الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمّار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master

Domain :Mathématiques et informatiques
Filière :Mathématique
Option :Analyse mathématique

Par :

Bouchakour Ali

THEME

Les équations intégrales et ses applications

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mme.Y.Boukhatem	*M.C.A*	*Président*
Mr. F.Yazid	*M.A.A*	*Examinateur*
Mme. N. Abdesselam	*M.A.A*	*Examinateur*
Mr. A.Boukehila	*M.C.B*	*Encadreur*

Année Universitaire 2016/2017

Remerciement

La réalisation de ce travail de thèse n’aurait pas pu se

faire sans l’appui de plusieurs personnes que je tiens à remercier .

En premier lieu j’adresse ma reconnaissance à mon encadreur

le Docteur A.Boukehila .Son sérieux et sa compétence m’ont été très utiles pour mener a bien ce travail. Je remercie

le Docteur Y.Boukhatem le président du jury , F.yazid , N.abdesselam , qui m’ont fait l’honneur d’être membres du jury .

Ainsi que tous les enseignants qui m’ont enseigner le long de

mon cours en MI.

Je remercie également ceux qui m’ont aidé de près ou loin à

Table des matières

NOTATIONS

$L(E;F)$	L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F
$C([a,b])$	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a,b]$
$[a,b]$	Intervalle réel
φ	Fonction inconnue
A	Opérateur linéaire
H	Espace de Hilbert
X	Espace normé
I	Opérateur d'identité
$K(x;y)$	Noyau de l'intégrale
T	Opérateur linéaire compact
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur
T	Opérateur Linéaire ou $T = I - A$.
$EILV$	Equations Intégrales Linéaire de Volterra
$EINLV$	Equations Intégrales Non Linéaire de Volterra

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'etudier une certaine classe des équations différentielles dites équations intégrales de fredlhom et principalement de volterra pour cela notre mémoire est constituée de 3 chapitres

Le premier chapitre a pour but rappeler les different notions topologiques ainsi que le théoreme de point fixe de picard et en termine ce chapitre par citation des différents type des opérateurs

Le deuxiéme chapitre on a étudie la classification des equations integrales de type fredlhom et volterra et on a démontre l'existence et l'unicité des solutions de l'equation de type volterra dans le cas linéaire et non linéaire on utilisant le théorème de point fixe de picard et on termine ce chapitre par l'étude de quelque méthodes de résolutions des équations intégrales : 1- méthode du déterminant de Fredlhom

2- méthode du déterminant de Fredlhom

Le 3éme chapitre est consacré a l'applications des équations intégrales pour cela on a choisi trois applications

1- Problèmes des moments généralisés.

2- Applications à la théorie des fonctions analytiques

3- Application aux équations de Sturm-Liouville

Et on termine ce mémoire par conclusion

Chapitre 1

Notions de Topologie et le théorème de Picard

Ce chapitre a pour but rappeler les different notions topologiques ainsi que le théoreme de point fixe de picard et en termine ce chapitre par citation des différents type des opérateurs

1.1 Préliminaires sur les espaces métriques

1.1.1 Distances, espaces métriques

Definition 1.1.1 *Une distance sur un espace X est une application $d : X \times X \longrightarrow R_+$ vérifiant les trois propriétés*

1) (non-dégénérescence) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) (symétrie) $\forall x, y \in X \;\; d(x, y) = d(y, x)$

3) (inégalité triangulaire)

$$\forall x, y, z \in X \;\; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

On dit que (X, d) est un espace métrique.

On note$B(x, r) = \{y \in X | d(y, x) < r\}$ la boule ouverte de rayon r centrée en x.

Exemple. L'ensemble R muni de la distance naturelle $d(x,y) = |x-y|$ est une espace métrique. Plus généralement, si $\|\bullet\|$ est une norme sur un espace vectoriel, alors $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance

Definition 1.1.2 *Soit(X,d) un espace métrique*

1) On dit qu'une suite (x_n) est convergente de limite x,si $lim_{n\longrightarrow+\infty}d(x_n,x) = 0$.

2) Un sous-ensemble U de X est ouvert si pour tout x dans U, il existe une boule centrée en x, de rayon strictement positif, contenue dans U

3) Un sous-ensemble F de X est fermé si $X - F$ est ouvert, ou encore si toute suite de points de F convergeant dans X a sa limite dans F.

4) Soit $A \subset X$, on définit l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A dans X par

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U\subset A}} U$$

et l'adhérence de A dans X par $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A\subset F}} F$

5) On appelle voisinage d'un point ou d'un ensemble tout ensemble contenant un ouvert contenant ce point ou cet ensemble

Il résulte immédiatement des définitions, qu'une réunion d'ouverts (resp. intersection de fermés) est un ouvert, (resp. fermé) et une intersection finie d'ouverts (resp. réunion finie de fermés) est un ouvert (resp. fermé).

On appelle topologie associée à la métrique d la donnée de l'ensemble des ouverts de (X,d) (ou de l'ensemble des fermés).

Definition 1.1.3 *Une application $f : (X,d) \longrightarrow (Y,\delta)$ est continue en x_0 si et seulement si pour tout ε strictement positif, il existe α strictement positif tel que $d(x_0,x) < \alpha \Longrightarrow d(f\ (x_0)\ ,\ f(x)) \leq \varepsilon$*

On dit que f est continue si elle est continue en chaque point.

La continuité de f équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n$ convergente

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ *,ou encore que pour tout ouvert (resp. fermé) A de X, $f^{-1}(A)$ est un ouvert (resp. fermé).*

Definition 1.1.4 *On dit que* $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ *est lipschitzienne de rapport* k *si* $\forall x, x\prime \in X \qquad \delta(f(x), f(x\prime)) \leq kd(x, x\prime)$

Definition 1.1.5 *On dit que* $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ *est localement lipschitzienne si tout point possède un voisinage sur laquelle* f *est Lipschitz.*

Toute application localement lipschitzienne est continue

Remarque. Soit $A \subset X$ muni de la distance restriction de d à A. La restriction d'une application continue $f : X \to Y$ à A est continue. La restriction d'une application lipschitzienne est lipschitzienne

Exemple.

(A) Le produit $X \times X$ étant muni de la distance d_2 donnée par

$d_2((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)$, l'application $d : X \times X \rightharpoonup R$ est continue, puisque d'après l'inégalité triangulaire

$$|d(x_1, y_1) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) = d_2((x_1, y_1), (x_0, y_0))$$

L'application $d_{x_0} : X \longrightarrow R$ définie par $d_{x_0}(x) = d(x, x_0)$ est aussi continue, comme restriction de la fonction continue d_2 à $X \times \{x_0\}$.

(B) Tout ensemble défini par des inégalités strictes sur des fonctions continues est ouvert.

Tout ensemble défini par des inégalités larges sur des fonctions continues est fermé.

La distance étant continue, la boule ouverte est bien ouverte, et la boule fermée $\overline{B}(x, r) = \{y \in X | d(y, x) \leq r\}$ est bien fermée (image réciproque par d d'un fermé).

Remarque. l'adhérence de la boule ouverte de rayon r n'est pas nécessairement la boule fermée de rayon r. Par exemple sur $\mathbb{Z}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ la boule ouverte de rayon 1 centrée en 0 se réduit à $\{0\}$, et donc son adhérence aussi, mais la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 est l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.

Le plus souvent les espaces métriques que l'on considérera seront des espaces vectoriels normés. Le cas le plus simple est celui des espaces euclidiens de dimension finie pour lesquels la norme s'écrit dans une base orthonormée

$$\|x_1e_1 + ...x_ne_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$$

Sur un espace vectoriel de dimension finie , toutes les normes sont équivalentes (voir la démonstration dans [Colmez]).

Ce qu'il faut retenir c'est que lorsqu'on parle d'espaces métriques :

- la principale propriété est l'inégalité triangulaire,

- la propriété d'être ouvert, fermé, dans l'adhérence d'un ensemble, peut se vérifier en prenant des suites.

Note : Il est légitime de se demander pourquoi on s'encombre de la notion de métrique, alors que la plupart du temps, on n'utilise que des parties d'espaces vectoriels normés.

Les espaces métriques constituent un cadre à la fois souple et commode, et il n'est pas plus difficile de manier une métrique qu'une norme.

1.1.2 Espaces normés

Soit X un espace vectoriel , sur lequel est défini une fonction numérique $\|x\|$ telle que

$$\begin{array}{ll} (1) & \|x\| \geq 0 \\ (2) & \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow x = 0 \\ (3) & \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ (si } \lambda \in \mathbb{R}) \\ (4) & \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \end{array}$$

Cette fonction $\|x\|$ est par définition une norme , et le couple formé par X et par cette norme est un espace normé.Dans un espace normé X , la distance du point x au point y est par définition $d(x, y) = \|x - y\|$, c'est bien une distance , car

$$\begin{array}{l} d(x, y) \geq 0 \\ d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{array}$$

Definition 1.1.6 *On appelle espace de Bannach un espace normé complet .*

1.1.3 Espaces complets

La complétude est une notion de première importance en Analyse, qui permet par exemple de distinguer les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Definition 1.1.7 *Une suite*$(x_n)_{n\ \geq 1}$ *d'un espace métrique* (X, d) *est de Cauchy si*
$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N, \forall n, m \geq N \ ; \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Definition 1.1.8 *(Espace complet). Un espace métrique* (X, d) *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente.*

On vérifie sans mal que si F *est fermé dans un espace métrique complet, alors* F *est complet (appliquer la définition de la fermeture utilisant les suites).*

Remarque. La complétude est une propriété qui dépend de la métrique, et pas seulement de la topologie sur X. Par exemple, $\mathbb{R}$ muni de la métrique $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$ n'est pas complet. En effet la suite $x_n = n$ est de Cauchy pour cette métrique, mais ne converge pas (exercice). Pourtant un ensemble est ouvert pour cette métrique si et seulement s'il l'est pour la métrique usuelle : chaque boule pour l'une de ces deux métriques contient une boule de l'autre.

Par contre, deux métriques équivalentes d_1, d_2, c'est à dire telles qu'il existe deux réels k, K strictement positifs tels que $kd_1 \leq d_2 \leq Kd_1$, ont mêmes suites de Cauchy, et sont donc simultanément complètes ou non complètes.

exemples

(A) $\mathbb{Q}$ (muni de $d(x, y) = |x - y|$) n'est pas complet, car la suite x_n définie par $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ est de Cauchy, mais n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$

(B) L'ensemble $\mathbb{R}$ est complet, tout espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet. Un espace vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach .

