

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ammar Telidji – Laghouat –
Faculté de technologie
Département Mécanique



Mémoire pour l'Obtention du diplôme :

Master en Maintenance industrielle

Option :

Maintenance industrielle

Présenté par :

Hamza laiche

Thème :

***Influence pratique de la géométrie dans la détermination dynamique
du module de Young***

Soutenu devant le jury composé de :

| Nom et Prénom | Grade | Qualité |
|-------------------------------|-------|-----------|
| Mr. Rayane Karim | MCA | Président |
| Mr. Hammou Abdelkader Djilali | MCA | Encadreur |
| Mr. Rezig Ahmida | MCB | Examineur |

Année Universitaire : 2022/2023

Remerciement

(وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ)

سورة إبراهيم: الآية (7)

Ce travail a été effectué au laboratoire de recherche de mécanique à l'université de Ammar Telidji de Laghouat.

J'ai tenu à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'a aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

J'ai voudrions dans un premier temps remercier, notre encadreur **Mr : HAMMOU ABD-ELKADER DJILALAI**, docteur à l'université de Laghouat, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter mon réflexion.

J'ai remercié également les membres du jury. D'avoir rapporté ce travail, et de l'avoir examiné.

A tous les enseignants qui j'ai ont accompagné tout au long de nos cursus scolaires et universitaires jusqu'au jour d'aujourd'hui.

J'ai tenu à remercier toute personne qui a participé de près ou de loin à l'exécution de ce bon travail.

Merci à toutes et à tous

Dédicaces

A ma très chère maman

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices de ton vivant que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A mon très cher papa

Vous représentez pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

A mes chers frères et mes chères sœurs

Pour leur présence à tous les instants, pour le soutien qu'ils m'ont apporté Surtout ma sœur Hassina, qui était mon soutien.

A mes professeurs

Qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

A mes meilleurs amis(es)

Qui ont partagés avec moi les bons et les mauvais moments durant mes études.

Avec toute mon affection et ma reconnaissance

A tous ceux qui me sont chers.

Laiche Hamza

Sommaire

| | |
|--|-------------|
| <i>Remerciement</i> | <i>I</i> |
| <i>Dédicaces</i> | <i>II</i> |
| <i>Sommaire</i> | <i>III</i> |
| <i>Liste des figures</i> | <i>V</i> |
| <i>Liste des Tableaux</i> | <i>VII</i> |
| <i>Liste D'abréviation</i> | <i>VIII</i> |
| <i>Introduction générale</i> | <i>1</i> |
| <i>Chapitre 1: Recherche bibliographique</i> | |
| <i>1.1 Introduction</i> | <i>3</i> |
| <i>1.2 Loi de Hooke</i> | <i>3</i> |
| <i>Chapitre 2: Module de Young et théorie de vibration transversale des poutres d'Euler-Bernoulli</i> | |
| <i>2.1 Introduction</i> | <i>9</i> |
| <i>2.2 Essais mécaniques standards pour déterminer le module de Young</i> | <i>10</i> |
| <i>2.2.1 Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli</i> | <i>17</i> |
| <i>2.2.1.1 Définition géométrique d'une poutre</i> | <i>17</i> |
| <i>2.3 Vibrations transversales de flexion des poutres d'Euler-Bernoulli</i> | <i>19</i> |
| <i>2.3.1 Poutre simplement appuyée aux deux extrémités</i> | <i>24</i> |
| <i>2.3.2 Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre</i> | <i>25</i> |
| <i>2.3.3 Poutre encastrée aux deux extrémités</i> | <i>27</i> |

Chapitre 3: Détermination dynamique du module de Young

| | |
|---|-----------|
| <i>3.1 Essais dynamique</i> | 32 |
| <i>3.1.1 Analyseur GETAC StudioVib</i> | 32 |
| <i>3.1.2 Marteau de choc</i> | 35 |
| <i>3.1.3 Capteur de vibration</i> | 36 |

Chapitre 4: Résultats et discussions

| | |
|--|------------|
| <i>4.1 Modélisation analytique</i> | 38 |
| <i>4.2 Résultats des tests dynamiques</i> | 38 |
| <i>4.3 Comparaison et interprétation</i> | 45 |
| <i>Conclusion générale</i> | 46 |
| <i>Références bibliographies</i> | XIV |

