الجـــــمهورية الـــــجـزائريـــــــة الديمــــــــــــقراطيــــــــــة الشعبيــــــة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعـليـــم العــالــــــــي و البـــــــحــــــث العلـــــــــمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جـــــامعة عمــــــــار ثليــــــــــجي بالأغــــــــواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كـليــــــة العلـــوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Domaine	**:**	**Mathématiques et informatique (MI)**
Filière	**:**	**Mathématiques**
Option	**:**	**Analyse mathématique**

Présenté par : Aissa Baflah

THEME

Sur les opérateurs p-sommants

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Y. Belabbaci	**MCA**	**Président**
Z. Bendaoud	**MCA**	**Encadreur**
A. Belacel	**MAA**	**Co-Encadreur**
A. Chetih	**MAA**	**Examinateur**
A. Yacoub	**MAA**	**Examinateur**

Année universitaire 2013-2014

Remerciements

Je remercie avant tout, notre Dieu qui nous a éclairé la bonne voie et nous a aidé à la parcourir.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mes encadreurs Z. BENDAOUD et A. BELACEL pour avoir proposé ce sujet, leurs précieux conseils et leurs aides le long de tout mon travail.

Je remercie très chaleureusement les membres de jury qui n'ont pas hésité d'avoir accepté cette tâche.

Enfin, tous mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents

A toute ma famille

A tous mes amis

A tous ceux qui intéresse au développement du savoir.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Nous nous arrêterons au cadre de ce mémoire sur l'étude de quelques éléments de la théorie des opérateurs et plus précisément les opérateurs p-sommants. Historiquement, Les opérateurs p-sommant $(1 \leq p < \infty)$ ont été introduit, pour la première fois par le célèbre mathématicien Grothendieck. En 1966, le mathématicien allemand Pietsch était le premier qui a étudié les opérateurs p-sommants $(1 < p < \infty)$. Ensuite, grâce aux mathématiciens **Pelczynski** et **Lindenstrauss** et d'autres, la théorie a gagné une attention particulière dans la théorie des espaces de Banach et l'analyse fonctionnelle.

Notre travail est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre on a rappelé les outils nécessaires qu'on aura besoin aux chapitres qui suivent (espaces de Banach, espaces de Hilbert, topologie faible et les théorèmes de Hahn-Banach...).

Dans le deuxième chapitre, on a donné la définition des opérateurs en question, leurs propriétés fondamentales et le théorème important de Pietsch sur la factorisation, ainsi que trois exemples illustrant ces opérateurs.

Dans le troisième chapitre, on a exposé quelques relations des opérateurs p-sommants avec la classe des opérateurs complètement continus, les opérateurs de Hilbert-Schmidt et les opérateurs p-concaves.

Notation	Signification
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	Corps des scalaires
E, F, G	Espaces de Banach
$L(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires de E dans F
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires et bornés (continus)
E^*	Dual topologique de l'espace E
$B_E = \{x \in E; \quad \|x\| \leq 1\}$	Boule unité de E
$B_{E^*} = \{x^* \in E^*; \|x^*\| \leq 1\}$	Boule unité de E^*
$\langle x, x^* \rangle$	Crochet de dualité entre E et E^*
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues sur le compact K
$\mathcal{V}(E, F)$	Espace des opérateurs complètement continus
$\mathcal{K}(E, F)$	Espace des opérateurs compacts
$\mathcal{W}(E, F)$	Espace des opérateurs faiblement compacts
p^*	Conjugue d'un réel p, vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$
$H_1, H_2, ...$	Espaces de Hilbert
$HS(H_1, H_2)$	Espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt
$K_p(L, E)$	Espace des opérateurs p-concaves

Table 1 – Tableau des Notations

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner les notions et les outils que nous aurons à utiliser dans ce mémoire. Dans les deux premières sections de ce chapitre on définit les espaces vectoriels, les espaces topologiques, les espaces métriques, les espaces normés ainsi que les espaces de Banach qui vont jouer un rôle fondamentale dans toute la suite et les espaces de Hilbert. Un autre outil puissant qu'on aura besoin c'est la topologie faible et faible-$*$ qui sera l'objet de la quatrièmme section, enfin la dernière section va exposer des théorèmes de base de l'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs linéaires.

1.2 Espaces vectoriels, topologiques et métriques

Définition 1.2.1. *Soit E un ensemble quelconque, on définit sur E une première loi entre ses éléments, dite loi interne*

$$+ : \quad E \times E \longrightarrow E$$

qui vérifie :

$\forall x, y \in E$	$(x+y) \in E$	*stabilité*
$\forall x, y \in E$	$x + y = y + x$	*commutativité*
$\forall x, y, z \in E$	$x + (y+z) = (x+y) + z = x + y + z$	*associativité*
$\exists e \in E, \forall x \in E$	$x + e = e + x = x$	*élément neutre*
$\forall x \in E, \exists x' \in E$	$x + x' = x' + x = e$	*élément symétrique*

Une seconde loi sur E est définie entre ses éléments et des nombres d'un corps $\mathbb{K}$, dite loi externe

$$* : \quad \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

qui vérifie :

$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$	$(\alpha * x) \in E$	*stabilité*
$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$	$\alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$	*associativité*
$\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$	$\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$	*distributivité de $*$ sur $+$*
$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$	$(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$	*distributivité de $+$ sur $*$*
$\exists 1_{\mathbb{K}} \in E, \forall x \in E$	$1_{\mathbb{K}} * x = x$	*élément unité*

Le triplet $(E, +, *)$ s'appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, les éléments de E s'appellent des vecteurs et on appelle scalaires ceux de $\mathbb{K}$.

Définition 1.2.2. *Un sous ensemble F d'un espace vectoriel $(E, +, *)$ s'appelle sous espace vectoriel et on le note $(F, +, *)$, si il vérifie :*

1. *$F \neq \emptyset$;*
2. *$\forall x, y \in F \quad (x + y) \in F;$ (stable pour $+$)*
3. *$\forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha * x \in F;$ (stable pour $*$).*

Exemples 1.

1. *$(\mathbb{R}, +, .)$ la droite numérique muni de l'addition et de la multiplication habituelle présente un espace vectoriel.*
2. *Soit E un espace vectoriel, et soit l'ensemble*

$$\{f : E \longrightarrow \mathbb{K}\}$$

On définit l'addition et la multiplication sur cet ensemble par :

$$\forall x \in E, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

L'ensemble de toutes ces applications forme un espace vectoriel, on le note par $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$.

Définition 1.2.3. *Soient E un ensemble quelconque et I un ensemble quelconque d'indices. On définit sur E une topologie τ qui est une famille de sous-ensembles de E qui satisfont les conditions suivantes :*

1. $\emptyset, E \in \tau$ *;*

2. Toute intersection finie d'éléments de τ *est dans* τ*.i.e.*

$$\cap_{i=1}^{n} O_i \in \tau.$$

3. Toute réunion d'éléments de τ *est dans* τ*.i.e.*

$$\cup_{i\in I} O_i \in \tau.$$

On appelle le couple (E, τ) *espace topologique, les éléments de* τ *sont appellés des ouverts.*

Exemples 2. *1. Soit* $E = \{a, b, c, d\}$*, on considère la topologie*

$$\tau = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

(E, τ) *est un espace topologique.*

2. La droite réelle $\mathbb{R}$ *muni de la topologie de tous les intervalles ouverts constitue un espace topologique.*

Parmi les espaces topologiques particuliers, on distingue les espaces métriques et les espaces normés.

Définition 1.2.4. *On appelle métrique ou distance toute fonction d'un ensemble* $E \times E$ *à valeur dans* $\mathbb{R}_+$ *et on la note* ρ*.*

$$\rho : \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y, z \in E$ *:*

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *;*

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; *(Symétrie)*

3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(Inégalité triangulaire).*

Le couple (E, ρ) *s'appelle espace métrique.*

Exemples 3. *1.* $(\mathbb{R}, \rho)$*, avec* $\rho(x, y) = |x - y|$ *est un espace métrique.*

2. Dans l'espace $\mathbb{R}^2$*, on introduit la métrique ou la distance entre* $x = (x_1, x_2)$ *et* $y = (y_1, y_2)$ *par :*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

La définition suivante provienne de [5, p. 47].

Définition 1.2.5. *On dit qu'un espace métrique* E *est séparable si il existe un sous-ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense dans* E*.*

1.3 Espaces normés et espaces de Hilbert

Définition 1.3.1. *Soit* $(E, +, .)$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*, on appelle norme sur* E *et on la note* $\|.\|$ *toute application*

$$\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y \in E$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, les conditions suivantes :*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|\alpha.x\| = |\alpha|.\|x\|;$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Le couple $(E, \|.\|)$ *s'appelle espace vectoriel normé.*

Exemple 1. *On peut définir sur l'espace réel* $\mathbb{R}^n$ *les normes suivantes. Pour tout vecteur* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *:*

1. $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|;$$
2. $$\|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}};$$
3. $$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Définition 1.3.2. *Soit* E *un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de* E *et on le note par* E^* *l'espace* $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ *de toutes les formes linéaires continues définient sur* E*.* E^* *est un espace normé, et on définit la norme de* $u \in E^*$ *par l'une des formules équivalentes suivantes :[9]*

1. $$\|u\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|u(x)|}{\|x\|};$$
2. $$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |u(x)|;$$
3. $$\|u\| = \sup_{\|x\| = 1} |u(x)|;$$

4.
$$\|u\| = \inf\{K > 0, \quad |u(x)| \leq K\|x\|\}.$$

On introduit par la suite un sous ensemble particulier et important des espaces vectoriels normés, c'est les espaces de Banach.