1.2 Différentielles dans les espaces de Banach

Soient E et F des espaces de Banach. On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est aussi l'espace des applications telles que

$$\|L\| = \sup\{|Lx| \mid |x|_E \leq 1\} < \infty$$

L'espace $L(E,F)$, muni de la norme $\|\bullet\|$ est de nouveau un espace de Banach.

Soit X un ouvert d'un espace de Banach. Les applications $C^k(X,F)$, sont définies comme suit :

$f : X \longrightarrow F$ est différentiable en x si il existe $L : E \longrightarrow F$ linéaire continue, telle que

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \circ(h)$$

où $\circ(h)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{|h| \longrightarrow 0} \frac{\circ(h)}{|h|} = 0$

On pose alors $df(x) = L$. On note df l'application de X dans $\mathcal{L}(E,F)$.

exemple. Une application linéaire continue est évidemment de classe C^∞. Elle est égale à sa différentielle. Ses différentielles d'ordre supérieur sont nulles.

Definition 1.2.9 *On dit que f est C^1 sur X si elle est différentiable en tout point de X et si $x \to df(x)$ est continue en x. Enfin on définit les fonctions de classe C^k par récurrence : l'application f est de classe C^k si $x \to df(x)$ est C^{k-1}.*

La définition a bien un sens puisque $df(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ qui est lui-même un espace de Banach. Sa différentielle est donc une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E,F)$, ou encore une application bilinéaire de E dans F.

Pour une fonction f de deux variables, (x,y), un résultat classique nous dit qu'elle est différentiable si et seulement si les fonctions $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont définies et continues. Ceci se généralise à un espace de Banach.

Proposition 1.2.10 *Si E, F sont des espaces de Banach, $E \oplus F$ est un espace de Banach, muni de la norme $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$. L'application $f : E \oplus F \longrightarrow G$ est de classe C^1 si et seulement si $x \longrightarrow f(x,y)$ et $y \longrightarrow f(x,y)$ sont de classe C^1, et* *leurs différentielles* $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sont continues. On a alors* $df(x,y)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k$.

Démonstration. En effet,

$$f(x+h,y+k)-f(x,y) = f(x+h,y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y) =$$
$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y+k)hdt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y+tk)kdt =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k+\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+th,y+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]hdt+\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+tk)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]kdt$$

La continuité de $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et de $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ entraîne que les deux derniers termes sont $\circ(|h|)$ et $\circ(|k|)$, et donc que

$$f(x+h,y+k)-f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)k + \circ(|h|) + \circ(|k|)$$

Nous allons montrer que sous les hypothèses adéquates, les dérivées partielles commutent.

Proposition 1.2.11 *(Lemme de Schwarz). Soient* X, Y, Z *trois espaces de Banach, et soit* $f \in C^1(X \times Y, Z)$ *une application telle que*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

soit définie et continue sur un ouvert V *de* $X \times Y$ *. Alors*

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

existe sur V *et égale à*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

Remarque. Notons que l'existence de la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

n'est pas dans les hypothèses, mais l'existence et la continuité de $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ sont nécessaires. En effet, la fonction $f(x,y) = |x|$ est telle que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \equiv 0$$

alors que

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

n'est pas définie.

Démonstration. On considère

$$\varphi(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$$

et on écrit

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+tk).kdt$$

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x+sh,y).hdt$$

$$= \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x+sh,y+tk).kdt)hds$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, cela se réécrit

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x+sh,y+tk).k.h\ dtds$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).k.h + \circ(|h|\,|k|)$$

par continuité de $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

L'égalité précédente se réécrit

$(\star)$ $f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).k.h + \circ(|h|\,|k|)$

mais le terme de gauche est égal à

$$f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y) =$$
$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x+sh,y+k).hds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x+sh,y).hds$$

et comme

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x+sh,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \circ_h(1)$$

où $\circ_h(1)$ désigne une quantité tendant vers 0 avec $|h|$.

La quantité précédente égale

$$\left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k)ds - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)ds + \circ_h(1)\right].h =$$
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \circ_h(1)\right].h$$

On en déduit en prenant la partie du premier ordre en h de chaque membre de $(\star)$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).k + \circ(|k|)$$

ce qui signifie exactement que $(x,y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ est différentiable et que

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Corollaire.Si f est de classe C^2, l'application $(h,k) \longrightarrow d(df(x)h)\cdot k$ est bilinéaire symétrique.

Démonstration. En effet, si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$g(s,t) = f(x+sk+th)$,g est de classe C^2 comme composée de fonctions de classe C^2,et on a

$$\frac{\partial}{\partial t} g(s,t)_{|t=0} = df(x+sk).h,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} g(s,t)_{|t=0,s=0} = (d^2f(x).k).h$$

De manière analogue,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} g(s,t)_{|t=0,s=0} = (d^2f(x).h).k$$

et le lemme de Schwarz montre que

$$(d^2f(x).h).k = (d^2f(x).k).h$$

ce qui signifie que $d^2f(x)$ est symétrique.

Corollaire.Soit f une application de classe C^k. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ tel que $|\alpha| = \sum_{j=1}^k \alpha_j = k$ si

$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$

est définie et continue, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

Démonstration. En effet, il suffit de montrer que l'on peut échanger l'ordre des deux dérivées "extérieures". Supposons, quitte à permuter les variables que $j = 2$ et que $\alpha_1 \geq 1$. Soit alors $g(x) = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x)$ où $\beta_1 = \alpha_1 - 1, \beta_j = \alpha_j$, $j \geq 2$.Alors g est de classe C^1, et par hypothèse,

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$$

est définie et continue, et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x)$$

Comme f est C^k, $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} f(x)$ ce qui termine la démonstration.

1.3 Le théorème de Picard

Soit T une application de(X, d) dans (Y, δ),

Definition 1.3.12 *On dit que T est contractante si elle est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est-à-dire qu'il existe $k < 1$ tel que*

$$\forall x, y \in X \quad \delta(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

Remarque.Une application contractante est lipschitzienne et donc évidemment continue

Theorem 1.3.13 *(Théorème de Picard). Soit (X, d) un espace métrique complet non vide. Si $T : X \to X$ est contractante, elle possède un unique point fixe.*

Corollaire.(Théorème de Picard « astucieux »). S'il existe n tel que T^n soit contractante, alors T a un unique point fixe.

Démonstration de Picard. Soit $x_0 \in X$. Montrons que la suite $(T_n x_0)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, donc convergente, puis que la limite est le point fixe cherché.

Pour $n \geq m$ nous pouvons estimer

$$d(T^n x_0, T^m x_0) = d(T^m(T^{n-m}x_0), T^m x_0) \leq k^m d(T^{n-m}x_0, x_0)$$

puis majorer

$$d(T^{n-m}x_0, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-m-1} d(T^{j+1}x_0, T^j x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-m-1} k^j d(Tx_0, x_0)$$
$$\leq \tfrac{1-k^{(n-m)}}{1-k} d(Tx_0, x_0) \leq \tfrac{1}{1-k} d(Tx_0, x_0)$$

Donc $d(T^n x_0, T^m x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(Tx_0, x_0)$ et la suite $(T^n x_0)$ est bien de Cauchy.

Notons donc x_∞ la limite de $T^n x_0$. Par continuité de T on a

$$Tx\infty = T(\lim_{n\longrightarrow\infty} T^n x_0) = \lim_{n\to+\infty} T^{n+1}x_0 = x_\infty$$

et x_∞ est donc un point fixe de T. L'unicité du point fixe résulte immédiatement de la propriété de contraction : si x, y sont deux points fixes on a

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

et puisque $k < 1$, on doit avoir $d(x, y) = 0$, $i.e.$ $x = y$.

Démonstration du Corollaire. Soit x un point fixe de T^n. Alors Tx est aussi un point fixe de T^n , car :

$$T^n(Tx) = T(T^n x) = Tx$$

Par unicité du point fixe de $T^n, Tx = x$. Comme tout point fixe de T est point fixe de T^n, l'unicité du point fixe de T^n entraîne celle du point fixe de T.

*Remarque.*Notons que sous les hypothèses du corollaire, on a encore

$x = \lim\limits_{k \to +\infty} T^k(x_0)$. En effet $x = \lim\limits_{k \to +\infty} T^{kn}(x_0)$ d'après la démonstration du théorème de Picard appliquée à T^n, donc pour $\quad 0 \leq r \leq n-1$,

$x = Trx = \underset{k \to +\infty}{lim} T^{kn+r}(x_0)$

Il est alors classique que si les suites $(T^{kn+r}(x_0))_{k\geq 1}$ pour $0 \leq r \leq n-1$convergent vers une même limite, la suite $(T^p(x_0))_{p\geq 1}$ converge aussi vers cette limite

Passons maintenant à une version à paramètres.

Dans la suite si $p = 0$, X et Λ seront des espaces métriques. Si $p \geq 1$ X sera un fermé d'un espace de Banach un ouvert d'un espace de Banach. On dira qu'une application sur un sous-ensemble d'un espace de Banach est de classe C^p, si elle est la restriction d'une fonction de classe C^p définie sur un voisinage de cet ensemble. De même pour une application Lipschitzienne.

Theorem 1.3.14 ***(Picard, version à paramètres).*** *Soit $p \geq 0$ et $(\lambda, x) \longrightarrow T_\lambda(x)$ une application de classe C^p. Si pour tout $\lambda \in \Lambda$, T_λ est contractante de rapport $k(k < 1)$, et si $x(\lambda)$ est l'unique point fixe de T_λ, alors $\lambda \longrightarrow x(\lambda)$ est C^p*

Démonstration de laversion à paramètres : Soit $x(\lambda)$ le point fixe unique de $T\lambda$ dont l'existence résulte du théorème de Picard.. Pour λ, μ dans un voisinage de λ_0, on a

$$d(x(\lambda), x(\mu)) = d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\mu))) \leq$$
$$d(T_\lambda(x(\lambda)), T\mu(x(\lambda)))) + d(T\mu(x(\lambda)), T\mu(x(\mu))) \leq$$
$$d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\lambda))) + kd(x(\lambda), x(\mu))$$

On en déduit que

$(1-k)d(x(\lambda), x(\mu)) \leq d(T_\lambda(x(\lambda)), T_\mu(x(\lambda)))$

De la continuité de $\mu \longrightarrow T_\mu(x(\lambda))$, on tire celle de $\mu \longrightarrow x(\mu)$ en $\mu = \lambda$.

Pour montrer que $\lambda \longrightarrow x(\lambda)$ est différentiable si $(\lambda, x) \longrightarrow T(\lambda, x)$ l'est, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme. Soit $\lambda \to L(\lambda)$ une application de classe C^p de dans $L(E, E)$ ensemble des endomorphismes continus de E, telle que $\|L(\lambda)\| < k < 1$. Alors $\lambda \longrightarrow (I - L(\lambda))^{-1}$ est de classe C^p.