RÉSUMÉ

Liste des figures

| Numéro de figure | Titre de figure | page |
|------------------|--|------|
| 1 | Dispositif expérimentale de John M. Ide | 05 |
| 2 | Marteau de choc pour l'excitation de la structure | 07 |
| 3 | Accéléromètre placée sur la poutre en porte à faux pour les tests dynamiques | 07 |
| 4 | Etirement d'un élastique | 09 |
| 5 | Etendu de la valeur du module de Young de différents matériaux (CES EduPack 2013). | 10 |
| 6 | Eprouvette typique pour l'essai de traction | 11 |
| 7 | Machine de traction | 12 |
| 8 | Courbe de l'essai de traction | 14 |
| 9 | Courbe de traction typique des matériaux fragiles et ductiles | 15 |
| 10 | Courbe de traction des matériaux élastomères | 16 |
| 11 | Courbe des différents types d'acier | 16 |
| 12 | Le trièdre de Fresnet en un point de la ligne moyenne | 17 |
| 13 | Élément d'une poutre fléchie | 18 |
| 14 | Section transversale d'une poutre sous charge | 20 |
| 15 | Courbes $-\cos(\beta l)$ et $1/\cosh(\beta l)$ en fonction de βl | 26 |
| 16 | Courbes $\cos(\beta l)$ et $1/\cosh(\beta l)$ en fonction de βl | 29 |
| 17 | 1 ^{ère} fréquence propre en fonction de la longueur des poutres | 30 |
| 18 | 2 ^{ème} fréquence propre en fonction de la longueur des poutres | 31 |
| 19 | Montage d'une poutre pour l'essai dynamique | 32 |
| 20 | Analyseur GETAC StudioVib | 33 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 21 | logiciel StudioVib | 34 |
| 22 | Fenêtre d'acquisition de StudioVib | 35 |
| 23 | Marteau d'impact | 36 |
| 24 | Accéléromètre Wilcoxon | 37 |
| 25 | Montage du capteur de vibration | 37 |
| 26 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (60 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 39 |
| 27 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (30 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 39 |
| 28 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (25 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 40 |
| 29 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (20 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 40 |
| 30 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (15 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 41 |
| 31 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (10 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 41 |
| 32 | Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (5 mm) de la largeur ($h=0.006m$) | 42 |
| 33 | Courbes de la première fréquence (Analytique et Expérimental) en fonction de la largeur ($h=0.006m$) | 43 |
| 34 | Courbes de la deuxième fréquence (Analytique et Expérimental) en fonction de la largeur ($h=0.006m$) | 44 |
| 35 | Courbes de la troisième fréquence (Analytique et Expérimental) en fonction de la largeur ($h=0.006m$) | 44 |


Liste des Tableaux

| N° | Tableaux | page |
|------------|--|-------------|
| I | Représenté propriété matériaux Acier S235 et S335 | 31 |
| II | Les trois premières fréquences analytiques pour différentes largeurs d'une poutre encastrée-libre | 38 |
| III | Le première pic expérimental correspond à la première fréquence pour différentes largeurs d'une poutre encastrée-libre | 42 |
| IV | Le deuxième pic expérimental correspond à la deuxième fréquence pour différentes largeurs d'une poutre encastrée-libre | 42 |
| V | Le troisième pic expérimental correspond à la troisième fréquence pour différentes largeurs d'une poutre encastrée-libre | 43 |

Liste D'abréviation

| | |
|-------------------------|---|
| E | Module de Young |
| h | L'épaisseur de la poutre |
| f | Fréquence propre |
| λ | Coefficient de lamé |
| σ | Contrainte [Pa] |
| σ_n | Contrainte normal |
| S | La section de l'éprouvette [m^2] |
| S_0 | La surface initiale de l'échantillon |
| ε | Déformation |
| U | Déplacement transversal de la poutre déformée |
| l_0 | Longueur initiale de l'éprouvette |
| l | Longueur déformée de l'éprouvette |
| F | Une force répartie sur la longueur [N/m] |
| Δl | L'allongement [m] |
| x, y, z | cordonne principale |
| M | Moment de flexion |
| r | Le rayon de cisaillement |
| V | l'effort de cisaillement |
| C, K, B, A $, C_J$ | Des Constantes |
| ω | Le mode propre |

| | |
|-----------|--|
| $\phi(x)$ | Fonction dimensionnelle |
| $q(t)$ | Fonction temporelle |
| ν_l | La vitesse de propagation de l'onde du son [ms] |
| T | Le temps entre le transducteur et le récepteur [s] |
| G | Le module de cisaillement (module de Coulomb). |
| τ | La contrainte de cisaillement |
| γ | Déformation de cisaillement |
| I_z | Moment d'inertie |
| β | La pulsation naturelle |



Introduction générale



Introduction générale

La connaissance des propriétés mécaniques statiques et dynamiques des matériaux et structures est essentielle pour la conception, le dimensionnement et l'amélioration des systèmes mécaniques. Parmi ces caractéristiques saillantes, les propriétés élastiques et dynamiques qui jouent un rôle important dans le comportement des structures, nous entendons principalement le comportement vibratoire.