Définition 1.3.3. *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace normé E est de Cauchy si :*
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall i, j > N_0 \quad \|x_i - x_j\|_E \leq \epsilon.$$

Définition 1.3.4. *Un espace vectoriel normé E est dit espace de Banach, si il est complet. C'est-à-dire si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de E est convergente dans E.*

Exemples 4.
1. *La droite réelle constitue un espace de Banach.*
2. *Soit E un espace normé. Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi. En particulier, E^* l'espace dual de E est un espace de Banach.*
3. *Soit $1 \leq p < +\infty$ un nombre réel, les espaces formés par les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que :*
$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$
muni de la norme
$$\|(x_n)_n\|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$
est un espace de Banach qu'on le désigne par $l_p(\mathbb{R})$ ou tout simplement l_p.
4. *L'espace formé par les suites bornées muni de la norme*
$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$
est un espace de Banach noté $l_\infty(\mathbb{R})$ ou tout simplement l_∞.
On notera $c_0(\mathbb{R})$ ou c_0 le sous espace fermé de l_∞ des suites qui convergent vers zéro.
5. *Soit K un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme*
$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

6. *Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré,* f *une fonction* Σ*-mesurable. On définit suivant les valeurs du réel* p *les normes suivantes*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Big(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \Big)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C; |f(x)| \leq C \quad p.p \text{ sur } \Omega\} & p = +\infty \end{cases}$$

Pour $1 \leq p < +\infty$*, l'espace de Banach* $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *représente l'espace de toutes les classes d'équivalences, modulo l'égalité presque partout, des fonctions* Σ*-mesurables telles que* $\|f\|_p < +\infty$*,* Σ *est la tribu de Lebesgue et* μ *la mesure de Lebesgue.*

Introduisons la notion d'espace réflexif [5, p. 39].

Définition 1.3.5. *Soit* E^{**} *le bidual de* E*, i.e. l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur* E^**, et soit l'injection canonique suivante :*

$$J_E : E \longrightarrow E^{**}. \tag{1.2}$$

qui à tout $x \in E$ *associe* $J_E(x)$ *telle que*

$$\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle, \quad \forall x^* \in E^*$$

cette application est une isomértie i.e.

$$\|J_E(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E, \quad \forall x \in E$$

On dit que l'espace de Banach E *est refléxif si*

$$J_E(E) = E^{**} \qquad (J_E \text{ est bijective}).$$

La définition suivante provienne de [6, p. 39].

Définition 1.3.6. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur* E *toute forme bilinéaire, symétrique et définie positive. C'est-à-dire*

$$< ., . >: \quad E \times E \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

telle qu'en plus est linéaire par rapport aux deux variables, elle est :

$$\begin{array}{lll} \forall x, y \in E & < x, y > = < y, x > & \textit{symétrique} \\ \forall x \in E & < x, x > \geq 0 & \textit{définie positive} \\ \forall x \in E & < x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0 & \end{array}$$

On dit que le couple $(E, < .,. >)$ est un espace préhilbertien si E est un espace vectoriel et $< .,. >$ est un produit scalaire.
Si l'espace E est de dimension finie on appelle $(E, < .,. >)$ espace Euclidien.
De même, si à la place du corps $\mathbb{R}$ on prend $\mathbb{C}$, on aboutit à des espaces préhilbertiens complexes.

La proposition suivante fait le lien entre les espaces préhilbertiens et les espaces normés, voir [6, p. 39].

Proposition 1.3.1. *Soit $(E, < .,. >)$ un espace préhilbertien ; alors l'expression*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

définie une norme sur E. On dira que $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire $< .,. >$.

Définition 1.3.7. *On appelle espace Hilbertien ou espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.*

Exemples 5.

1. *$\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire Euclidien défini par :*

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

   on a :

$$< x, y >= x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

2. *Parmi les espaces l_p, seulement l'espace l_2 est de Hilbert, et on a*

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l_2$$

   on a :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

3. *L'espace $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ constitué par les fonctions à carré intégrable muni du produit scalaire*

$$\forall f, g \in L_2(\mu) \quad < f, g >= \int_\Omega f(x)g(x)d\mu(x)$$

   est l'un des plus important exemples d'espaces de Hilbert, la norme associée est

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \Big(\int_\Omega f^2(x)d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

1.4 Formules et inégalités

L'inégalité de Hölder Soient

$$a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{p*} \right)^{\frac{1}{p*}}. \tag{1.3}$$

Dans le cas continu, pour toute fonction $f \in L_p(\mu), g \in L_{p*}(\mu)$ on a :

$$\int_\Omega |f(t)g(t)| d\mu(t) \leq \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(t)|^{p*} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p*}}. \tag{1.4}$$

L'inégalité de Minkowski Soient

$$a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le cas continu, pour toute fonction $f, g \in L_p(\mu)$ et $p > 1$ on a :

$$\left(\int_\Omega |f(t) + g(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour la démonstration voir [12, p. 46].

1.5 Topologie faible et faible-$*$

Soit (x_n) une suite de points d'un espace vectoriel normé E. Soit $f \in E^*$, il se peut arriver que $(f(x_n))$ converge cependant que (x_n) ne converge pas, d'où les deux définitions suivantes. [5, p. 40]
On définit sur l'espace de Banach E, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ notée w qui est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires sur E.

Soit $(x_n)_n$ une suite de E, et $x \in E$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x si et seulement si

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x^*, x_n\rangle, \quad \forall x^* \in E^*.$$

De même, on définit sur l'espace de Banach E^* la topologie faible-$*$, pour chaque $x \in E$ on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longrightarrow & \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{array}$$

La topologie faible-$*$ notée $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.
Soit $(x_n^*)_n$ une suite de E^*, et $x^* \in E^*$. On dit que $(x_n^*)_n$ converge $*$-faiblement vers x^* si et seulement si

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle x_n^*, x\rangle, \quad \forall x \in E.$$

Illustrons la notion de la topologie faible par l'exemple fondamentale suivant, voir [1, p. 9-10].
On définit l'espace des suites faiblement p-sommables. On dit qu'une suite est faiblement p-sommable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^p < +\infty, \quad \forall x^* \in E^*.$$

L'espace des suites faiblement p-sommables noté par

$$l_{p,w}(E)$$

est un espace de Banach ([8, p. 32-33]), où la norme est définie par

$$\|(x_n)\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

Dans le cas $p = \infty$

$$l_{\infty,w}(E) = l_\infty(E) \quad \text{où} \quad \|(x_n)\|_{l_{\infty,w}} = \|(x_n)\|_\infty. \tag{1.6}$$

1.6 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés.

Définition 1.6.1. *L'application*

$$u: \quad \begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = u(x) \end{aligned}$$

s'appelle opérateur linéaire si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2).$$

D_u désigne le domaine de définition de l'opérateur u.

Par la suite, on va s'occuper aux opérateurs dit bornés.

Définition 1.6.2. *Un opérateur u est borné, si il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \qquad \forall x \in E.$$

Définition 1.6.3. *Un opérateur u est continu en $x_0 \in E$, si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x - x_0\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|u(x) - u(x_0)\|_F < \epsilon.$$

Théorème 1.6.1. *L'opérateur u est continu si et seulement si il est borné.*

Pour plus de détails voir $[12, p.215 - 216]$.
Parmi les outils principales qu'on aura besoin la notion d'opérateur dual. Voir [12, p. 223-224].

Définition 1.6.4. *Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire borné, on appelle opérateur dual de u et on le note par u^* l'application :*

$$u^*: \quad F^* \longrightarrow E^*$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \forall y^* \in F^*: \quad \langle u(x), y^* \rangle = \langle x, u^*(y^*) \rangle.$$

Théorème 1.6.2. *Si u est un opérateur borné, donc u^* l'est aussi et on a :*

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} \tag{1.7}$$

1.7 Théorèmes fondamentaux

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.7.1. *Soit $x, y \in E$, on appelle segment joignant les deux points x, y l'ensemble de tous les éléments de la forme*

$$\alpha x + \beta y; \quad \alpha, \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta = 1.$$

Définition 1.7.2. *Un ensemble $M \subset E$ est dit convexe, si*

$$\forall x, y \in M; \ \textit{le segment joingant ces deux points est inclu dans } M.$$

Définition 1.7.3. *Soit $A \subset E$, on appelle enveloppe convexe de l'ensemble A le plus petit convexe contenant A, et le note par $conv(A)$.*

Théorème 1.7.1 (Théorème de Hahn-Banach forme analytique). *Soit*

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

une application qui vérifie :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x); \quad \forall x \in E \quad \textit{et} \quad \forall \lambda > 0,$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y); \quad \forall x, y \in E.$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous espace vectoriel et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x); \quad \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, i.e.

$$g(x) = f(x); \quad \forall x \in G$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x); \quad \forall x \in E.$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [5, p. 2]

Remarque 1. *Conçernant le dual topologique d'un espace normé, on peut introduire la norme moyennant le produit de dualité entre E et E^* de la manière suivante :*

$$\|x^*\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle x, x^* \rangle|.$$

Les trois corollaires suivants ainsi que leurs démonstrations proviens de [5, p. 3-4].