Démonstration. En utilisant que la composée de fonctions de classe C^p est C^p, il suffit de montrer que $\varphi : L \longrightarrow (I-L)^{-1}$ est C^∞ sur $U = \{L \mid \quad \|L\| < k\}$. Or $(I-L)^{-1}$ est somme de la série$\sum_{j=0}^{\infty} L^j$ qui est normalement donc uniformément convergente sur U. Sa différentielle terme à terme est $H \longrightarrow \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{j-1} L^i H L^{j-i-1}$, qui est encore normalement (donc uniformément) convergente, car $\left\| \sum_{i=0}^{j-1} L^i H L^{j-i-1} \right\| \leq jk^{j-1} \|H\|$ donc φ est de classeC^1(d'après la proposition 1.30 de l'appendice).

Mais $(I - L)\varphi(L) = I$ donc en différentiant, $(I - L)d\varphi(L)H - H\varphi(L) = 0$, soit

$$d\varphi(L)H = (I - L)^{-1}H(I - L)^{-1}.$$

L'application $L \longrightarrow d\varphi(L)$ est alors C^1, vu que $(I - L)^{-1}$ l'est, et donc φ est de classe C^2.

Par récurrence, on montre que si φ est de classe C^r, elle est C^{r+1}, elle est donc C^∞

.

Écrivons maintenant, en utilisant le fait que T est de classe C^1 :

$$x(\mu) - x(\lambda) = T(\mu, x(\mu)) - T(\lambda, x(\lambda)) =$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial \lambda}T)(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + (\tfrac{\partial}{\partial x}T)(\lambda, x(\lambda))(x(\mu) - x(\lambda)) + \circ(\|x(\mu) - x(\lambda)\| + \|\mu - \lambda\|)$$

On en déduit

$$\left[I - \tfrac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right](x(\mu) - x(\lambda)) + \circ(\|x(\mu) - x(\lambda)\|) = \tfrac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + \circ(\|\mu - \lambda\|)$$

et en utilisant d'une part que $T(\lambda, x)$ étant Lipschitz de rapport k en x, on a $\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\| \leq k < 1$, et d'autre part le lemme, on en déduit que

$$x(\mu) - x(\lambda) + \circ(\|x(\mu) - x(\lambda)\|) =$$

$$\left[I - \tfrac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \tfrac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + \circ(\|\mu - \lambda\|)$$

Alors, λ étant fixé, posant C $= \left\| \left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda)) \right\|$on aura

$x(\mu) - x(\lambda) + \circ(\|x(\mu) - x(\lambda)\|) \leq C\,|\mu - \lambda| + \circ(|\mu - \lambda|)$

Puisque $\mu \longrightarrow x(\mu)$ est continue, le terme de gauche est minoré par $\frac{1}{2}\,\|x(\mu) - x(\lambda)\|$ pour μ assez proche de λ, d'où, pour μ au voisinage de λ,

$\|x(\mu) - x(\lambda)\| \leq 2C\,.\,|\mu - \lambda|$

Nous pouvons alors conclure que

$x(\mu) - x(\lambda) = \left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))(\mu - \lambda) + \circ(|\mu - \lambda|)$

ce qui signifie précisément que $\mu \longrightarrow x(\mu)$ est différentiable en λ, de différentielle

$$\left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x(\lambda))$$

D'après notre lemme, et le fait que T est de classe C^p, on déduit que

$$(\lambda, x) \longrightarrow \left[I - \frac{\partial}{\partial x}T(\lambda, x(\lambda))\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda}T(\lambda, x)$$

est de classe C^{p-1}, nous pouvons alors conclure par un argument dit de « bootstrap » En effet si $\lambda \to x(\lambda)$ est C^r pour $r \leq p - 1$, sa différentielle, composée de fonctions de classe C^r, est aussi de classe C^r, et donc $\lambda \to x(\lambda)$ est de classe C^{r+1}. Puisque $\lambda \to x(\lambda)$ est de classe C^0, l'argument ci-dessus montre par récurrence qu'elle est C^p ce qui termine la démonstration .

Remarque.(A) La démonstration du lemme revient à redémontrer qu'une série entière d'applications linéaires continues est C^∞ dans son domaine de convergence (comparer avec le fait qu'une série entière usuelle est C^∞ à l'intérieur du cercle de convergence)

(B) Si $\lambda \longrightarrow T\lambda$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il en est de même pour $\lambda \to x(\lambda)$.

1.4 Fonctions implicites et inversion locale

Parmi les applications du théorème de Picard, nous allons tout de suite démontrer les théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale. Ces deux théorèmes sont à la base de la théorie des sous-variétés exposée au chapitre 8. Une autre application du théorème de Picard, le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles, sera démontré dans la section suivante.

Theorem 1.4.15 ***(Fonctions implicites)***. *Soient E_1,E_2, F des espaces de Banach U, V des ouverts respectivement dans E_1,E_2 et $f : U \times V \longrightarrow F$ une application C^k où $k \geq 1$. On suppose $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ inversible dans $\mathcal{L}(E_2, F)$ d'inverse continue. Alors il existe des voisinages U'de x_0 et V'de y_0 et une application $\varphi \in C^k(U',V')$ tels que*

$\forall (x, y) \in U' \times V'$, $f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$.

Démonstration. On considère pour $x \in B(x_0, r), y \in B(y_0, r)$ l'application

$T_x(y) = y - \left[\frac{\partial}{\partial y} f\ (x_0, y_0)\right]^{-1} f\ (x, y)$

Si on choisit r et r' suffisamment petits, cette application envoie $\overline{B(y_0, r')}$ dans lui-même, car d'une part pour x, y dans $B(x_0, r) \times B(y_0, r')$ on a

$$|T_x(y) - T_{x_0}(y_0)| < \tfrac{1}{2}$$

d'autre part

$$dT_x(y) = Id - \tfrac{\partial}{\partial y} f\ (x_0, y_0)^{-1} \tfrac{\partial}{\partial y} f\ (x, y)$$

s'annule pour $x = x_0, y = y_0$ et par continuité on aura pour tout x dans $D(x_0, r)$ et y dans $D(y_0, r')$ l'inégalité

$$|dT_x(y)| < \tfrac{1}{2}$$

Comme $|T_x(y) - y_0| = \left|\frac{\partial}{\partial y} f\ (x_0, y_0)^{-1} f(x, y_0)\right| \leq \frac{r'}{2}$ si r et r' sont assez petits, on a $\overline{T_x(B(y_0,r'))} \subset \overline{B(T_x(y_0),\frac{r'}{2}}) \subset \overline{B(y_0,r')}$

Enfin,T_x : $\overline{B(y_0,r')} \longrightarrow \overline{B(y_0,r')}$ étant contractante, et d'après les hypothèses, de classe C^k, T_x possède d'après le théorème de Picard à paramètres, un unique point fixe dans $B(y_0,r'), \varphi(x)$, et φ est de classe C^k.

Theorem 1.4.16 ***(Théorème d'inversion locale)***. *Si $\varphi : U \to V$ est C^k, $k \geq 1$,et $d\varphi(x_0)$ est un isomorphisme, il existe des ouverts U'et V'contenant x_0 et $y_0 = \varphi(x_0)$ et* *une application* $\psi \in C^k(V', U')$ *telle que* $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id$. *L'application* φ *est donc un difféomorphisme de* V'*sur* U'.

Démonstration. On applique le théorème des fonctions implicites en la variable ν à $f(u, v) = v - \varphi(u)$. On obtient alors une fonction ψ de classe C^k, définie dans un voisinage V' de v_0, telle que si $(u, v) \in V' \times U'$

$v = \varphi(u) \Longleftrightarrow u = \psi(v)$

Donc ψ et φ sont inverses l'une de l'autre.

1.5 Connexité, compacité

Les trois notions fondamentales en topologie sont complétude, compacité et connexité. Nous avons déjà abordé la complétude. Nous étudions ici brièvement les deux autres notions.

1.5.1 Connexité

Intuitivement, un espace connexe est « fait d'un seul tenant ».

Definition 1.5.17 *Un espace métrique X, est dit connexe, s'il n'existe pas de sous ensembles de X autres que* ϕ *et X qui soient à la fois ouverts et fermés.*
connexité de X s'exprime aussi en disant qu'il n'existe pas de fonction continue non constante à valeurs dans {0, 1} : en effet si on pouvait écrire $X = U \cup V$ *avec* U, V *ouverts disjoints non vides, la fonction caractéristique de U serait continue et non constante.*

Inversement, si $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ *est continue les ensembles* $U = f^{-1}(0)$, $V = f^{-1}(1)$ *sont des ouverts dont la réunion est* X, *non vides si et seulement si* f *est non constante.*

La propriété fondamentale de la connexité est d'être héréditaire par image directe

Proposition 1.5.18 *Si f est continue de X dans Y et si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe .*

Démonstration. Il suffit de l'écrire ! ! Si $f(X) = A \cup B$ avec A, B ouverts disjoints non vides, alors $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont ouverts, disjoints et non vides, et leur réunion est X.

Par connexité de X, l'un des deux ensembles $f^{-1}(A)$ ou $f^{-1}(B)$ est vide, et puisque A et B sont contenus dans l'image de X par f, nécessairement A ou B est vide.

Une propriété plus intuitive est la connexité par arcs. Tous les espaces connexes de cet ouvrage seront connexes par arcs.

Definition 1.5.19 *Un espace métrique (X, d) est connexe par arcs, si deux points quelconques peuvent être reliés par un arc continu :*

$$\forall x, y \in X \qquad \exists \gamma \in C^0([0,1], X) \text{ tel que } \qquad \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$$

La connexité par arcs entraîne de manière évidente la connexité. En effet, si f est à valeurs dans $\{0, 1\}$, et si x et y sont reliés par un chemin, le théorème des valeurs intermédiaires impose à f de prendre la même valeur en x et y. Donc f est constante.

Exemple. Un espace vectoriel, un convexe, un ensemble étoilé 7 sont connexes. Le cercle, la sphère, le tore sont connexes

1.5.2 Compacité

Definition 1.5.20 *Un espace métrique est compact s'il est non-vide et si tout recouvrement de X par des ouverts possède un sous-recouvrement fini. On dira qu'un espace métrique est précompact si pour tout ε strictement positif, il existe un recouvrement de l'espace par un nombre fini de boules de rayon ε.*

Le résultat suivant est parfois connu sous le nom de Borel-Lebesgue

Theorem 1.5.21 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(A) (X, d) est compact.