Parmi les éléments de structure, les plus utilisés sont les poutres à sections rectangulaires. Cette utilisation accrue de ces derniers a conduit à un besoin urgent de comprendre et d'étudier leur comportement vibratoire. En effet, l'analyse des vibrations est également un sujet de grand intérêt pour de nombreux ingénieurs et concepteurs, que ce soit d'un point de vue académique ou industriel. Notre compréhension du comportement vibratoire des poutres nous aide à résoudre de nombreux problèmes plus complexes dans de nombreux domaines, tels que la technologie spatiale, le génie maritime et civil, l'automobile et l'aviation, ainsi que les ponts, les bâtiments et même le génie nucléaire ... etc. Pour contrôler les vibrations des éléments de structure (par exemple les poutres), les chercheurs et les ingénieurs ont dû déterminer leurs propriétés dynamiques. En plus la détermination des propriétés dynamiques des structures, à savoir les fréquences naturelles, permettra de déterminer les propriétés mécaniques élastiques des matériaux de ces structures.

Notre travail est basé sur l'étude des vibrations transversales des poutres isotropes, afin d'obtenir les fréquences et les modes, sur une base d'études analytiques et dynamiques antérieures, et dans le but de contourner les essais mécaniques standards, tels que des essais de traction ou de flexion pour la détermination expérimentale des propriétés élastiques mécaniques des matériaux.

Notre étude est scindée en trois chapitres :

La première chapitre, recherche bibliographie, où j'ai essayé de chercher le maximum des travaux de recherche, des mémoires de thèse et des ouvrages sur les essais dynamiques non destructifs pour la détermination dynamique du module de Young.

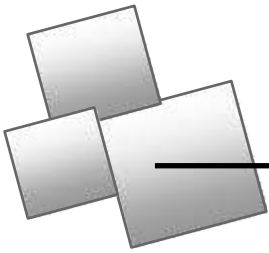
Dans Le deuxième chapitre j'ai présenté la méthode standard de détermination du module de Young à savoir l'essai de traction. Par la suite, j'ai présenté la théorie de vibration transversale de flexion des poutres d'Euler-Bernoulli. Ce chapitre se termine

par la détermination analytique des premières fréquences naturelles de trois poutres avec différentes conditions aux limites et leurs relations avec le module de Young.

Le troisième chapitre est consacré à détermination dynamique du module de Young de manière par des tests non destructives (essais dynamiques), en se basant sur la théorie des vibrations transversales des poutres (théorie d'Euler-Bernoulli), j'ai procédé à la modification de leur largeur, pour voir l'étendue de cet effet sur l'efficacité de la théorie. Et faites attention aux trois premières fréquences et aux trois premiers modes, car ce sont les plus évidents sur le plan pratique.

Dans le quatrième chapitre, j'ai étudié influence pratique de la géométrie dans la détermination dynamique du module de Young par des méthodes modélisations analytiques, essais dynamiques.

Une conclusion générale résumera l'ensemble de cette étude et présentera les perspectives qu'elle apporte concernant l'étude d'influence pratique de la géométrie dans la détermination dynamique du module de Young.



CHAPITRE :

1

Recherche bibliographique

1.1 Introduction

Le module de Young ou module d'élasticité (longitudinale) ou encore module de traction est la constante qui relie la contrainte de traction (ou de compression) et le début de la déformation d'un matériau élastique isotrope. Dans les ouvrages scientifiques utilisés dans les écoles d'ingénieurs, il est souvent appelé module d'Young.

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant, tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte.

1.2 Loi de Hooke

La loi de Hooke est une loi de comportement des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude. Elle a été énoncée par Robert Hooke, par (l'allongement est proportionnel à la force)

Cette loi est appliquée ou l'état de contraintes uni axiales. Les autres états possibles exigent des versions plus étendues. Hooke a considéré que la phase élastique est linéaire, donc proportionnelle et réversible La forme la plus simple de la loi de Hooke est :

$$\sigma = \varepsilon \times E \dots \dots \dots (1.01)$$

Où :

- σ est la contrainte (en unité de pression).
- E est le module d'Young (en unité de pression).
- ε est l'allongement relatif, ou déformation (adimensionnel).