Corollaire 1.7.1. *Soit G un sous espace vectoriel de E et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme*

$$\|g\|_{G^*} = \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle|$$

Alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g telle que :

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*} \tag{1.8}$$

Démonstration. posons $p(x) = \|g\|_{G^*}\|x\|$. On a :

1. $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} p(x+y) = \|g\|_{G^*}\|x+y\| &\leq \|g\|_{G^*}(\|x\| + \|y\|) \\ &\leq p(x) + p(y) \end{aligned}$$

2. $\forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned} p(\lambda x) = \|g\|_{G^*}\|\lambda x\| &\leq \|g\|_{G^*}\lambda\|x\| \\ &\leq \lambda p(x) \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \|g\|_{G^*} &= \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle| \\ &= \sup_{x \in B_G} |g(x)| \\ &= \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|_{G^*}$$

ce qui vous dire

$$|g(x)| \leq \|g\|_{G^*}\|x\|, \quad \forall x \in G - \{0\}.$$

En appliquant le théorème (1.7.1), on constate qu'il existe une forme linéaire f qui prolonge g, telle que

$$|f(x)| \leq \|g\|_{G^*}\|x\|, \quad \forall x \in E$$

Donc

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|g\|_{G^*} \tag{1.9}$$

Montrons l'autre sens de l'inégalité (1.8).
On a

$$\|f\|_{G^*} \leq \|f\|_{E^*} \quad \text{car } G \subset E$$

Mais, et en vertu du prolongement on a :

$$\|f\|_{G^*} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \|g\|_{G^*}$$

donc

$$\|g\|_{G^*} \leq \|f\|_{E^*} \tag{1.10}$$

et d'après les formules (1.9) et (1.10), il résulte que

$$\|g\|_{G^*} = \|f\|_{E^*}$$

□

Corollaire 1.7.2. *Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E^*$, tel que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \textit{et} \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

Démonstration. Soit $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Il est clair que $G \subset E$; l'application g est continue pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ car :

$$|g(tx_0) - g(t_0x_0)| = |t.\|x_0\|^2 - t_0.\|x_0\|^2| = |(t - t_0)\|x_0\|^2| \leq \epsilon$$

Il suffit de choisir

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|x_0\|^2} \qquad x_0 \neq 0.$$

D'autre part

$$\frac{|g(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \frac{|t|\|x_0\|^2}{|t|\|x_0\|} = \|x_0\| = \|g\|_{G^*}.$$

donc, et d'après le corollaire (1.7.1) il existe $f_0 \in E^*$, tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

(pour la dernière égalité on pose $t = 1$). □

Corollaire 1.7.3. *Pour tout $x \in E$ on a :*

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle|. \qquad \textit{(le sup est atteint)}$$

Démonstration. On suppose que $x \neq 0$ donc pour toute $f \in B_{E^*}$ on a d'un part :

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$$

i.e.

$$\sup_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\|$$

et d'autre part d'après le corollaire (1.7.2) il existe une application $f_0 \in E^*$ telle que

$$\|f_0\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$$

Si on pose $f_1 = \|x\|^{-1} f_0$, on remarque que $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$. □

Définition 1.7.4. *Soit E un espace normé, on appelle hyperplan d'équation*

$$[f = \alpha]$$

l'ensemble

$$H = \{x \in E \quad f(x) = \alpha\}$$

avec, f est une forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 1.7.5. *Soit $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens*

1. *large si*

$$f(x) \leq \alpha; \quad \forall x \in A \quad \textit{et} \quad f(x) \geq \alpha; \quad \forall x \in B$$

2. *strict si*

$$\exists \epsilon > 0, \quad f(x) \leq \alpha - \epsilon; \quad \forall x \in A \quad \textit{et} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon; \quad \forall x \in B$$

Théorème 1.7.2 (Théorème de H-B première forme géométrique). *Soit E un espace normé et $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. Supposons que A est **ouvert**, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

Notons qu'un hyperplan est fermé si et seulement si sa fonction f est continue.

CHAPITRE 2

LES OPÉRATEURS P-SOMMANTS

2.1 Introduction

En $1955-1956$ le mathématicien **Grothendieck** a travaillé sur les opérateurs 1-sommants dans son ouvrage intitulé «**Applications semi-intégrales à droite**». En 1966 **Pietsch** a fondé la théorie des opérateurs p-sommants $(1 \leq p < \infty)$, ensuite par les deux mathématiciens **Pelczynski** et **Lindenstrauss** parmi d'autres la théorie a gagné une attention particulière dans la théorie dans les espaces de Banach et l'analyse fonctionnelle, voir [1], [7], [8], [10], [13], [16], .. .
L'idée principale de ce chapitre est d'illustrer le concept d'opérateur p-sommant, pour cette raison, dans la première section, on a défini les opérateurs en question, leurs classe et les principaux théorèmes relatifs. Par la suite et dans la deuxième section, le Théorème de Factorisation due à Pietsch va nous permettre d'étudier les opérateurs p-sommants d'un autre point de vue et il sera utile dans le chapitre qui suit. On désigne par la suite par E et F deux espaces de Banach.

2.2 Définition et propriétés

Définition 2.2.1. *Supposons que $1 \leq p < \infty$ et $u \in L(E, F)$. On dit que l'opérateur u est* ***absolument p-sommant****, si il existe une constante $C > 0$, et pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ de E on a :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\Big)^{1/p} \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p\Big)^{1/p}. \tag{2.1}$$

L'ensemble de tous ces opérateurs est noté par $\pi_p(E,F)$ et on note par $\pi_p(u)$ la borne inférieure des constantes C vérifiant (2.1).

Remarques 1. *1. En vertu des formules* (1.1) *et* (1.5)*, la formule* (2.1) *peut encore s'écrit :*

$$\|\big(u(x_k)\big)_{k=1}^n\|_p \leq C\|(x_k)_{k=1}^n\|_{p,w} \tag{2.2}$$

Donc on peut tirer que les opérateurs p-sommants transforment des suites faiblement p-sommantes vers des suites fortement p-sommantes.

2. Dans le cas $p=\infty$, la formule (2.2) *s'écrit :*

$$\|\big(u(x_k)\big)_{k=1}^n\|_\infty \leq C\|(x_k)_{k=1}^n\|_{\infty,w}$$

et en vertu de (1.6) *on aura :*

$$\sup_{1\leq k\leq n}\|u(x_k)\| \leq C\sup_{1\leq k\leq n}\|x_k\|.$$

On conclut que si $p=\infty$ l'ensemble $\pi_\infty(E,F)$ sera identique à $\mathcal{L}(E,F)$.

Enonçons maintenant une proposition importante qui fait la liaison entre l'espace $\pi_p(E,F)$ et l'espace $\mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 2.2.1. *Soit*

$$u : E \longrightarrow F \qquad \textit{un opérateur linéaire.}$$

Si u est p-sommant. Alors, u est continu.

Démonstration. Il suffit de prendre le cas $n=1$ dans (2.1). Soient

$$u \in \pi_p(E,F) \quad \text{et} \quad x \in E$$

donc

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u)\sup_{x^*\in B_{E^*}}|\langle x, x^*\rangle|$$

en vertu du Corollaire (1.7.3), on constate que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u)\|x\|$$

qui exprime la continuité de u sur E. Avec l'inégalité intéressante

$$\|u\| \leq \pi_p(u). \tag{2.3}$$

□

Proposition 2.2.2. *L'ensemble $\pi_p(E,F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\pi_p(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

1. $\pi_p(E,F)$ est non vide, car pour $u=0$ (l'opérateur nul) on a :

$$0 \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}, \qquad \forall C > 0.$$

2. Soient u et v deux opérateurs p-sommants, où il existe C_1 telle que :

$$(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{1/p} \leq C_1 \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}$$

et il existe C_2 telle que :

$$(\sum_{k=1}^{n} \|v(x_k)\|^p)^{1/p} \leq C_2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}$$

Si on applique l'inégalité de Minkowski, on trouve :

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n} \|(u+v)(x_k)\|^p)^{1/p} &\leq (\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} \|v(x_k)\|^p)^{1/p} \\ &\leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}\end{aligned} \tag{2.4}$$

par conséquent

$$u+v \in \pi_p(E,F).$$

3. Soient u un opérateur p-sommant et α un réel quelconque, donc il existe C telle que

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n} \|(\alpha u)(x_k)\|^p)^{1/p} &= |\alpha|(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{1/p} \\ &\leq |\alpha| C \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Par conséquent

$$(\alpha u) \in \pi_p(E,F).$$

□

Proposition 2.2.3. *π_p est une norme sur l'espace $\pi_p(E,F)$.*

Démonstration. Pour tous u et v deux opérateurs p-sommants et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite d'éléments de E, on a :

1. $$\pi_p(u) \geq 0 \quad \text{(puisque les constantes } C \text{ sont positives).}$$

2. – Si $\pi_p(u) = 0$ donc
$$(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p)^{1/p} = 0$$
c'est-à-dire u est nul.
– Si l'opérateur nul vérifie (2.1). Alors,
$$0 \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle| \qquad \forall x \in E.$$
il est clair que la borne inférieure des nombres C est 0, donc
$$\pi_p(0) = 0.$$