(B) Si une famille $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ de fermés est telle que les intersections finies des éléments de la famille sont non-vides, alors l'intersection de tous les fermés de la famille est non vide.

(C) Toute suite possède une valeur d'adhérence.

(D) (X, d) est complet et précompact.

Démonstration. Tout d'abord par passage au complémentaire, on voit que les propriétés

(A) et (B) sont équivalentes. Montrons que (A) entraîne (C). Soit $(x_n)_n \geq 1$ une suite sans valeur d'adhérence. Il existe pour tout $x \in X$ un ouvert U_x contenant x et seulement un nombre fini de termes de la suite. Mais comme

$$X = \bigcup_{x\in X} U_x$$

X est la réunion finie d'un nombre fini de U_x, ne contenant chacun qu'un nombre fini de termes de la suite, ce qui est absurde.

Montrons que (C) entraîne (D). En effet si toute suite possède une valeur d'adhérence, puisque toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente, l'espace est complet.

Montrons que l'espace est précompact. Raisonnons par l'absurde. Soit ε strictement positif tel qu'il n'existe pas de recouvrement par un nombre fini de boules de rayon ε.On pourrait alors construire une suite x_j telle que $x_{k+1} \notin \cup_{j=1}^{k} B(xj, \varepsilon)$

La suite $(x_k)_{k\geq 1}$ ne peut avoir de sous-suite convergente, car par hypothèse $d(x_j, x_k) \geq \varepsilon$, elle n'a donc pas de valeur d'adhérence pour $(x_k)_{k\geq 1}$.

Enfin montrons que (D) entraîne (A).

Si X est précompact, l'inégalité triangulaire entraîne que X est contenu dans une boule de rayon fini, que l'on peut supposer égal à 1. Soit maintenant un recouvrement

$$X = \bigcup_{x\in X} U_x$$

ne possédant pas de sous-recouvrement fini.

Définissons par récurrence une suite de boules $B_k = B(x_k, \frac{1}{2^k})$. Supposons que pour

$0 \leq k \leq n-1$,il n'y ait pas de sous-recouvrement fini de B_k par les U_λ. Alors d'un recouvrement fini de X par des boules de rayon $\frac{1}{2^n}$, on tire un recouvrement fini de B_{n-1} par des boules de rayon $\frac{1}{2^n}$, et donc au moins une de ces boules ne possède pas de recouvrement par un nombre fini de U_λ. Notons $B_n = B(x_n, \frac{1}{2^n})$ une de ces boules. On peut toujours choisir B_{n-1} et B_n non-disjointes (car on peut enlever du recouvrement de B_{n-1}les boules ne la rencontrant pas), et donc $d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ .On a donc construit une suite de boules,$B(x_n, \frac{1}{2^n})$ dont aucune n'est recouverte par un nombre fini d'ouverts U_λ et telles que $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1}{2^n}$ .On en déduit par récurrence que pour $j \leq k$, on a $d(x_j, x_k) \leq \frac{1}{2^j}$ et la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ qui est de Cauchy est donc convergente.Si x est sa limite, il existe λ_0 tel que x $\in$ Uλ_0 et donc pour ε assez petit, $B(x, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$ .Comme pour k assez grand $d(x_k, x) < \varepsilon - \frac{1}{2^k}$, on aura $B(x_k, \frac{1}{2^k}) \subset B(x, \varepsilon))$, et B_k est contenu dans U_{λ_0}ce qui contredit l'hypothèse que B_k n'est pas recouvert par un nombre fini de U_λ.

Remarque. Le théorème ci-dessus n'est valable que dans un espace métrique. Dans un espace topologique général, on dit que X est compact si

a) tout recouvrement de X par des ouverts possède un sous-recouvrement fini.

b) X est séparé, c'est -à-dire que deux points distincts sont contenus dans des ouverts disjoints (bien évidemment tout espace métrique est séparé).

On distingue alors la compacité, définie ci-dessus de la « compacité séquentielle », définie par l'existence pour toute suite d'une valeur d'adhérence. Si la compacité entraîne la compacité séquentielle, l'inverse n'est pas toujours vrai. Nous ne considérerons dans le cours aucun espace topologique autre que les espaces métriques, et ce phénomène n'interviendra donc pas.

Le lemme suivant est souvent utilisé, en particulier pour établir directement le lien entre compacité et compacité séquentielle (cf. Exercice (M)). Notons que l'hypothèse de compacité est utilisée sous la forme de compacité séquentielle.

Lemme. (Lemme de recouvrement de Lebesgue). Soit (X, d) un espace métrique compact, et $(U)_{\alpha\in A}$ un recouvrement de X. Alors il existe $\delta > 0$ tel que toute boule de rayon δ est contenue dans un ouvert du recouvrement.

Démonstration. Elle est analogue à la démonstration de « (D) entraîne (A) » du théorème ci-dessus. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une suite $B(x_n, \frac{1}{n})$ de boules qui ne sont contenues dans aucun U_α. Soit x une valeur d'adhérence de cette suite, il existe donc α_0 tel que $x \in U_{\alpha_0}$, et donc pour ε assez petit, $B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$. Mais alors pour n assez grand, on aura $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et si en outre, $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

$$B(x_n, \tfrac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$$

ce qui contredit notre hypothèse. ■

Exemple. Le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les ensembles fermés et bornés. Il en est de même dans $\mathbb{R}^n$ en vertu du fait qu'un produit d'espaces compacts est compact : en effet si (x_k, y_k) est une suite de $X \times Y$, on peut extraire une sous-suite $\phi(k)$ telle que $x_{\phi(k)}$ converge, puis de la suite $(x_{\phi(k)}, y_{\phi(k)})$ une sous-suite telle que $y_{\phi\psi(k)}$ converge. Mais alors $(x_{\phi\psi(k)}, y_{\phi\psi(k)})$ converge.

On voit aisément d'après la définition que les sous-espaces compacts d'un compact sont exactement les sous-ensembles fermés, et d'après le théorème, qu'un espace compact est complet.

Enfin, comme la connexité, la compacité s'hérite par image directe :

Proposition 1.5.22 *Soit f continue et X compact. Alors $f(X)$ est compact.*

Démonstration. Si (U_α) est un recouvrement de $f(X)$ par des ouverts, $f^{-1}(U_\alpha)$ est un recouvrement de X. L'image d'un sous recouvrement fini de ce recouvrement sera un sous recouvrement fini de $f(X)$.

Les compacts de $\mathbb{R}$ étant les fermés bornés, on en déduit le

Corollaire. Soit $f : X \longrightarrow R$ une application continue définie sur un espace compact,X. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Enfin, associée à la notion de compacité, nous avons la notion d'application propre.

Definition 1.5.23 *Une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est propre, si et seulement si l'image réciproque d'un compact est compacte.*

Definition 1.5.24 *(A) Une application continue* $f : R^p \to R^q$ *est propre si et seulement si* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \infty$. *Comme la continuité nous garantit que l'image réciproque d'un fermé est fermée, il suffit, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de montrer que l'image réciproque d'un borné est bornée*

(B) Une application polynomiale de $\mathbb{C}$ *dans lui-même est toujours propre. L'application* $\exp : z \longrightarrow e^z$ *n'est pas propre puisque* $\exp(2ki\pi) = 1$ *et donc l'ensemble* $\exp^{-1}(1) = 2i\pi\mathbb{Z}$*n'est pas compact.*

1.6 Les opérateurs

1.6.1 Opérateurs compacts

Definition 1.6.25 *Soit* A *un opérateur linéaire d'un espace normé* X *dans un espace normé* Y *, on dit que* A *est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans* Y *.*

Theorem 1.6.26 *Un opérateur* A *de* X *dans* Y *est compact si et seulement si pour toute suite bornée f'ng de X, la suite* $\{A\varphi_n\}$*contient une sous suite convergente dans* Y *.*

Theorem 1.6.27 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Theorem 1.6.28 *Une combinaison linéaire* $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ *des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Theorem 1.6.29 *Le produit* AB *de deux opérateurs bornés* A *et* B *est compact si l'un des opérateurs* A *ou* B *est compact.*

Theorem 1.6.30 *Soient X un espace normé et Y un espace de Banach, et soit fAng une suite d'opérateurs compacts de X dans Y , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de X dans Y .*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

alors A est compact.

Theorem 1.6.31 *Soit A un opérateur borné de X dans Y à image A(X) de dimension finie. Alors A est compact.*

Theorem 1.6.32 *L'opérateur identique I de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.*

Theorem 1.6.33 *L'opérateur intégral A de C(G)dans C(G) à noyau continu est un opérateur compact.*

Démonstration. En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$; ($\|\varphi\| \leq M$, pour tout $\varphi \in E$). De plus on a

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y \in G} |k(x,y)|\,, \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E$$

D'où l'ensemble $A(E)$ est borné. D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, alors pour tout x, y et z de G , on a

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$,tel que $|x - y| < \delta \Longrightarrow |k(x,z) - k(y,z)| < \frac{\epsilon}{M|G|}$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \epsilon \qquad \text{pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G \text{ avec } |x - y| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble A(E) est équicontinu, d'où A(E) est relativement compact par le théorème d'Arzelà-Ascoli. Alors A est compact. ■

Theorem 1.6.34 *L'opérateur intégral A de $C(\partial G)$dans $C(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$ si ∂G est de classe C^1.*

1.6.2 Opérateurs intégraux

Theorem 1.6.35 *Soit G un ensemble compact de R^n et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans C alors l'opérateur linéaire défini de $C(G)$ dans $C(G)$ par*

$$A\varphi(x) = \int\limits_G |k(x,y)|\, dy, \qquad x \in G$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K cet opérateur est borné de norme $\|A\|$ donnée par

$$\|A\| = \max_{x\in G} \int\limits_G |k(x,y)|\, dy$$

Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est-à-dire de la forme

$$|k(x,y)| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) b_j(y)$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

Proposition 1.6.36 *Soit A un opérateur intégral à noyau dégénéré. L'image de A est de dimension finie.*

Démonstration. Nous allons montrer que l'image de A est engendrée par les fonctions $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Sa dimension est donc majorée par p.

Soit $\varphi \in L^2(a,b)$.

$$T\varphi(x) = \int_\alpha^b \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) b_j(y) \varphi(y) dy = \sum_{j=1}^{n} (\int_\alpha^b b_j(y)\varphi(y)dy)\alpha_j(x)$$

qui est bien un élément de l'espace vectoriel engendré par $\{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$. Ce résultat sera utilisé plus loin pour démontrer la compacité de l'opérateur A. ■

Proposition 1.6.37 *Soit A l'opérateur intégral de noyau K :Alors l'opérateur adjoint A^* est un opérateur intégral de noyau K^*, avec*

$$K^*(t,s) = K^*(s,t)$$

Démonstration.