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \dots \dots \dots (1.02)$$

Avec :

- l_0 longueur initiale de l'éprouvette.
- l longueur déformée de l'éprouvette

Le module d'Young est la contrainte mécanique qui engendrerait un allongement de 100 % de la longueur initiale d'un matériau (il doublerait donc de longueur), si l'on pouvait l'appliquer réellement : dans les faits, le matériau se déforme de façon permanente, ou se rompt, bien avant que cette valeur ne soit atteinte. Le module d'Young est la pente initiale du diagramme de déformation-contrainte ^[1].

Un matériau dont le module d'Young est très élevé est dit rigide. L'acier, l'iridium, le diamant, sont des matériaux très rigides, l'aluminium et le plomb le sont moins. Les matières plastiques et organiques, les mousses sont généralement peu rigides, on dit qu'elles sont souples, élastiques ou flexibles (pour un effort de flexion).

Ne pas confondre :

- Rigidité et résistance : la résistance mécanique d'un matériau est caractérisée par sa limite d'élasticité et/ou sa résistance à la traction.
- Rigidité et raideur : la raideur d'une poutre (par exemple) dépend de son module de Young (de sa rigidité) mais aussi du rapport de sa section à sa longueur. La rigidité caractérise les matériaux, la raideur concerne les structures et les composants : une pièce mécanique massive en matière plastique peut être beaucoup plus raide qu'un ressort en acier.
- Rigidité et dureté : la dureté d'un matériau définit la résistance relative qu'oppose sa surface à la pénétration d'un corps plus dur.

Plusieurs études dans la détermination dynamique du module de Young par essais de vibration ont été menées au cours des dernières décennies.

En 1931, Von E. Goens ^[2] propose une méthode pour déterminer le module d'élasticité des barres qui est basée sur la mesure des vibrations naturelles longitudinales ou de flexion. Selon Goens, cette méthode offre l'avantage que les déformations se produisant sous les vibrations sont si faibles dans des conditions d'excitation normales qu'il n'est pas nécessaire de craindre que la limite d'élasticité soit dépassée, ce qui ne peut souvent être atteint qu'avec des essais statiques de la forme habituelle avec une perte de précision considérable. Cette méthode consistait à exposer un échantillon (tiges cylindriques en acier et un prisme en aluminium) au champ sonore au voisinage d'un grand cristal de sel de Rochelle utilisé comme haut-parleur. En utilisant un petit cristal cimenté à l'échantillon pour indiquer la vibration une réponse a été obtenue lorsque la fréquence du champ sonore résonnait avec la fréquence élastique de la tige de test John M. Ide ^[3] a publié en 1935 un travail où il décrit une nouvelle méthode pour

la détermination du module de Young. La méthode consiste à mettre un échantillon en vibration par traction électrostatique, à déterminer la fréquence naturelle des vibrations longitudinales et à calculer le module de Young à partir de celles-ci. La barre de test, généralement sous la forme d'une tige cylindrique, forme une plaque d'un condensateur électrique. L'autre plaque est fixe et séparée de la barre par une mince feuille de diélectrique. Un échantillon non conducteur peut être entraîné en confortant une feuille d'étain à une extrémité. La feuille devient alors la plaque de condensateur mobile, et la fin de l'éprouvette suit le mouvement de la feuille. Une tension alternative de fréquence variable est connectée au condensateur ainsi formé. La tige vibre avec une amplitude accrue lorsque ses fréquences caractéristiques résonnent avec la tension d'excitation. Cette vibration peut être détectée par l'oreille, si elle se produit dans la gamme de fréquences audibles. Tout type de récepteur sonore, sensible à la gamme de fréquences requise, peut être utilisé. Les dispositions expérimentales sont représentées sur la figure (01)