3. Soit α un réel quelconque, on va montrer que $\pi_p(\alpha u) = |\alpha| \pi_p(u)$.
Comme $u \in \pi_p(E,F)$, on a d'après l'inégalité (2.5)
$$\begin{aligned} \pi_p(\alpha u) &= \inf(|\alpha| C) \\ &= |\alpha| \inf C \\ &= |\alpha| \pi_p(u). \end{aligned}$$

4. Soient u et v deux opérateurs p-sommants, on a d'après l'inégalité (2.4) :
$$\pi_p(u+v) \leq \pi_p(u) + \pi_p(v).$$

□

Proposition 2.2.4. *$(\pi_p(E,F), \pi_p)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Montrons que si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy de $\pi_p(E,F)$, alors elle converge dans le même espace.
On a :
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_0, \quad \forall i > j \geq j_0, \quad \pi_p(u_j - u_i) \leq \epsilon.$$

donc, pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ d'éléments de E on a :

$$(\sum_{k=1}^{n} \|(u_j)(x_k) - (u_i)(x_k)\|^p) \leq \epsilon^p \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p).$$

Si $i \longrightarrow +\infty$;

$$(\sum_{k=1}^{n} \|(u_j)(x_k) - u(x_k)\|^p) \leq \epsilon^p \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p). \tag{2.6}$$

Et puisque $\pi_p(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$, on trouve $u_j \longrightarrow u$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, et d'après l'inégalité (2.6)

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad \pi_p(E, F).$$

□

Théorème 2.2.1 (Théorème d'Inclusion). *Si* $1 \leq p < q < \infty$. *Alors,*

$$\pi_p(E, F) \subseteq \pi_q(E, F).$$

en plus

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

La démonstration provienne de [1, p. 11].

Démonstration. Soient

$$(x_k)_{k=1}^n \subset E \quad \text{et} \quad \lambda_k = \|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1}.$$

donc

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^p = \lambda_k^p \|u(x_k)\|^p = \|u(x_k)\|^q$$

par suite

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

si $u \in \pi_p(E, F)$, on aura

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p |\langle x_k, x^* \rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

moyennant la formule (2.7), on trouve

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p |\langle x_k, x^* \rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit d'autre part $\alpha = \frac{q}{q-p}$ et $\beta = \frac{q}{p}$. Comme

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1.$$

on peut appliquer l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_p(u)\Big(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^p)^{\frac{q}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{q}\frac{1}{p}} \sup_{x^*\in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^{p\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{p}{q}\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(u)\Big(\sum_{k=1}^{n}(\|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1})^{\frac{pq}{q-p}}\Big)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{x^*\in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^{q}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_p(u)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|(x_k)\|_{q,w}.
\end{aligned}$$

multipliant les deux membres par

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

on trouve

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u)\|(x_k)\|_{q,w}. \tag{2.8}$$

donc

$$u \in \pi_q(E,F).$$

et d'après (2.8) on a

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

□

Théorème 2.2.2 (Théorème de Composition). *Soit* $1 \leq p < \infty$.

1. *Si* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $v \in \pi_p(F,G)$. *Alors,*

$$v \circ u \in \pi_p(E,G) \quad et \quad \pi_p(v\circ u) \leq \pi_p(v)\|u\|.$$

2. *Si* $u \in \pi_p(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F,G)$. *Alors,*

$$v \circ u \in \pi_p(E,G) \quad et \quad \pi_p(v\circ u) \leq \|v\|\pi_p(u).$$

Démonstration. 1. Supposons que

$$v \in \pi_p(F,G) \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{L}(E,F) \quad \text{et} \quad (x_k)_{k=1}^n \subset E.$$

on trouve

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^n \|(v\circ u)(x_k)\|^p)^{1/p} &\leq \pi_p(v) \sup_{y^*\in B_{F^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle u(x_k), y^*\rangle|^p)^{1/p} \\
&\leq \pi_p(v) \sup_{y^*\in B_{F^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, u^*(y^*)\rangle|^p)^{1/p} \\
&\leq \pi_p(v)\|u^*\| \sup_{y^*\in B_{F^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, \frac{u^*(y^*)}{\|u^*\|}\rangle|^p)^{1/p} \\
\big(\text{la formule } (1.7)\big) \qquad &\leq \pi_p(v)\|u\| \sup_{x^*\in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Donc $v\circ u \in \pi_p(E,G)$, en plus

$$\pi_p(v\circ u) \leq \pi_p(v)\|u\|.$$

2. Supposons que $u \in \pi_p(E,F)$ et puisque $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^n \|(v\circ u)(x_k)\|^p)^{1/p} &\leq \|v\|(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p)^{1/p} \\
&\leq \|v\|\pi_p(u) \sup_{x^*\in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède, on tire que :

$$v\circ u \in \pi_p(E,G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v\circ u) \leq \pi_p(u)\|v\|.$$

□

En vertu du Théorème de Composition, on peut constater les deux propriétés importantes suivantes [8, p. 37- 38].
Soient E, E_0, F, F_0 des espaces de Banach.

Corollaire 2.2.1 (Propriété d'idéal). *Si*

$$u \in \mathcal{L}(F,F_0), \quad \textit{et} \quad w \in \mathcal{L}(E_0,E),$$

Alors,

$$v \in \pi_p(E,F) \implies u\circ v\circ w \in \pi_p(E_0,F_0).$$

Corollaire 2.2.2 (**Propriété d'injectivité**)**.** *Si F un sous espace de F_0 et soit l'isométrie*

$$i: \quad F \longrightarrow F_0.$$

Alors,

$$u \in \pi_p(E,F) \quad \Longleftrightarrow \quad i \circ u \in \pi_p(E,F_0).$$

en plus,

$$\pi_p(i \circ u) = \pi_p(u).$$

Démonstration.

– Le premier sens est immédiatement tiré d'après la composition et on a :

$$\pi_p(i \circ u) \leq \pi_p(u). \tag{2.9}$$

– Soit $i \circ u \in \pi_p(E,F_0)$, donc pour toute suite $(x_k)_{k=1}^n \subset E$, on a :

$$(\sum_{k=1}^n \|(i \circ u)(x_k)\|^p)^{1/p} \leq \pi_p(i \circ u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}.$$

Mais, et comme

$$(\sum_{k=1}^n \|(i \circ u)(x_k)\|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p)^{1/p}.$$

donc

$$(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p)^{1/p} \leq \pi_p(i \circ u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p)^{1/p}.$$

c'est-à-dire

$$u \in \pi_p(E,F).$$

en plus, on a :

$$\pi_p(u) \leq \pi_p(i \circ u). \tag{2.10}$$

En vertu de (2.10) et (2.9) on trouve

$$\pi_p(i \circ u) = \pi_p(u).$$

□

2.3 Exemples

Illustrons les opérateurs p-sommants par des exemples. Soient la compact K et la fonctionnelle δ_k définit, pour tout $k \in K$, par :

$$\begin{array}{llll} \delta_k : & C(K) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longrightarrow & \langle \delta_k, f \rangle = f(k) \end{array}$$

On remarque que $\delta_k \in C(K)^*$.
Soient μ une mesure de probabilité sur K et $1 \leq p < \infty$.

1. [1, p. 12] L'opérateur suivant constitue un exemple de base pour les opérateurs p-sommants.
   Soit, pour toute fonction $\varphi \in L_p(K, \mu)$, l'opérateur de multiplication suivant :
   $$\begin{array}{llll} M_\varphi : & C(K) & \longrightarrow & L_p(K, \mu) \\ & f & \longrightarrow & M_\varphi(f) = f\varphi \end{array}$$
   Cet opérateur est p-sommant, avec
   $$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p.$$
   En effet, soit $(f_k)_{k=1}^n \in C(K)$, on a
   $$\begin{aligned} \|\big(M_\varphi(f_k)\big)_{k=1}^n\|_p &= \Big(\sum_{k=1}^n \|M_\varphi(f_k)\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k\varphi\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\sum_{k=1}^n \int_K |\varphi(t)|^p |f_k(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_K \sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_K \sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{t \in K} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_K |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi\|_p \sup_{\delta_t \in C(K)^*} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k \rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi\|_p \|(f_k)_{k=1}^n\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur en question est p-sommant et on a

$$\pi_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_p.$$

mais, d'après l'inégalité (2.3), on a :

$$\pi_p(M_\varphi) \geq \|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_p.$$

Par conséquent

$$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p.$$

2. [7, p. 270] Comme cas particulier, l'opérateur

$$\begin{array}{llll} J_p: & C(K) & \longrightarrow & L_p(K,\mu) \\ & f & \longrightarrow & J_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant et de plus

$$\pi_p(J_p) = 1.$$

En effet, il suffit de prendre $\varphi = 1$ dans l'exemple précédent.

3. L'opérateur d'inclusion suivant

$$\begin{array}{llll} i_p: & L_\infty(K,\mu) & \longrightarrow & L_p(K,\mu) \\ & f & \longrightarrow & i_p(f) = f \end{array}$$

est p-sommant et on a :

$$\pi_p(i_p) = 1.$$

En effet, utilisant le faite que $L_\infty(\mu)$ peut regarder comme étant $C(K)$, voir [1, p. 13].

2.4 Théorèmes de Domination et Factorisation de Pietsch

Le théorème suivant caractérise les opérateurs p-sommants due à Pietsch. On rappelle qu'une mesure de probabilité sur un espace compact K est une mesure positive de Radon $\mu \in C(K)^*$ telle que $\mu(K) = 1$.