Il suffit de partir de la définition. Soit $\varphi, \psi \in L^2([a,b])$.

$$(T\varphi, \psi) = \int\limits_\alpha^b (\int\limits_\alpha^b k(x,y)\varphi(y)dy)\psi(x)dx = \int_{[a,b]\times[a,b]} k(x,y)\varphi(y)\psi(x)dydx$$

par le théorème de Fubini. En échangeant encore l'ordre d'intégration, il vient
$(T\varphi,\psi)=\int\limits_{\alpha}^{b}(\int\limits_{\alpha}^{b}k(x,y)\psi(x)dx)\varphi(y)dy=(\varphi,T^{*}\psi)$
D'après la définition de l'adjoint. En permutant le nom des variables, on obtient le résultat voulu. ■

Corollaire. L'opérateur intégral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau est symétrique $\quad k(x,y)=k(y,x)$

Theorem 1.6.38 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\|<1$, et soit I l'opérateur identique dans E. Alors $I-A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann*

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{k}$$

de plus

$\|(I-A)^{-1}\|\leq\frac{1}{1-\|A\|}$

Démonstration.

De la relation $\|A\|<1$, on a la convergence absolue
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\|A^{k}\right\|\leq\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A\|^{k}=\frac{1}{1-\|A\|}$
Dans l'espace de Banach $L(E)$, par conséquent la série de Neumann converge en norme et dé…nit un opérateur linéaire borné

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}A^{k}$$

avec la relation

$$\|S\|\leq(1-\|A\|)^{-1}$$

de plus S est l'inverse de $(I-A)$.

En effet, utilisons les notations ($A^{0}=I$ et $A^{k}=AA^{k-1}$), on peut voir que
$S(I-A)=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}A^{k}(I-A)=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(I-A^{n+1})=I$
aussi
$(I-A)S=(I-A)\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}A^{k}=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(I-A^{n+1})=I$
puisque la norme

$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \longrightarrow 0$,lorsque $n \longrightarrow \infty$ ■

Approximation successive

l est à remarquer que la somme partielle

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} A^k f$$

de la série de Neumann vérifie l'équation

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f \text{ , pour } n \geq 0$$

d'où la relation directe entre la série de Neumann et la théorie des approximations successives.

Theorem 1.6.39 *Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$,et soit I l'opérateur identique dans E alors pour tout $f \in E$ l'approximation successive*

$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f \qquad$ *pour* $n = 0, 1, 2, ...$

avec φ_0 un vecteur arbitraire de E converge vers une solution unique φ de l'équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

Démonstration. Il est aisé de voir que de la relation précédente, on a

$\varphi_0 = f$

$\varphi_1 = A\varphi_0 + f = Af + f$

$\varphi_2 = A\varphi_1 + f = A^2 f + Af + f$

. .

. .

. .

$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f = A\sum_{k=0}^{n} A^k f + f = A^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} A^k f$

d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_{n+1} &= \lim_{n \longrightarrow \infty} (A^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} A^k f) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} A^k f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f \end{aligned}$$

$$= Sf = (I - A)^{-1} f \ .C.Q.f.D$$

On remarque que l'application de ces résultats d'analyse fonctionnelle aux équations intégrales est évidente. ■

Corollaire. Soit K un noyau continu, vérifiant la relation

$$\max_{x \in G} \int_G |k(x,y)|\, dy < 1$$

alors pour tout $f \in C(G)$, l'équation intégrale de seconde espèce

$\varphi(x) - \int_G k(x,y)\varphi(y)dy = f\ (x)\ , \quad x \in G$

admet une solution unique '$\varphi \in C(G)$, de plus l'approximation successive

$\varphi_{n+1}(x) = \int_G k(x,y)\varphi_n(y)dy + f\ (x) \qquad n = 0, 1.....$

converge uniformément vers la solution ' pour tout vecteur arbitraire φ_0 de C(G).

1.6.3 Opérateurs produits

Soient T_1, T_2 deux opérateurs intégraux sur $L_p(E)$ avec les noyaux K_1,K_2 respectivement, l'opérateur produit envoie aussi $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, où $(T_1T_2)\varphi = T_1(T_2\varphi)$.

Si les noyaux K_1, K_2 justifient l'inter-changement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau K du produit T_1T_2 en fonction de K_1, K_2.

$$\begin{aligned} T_1T_2\varphi(x) &= \int K_1(x,z) \int T_2\varphi(z)dz \\ &= \int K_1(x,z) \int K_2(z,y)\varphi(y)dy \\ &= \int \varphi(y)dy \int K_1(x,z)K_2(z,y)dz \end{aligned}$$

D'où l'opérateur T_1T_2 est un opérateur intégral de noyau

$$K(x,y) = \int K_1(x,z)K_2(z,y)dz$$

Notons que, si on prend $T_1 = T_2 = T$, de noyau $K_1 = K_2 = K$, alors l'opérateur $T_1T_2 = T\ ^2$admet le noyau $K_2(x;y)$ donné par

$$K_2(x;y) = \int K(x,z)K(z,y)dz$$

par itération le noyau $K_n(x,y)$ de T^n est

$$K_n(x,y) = \int K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz$$

Chapitre 2

Classifications des équations intégrales

Dans ce chapitre on a étudie la classification des equations integrales de type Fredlhom et Volterra et on a démontre l'existence et l'unicité des solutions de l'equation de type Volterra dans le cas linéaire et non linéaire on utilisant le théorème de point fixe de Picard et on termine ce chapitre par l'étude de quelque méthodes de résolutions des équations intégrales :

1-Méthode du déterminant de Fredlhom

2-Méthode de la résolvante et noyau itérés

2.1 Définitions et propriétés

Definition 2.1.40 *On appelle équation intégrale toute équation de la forme*

$\int_E K(x, y, \varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x)$ $\qquad\qquad (*)$

où E est un espace mesuré, f(x) une fonction mesurable donnée sur E, un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et K(x; y; '(y)) une fonction mesurable $E \times E$ *appelée noyau de l'équation intégrale.*

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction ' qui satisfait *l'équation (*).*

Definition 2.1.41 *On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont in…nies, ou bien le noyau devient in…ni au voisinage des limites de l'intégration.*

Lemme. Soit K une fonction de l'espace L2(]a ; b[ ]a ; b[) ; alors l'opérateur T défini par :

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \qquad x \in [a;b] \qquad (*\prime)$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de$L^2(]a;b[)$ dans lui-même.

Démonstration. La linéarité est évidente, seule la continuité (et le fait que T' est un élément de $L^2(]a;b[)$ si $u \in L^2(]a;b[)$, qui en sera une conséquence immédiate) est à démontrer.

Bien entendu, nous voulons majorer

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2 dx = \int_a^b (\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy)^2 dx \qquad x \in]a;b[$$

par l'inéga lité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2 dx \leq \int_a^b (\int_a^b |K(x,y)|^2 dy)(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy)dx \leq M^2 \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy$$

avec $M^2 = \int\int_{]a,b[\times]a,b[} |k(x,y)|^2 dydx < \infty$ puisque $k \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$.

Ce qui prouve que (2.1.1') dé…nit bien un opérateur continu de L2(]a ; b[) dans luimême, et montre au passage que sa norme est majorée par M. ■

Lemme. Soit $K \in L^2(]a;b[\times]a;b[)$. L'opérateur intégral A de noyau K est compact de $L^2(]a;b[)$ dans lui-même.

Démonstration. Nous admettrons qu'il est possible d'approcher le noyau K dans $L^2(]a;b[\times]a;b[)$ par une suite de noyaux $(K_n)_{n\in N}$ dégénérés, notons T_n l'opérateur intégral de noyau K_n. D'après la proposition 1.6.48, Tn est un opérateur de rang fini. Montrons que la suite T_n converge vers T.

On a

$$(T_n - T)\varphi(x) = \int_\alpha^b (K_n(x,y) - K(x,y))\varphi(y)dy$$

et

$$\|(T_n - T)\varphi\| = \int_\alpha^b (\int_\alpha^b (K_n(x,y) - K(x,y))\varphi(y)dy)^2)dx$$
$$\leq (\int\int_{]\alpha,b[\times]\alpha,b[} |K_n(x,y) - K(x,y|^2\, dy)dx\, \|\varphi\|^2$$
$$= \|K_n - K\|_{L^2(]a;b[\times]a;b[)}\, \|\varphi\|^2$$

Le premier terme tend vers 0, d'après le choix de K_n, ce qui achève la démonstration. ■

Remarques. 1. Pour l'étude de cette équation, on se restreint aux espaces $L_p(E)$ avec $(1 \leq p \leq 1)$.

Implicitement, pour les fonctions $f \in L_p(E)$, on cherche les fonctions φ dans $L_p(E)$ vérifie $(*)$, celà veut dire que dans cette restriction, on utilise uniquement les noyaux $K(x;y)$ pour lesquels $T\varphi$ soit dans $L_p(E)$ lorsque φ l'est .

2. Si on prend $K(x;y;\varphi(y)) = K(x;y)\varphi(y)$

L'équation intégrale $(*)$ devient

$$f(x) = \int_E K(x,y,\varphi(y))dy$$

qui est dite une équation intégrale linéaire.

3. Notons que l'équation $(*)$ peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \varphi + f$$

Où l'opérateur T s'écrit comme suit :

$$T\varphi(x) = \int_E k(x,y)\varphi(y)dy$$

4. Le type le plus général d'une équation intégrale linéaire est

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \int_E K(x,y,\varphi(y))dy$$

2.2 Exsistence et unicité des équations intégrales

Nous allons appliquer le théorème de Picard à l'étude des équations intégrales dites de Fredholm. etant données deux fonctions g, K dont on précisera le domaine de définition et la régularité, on cherche un réel λ et une fonction f telles que

$$f(x) + \lambda \int_\alpha^b k(x,t)f(s)ds = f(t)$$

Pour simplifier, fixons $\alpha = 0, b = 1$, et on suppose f et g continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R}^n$, les hypothèses sur K seront précisées ultérieurement.

Un cas particulier des équations de Fredholm est donné par les équations de Volterra pour lesquelles $K(s,t) = 0$ pour $s > t$. Elles s'écrivent donc

$$f(t) + \lambda \int_0^t k(s,t) f(s) ds = g(t)$$

Pour que $t \longrightarrow \int_0^t k(s,t) f(s) ds$ soit continue, il suffit, d'après la théorie de Lebesgue, que K soit mesurable, bornée, et que $t \to K(s,t)$ soit continue pour presque tout s. Ce sont les hypothèses que nous adopterons

Proposition 2.2.42 *(V. Volterra). Soit g une fonction continue sur $[0,1]$, et $(s,t) \longrightarrow K(s,t)$ mesurable, bornée et telle que $K(s,t) = 0$ pour $s > t$. On suppose de plus $t \longrightarrow K(s,t)$continue pour presque tout s dans $[0,1]$. Alors, quel que soit le réel λ, l'équation de Volterra*

$$f(t) + \lambda \int_0^t k(s,t) f(s) ds = g(t)$$

possède une solution unique.