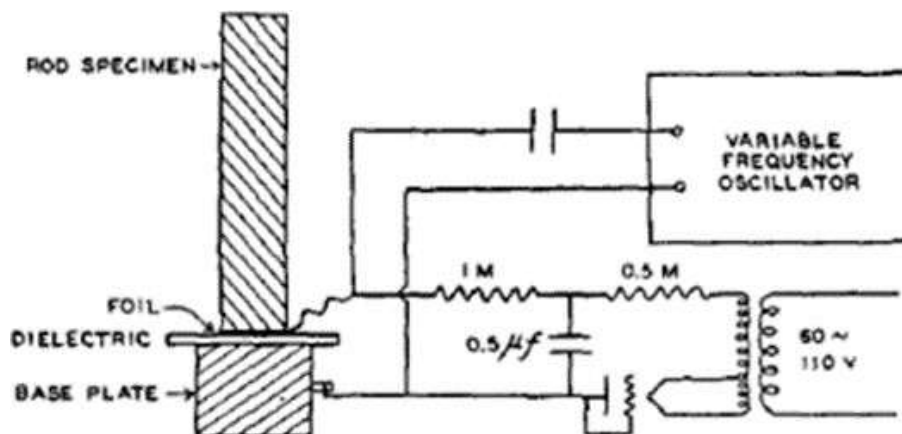


Figure 01 : Dispositif expérimentale de John M. Ide

W. L. Li ^[4] a présenté une approche simple et unifiée pour l'analyse vibratoire d'une poutre généralement supportée. Le déplacement de flexion de la poutre est recherché comme la combinaison linéaire d'une série de Fourier et d'une fonction polynomiale auxiliaire. La fonction polynomiale est introduite pour prendre toutes les discontinuités pertinentes avec le déplacement d'origine et ses dérivées aux frontières et la série de Fourier représente dans ce cas simplement un déplacement résiduel ou conditionné qui a au moins trois dérivées continues.

En conséquence, non seulement il est toujours possible d'étendre le déplacement dans une série de Fourier pour des poutres avec toutes les conditions aux limites, mais aussi la solution converge à une vitesse beaucoup plus rapide. La fiabilité et la robustesse de la technique proposée sont démontrées par des exemples numériques.

Ces exemples numériques ont montré que les fréquences naturelles et les modes peuvent toutes deux être calculées avec précision pour des poutres avec diverses conditions aux limites. Une convergence remarquable de la solution actuelle a été démontrée à la fois théoriquement et numériquement. Il convient de noter que cette technique peut être facilement étendue à certaines structures bidimensionnelles telles que les plaques et les coquilles à conditions aux limites générales et la convergence rapide de la série de Fourier rend l'extension numériquement viable

Joshi D. S. et al^[5], ont développé une méthode simple pour la mesure du module de Young d'un échantillon sous la forme d'un fil ou d'un ruban. Cette technique consiste à monter l'échantillon non chargé en porte-à-faux où les vibrations sont produites par un dispositif électromagnétique et sa fréquence naturelle est déterminée. Wilson F. et al^[6], ont réalisé un appareil bon marché, simple, pour la détermination dynamique du module. L'appareil utilise les différentes résonances de vibration de flexion pour déterminer le module de Young. Peu après Tyagi S. et al^[7], ont aussi développé une machine simple pour déterminer dynamiquement le module de Young pour rubans minces et des échantillons en fil. Ils utilisent un générateur audio, un amplificateur et un haut-parleur.

D'autres travaux utilisant les mêmes techniques ont été développés durant les années 80 et 90.^{[8], [9]}

Tomas Plachy et al^[10], ont utilisé deux méthodes expérimentales pour le module de Young du béton. L'essai standard de compression sur une éprouvette parallélépipédique et l'autre dynamique appelée méthode d'excitation par impulsions (Impulse Excitation Méthode) où le module de Young est calculé en se basant sur les fréquences de résonance des vibrations longitudinales de l'éprouvette. D'après leurs résultats, le grand avantage des tests dynamiques est la faible variation dans l'évaluation des fréquences de résonance et ainsi l'évaluation du module de Young ; le temps de cette évaluation est deux fois plus petit que celui de l'essai standard de compression. Un autre avantage, est que la petite variation dans la forme des éprouvettes peut être considérée en considérant la moyenne dans les dimensions mesurées dans différents endroits de l'éprouvette.

A l'opposé l'essai standard de compression est moins précis car des imprécisions sont apparues dans la courbe contrainte déformation pendant le chargement statique où le module de Young n'a pas pu être déterminé pour toutes les éprouvettes.

Le principe des tests dynamiques expérimentaux pour l'extraction des fréquences naturelles est l'excitation de la structure par un choc avec un marteau (figure 02), ensuite la laisser vibrer librement. L'enregistrement se fait par l'intermédiaire d'un capteur de vibration (figure 03) et le traitement se fait par le logiciel d'analyse Studio VIB.

