1 est immobile.

On peut calculer les valeurs des impédances d'entrée $\widetilde{Z_e}$ et de sortie $\widetilde{Z_s}$ à la résonnance et à l'anti résonnance :

On commence par le cas de la résonnance :

On a, $\widetilde{Z_e} = 4\alpha R$, et $\widetilde{Z_s} = 4\alpha R$ (pour $\Omega_1 = \sqrt{\frac{4}{5}}w_0$) , $\widetilde{Z_s} = 8\alpha R$ (pour $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}w_0$)

Concernant le cas de l'anti résonnance : $\Omega = w_0 = \sqrt{\frac{5K}{2M}}$:

L'impédance de sortie a la valeur : $\widetilde{Z_s} = +j\,\frac{KR}{w_0}$

Références bibliographiques :

[1] Singiresu S. Rao and Philip Griffin; Mechanical vibrations; Publisher: Pearson Education / Prentice Hall (2018).

[2] Leslie, M., Good vibrations: A bit of shaking can burn fat, combat diabetes Health, 2017.

[3] Mathieu Deschamps et Anouk Noël; Mécanique et biomécanique en techniques de physiothérapie ; Québec (2020).

[4] Djelouah Hakim, Vibration et ondes manuel de cours, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.

[5] https://www.universalis.fr/encyclopedie/joseph-louis-lagrange/

[6] Ph. Chen et R. Guillemard; PHYSIQUE, Oscillations ; Vuibert (1992).

[7] Catherine Potel et Philippe Gatugnol ; Cours de Mécanique-Vibrations ; université du Maine.

[8] https://uel.unisciel.fr/physique/sys_oscillant

[9] François Rigaud, Jean Gounot, Stephan Dilhaire, Marc Valat, Sébastien Jorez ; Oscillateur harmonique amorti, oscillations libres amorties; Université Bordeaux 1 (2003).

[10] Janine Bruneaux et Jean Matricon; Vibrations, ondes; PHYSIQUE-LMD Universités Ecoles d'ingénieurs (2008).

[11] Georgi, H., The physics of waves. 1993: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ

[12] A. Ouatizerga, Oscillations libres à 2DDL ; USTHB ; (2020)

[13] T. Becherrawy, « Vibrations, ondes et optique », Hermes science, Éditions Lavoisier, Tome4, Paris, 2010.

[14] S. Graham Kelly; Mechanical Vibrations Theory and application; The University of Akron.

[15] S. Aoulmit, Cours de Vibrations et Ondes Première Partie Vibration (2018).

[16] Roseau, M., Vibrations des systèmes mécaniques, Masson, Paris, 1984.

[17] H. J. Pain, The Physics of Vibrations and Waves, Sixth Edition, Formerly of Department of Physics, Imperial College of Science and Technology, London, UK, 2005.

[18] M. Tamine, O. Lamrous, « vibrations et ondes », edition opu ISBN 1-02-3698, 1993.

[19] Dr. Aicha Flitti, Physique les vibrations cours, exercices et examens corrigés, pages Bleues, 2010

[20] G. Ney, Analogies et modèles électriques, acoustique et mécanique vibratoire, N°2579, Ecole supérieure d'électricité, Paris, 1978.

[21] N. Aklouche, « Cours de Physique 3 (Partie Vibrations) », Polycopié de l'université Ferhat Abbas – Sétif, 2012.

[22] Mohamed Bendaoud, Vibrations et Ondes : cours et exercices (deuxième partie : Phénomènes de propagation), USTHB, office des publications universitaires, 1993.

[23] Steidel, R. F., An introduction to mechanical vibrations, (second edition), J. Wiley and Sons, 1980.