Démonstration. On va appliquer le corollaire du théorème de Picard. Pour cela calculons T_g^n où

$$(T_g f)(t) = g(t) - \lambda \int_0^1 k(s,t) f(s) ds$$

est une application de $C^0([0,1], \mathbb{R})$ dans lui-même, en vertu de la continuité de g et du théorème de Lebesgue cité. Comme T_g est une application affine, de partie linéaire $(T_0 f)(t) = -\lambda \int_0^1 k(s,t) f(s) ds, T^n$ a pour partie linéaire T_0^n , et elle est contractante si et seulement si T_0^n l'est.

Posons

$$\chi(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > t \\ 1 & \text{si } s \leq t \end{cases}$$

Alors

$$|(T_0^n f)(t)| = (|\lambda|)^n \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ fois}} k(s_n, s_{n-1}) k(s_{n-1}, s_{n-1}) \dots k(s_1, t) f(s_1) ds_n \dots ds_1$$
$$\leq (|\lambda|)^n M^n \int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) \left| f(s_1) \right| ds_n \dots ds_1$$

On doit donc calculer

$$\int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) \left| f(s_1) \right| ds_n \dots ds_1 \leq \|f\| \int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) ds_n \dots ds_1$$

En posant

$$I_n(t) = \int_{[0,1]^n} \chi(s_n, s_{n-1}) \dots \chi(s_1, t) ds_n \dots ds_1$$

on vérifie aisément que $I_0(t) = 1$, et que

$$I_{n+1}(t) = \int_0^t I_n(s) ds$$

et par récurrence que $In(t) = \frac{tn}{n!}$. Donc

$$\|T_0^n f\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{n!} \|f\|_\infty$$

et comme pour n assez grand $\frac{||\lambda|^n M^n}{n!} n!$ est strictement inférieur à 1, T_0^n sera alors contractante.Il en est de même pour T_g^n dont T_0^n est la partie linéaire, et T_g a donc, d'après le corollaire de Picard , un unique point fixe, solution de l'équation de Volterra.

■

Remarques.

A) Si on ne suppose pas $K(s,t) = 0$ pour $s > t$, on obtient seulement $\|T_0^n f\| \leq |\lambda|^n M^n$,et on trouve donc une solution de l'équation de Fredholm pour λ assez petit.

(B) Le même argument de convergence dominée permet de dire que si $K_n(s,t)$ est une suite de fonctions vérifiant les hypothèses du théorème de Volterra, bornées par une constante indépendante de n et telles que

$$\lim_n k_n(s,t) = k_\infty(s,t)$$

alors les solutions de l'équation de Volterra associée à Kn convergent uniformément vers celle associée à K_∞. En effet l'opérateur T_n associé à K_n converge vers T_∞ associé à K_∞ et la conclusion résulte de la continuité dans le théorème de Picard.

(C) Ces équations interviennent par exemple dans le calcul de la déformation d'un solide visco-élastique en fonction des contraintes appliquées. Elles interviendront aussi dans l'étude des équations de Sturm-Liouville de la sous-section suivante.

(D) Les équations de Volterra ou de Fredholm sont linéaires ! On a donc simplement montré que $I - \lambda T$ a un inverse si $\|T^n\| \leq \frac{K^n}{n!}$,ce qui résulte de la convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n T^n$

Nous allons tratier maintenant le cas des équations de Volterra non linéaires

Considérons les conditions suivantes sur K(s, t, f) :

(V1) $f \longrightarrow K(s,t,f)$ est lipschitzienne de constante k et $|K(s,t,f)| \leq g(|f|\,,s)$ où $\forall e \in \mathbb{R} \quad g(e,\bullet) \in L^1$

(V2) $(s,f) \longrightarrow K(s,t,f)$ est mesurable pour tout t.

(V3) $t \rightarrow K(s,t,f)$ est continue p.p. en s.

(V4) $K(s,t,f) = 0$ si $s > t$.

Proposition 2.2.43 *(Volterra non-linéaire).Sous les hypothèses (V1), (V2), (V3), (V4), l'équation*

$$g(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(s,t,f(s))ds$$

possède une solution unique.

Démonstration. Sous la condition (V 4) l'équation s'écrit

$$g(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 K(s,t,f(s)))ds$$

Posons encore

$$\begin{aligned}(Tf)(t) &= g(t) - \lambda \int_0^1 K(s,t,f(s))ds \\ &= g(t) + (T_0 f)(t)\end{aligned}$$

Les conditions (V 1) (V 2) et (V 3) et le théorème de Lebesgue entraînent que l'application T envoie $C^0([0,1],E)$ dans lui-même. On a alors

$$\begin{aligned}|(Tf_1)(t) - (Tf_2)(t)| &= |\lambda| \,. \int_0^1 |K(s,t,f_1(s)) - K(s,t,f_2(s))ds| \\ &\leq |\lambda|\, k \int_0^1 \chi(t,s)\, |f_1(s) - f_2(s)|\, ds\end{aligned}$$

où k est la constante de Lipschitz de $K(s,t,.)$.

On en déduit que

$$|T^n f_1(t) - T^n f_2(t)| \leq |\lambda|^n\, k^n \int_0^1 ... \int_0^1 \chi(t,s_1)...\chi(s_{n-1},s_n)\, |f_1(s_n) - f_2(s_n)|\, ds_1...ds_n$$

Comme on l'a vu dans le cas linéaire

$$\int_0^1 ... \int_0^1 \chi(t,s_1)...\chi(s_{n-1},s_n)ds_1...ds_n = \frac{1}{n!}$$

et donc pour n assez grand, T^n est lipschitzienne de rapport $\frac{\lambda^n k^n}{n!}$. Elle est donc contractant pour n assez grand, et d'après le corollaire du théorème de Picard, T admet un point fixe unique. ■

2.3 Classifications des équations intégrales

La classification des équations intégrales porte sur beaucoup de caractéristiques de base, ce sont :

(A)- Linéarité ou non, (B)- Limite de l'intégration, (C)- Le placement de la fonction inconnue.

2.3.1 Equations intégrales linéaires

Definition 2.3.44

1- On appelle équation intégrale de Fredholm (EIF) de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^{b} k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad \textit{(I.1)}$$

2- On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_{\alpha}^{b} k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad \textit{(I.2)}$$

Definition 2.3.45 *1- On appelle équation intégrale de Volterra (EIV) de seconde espèce, une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^{x} k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad \text{(I.3)}$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_{\alpha}^{x} k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \qquad \text{(I.4)}$$

Remarque .

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x,t) = 0$ pour $t > x$.

2.3.2 Equations intégrales non-linéaires

Definition 2.3.46

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm (EINF) de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^{b} k(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \qquad \textit{(I.5)}$$

2- On appelle équation intégrale non-linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_{\alpha}^{b} k(x,t,\varphi(t))dt = 0$$

Definition 2.3.47

1- On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra (EINV) de deuxième espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^{x} k(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \qquad \textit{(I.6)}$$

2- On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda \int_{\alpha}^{x} k(x,t,\varphi(t))dt = 0$$

Remarque

(i) Si $f(x) \neq 0$, dans les équations (I.1), (I.3), (I.5) et (I.6) sont dites non homogènes.

(ii) Si $f(x) = 0$, dans les équations (I.1), (I.3), (I.5) et (I.6) sont dites homogènes.

2.3.3 Limites d'intégration

Toute équation intégrale à limites constantes est appelée équation de Fredholm

$\lambda\varphi(x) - \int_a^b K(x, y, \varphi(y))dy = f(x) \qquad a \leq x \leq b$

Si l'un des deux limites d'intégration est variable, l'équation devient une équation de Volterra

$\lambda\varphi(x) - \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy = f(x) \qquad a \leq x \leq b$

Il est clair que l'équation de Volterra peut être considérée comme une équation de Fredholm où la fonction K véri. . . e la condition

$K(x, y) = 0$pour $y > x$

Mais il est raisonnable de ranger les équations du type de Volterra en une classe spéciale, car elle possède des propriétés qui n'ont pas lieu pour des équations de Fredholm arbitraires.

2.3.4 Le second membre de l'équation

Si $f = 0$ l'équation est une équation homogène. Sinon cette équation est dite équation non-homogène.

2.4 Liaison entre les équations difféfretielles et les équations intégrales de Volterra

Soit l'équation di¤érentielle ordinaire d'ordre n

$$\frac{dy^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x) \qquad (*)$$

avec comme conditions initiales (n valeurs initiales)

$$y(\alpha) = c_0, \acute{y}(\alpha) = c_1, ..., y^{(n-1)}(\alpha) = c_{n-1} \qquad (**)$$

telles que les fonctions $a_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ et F sont dé. . . nies et continues sur $[a; b]$.