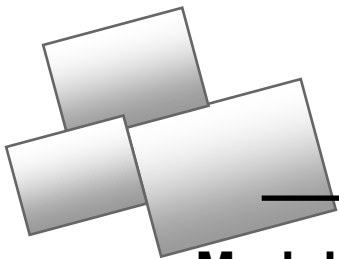


Figure 02 : Marteau de choc pour l'excitation de la structure ^[11]



Figure 03 : Accéléromètre placée sur la poutre en porte à faux pour les tests dynamiques ^[12]

Il a été démontré suivant les résultats obtenus du module de Young et des premières fréquences naturelles que les expressions analytiques de la théorie des vibrations transversales des poutres en flexion ne sont valables que pour une poutre assez longue.



CHAPITRE :

2

**Module de Young et théorie de vibration
transversale des poutres d'Euler-Bernoulli**

2.1 Introduction

Le module d'élasticité longitudinal ou module de Young mesure la résistance du matériau à la déformation élastique. Les matériaux à faible module sont souples, et s'étirent beaucoup lorsqu'ils sont tirés (s'écrasent beaucoup lorsqu'ils sont comprimés). Les matériaux à module élevé sont à l'opposé : ils s'étirent très peu lorsqu'ils sont tirés (s'écrasent très peu lorsqu'ils sont comprimés). Comme le montre la figure (04), il est très facile d'étirer un élastique, mais il est impossible d'étirer une bande d'acier de même section transversale en utilisant les mains nues.



Figure 04 : Etirement d'un élastique

Le module de Young est un paramètre indispensable dans la science de l'ingénieur en général et dans la mécanique en particulier, car il détermine le comportement élastique des structures ou bien des matériaux sous les diverses charges (Forces, contraintes). En connaissant le module de Young on peut déterminer une limite qui s'appelle la limite élastique, car les matériaux se forment de molécules liées les unes avec les autres ; cette liaison peut se déformer sous l'effet des paramètres bien déterminés tel que la température et les différentes charges avec un retour à l'état initial après la suppression de la charge.

Le module de Young est défini par la loi de Hooke,

De la même manière, la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la déformation de cisaillement, avec :

$$\tau = G\gamma \dots (2.01)$$

Où G est le module de cisaillement (module de Coulomb).

Cette relation linéaire entre contrainte et déformation est très utile lors du calcul de la réponse d'un solide à la contrainte, mais il faut se rappeler que de nombreux solides ne sont élastiques qu'à de très petites déformations : jusqu'à environ 0.002. Au-delà de cela, certains se cassent et d'autres deviennent plastiques. Quelques solides, comme le caoutchouc, sont élastiques jusqu'à des déformations beaucoup plus importantes d'ordre 4 ou 5, mais ils cessent d'être linéairement élastiques (c'est-à-dire que la contrainte n'est plus proportionnelle à la déformation) après une déformation d'environ 0.01. La figure (05) représente l'étendu de la valeur du module de Young de différents matériaux. Le diamant est au sommet, avec un module de 1000 GPa ; les caoutchoucs souples et les polymères expansés sont en bas avec des modules aussi bas que 0.001 GPa . Les matériaux d'ingénierie pratiques se situent dans la plage de 10^{-3} à 10^3 GPa soit une plage de 10^6 [13]