Théorème 2.4.1 (Théorème de Domination de Pietsch). *Soient*

$$1 \leq p < \infty \quad \text{et} \quad u \in L(E,F).$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *u est absolument p-sommant.*
2. *Il existe une mesure de probabilité μ sur B_{E^*} et une constante $C > 0$ telles que :*

$$\|u(x)\| \leq C\left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}; \quad \forall x \in E. \tag{2.11}$$

La démonstration provienne de [10, p. 98-99].

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$) Soient

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{ et } \pi_p(u) = 1.$$

On considère les deux sous-ensembles suivants de $C(B_{E^*})$ (l'espace des fonctions faible-$*$ continues sur B_{E^*}) :

$$S_1 = \{f \in C(B_{E^*}); \quad \sup_{x^* \in B_{E^*}} f(x^*) < 1\};$$

et

$$S_2 = \text{ conv } \{f \in C(B_{E^*}); \quad f(x^*) = |\langle x, x^*\rangle|^p, \quad \|u(x)\| = 1\}.$$

Montrons que S_1 est convexe. Soient

$$f_1, f_2 \in S_1 \quad \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x^* \in B_{E^*}} \{\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2\}(x^*) &\leq \alpha \sup_{x^* \in B_{E^*}} f_1(x^*) + (1-\alpha) \sup_{x^* \in B_{E^*}} f_2(x^*) \\
&< \alpha + 1 - \alpha \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc, S_1 est convexe, de plus il est ouvert.
Soit, d'autre part $f \in S_2$, donc il existe une suite $(x_k)_{k=1}^n \in E$ et des scalaires positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ avec

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad \text{ et } \quad \|u(x_k)\| = 1; \quad \text{ pour tout } \quad k = 1, ..., n$$

tels que

$$f(x^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\langle x_k, x^*\rangle|^p \qquad \text{(en vertu de la convexité)}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sup_{x^*\in B_{E^*}} f(x^*) &= \sup_{x^*\in B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\langle x_k, x^*\rangle|^p \\
&= \sup_{x^*\in B_{E^*}} \sum_{k=1}^{n} |\langle \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_k, x^*\rangle|^p \\
&\geq 1. \sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n)\|^p \\
\big(\text{ d'après la formule } (2.1)\big) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|u(x_n)\|^p \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction f n'appartient pas à S_1, ce qui fait que les deux sous-ensembles S_1 et S_2 sont disjoints. Par l'application du Théorème de Hahn-Banach (1.7.2), il vient qu'il existe $\lambda > 0$ et une mesure de Radon μ sur B_{E^*} telles que :

$$\int_{B_{E^*}} f(x^*) d\mu(x^*) \leq \lambda; \quad \forall f \in S_1 \quad et \quad \int_{B_{E^*}} f(x^*) d\mu(x^*) \geq \lambda; \quad \forall f \in S_2.$$

Comme d'une part, S_1 contient toutes les fonctions négatives, la mesure μ doit être positive, ce qui nous permet d'assurer qu'elle est une mesure de probabilité.
D'autre part, S_1 contient la boule unité ouverte de $C(B_{E^*})$, donc

$$\int_{B_{E^*}} f(x^*) d\mu(x^*) \leq \sup_{x^*\in B_{E^*}} f(x^*) < 1 \qquad \forall f \in S_1.$$

par conséquence $\lambda \geq 1$.
D'après ce qui précède, on peut dire que si $x \in E$ et $\|u(x)\| = 1$

$$\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^p d\mu(x^*) \geq 1 = \|u(x)\|^p.$$

ce qui entraîne (2.11).
$2 \Rightarrow 1$) Soit $(x_k)_{k=1}^n \subset E$, donc

$$\|u(x_k)\| \leq C \bigg(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*) \bigg)^{\frac{1}{p}}; \qquad \forall k = 1, ..., n.$$

ce qui entraîne

$$\|u(x_k)\|^p \leq C^p \bigg(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*) \bigg); \qquad \forall k = 1, ..., n.$$

Par sommation des membres de la suite, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p \leq C^p \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \right).$$

et puisque la somme est finie

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p &\leq C^p \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \right) \\
&\leq C^p \int_{B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \right) \\
&\leq C^p \sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p \int_{B_{E^*}} d\mu(x^*) \\
&\leq C^p \sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p \mu(B_{E^*}) \\
&\leq C^p \sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C \left(\sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \sup_{x^* \in E^*} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

ce qui implique que u est p-sommant. □

Lemme 2.4.1. *Soient* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré, tel que*

$$\mu(\Omega) < \infty \quad \textit{et} \quad 1 < p < q < \infty.$$

1. *Si* $f \in L_q(\mu)$. *Alors,*

$$f \in L_p(\mu) \quad \textit{et} \quad \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q. \tag{2.12}$$

2. *Si* $f \in L_\infty(\mu)$. *Alors,*

$$f \in L_p(\mu) \quad \textit{et} \quad \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty.$$

La démonstration de ce lemme provienne de [7, p. 54].

Démonstration. Soit $r = \frac{q}{q-p}$ et puisque

$$\frac{1}{r} + \frac{q}{p} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1$$

1. Par l'application de l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\int_\Omega 1.|f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Big(\int_\Omega (1)^r d\mu \Big)^{\frac{1}{r}.\frac{1}{p}} . \Big(\int_\Omega |f|^{p.\frac{q}{p}} d\mu \Big)^{\frac{p}{q}.\frac{1}{p}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{rp}} \Big(\int_\Omega |f|^q d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q.
\end{aligned}$$

2. Si on pose $q = \infty$, il découle

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty.$$

D'où le résultat. □

Remarque 2. *Par la suite on va donner une deuxième démonstration du Théorème d'Inclusion en basant sur le Théorème de Pietsch et le lemme précédent.*
Soient $u \in \pi_p(E,F)$ et $1 \leq p < q < \infty$ donc

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &\leq \pi_p(u) \Bigg(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \Bigg)^{\frac{1}{p}} \\
\text{d'après } \big(2.12\big) \qquad &\leq \pi_p(u) \Bigg(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^q d\mu(x^*) \Bigg)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $u \in \pi_q(E,F)$, et de plus

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

Citons quelques conséquences du Théorème de Domination de Pietsch.

Théorème 2.4.2 (Théorème de Factorisation). *Soient l'injection isométrique*

$$\begin{array}{rccc} i: & E & \longrightarrow & C(B_{E^*}) \\ & x & \longrightarrow & i(x) = \langle x, x^* \rangle \end{array}$$

et l'application identique

$$j_p : \quad C(B_{E^*}) \quad \longrightarrow \quad L_p(B_{E^*}, \mu)$$

avec μ est une mesure de probabilité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $$u \in \pi_p(E, F).$$

2. *Il existe une mesure de probabilité sur B_{E^*} et une application bornée*

$$w : \quad \overline{(j_p \circ i)(E)} = G \quad \longrightarrow \quad F$$

telle que

$$w \circ j_p \circ i = u.$$

dans ce cas w est choisie telle que $\|w\| = \pi_p(u)$.

Le diagramme de cette factorisation est illustré par la figure (2.1).

La démonstration provienne de [7, p. 279].

Démonstration. $1 \Longrightarrow 2$) Soit $u \in \pi_p(E, F)$, on doit démontrer l'existence de l'application w définie ci-dessus.

$$\text{Soit } x, y \in E, \quad \text{tel que} \quad j_p \circ i(x) = j_p \circ i(y) = f \in (j_p \circ i(E))$$

donc

$$\begin{aligned} \|u(x) - u(y)\| &= \|u(x - y)\| \\ \text{(Théorème de Pietsch (2.4.1))} &\leq \pi_p(u) \Big(\int_{B_{E^*}} |\langle x - y, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(u) \Big(\int_{B_{E^*}} |j_p \circ i(x - y)|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(u) \|j_p \circ i(x) - j_p \circ i(y)\|_p \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = u(y).$$

Alors, on peut définir l'application w de $\overline{j_p \circ i(E)}$ dans F par :

$$w(f) = u(x)$$

et on a

$$u = w \circ j_p \circ i \quad \text{et} \quad \|w(f)\|_F \leq \pi_p(u)\|f\|_p. \tag{2.13}$$

Il vient de la dernière inégalité que l'application w est bornée.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & F \\
i(E) \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "\subseteq"'] & G \arrow[u, "w"'] \arrow[d, "\subseteq"] \\
C(B_{E^*}) \arrow[r, "j_p"] & L_p(\mu)
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.1 – Diagramme de factorisation d'un opérateur p-sommant

$2 \Longrightarrow 1)$ On suppose qu'il existe une mesure μ de probabilité sur B_{E^*} et une application w telle que

$$u = w \circ j_p \circ i.$$

Mais, comme on a démontrer que

$$j_p \in \pi_p(C(B_{E^*}), L_p(B_{E^*}, \mu)) \quad \text{et} \quad \pi_p(j_p) = 1.$$

il vient de la propriété d'idéal des opérateurs p-sommants que

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{et} \quad \pi_p(u) \leq \|w\|. \tag{2.14}$$

D'après les inégalités (2.13) et (2.14), il découle que

$$\|w\| = \pi_p(u).$$

□

Remarque 3. *A l'aide du diagramme illustré par la figure* (2.2)*, on peut décomposer un opérateur p-sommant autrement :*

$$i_F \circ u = \widehat{u} \circ i_p \circ v.$$

avec

$$l_\infty^{B_{F^*}} = \{f : B_{F^*} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \textit{tel que} \quad \sup_{x^* \in B_{F^*}} |f(x^*)| < \infty\},$$

et

$$v = j_\infty \circ i \quad \textit{et} \quad \|v\| = 1 \quad \textit{et} \quad \pi_p(u) = \|\widehat{u}\|. \tag{2.15}$$

Voir [1, p. 17].