Alors les équations (*),(**) sont équivalentes à l'équation de Volterra de deuxième espèce

$$\lambda\varphi(x) - \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

où

$$K(s,t) = -\sum_{k=1}^{n} a_k(s)\tfrac{(s-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$f(s) = F(s)+c_{n-1}a_1(s)+\left[(x-x_0)c_{n-1}+c_{n-2}\right]a_2(s)+...+\left[\tfrac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}c_{n-1}+...+(s-x_0)c_1+c_0\right]a_n(s)$

Exemple

Soit

$$\begin{cases} \tfrac{dy^2}{dx^2}+a_1(x)\tfrac{dy^n}{dx^n}+a_2(x)y = F(x) \\ y(0)=c_0 \ , \ y\acute{}(0)=c_1 \end{cases} \qquad (1)$$

posons

$$\tfrac{dy^2}{dx^2} = \varphi(x) \qquad (2)$$

alors

$$\tfrac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1 \Longrightarrow y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + c_1(x) + c_0 \qquad (3)$$

Nous allons utiliser la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx... \int_{x_0}^{x}}_{n\ fois} f(x)dx = \tfrac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f\acute{}(z)dz$$

compte tenu de (2) et (3) mettons l'équation di¤érentielle (1) sous la forme

$$\varphi(x)+\int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt+c_1a_1(x)+\int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt+c_1xa_2(x)+c_0a_2(x) = F(x)$$

$$\Longrightarrow \varphi(x)+\int_0^x \left[a_1(x)+a_2(x)(x-t)\right]\varphi(t)dt = F(x)-c_1a_1(x)-c_1xa_2(x)-c_0a_2(x)$$

posons

$$K(x,t) = a_1(x)+a_2(x)(x-t),\ f(x) = F(x)-c_1a_1(x)-c_1xa_2(x)-c_0a_2(x)$$

nous obtenons une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

2.5 Méthodes de résolutions des équations intégrales

2.5.1 Méthode du déterminant de Fredholm

La structure de la solution

considéronss l'équationintégrale de Fredholm de deuxième espèce suivante

$$\varphi(x) - \lambda\int_{\alpha}^{b} k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (1.1)$$

Où $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramétre numérique

La résolvante de l'équation $(*)$ peut être représenté comme suit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{\alpha}^{b} R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (1.2)$$

La résolvante de l'équation fredholm $(*)$ vérifie

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \int_{\alpha}^{b} k(x,s)R(s,t,\lambda)ds$$

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \int_{\alpha}^{b} k(s,t)R(x,s,\lambda)ds$$

méthode du déterminant de Fredholm

La résolution de E.I de Fredholm (1.1) est donné par la formule (1.2) où la fonction $R(x,t,\lambda)$ dite résolvante de Fredholm de l'équation (1.1) est définie par

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \qquad D(\lambda) \neq 0 \qquad (1.3)$$

Ici $D(x,t;\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont les séries de puissances de λ

$$D(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A_n(x,t)\lambda^n, \qquad D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n\lambda^n \qquad (1.4)$$

avec les coefficients ainsi définis

$A_0(x,t) = k(x,t)$, et pour n=1,2,.... on a

$$A_n(x,t) = \underbrace{\int_{\alpha}^{b} ... \int_{\alpha}^{b}}_{n} \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & ... & k(x,t_1) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & ... & k(t_1,t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n,t) & k(t_n,t) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1...dt_n \qquad (1.5)$$

$B_0 = 1$, et pour $n = 1, 2, ...$ on a

$$B_n = \underbrace{\int_{\alpha}^{b} ... \int_{\alpha}^{b}}_{n} \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & ... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & ... & k(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1...dt_n \qquad (1.6)$$

Les fonctions $D(x,t;\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont respectivement le déterminant de fredholm et le mineur du déterminant de fredholm

Si le noyau k(x,t) est borné ou si l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{b} ... \int_{\alpha}^{b} K^2(x,t)dxdt < +\infty$$

les deux séries dans sont analytiques en λ, et les coefficients $A_n(x,t)$ et B_n vérifient les relations suivantes

$$A_n(x,t) = B_n k(x,t) - n\int_{\alpha}^{b} k(x,s)A_{n-1}(s,t)ds \qquad (1.7)$$

$$B_n = \int_{\alpha}^{b} A_{n-1}(s,s)ds \qquad (1.8)$$

Exemple 1

Considérons l'équation intégrale de fredholm de deuxième espèce suivante

$$\varphi(x) - \lambda\int_{0}^{1}(2x-t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (1.9)$$

On a alors $A_0(x,t) = k(x,t) = 2x - t$

$$A_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1 = \int_0^1 \begin{vmatrix} 2x-t & 2x-t_1 \\ 2t_1-t & 2t_1-t_1 \end{vmatrix} dt_1$$

ainsi

$$A_1(x,t) = -x - t + 2xt + \tfrac{2}{3}$$

$$A_2(x,t) = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & k(x,t_2) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) \\ k(t_2,t) & k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1dt_2$$

donc

$$A_2(x,t) = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} 2x-t & 2x-t_1 & 2x-t_2 \\ 2t_1-t & t_1 & 2t_1-t_2 \\ 2t_2-t & 2t_2-t_1 & t_2 \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0$$

Par conséquent $A_n(x,t) = 0$ pour $n \geq 2$

$B_0 = 1$,

$$B_1 = \int_0^1 k(t_1,t_1)dt_1 = \int_0^1 t_1dt_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$B_2 = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1dt_2$$

donc

$$B_2 = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 & 2t_1-t_2 \\ 2t_2-t_1 & t_2 \end{vmatrix} dt_1dt_2$$

$$B_2 = \int_0^1\int_0^1 [-4t_1t_2 + 2(t_1^2 + t_1^2)] = \tfrac{1}{3}$$

$$B_3 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & k(t_1,t_3) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & k(t_2,t_3) \\ k(t_3,t_1) & k(t_3,t_2) & k(t_3,t_3) \end{vmatrix} dt_1dt_2dt_3$$

$$B_3 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 & 2t_1-t_2 & 2t_1-t_3 \\ 2t_2-t_1 & t_2 & 2t_2-t_3 \\ 2t_3-t_1 & 2t_3-t_2 & t_3 \end{vmatrix} dt_1dt_2dt_3 = 0$$

Par conséquent $B_n(x,t) = 0$ pour $n \geq 3$

Donc

$$D(x,t;\lambda) = A_0(x,t) - \lambda A_1(x,t)$$

Donc

$$D(x,t;\lambda) = (2x-t) + (x+t-2xt-\tfrac{2}{3})\lambda$$

et

$$D(\lambda) = B_0 - B_1\lambda + \tfrac{1}{2}B_2\lambda^2$$

Par suite

$$D(\lambda) = 1 - \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{6}\lambda^2$$

La résolvante cherchée de l'équation est

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{2(x-t)+(x+t-2xt-\frac{2}{3})\lambda}{1-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{6}\lambda^2}$$

2.5.2 Méthode de la résolvante et noyau itérés

Cas Equation de volterra

Soit l'équation intégrale linéaire de volterra de deuxième espèce suivante

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.10}$$

Supposons que $k(x,t)$ est continue sur $a \leq x \leq b$ et $a \leq t \leq x$ et encore $f(x)$ continue sur $[a,b]$, la solution de l'équation est donné par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)\varphi(t)dt \tag{1.11}$$

$R(x,t,\lambda)$ s'appelle la résolvante de l'équation de volterra de deuxième espèce (1.10) nous cherchons la résolvante $R(x,t,\lambda)$. Pour cela nous cherchons la solution de l'équation (1.10) sous la forme d'une série entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x)\lambda^n \tag{1.12}$$

Porton formellement cette série dans (1.10) , il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x)\lambda^n = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,t)\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(t)\lambda^n dt$$

En procédant par identification nous obtenons

$$y_0(x) = f(x)$$

$$y_1(x) = \int_a^x k(x,t)y_0(t)dt = \int_a^x k(x,t)f(t)dt$$

$$y_2(x) = \int_a^x k(x,t)y_1(t)dt = \int_a^x k_2(x,t)f(t)dt$$

$$y_3(x) = \int_a^x k(x,t)y_2(t)dt = \int_a^x k_3(x,t)f(t)dt \qquad \text{etc}$$

on établit de façon analogue qu'en général on a

$$y_n(x) = \int_a^x k_n(x,t)f(t)dt \qquad n = 1,2,3.... \tag{1.13}$$

Ici on a

$$k_n(x,t) = \int_a^x k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz \qquad n = 1,2,3.... \tag{1.14}$$

et on a les relations $k_1(x,t) = k(x,t)$ et $k_n(x,t) = 0$ si $t > x$

Les fonctions $k_n(x,t)$ définies par (1.13) s'appelant noyau itérés , les noyaux ont les propriétés suivantes

$$k_n(x,t) = \int_a^x k_m(x,s)k_{n-m}(s,t)ds \tag{1.15}$$

compte tenu de (1.13) et (1.14) l'égalité (1.12) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=0}^{+\infty}\lambda^\nu\int_a^x k_\nu(x,t)f(t)dt$$

Ainsi d'aprés (1.11) la résolvante est définie par la série

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\lambda^\nu k_\nu(x,t)$$

<u>Cas Equation de fredholm</u>

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda\int_\alpha^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \tag{1.16}$$

On pose

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Psi_n(x)\lambda^n \tag{1.17}$$

avec $\Psi_n(x)$ définie par les formules

$$\Psi_1(x) = \int_\alpha^b k(x,t)f(t)dt,$$

$$\Psi_2(x) = \int_\alpha^b k(x,t)\Psi_1(t)dt = \int_\alpha^b k_2(x,t)f(t)dt,$$

$$\Psi_3(x) = \int_\alpha^b k(x,t)\Psi_2(t)dt = \int_\alpha^b k_3(x,t)f(t)dt, \qquad etc...$$

ici on a

$$k_n(x,t) = \int_\alpha^b k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz \tag{1.18}$$

avec

$$k_1(x,t) = k(x,t)$$

on a aussi

$$k_n(x,t) = \int_\alpha^b k_m(x,z)k_{n-m}(z,t)dz \tag{1.19}$$

La résolvante de l'équation (1.16) est définie en fonction des noyau itérés de la façon suivante

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n(x,t)\lambda^n$$

cette série est la série de Neumann du noyau $k(x,t)$. Elle est convergente si

$$|\lambda| < \tfrac{1}{M}$$

avec

$$M = \sqrt[2]{\int_\alpha^b \int_\alpha^b k^2(x,t)dxdt}$$

Chapitre 3

Les applications des équations intégrales

chapitre est consacré a l'applications des équations intégrales pour cela on a choisi trois applications

1- Problèmes des moments généralisés.

2- Applications à la théorie des fonctions analytiques

3- Application aux équations de Sturm-Liouville

3.1 Application à l'équations de Sturm-Liouville

Les équations de Volterra permettent aussi d'aborder l'étude des équations de de Sturm-Liouville, c'est-à-dire d'équations du second ordre avec conditions aux limites, L'exemple type est

$$(3) \qquad \begin{cases} \ddot{u} + q(t)u(t) = -\lambda u(t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dont on cherche les solutions (λ, u), avec bien entendu u de classe C^2, non identiquement nulle. On appelle alors λ valeur propre et u fonction propre du problème. On supposera q continue.

Pour v fixé, la solution générale de $\ddot{u}(t)+\lambda u(t)=v(t)$ peut s'écrire, si $\lambda\neq 0$,

$$u(t)=\alpha\cos(\sqrt[2]{\lambda}t)+b\sin(\sqrt[2]{\lambda}t)+\int_0^t v(s)\frac{\sin(\sqrt[2]{\lambda}(t-s))}{\sqrt[2]{\lambda}}ds$$

Alors l'équation

$$\ddot{u}+q(t)u(t)=-\lambda u(t)$$

est équivalente à

$$u(t)=\alpha\cos(\sqrt[2]{\lambda}t)+b\sin(\sqrt[2]{\lambda}t)+\int_0^t q(s)\frac{\sin(\sqrt[2]{\lambda}(t-s))}{\sqrt[2]{\lambda}}u(s)ds$$

avec $u(0)=0$, $u(1)=0$.