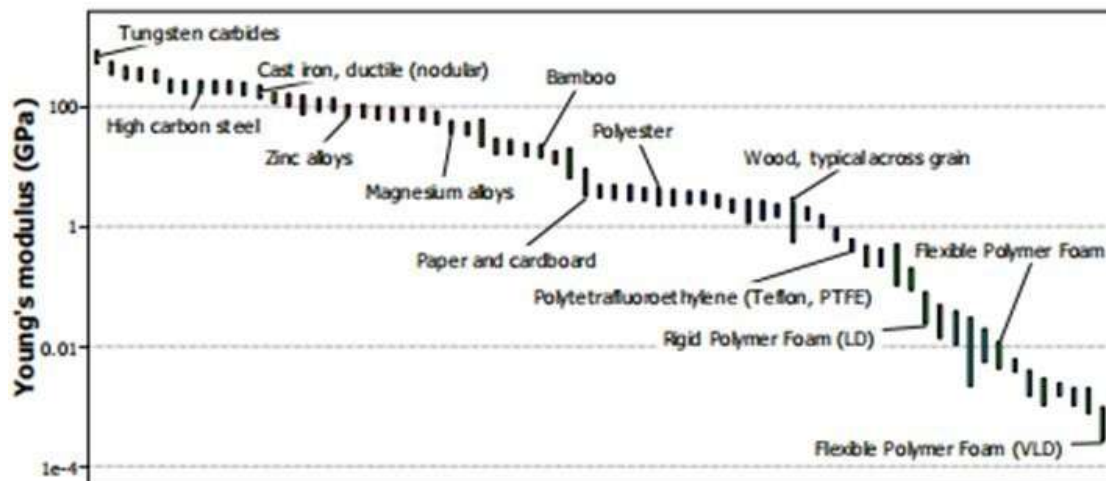


Figure 05 : Etendu de la valeur du module de Young de différents matériaux (CESEduPack 2013).

2.2 Essais mécaniques standards pour déterminer le module de Young

Le module de Young peut être déterminé expérimentalement par une méthode classique et standard qui est l'essai de traction. L'essai de traction se réalise dans un laboratoire avec des éprouvettes typiques cylindriques ou plates et elles doivent vérifier les conditions géométriques indiquées dans la figure (06).

$$l_0 = 5.65 \times \sqrt{S_0}$$

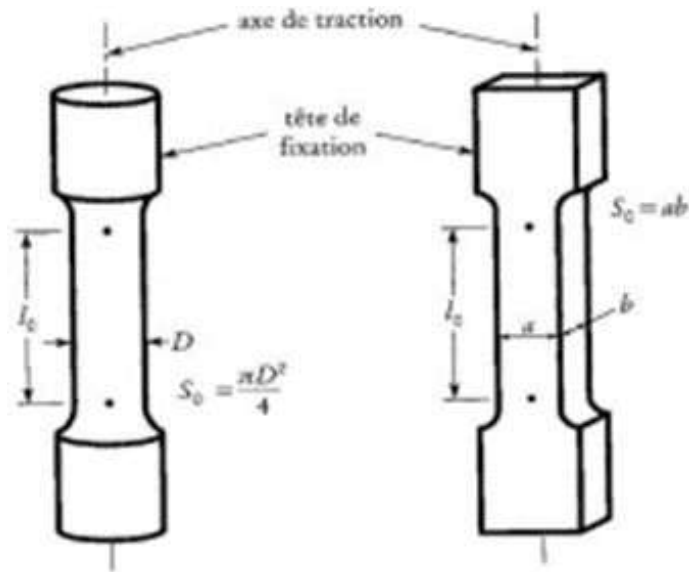


Figure 06 : Eprouvette typique pour l'essai de traction ^[14]

L'essai de traction permet de définir le comportement d'un matériau sous les conditions réelles d'utilisation. Il consiste à appliquer sur une éprouvette typique du matériau d'étude un effort et à mesurer l'allongement correspondant, ou inversement d'imposer l'allongement et à mesurer l'effort. Afin de les interpréter et ainsi de caractériser le matériau, on introduit des variables relatives au matériau : la contrainte et la déformation.

Une machine de traction (figure 07) (ou machine d'essais mécaniques ou encore machine d'essais universelle) est un appareil de laboratoire utilisé pour réaliser divers essais mécaniques, en général normalisés, sur des éprouvettes ou des pièces de matériau.



Figure 07 : Machine de traction

Une machine de traction est équipée d'un capteur de force interchangeable, fixé sur la traverse mobile, d'un capteur de déplacement, de deux attaches (mors) mobiles idéalement auto-serrantes pour réaliser un essai de traction et d'un enregistreur graphique. La traverse mobile est entraînée par deux vis latérales, actionnées par un motoréducteur à courroie continu. La liaison entre les vis et le réducteur s'effectue en général par poulies et courroie crantée. La vitesse du mors mobile, en général constante, peut être réglée de 1 à 500 mm/min (valeur typique : 10 mm/min)

Le type de sollicitation, tel que la traction uni-axiale, la traction-cisaillement, la compression ou la flexion trois points, dépend du porte-échantillon choisi et des dimensions de l'échantillon. Le montage peut être disposé dans une enceinte thermo régulée (pour essais à l'ambiante/chaud/froid). L'éprouvette de traction peut aussi être disposée dans un four ouvrant (en option, température maximale d'utilisation de 1000 °C par exemple)

L'échelle de charges du capteur de force peut être de 1 newton à plusieurs centaines de kilo newtons selon le type de produit examiné et le type de sollicitation.