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[dd, "v"'] & F \arrow[dr, "i_F"] & \\
 & & l_\infty^{B_{F^*}} \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p"] & L_p(\mu) \arrow[ur, "\widehat{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.2 – Deuxième diagramme de factorisation d'un opérateur p-sommant

Le Théorème de Composition (2.2.2) fait la composition des opérateurs p-sommants et les opérateurs bornés. La Proposition suivante établie la composition des opérateurs p-sommants et q-sommants.

Proposition 2.4.1. *Soient* $1 \leq p, q < \infty$ *et* $u \in \pi_p(E, F)$ *et* $v \in \pi_q(F, G)$ *et*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

1. *Si* $s \geq 1$*. Alors,*

$$v \circ u \in \pi_s(E, G) \quad \textit{et} \quad \pi_s(v \circ u) \leq \pi_q(v)\pi_p(u).$$

2. Si $s \leq 1$. Alors,

$$v \circ u \in \pi_1(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_1(v \circ u) \leq \pi_q(v)\pi_p(u).$$

La démonstration de cette proposition provienne de [10, p. 101-102].

Démonstration. 1. Si $s \geq 1$.

Comme $u \in \pi_p(E, F)$, donc il existe d'après le Théorème de Factorisation (2.4.2), une application bornée w sur $G = \overline{(j_p \circ i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu)$, telle que

$$u = w \circ j_p \circ i.$$

Soit $y^* \in F^*$, donc

$$y^* \circ w : \quad \overline{(j_p \circ i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K}$$

cette application est continue. Moyennant le Corollaire (1.7.1) du Théorème de Hahn-Banach, on constate qu'on peut prolonger cette application sur tout l'espace $L_p(B_{E^*}, \mu)$ par une application continue g et telle que :

$$\|g\|_{p^*} = \|y^* \circ w\|_{p^*} \leq \pi_p(u)\|y^*\|. \tag{2.16}$$

Remarquons d'une part que

$$g \in L_{p^*}(B_{E^*}, \mu),$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rccl} w^* : & F^* & \longrightarrow & G^* \subset L_{p^*}(B_{E^*}, \mu) \\ & y^* & \longrightarrow & w^*(y^*) = g. \end{array}$$

On peut conclure que

$$\begin{aligned} \langle u(x), y^* \rangle &= \langle (w \circ j_p \circ i)(x), y^* \rangle \\ &= \langle (j_p \circ i)(x), w^*(y^*) \rangle \\ &= \int_{B_{E^*}} \langle x, x^* \rangle g(x^*) d\mu(x^*) \qquad \forall x \in E. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Remarquons que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} \quad \Longrightarrow \quad \frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1$$

et

$$\frac{p^*}{s^*}+\frac{p^*}{q}=\frac{\frac{p}{p-1}}{\frac{s}{s-1}}+\frac{\frac{p}{p-1}}{q}$$
$$=\frac{p(s-1)}{s(p-1)}+\frac{p}{q(p-1)}$$
$$=\frac{p(s-1)}{s(p-1)}+\frac{p}{(p-1)}(\frac{1}{s}-\frac{1}{p})$$
$$=\frac{ps}{s(p-1)}-\frac{p}{s(p-1)}+\frac{p}{s(p-1)}-\frac{1}{p-1}$$
$$=1$$

En se basant sur l'inégalité de Hölder, l'inégalité (2.17) implique :

$$|\langle u(x),y^*\rangle|\leq\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^{\frac{s}{p}}|\langle x,x^*\rangle|^{\frac{s}{q}}|g(x^*)|d\mu(x^*)$$
$$\leq\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^{\frac{sp^*}{q}}|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^{\frac{sp^*}{q}}|g(x^*)|^{\frac{(p^*)^2}{q}}|g(x^*)|^{\frac{(p^*)^2}{s^*}}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p^*}}$$
$$\leq\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle|^s|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\times$$
$$\times\Big(\int_{B_{E^*}}|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}}$$

Soit la suite $(x_k)_{k=1}^n\in E$, et on pose

$$z_k=x_k\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{-\frac{1}{p}};\qquad k=1,2,...,n$$

Avec cette notation, le système précédent s'écrit

$$|\langle u(z_k),y^*\rangle|\leq\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle z_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle z_k,x^*\rangle|^s|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}\times$$
$$\times\Big(\int_{B_{E^*}}|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}}$$
$$\leq\Big(\int_{B_{E^*}}|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}}\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{-s}{p^2}}\times$$
$$\times\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{-s}{pq}}\times$$
$$\times\Big(\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s|g(x^*)|^{p^*}d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Ce qui implique

$$|\langle u(z_k), y^*\rangle|^q \leq \big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\big)^{\frac{q}{s^*}} \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \times$$
$$\times \big(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\big)^{\frac{-sq}{p^2} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p}}$$

Mais, par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1 \Rightarrow \frac{q}{p} &= \frac{q}{s} - 1 \\ &\Rightarrow \frac{-sq}{p^2} = \frac{-s}{p}(\frac{q}{s} - 1) = -\frac{q}{p} + \frac{s}{p} \\ &\Rightarrow \frac{-sq}{p^2} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p} = -\frac{q}{p} + \frac{s}{p} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p} = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Donc

$$|\langle u(z_k), y^*\rangle|^q \leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{q}{s^*}} \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*).$$

Par sommation des deux membres, on aboutit à

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle u(z_k), y^*\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}} \Big(\sum_{k=1}^n \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}} \Big(\int_{B_{E^*}} \sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^s\Big)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \Big(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{s^*} + \frac{1}{q}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^s\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|g\|_{p^*} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \Big(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^s\Big)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Comme $v \in \pi_q(F,G)$ on a

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n}\|v\circ u(x_k)\|^s\Big)^{\frac{1}{s}} &= \Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\|v\circ u(z_k)\|^s\big(\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\big)^{\frac{s}{p}}\Big)\Big)^{\frac{1}{s}}\\
\Big(\text{Hölder } \frac{s}{q}+\frac{s}{p}=1\Big) &\le \Big(\sum_{k=1}^{n}\|v\circ u(z_k)\|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{k=1}^{n}\int_{B_{E^*}}|\langle x_k,x^*\rangle|^s d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \pi_q(v)\sup_{y^*\in B_{F^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|\langle u(z_k),y^*\rangle|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*|^s\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \pi_q(v)\sup_{y^*\in B_{F^*}}\big(\|g\|_{p^*}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^s\big)^{\frac{1}{q}}\big)\times\\
&\times\sup_{x^*\in B_{E^*}}\Big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*|^s\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \pi_q(v)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^s\big)^{\frac{1}{q}}\sup_{y^*\in B_{F^*}}\|g\|_{p^*}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*|^s\big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \pi_q(v)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^s\big)^{\frac{1}{s}}\sup_{y^*\in B_{F^*}}\|g\|_{p^*}\\
\text{à l'aide de (2.16)}\quad &\le \pi_q(v)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\big(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^s\big)^{\frac{1}{s}}\pi_p(u).
\end{aligned}$$

Ce qui exprime que

$$v\circ u\in\pi_s(E,G)\quad \text{et}\quad \pi_s(v\circ u)\le\pi_p(u)\pi_q(v).$$

2. Si $s\le 1$.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ge 1\Rightarrow\frac{1}{q}\ge\frac{1}{p^*}$$

c'est-à-dire

$$1\le q\le p^*<\infty.$$

Par l'application du Théorème d'Inclusion (2.2.1), on tire que

$$v\in\pi_{p^*}(F,G)\quad \text{et}\quad \pi_{p^*}(v)\le\pi_q(v).$$

D'autre part on a $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$. On applique la première partie de cette démonstration avec :

$$p^*=q\quad \text{et}\quad s=1.$$

on trouve :

$$v \circ u \in \pi_1(E, G).$$

et d'après la dernière inégalité

$$\pi_1(v \circ u) \leq \pi_p(u)\pi_q(v).$$

$\square$

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

3.1 Introduction

Après avoir définir les opérateurs p-sommants et donner leurs propriétés fondamentales, dans ce troisième chapitre, on va exploiter cette notion et donner les principaux liens entre eux et les opérateurs complètement continus et les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

3.2 Liens avec les opérateurs complètement continus

Les définitions suivantes proviennes de [8, p. 49-50].

Définitions 3.2.1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *L'opérateur* u *est dit complètement continu, si il transforme toute suite faiblement convergente vers une suite fortement convergente. L'ensemble de tous les opérateurs complètement continu est noté par*

   $$\mathcal{V}(E, F).$$

   En vertu du théorème de Eberlein-Smulian (voir [15, p. 130]) ceci peut se traduit comme suit :
   u *est complètement continu si il transforme des ensembles faiblement compact vers des ensembles compact.*

2. *L'opérateur u est dit compact, si il transforme tout ensemble borné en un ensemble précompact. L'ensemble de tous les opérateurs compacts est noté par*
$$\mathcal{K}(E,F).$$
3. *L'opérateur u est dit faiblement compact, si $u(B_E)$ est relativement faiblement compact sur F. L'ensemble de tous les opérateurs faiblement compact est noté par*
$$\mathcal{W}(E,F).$$

Citons par la suite deux propriétés fondamentales de ces opérateurs [8, p. 49-50].
Soient E, E_0, F, F_0 des espaces de Banach.