La condition $u(0)=0$ est équivalente à $a=0$, et donc l'équation (3) se réécrit

$$(3') \begin{cases} u(t)=b\sin(\sqrt[2]{\lambda}t)-\int_0^t q(s)\frac{\sin(\sqrt[2]{\lambda}(t-s))}{\sqrt[2]{\lambda}}u(s)ds \\ u(1)=0 \end{cases}$$

de fonction inconnue u.

La première ligne est une équation de Volterra, qui a donc une unique solution, notée $u_{b,\lambda}$. Comme $u_{b,\lambda}=bu_{1,\lambda}$, résoudre (3) se ramène à trouver λ telle que $u_{1,\lambda}(1)=0$. On peut remarquer que

$$T_\lambda\ :\ y\ \longrightarrow\ \sin(\sqrt[2]{\lambda}t)\ -\ \int_0^t q(s)\frac{\sin(\sqrt[2]{\lambda}(t-s))}{\sqrt[2]{\lambda}}y(s)ds$$

envoie $C^0([0,1],[-A,A])$ dans $C^0([0,1],[-B,B])$ avec

$$B=1+\frac{A}{\sqrt[2]{\lambda}}\max_{[0,1]}|q(s)|$$

Pour A et λ assez grands, $B\leq A$ et la fonction $u_{1,\lambda}$, point fixe de $T\lambda$, est non-nulle, et bornée par A.

On en déduit que $u_{1,\lambda}$ est uniformément bornée indépendamment de λ, et donc lorsque λ tend vers $+\infty$,

$$u_{1,\lambda}=\sin(\sqrt[2]{\lambda})\ +\circ(1/\sqrt[2]{\lambda})$$

change de signe une infinité de fois, et donc s'annulera une infinité de fois. Ceci démontre l'existence d'une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valeurs de λ tendant vers l'infini, pour lesquelles notre problème a une solution.

3.2 Problèmes des moments généralisés.

Il est presque évident que les systèmes d'équations linéaires

$$(1) \qquad \int_{\alpha}^{b} \alpha_n(y)\varphi(y)dy = c_n \qquad n = l, 2..$$

$$(2) \qquad \int_{\alpha}^{b} \alpha_n(y)d\varphi(y)dy = c_n$$

peuvent se réduire formellement à des équations intégrales. En introduisant un noyau $K(x, y)$ définie par les relations

$$K(x, y) = \alpha_n(y) \qquad \text{pour} \quad n - 1 < x < n$$

$$K(x, y) = 0 \qquad \text{pour } x = \textit{nombre entier}$$

et en posant

$$f(x) = c_n \qquad \text{pour } n - 1 < x < n$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{pour } x = \textit{nombre entier}$$

on trouve que les systèmes (1) et (2) sont équivalents aux équations

$$\int_{\alpha}^{b} K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

$$\int_{\alpha}^{b} K(x, y)d(\varphi(y)dy = f(x)$$

Les systèmes (2) ont été étudiés d'une manière détaillée par M. F. Riesz. Il obtient en même temps un théorème important sur l'approximation des fonctions continues par des systèmes donnés de fonctions continues.

Il y a lieu de rappeler aussi à cette occasion les travaux récents de M. S. Bernstein sur les fonctions absolument monotones.

La théorie des formes quadratiques et les équations intégrales symétriques.

La théorie, créée par M. Hilbert, des formes quadratiques (où hermitiennes) à une infinité de variables en connexion avec la théorie des équations intégrales à noyau symétrique est certainement la plus importante découverte qui ait été faite dans la théorie des équations intégrales après les travaux fondamentaux de Fredholm

3.3 Applications à la théorie des fonctions analytiques.

M. Hilbert a démontré que la théorie des équations intégrales permet de résoudre le problème suivant posé par Riemann : Déterminer une fonction analytique dans un domaine D lorsque on connaît une relation (linéaire) entre sa partie réelle et sa partie imaginaire à la frontière de D. Il a aussi traité le problème plus général que voici : Trouver n fonctions $f_v(z)$ de caractère rationnel à l'intérieur d'une courbe G et n fonctions $g_v(z)$ de caractère rationnel à l'extérieur de G telles qu'on ait sur G

$$f_p(z) = \sum_{q=1}^{n} c_{pq}(z) g_q(z) \qquad p = 1, 2...n,$$

$c_{pq}(z)$ étant des fonctions données définies sur C. Comme cas particulier M. Hilbert obtient une solution du problème de déterminer les équations différentielles linéaires qui admettent un groupe de monodromie donné. M. Plemelj a donné une autre méthode remarquable pour résoudre ces problèmes au moyen des équations intégrales.

M. Uhler a utilisé des méthodes analogues pour généraliser la théorie des fonctions zetafuchsiennes. M. Hasemann a obtenu certaines généralisations des résultats de M. Hilbert cités plus haut.

Nous allons considérer le problème suivant : Etant donnée une courbe G rectifiable et une fonction 0 (z) définie sur C qui transforme G en elle-même ; rechercher les fonctions analytiques / (z) qui satisfont à la relation

$f[\theta(z)] = a(z) f(z)$ $\qquad$ $sur\ C$ $\qquad$ $[a(z) = fonction\ donnée]$et qui admettent les mêmes singularités qu'une fonction rationnelle $P(z)$ donnée à l'intérieur de C. Si aucune des itérées

$\theta(z) \quad \theta_2(z) = \theta[\theta(z)]\ , \quad \theta_2(z) = \theta[\theta_3(z)]...$ $\qquad$ ne se réduise pas à z le problème ne peut admettre de solutions que dans des cas très particuliers. Nous supposerons que 02 (z) = z et que 0 (z) décrit G en sens inverse lorsque la variable z parcourt G en sens direct. Pour que notre problème soit possible il faut qu'on ait

$$a(z)a\left[\theta(z)\right] = 1$$

Supposons en outre que P (z) soit une fonction rationnelle régulière à l'extérieur de C et s'annulant à l'infini. En appliquant l'intégrale de Cauchy on trouve une équation intégrale de la forme

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\left[\frac{1}{z-x} - \frac{a(z)a[\theta(x)]\theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)}\right]f(z)dz = a\left[\theta(x)\right]P\left[\theta(x)\right] + P(x)$$

On voit que le noyau est borné si C est à courbure continue et si 0'(z) est une fonction continue.

Je dis que le problème fondamental sur l'existence des fonctions automorphes est un cas particulier de la question que nous avons posée. Considérons pour simplifier un groupe fuchsien dont un polygone générateur C est situé entièrement audessus de l'axe réel. Les substitutions fondamentales définissent une transformation involutoire $\theta(z)$ de C en elle-même. $\theta(z)$ est, en général, discontinue en les sommets de G. Pour que $f(z)$ soit une fonction automorphe appartenant au groupe donné il faut et il suffit qu'on ait

$$f\left[\theta(z)\right] = f(z) \quad \text{sur } C.$$

L'équation intégrale

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c}\left[\frac{1}{z-x} - \frac{\theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)}\right]f(z)dz = P(x) + P\left[\theta(x)\right]$$

qui correspond à ce problème est singulière à cause de la discontinuité de $\theta(z)$. Pour éviter cette difficulté nous remplacerons dans les calculs précédents $\frac{1}{z-x}$ par

$$G(z,x) = \frac{1}{z-x} + \sum_{r}\frac{1}{z-\xi_r(x)}$$

où $\xi_r(x)$ sont les transformées de x qui sont situées dans les transformées (en nombre limité) du polygone générateur dont les frontières ont des points communs avec C.

On obtient ainsi l'équation

$$f(x) - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{c}\left\{G(z,x) - \theta'(z)G\left[\theta(z),\theta(x)\right]\right\}f(z)dz = \frac{P(x)+P[\theta(x)]}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{(r)}\left[P(\zeta_r\left[x\right]) + P(\zeta_r\left[\theta(x)\right])\right]$$

qui est une équation régulière de Fredholm. En appliquant les théorèmes de Fredholm, nous pouvons, au moyen de cette équation, établir d'une manière simple les points essentiels de la théorie des fonctions fuchsiennes. Une méthode analogue est applicable aussi dans le cas où le polygone générateur a des points communs avec l'axe réel. Le même procédé est applicable aux fonctions teta-fuchsiennes et aux fonctions zéta-fuchsiennes.

Si l'on considère en particulier les fonctions doublement périodiques on obtient le résultat simple suivant : Les fonctions doublement périodiques de périodes ω_1 et ω_2 sont les solutions de l'équation intégrale

$$f(x) - \frac{1}{2\omega_1 i}\int_c \left[\cot\frac{\pi}{\omega_1}(z-x-\omega_2) - \cot\frac{\pi}{\omega_1}(z-x-\omega_2)\right] f(z)dz =$$
$$= \frac{H(x)+H(x+\omega_1)}{2}$$

où $H(x)$ est une fonction meromorphe périodique de période ω_1 n'ayant pas des pôles à lexterieur da la bande

$$z = \omega_1 s + \omega_2 t, \qquad -\infty < s < \infty,\ 0 \leq t < 1$$

et tendant vers zéro dans la direction de $\pm\omega_2$

Ajoutons finalement que l'ensemble des fonctions analytiques régulières à l'intérieur du cercle d'unité E (et à carré intégrable dans E) peuvent s'obtenir comme fonctions fondamentales de l'équation intégrale hermitienne suivante

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\int_E \frac{1}{(1-xy)^2}F(y)d\sigma.$$

Conclusion

Les équations intégrales jouent un rôle important dans l'analyse fonctionnelle ainsi que d'autres aspects physique.

Notre étude des équations intégrales nous a montrer leurs dépendance et liaison directe avec les équations différentielles dont on a traiter la résolution de l'équation de Sturn Lioville comme exemple on a prouver que sa solution n'est autre que trouver la solution de l'équation intégrale correspondante.

Références

[1] C. BERGE, ESPACES TOPOLOGIQUES, DUNOD PARIS 1959

[2] P. Colmez Eléments d'Analyse et d'Algèbre. Cours de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2009.

[3] F. Laudenbach Calcul Différentiel et Intégral. Editions de l'école Polytechnique, Palaiseau, 2000.

[4] N. Mouride. Cours sur les équations intégrales, université de M'sila 2008.

[5]A. RAHMOUN, Résolution Numérique des Equations Intégrales, Mémoire de MAGISTER université de M'sila 2002.

[6] F.G.TRICOMI, Integral equations. University press, Combridge, 1957.

[7] F.G. Tricomi. Integral equations. Dover, New-York,1985.