Proposition 3.2.1 (Proporiété d'idéal). *Si*

$$u : F \longrightarrow F_0, \quad w : E_0 \longrightarrow E,$$

sont des opérateurs bornés. Alors,

$$v \in \mathcal{A}(E,F) \quad \Longrightarrow \quad u \circ v \circ w \in \mathcal{A}(E_0,F_0).$$

avec $\mathcal{A}$ est $\mathcal{V}$ ou $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{W}$.

Proposition 3.2.2 (Propriété d'injectivité). *Soit l'injection isométrique*

$$i : \quad F \longrightarrow F_0.$$

Alors,
$$u \in \mathcal{A}(E,F) \quad \Longleftrightarrow \quad i \circ u \in \mathcal{A}(E,F_0).$$

Pour le théorème important suivant voir [7, p. 10].

Théorème 3.2.1 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue). *Si*

1. *(f_n) est une suite des fonctions mesurables qui converge ponctuellement vers f.*
2. *Il existe une fonction mesurable positive g, telle que*

$$|f_n| \leq g; \quad \forall n.$$

Alors,
$$\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu.$$

Donnons par la suite deux applications du Théorème de Factorisation de Pietsch moyennant ce qui précède.

Théorème 3.2.2. *Soient* $1 \leq p < \infty$ *et* $u \in L(E, F)$.
Si u *est* p*-sommant. Alors,* u *est faiblement compact.*

Démonstration. Partageons la démonstration en deux cas, suivant les valeurs de p.

Cas 1 **:** Si $p > 1$ et $u \in \pi_p(E, F)$.
Le Théorème de Factorisation (2.4.2) nous permet de factoriser u sous la forme

$$u = w \circ j_p \circ i.$$

Si on montre que $j_p \in \mathcal{W}(C(B_{E^*}), L_p(B_{E^*}, \mu))$, la propriété d'idéal (3.2.1) nous assure le résultat.
Comme L_p est réflexif, donc les ensembles bornés sont relativement faiblement compacts. C'est à dire l'opérateur j_p est faiblement compact.

Cas 2 **:** Si $p = 1$ et $u \in \pi_1(E, F)$.
D'après le Théorème d'Inclusion (2.2.1) il vient que :

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{pour tout } p > 1.$$

et d'après le premier cas de cette démonstration l'opérateur u est faiblement compact.

□

Etablissons par la suite la relation qui relie un opérateur p-sommant avec son bidual moyennant le théorème précédent. Voir [8, p. 50].
Soit μ une mesure de Borel régulière.

Proposition 3.2.3. *Soit* $1 \leq p < \infty$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.

$$u : E \longrightarrow F \quad \textit{est } p\textit{-sommant.}$$

2.

$$u^{**} : E^{**} \longrightarrow F^{**} \quad \textit{est } p\textit{-sommant.}$$

et, de plus

$$\pi_p(u) = \pi_p(u^{**}).$$

Démonstration. Utilisant la même technique de la démonstration du théorème précédent et intéressant seulement au cas $1 < p < \infty$.
$1 \Longrightarrow 2$) Soient

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{et} \quad u^{**} \in L(E^{**}, F^{**}).$$

Comme d'une part u est faiblement compact (voir le Théorème (3.2.2)), donc on peut considérer u^{**} comme un opérateur de E^{**} dans F (voir [8, p. 51]), et d'autre part

$$L_p(\mu)^{**} = L_p(\mu).$$

On peut décomposer u^{**}, à l'aide de la décomposition de u citée dans la Remarque (3), comme suit (figure (3.1)). On peut écrire que $i_p^{**} = i_p \circ P$,

$$\begin{tikzcd}
E^{**} \arrow[r, "u^{**}"] \arrow[dd, "v^{**}"'] & F \arrow[dr, "i_F"] & \\
 & & l_\infty^{B_{F^*}} \\
L_\infty^{**}(\mu) \arrow[r, "i_p^{**}"] & L_p(\mu) \arrow[ur, "\widehat{u}"'] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – Diagramme de factorisation de u^{**}.

avec

$$P : \quad L_\infty^{**}(\mu) \longrightarrow L_\infty(\mu)$$

est la projection canonique. On remarque que cette projection est le dual de l'injection canonique de $L_1(\mu)$, i.e.

$$P = J_1^*.$$

Ce qui entraîne

$$\|P\| = 1.$$

donc

$$i_F \circ u^{**} = \widehat{u} \circ i_p \circ P \circ v^{**}$$

Puisque

$$i_p \in \pi_p(L_\infty(\mu), L_p(\mu)).$$

donc et en vertu des propriétés d'idéal et d'injectivité on a

$$\begin{aligned} \pi_p(i_F \circ u^{**}) &= \pi_p(u^{**}) \\ &\leq \|\widehat{u}\|\pi_p(i_p)\|P\|\|v^{**}\| \\ \text{d'aprés } \big(2.15\big) \qquad &= \pi_p(\widehat{u}). \end{aligned}$$

$2 \Longrightarrow 1)$ Soient

$$u^{**} \in \pi_p(E^{**}, F^{**}) \quad \text{et} \quad u \in L(E, F).$$

Effectuons la factorisation $w \circ u^{**} \circ J_E$ de u, illustrée par la figure (3.2) avec

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "J_E"'] & F \\ E^{**} \arrow[r, "u^{**}"] & F^{**} \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}$$

FIGURE 3.2 – Diagramme de factorisation de u.

$$J_E : E \longrightarrow E^{**}, \quad u^{**} : E^{**} \longrightarrow F^{**}, \quad w : F^{**} \longrightarrow F.$$

telle que J_E est l'injection canonique, et w est un opérateur continu de norme 1. En vertu de la propriété d'idéal des opérateurs p-sommants, il vient que

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{et} \quad \pi_p(u) \leq \pi_p(u^{**}). \tag{3.1}$$

□

Théorème 3.2.3. *Soit* $1 \leq p < \infty$.
Si $u \in \pi_p(E, F)$. *Alors,* u *est complètement continu.*

Démonstration. De la même manière que précédement, on démontre que

$$j_p \in \mathcal{V}(C(B_{E^*}), L_p(B_{E^*}, \mu)).$$

Soit $(f_n) \subset C(B_{E^*})$ une suite de fonctions faiblement convergente vers la fonction nulle. D'après [12, p. 191] la suite (f_n) est à la fois :

– uniformément bornée, i.e.

$$\exists C > 0, \text{ telle que } \quad |f_n(x^*)| \leq C; \quad \forall n = 1, 2, ... \quad \text{et } \forall x^* \in B_{E^*}.$$

– convergente en chaque fonctionnelle x^*. (la convergence ponctuelle). Utilisant le Théorème de la convergence dominée (3.2.1), il vient que

$$\int_{B_{E^*}} |f_n|^p d\mu(x^*) \longrightarrow \int_{B_{E^*}} 0 d\mu(x^*) = 0.$$

donc, la suite (f_n) converge en norme sur $L_p(B_{E^*}, \mu)$. Donc

$$j_p \in \mathcal{V}(C(B_{E^*}), L_p(B_{E^*}, \mu)).$$

En vertu de la propriété d'idéal et la factorisation de u, on constate que

$$u \in \mathcal{V}(E, F).$$

□

Proposition 3.2.4. *Soient E, F, G des espaces de Banach.*
Si

$$u \in \mathcal{V}(F, G) \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{W}(E, F).$$

Alors,

$$u \circ v \in \mathcal{K}(E, G).$$

Démonstration. Comme v est faiblement compact donc $v(B_E)$ est un ensemble faiblement relativement compact et en vertu de la définition donnée des opérateurs complètement continus $u \circ v(B_E)$ est un ensemble relativement compact. C'est-à-dire que

$$u \circ v \in \mathcal{K}(E, G).$$

□

Comme conséquence immédiate de cette proposition, on tire

Corollaire 3.2.1. *Soit $1 \leq p, q < \infty$*
Si

$$u \in \pi_p(F, G) \quad \text{et} \quad v \in \pi_q(E, F).$$

Alors,

$$u \circ v \in \mathcal{K}(E, G).$$

3.3 Lien avec les opérateurs de Hilbert-Schmidt

La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt présente une des plus importantes classes d'opérateurs. Faisons par la suite le lien qui la relie avec les opérateurs p-sommants. On désigne par H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $1 \leq p < \infty$.
Pour commencer, citons quelques préliminaires sur ces opérateurs. Voir [13, p. 67].

Définition 3.3.1. *On appelle opérateur de Hilbert-Schmidt tout opérateur $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ qui vérifie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(e_n)\|^2 < \infty \tag{3.2}$$

où $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ est une base orthonormée de H_1.
La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt est notée $HS(H_1, H_2)$.

Remarques 2. 1. *La définition précédente ne dépend pas du choix de la base de H_1. En effet, soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une autre base orthonormée de H_1, donc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(f_n)\|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle u(f_n), e_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|u^*(e_m)\|^2.$$

et on a, en vertu de la formule (1.7)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|u^*(e_m)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|u(e_m)\|^2$$

ce qui entraîne le résultat. Voir [13, p. 67].

2. *La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt forme un espace de Hilbert, où le produit scalaire est donné par*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(e_n), v(e_n)\rangle.$$

et la norme associée est

$$\|u\|_{HS} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(e_n)\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Voir [8, p. 84].

Le théorème suivant caractérise les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Théorème 3.3.1. *[10, p. 55] Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*
2. *Il existe un système orthonormé complet[1] $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de H_1, tel qu'on a*

$$\|u\|_{HS} < \infty. \tag{3.3}$$

3. *Pour tout système orthonormé complet $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de H_1, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^2 = \|u\|_{HS}^2 < \infty. \tag{3.4}$$

4. *Pour tous systèmes orthonormés complets $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de H_1, et $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ de H_2, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} | < u(e_n), f_m > |^2 = \|u\|_{HS}^2 < \infty. \tag{3.5}$$

5. *u^* est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et on a*

$$\|u^*\|_{HS} = \|u\|_{HS}. \tag{3.6}$$

La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt vérifie la propriété d'idéal. En effet,

– Soient $u \in HS(H_1, H_2)$ et $v \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ et $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans H_1. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|v \circ u(e_n)\|^2 &\leq \|v\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|u(e_n)\|^2 \\ &= \|v\|^2 \|u\|_{HS}^2 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

donc, $v \circ u \in HS(H_1, H_3)$ et de plus

$$\|v \circ u\|_{HS} \leq \|v\| \|u\|_{HS}.$$

1. On dit qu'un système d'éléments appartenant à un espace normé est complet, si le sous espace engendré coïncide avec l'espace lui même.

– Soient $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $v \in HS(H_2, H_3)$ et $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans H_1. Pour montrer que $v \circ u \in HS(H_1, H_3)$, il suffit d'aprés l'assertion 5 du théorème (3.3.1), de montrer que

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^* \in HS(H_3, H_1).$$

On a, d'aprés la formule (3.6)

$$v^* \in HS(H_3, H_2)$$

et, on sait que

$$u^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$$

donc, et d'aprés ce qui précède, on tire que

$$u^* \circ v^* \in HS(H_3, H_1)$$

ce qui fait le résultat. De plus, on a

$$\|v \circ u\|_{HS} \leq \|u\| \|v\|_{HS}. \tag{3.7}$$

Le lemme suivant provient de [1, p. 35].

Lemme 3.3.1. *Soient $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée de H_1 et $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.

$$u \in HS(H_1, H_2).$$

2.

$$\sum_{i \in J(\text{ fini })} \|u(e_i)\|^2 \leq \infty.$$

Le théorème important suivant établit le lien entre les opérateurs p-sommants et les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Théorème 3.3.2. *Soit $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur u est de Hilbert-Schmidt.*
2. *L'opérateur u est 2-sommant.*

Dans ce cas, on a :

$$\pi_2(u) = \|u\|_{HS}$$

La démonstration provienne de [1, p. 35].

Démonstration. 1 $\Longrightarrow$ 2) Soient $u \in HS(H_1, H_2)$, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ un système orthonormé de H_1 et $(x_n) \in l_{2,w}(H_1)$. On définit l'opérateur v par :

$$v : \quad l_2 \longrightarrow H_1$$

tel que

$$v(\sum_n \alpha_n e_n) = \sum_n \alpha_n x_n \quad \text{pour } (\alpha_n)_{n\geq 1} \in l_2$$

c'est-à-dire

$$v(e_n) = x_n \quad \forall n \geq 1.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} \sup_{x^* \in B_{H_1}} |\langle x^*, \sum_n \alpha_n x_n \rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{H_1}} \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} |\langle x^*, \sum_n \alpha_n x_n \rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{H_1}} \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} |\sum_n \alpha_n \langle x^*, x_n \rangle| \\
&= \sup_{x^* \in B_{H_1}} \big(\sum_n |\langle x^*, x_n \rangle|^2\big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\big(\sum_n \|u(x_n)\|^2\big)^{\frac{1}{2}} &= \big(\sum_n \|u \circ v(e_n)\|^2\big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u \circ v\|_{HS} \\
\text{d'après la propriété d'idéal (3.7)} \quad &\leq \|u\|_{HS} \|v\| \\
&= \|u\|_{HS} \sup_{x^* \in B_{H_1}} \big(\sum_n |\langle x^*, x_n \rangle|^2\big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$u \in \pi_2(H_1, H_2)$$

et on a

$$\pi_2(u) \leq \|u\|_{HS}. \tag{3.8}$$

2 $\Longrightarrow$ 1) Soient $u \in \pi_2(H_1, H_2)$ et $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ un système orthonormé de H_1, on a pour J fini

$$\begin{aligned}
\big(\sum_{n \in J} \|u(e_n)\|^2\big)^{\frac{1}{2}} &\leq \pi_2(u) \sup_{x^* \in B_{H_1}} \big(\sum_{n \in J} |\langle e_n, x^* \rangle|^2\big)^{1/2} \\
&\leq \pi_2(u) \|(e_n)_{n \in J}\|_{2,w} \\
&= \pi_2(u)
\end{aligned}$$

donc $u \in HS(H_1, H_2)$, d'après (3.3) on a :

$$\|u\|_{HS} \leq \pi_2(u). \tag{3.9}$$

Il résulte de (3.8) et (3.9) que

$$\pi_2(u) = \|u\|_{HS}.$$

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. A. Abdillah. *Extensions au cadre Banachique de la notion d'opérateur de Hilbert-Schmidt*. Thèse de Doctorat, l'Université de Bordeaux 1. (26-11-2012).

[2] D. Achour, A. Belacel. *On the positive strongly p-summing operators*. The second Conference of Mathematical Sciences (CMS' 2008), Zarqua Private University, Jordan.

[3] D. Achour, A. Belacel. *Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators*. Positivity DOI 10,1007/s 11117-014-0276-6.

[4] J. Bass. *Cours De Mathématiques. Tome 3. Topologie, intégration, Distributions, Equations intégrales, Analyse harmonique*. Masson, Paris. 1983.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris. 1983.

[6] E. Burroni. *La topologie des espaces métriques*. Ellipses, Paris. 2005.

[7] D.J.H.Garling. *Inequalities : A journey into Linear Analysis*. Cambridge, University Press. 2007.

[8] J. Diestel, H. Jarchow, A.Tonge. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge Studies In Advanced Mathematics : 43. 1995.

[9] M. Hazi. *Résumé En Topologie (en arabe)*. Edition OPU, Algerie. 1994.

[10] H. Hogbe-Nlend, V. B. Moscatelli. *Nuclear and Conuclear Spaces*. North-Holland Mathematics Studies : 52. North-Holland Publishing Company. 1981.

[11] G. J. O. Jamson. *Summing and Nuclear Norms in Banach Space Theory*. London Mathematical Society Student Texts : 8. Cambridge, University Press. 1987.

[12] A. Kolmogorov, S. Fomine. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Edition Mir-Moscou. deuxième édition, Décembre 1973.

[13] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces. Tome 1. Sequence Spaces*. Springer-Verlag. 1977.

[14] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces. Tome 2. Function Spaces*. Springer-Verlag. 1979.

[15] T. J. Morrison. *Functional Analysis. An Introduction to Banach Space Theory*. A Wiley-Interscience Publication. 2001.

[16] A. Pietsch. *Operator ideals*. North-Holland Publishing Company. 1980.

الملخص

في هذا العمل قدمنا تعريف المؤثرات p-جمعية $(1 \leq p < +\infty)$و درسنا خصائصها الأساسية بالإضافة إلى مبرهنتي الهيمنة و التفكيك الأساسيتين للعالم الألماني بيتش. و كتطبيق لهذا الصنف من المؤثرات درسنا العلاقات التي تربطه بالمؤثرات التامة الإستمرار، مؤثرات هيلبيرت-شميد بالإضافة إلى المؤثرات p-مقعرة.

كلمات مفتاحية:المؤثرات p-جمعية، مبرهنة التركيب، مبرهنة الإحتواء، مبرهنة الهيمنة، مبرهنة التفكيك،المؤثرات التامة الإستمرار، مؤثرات هيلبيرت-شميد، المؤثراتp-مقعرة

Résumé

Dans ce travail on a défini les opérateurs p-sommants $(1 \leq p < +\infty)$et étudié leurs propriétés fondamentales, les deux théorèmes de domination et de factorisation due à Pietsch. Comme application de ces opérateurs, on a introduit le lien qui les relie avec les opérateurs complètement continus, les opérateurs de Hilbert-Schmidt et les opérateurs p-concaves.

Mots clés: opérateurs p-sommants, Théorèmes de Composition, Domination, Inclusion et Factorisation, opérateurs de Hilbert-Schmidt, opérateurs complètement continus, opérateurs p-concaves, .

Abstract

In this work we defined p-summing operators$(1 \leq p < +\infty)$ and studied their important properties, Pietsch's domination and factorization theorems. As application of this important class, we introduced the relationship between them and completely continuous, Hilbert-Schmidt and p-concave operators.

Keywords: p-summing operators, Theorems of Composition, Domination, Inclusion and Factorization, Hilbert-Schmidt operators, completely continuous operators, p-concave operators.