Au moins trois éprouvettes sont prévues pour chaque essai. Une contrainte (ex. : de rupture en traction-cisaillement) ou une force d'emboîtement peuvent être mesurées.

Les machines d'essais modernes disposent d'un logiciel de calcul approprié.

Les mesures du déplacement peuvent se faire de deux façons soit en mesurant le déplacement de la traverse, soit en plaçant un dispositif de mesure sur la section utile de l'éprouvette (extensomètre). Les mesures peuvent atteindre une précision d'environ 1 à 0.1 μm avec les dispositifs les plus sensibles.

On en déduit alors l'allongement relatif ε (%)

$$\varepsilon(\%) = \frac{l - l_0}{l_0} \times 100 \dots \dots \dots (2.02)$$

Avec l_0 longueur utile initiale de l'éprouvette et l longueur utile de l'éprouvette qui varie avec l'effort exercé.

La contrainte associée à la force est définie par :

$$\sigma = \frac{F}{S} \dots \dots \dots (2.03)$$

Avec S la section de l'éprouvette.

Cette grandeur est à distinguer de la contrainte nominale (ou conventionnelle) liée à la structure.

La contrainte nominale est le rapport entre la force et la surface initiale de l'échantillon S_0 :

$$\sigma_0 = \frac{F}{S_0} \dots \dots \dots (2.04)$$

La déformation relative ε suivant l'axe est partout la même, est égale à sa valeur moyenne sur la longueur :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \dots \dots \dots (2.05)$$

Cette quantité est appelée allongement relatif de la tige.

$$\varepsilon = \frac{\Delta d_z}{d_z} \dots\dots\dots(2.06)$$

À faible charge, la déformation produite par l'application d'une augmentation continue de la charge uni-axiale de traction est élastique, comme représenté sur la figure (08). Où on distingue les zones suivantes :

- Zone OA : Domaine élastique linéaire, la charge est proportionnelle à l'allongement de l'éprouvette.
- Zone AD : Domaine plastique : Si la charge est supprimée, les déformations sont permanentes.
- Zone AB : Zone de grand glissement.
- Zone CD : Striction.

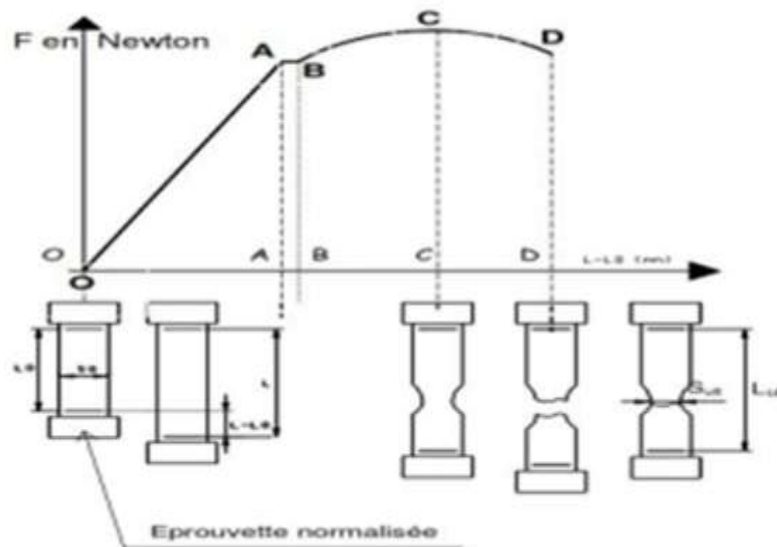


Figure 08 : Courbe de l'essai de traction.

Un tel comportement est caractéristique des matériaux ductiles comme l'acier. Dans les matériaux fragiles comme le verre, la céramique...etc. on distingue que la zone OA (zone élastique) (figure 09). Dans le cas des matériaux type caoutchouc la relation entre la contrainte et la déformation n'est pas linéaire (figure 10).

Lorsque la charge est supprimée, dans la zone élastique, l'éprouvette retrouve sa forme initiale et aucune déformation permanente n'est visible sur ses dimensions initiales. Ainsi, on peut insister sur la propriété élastique comme une caractéristique réversible du processus de déformation. Cette propriété, dans la plupart des matériaux où le comportement réellement élastique est observé, peut être représentée par la loi de Hooke qui est bien connu (2.01), qui concerne la déformation comme une fonction linéaire de la contrainte. La linéarité est appliquée à la plupart des matériaux, sauf ceux de type caoutchouc où la déformation est réversible mais pas linéaire.

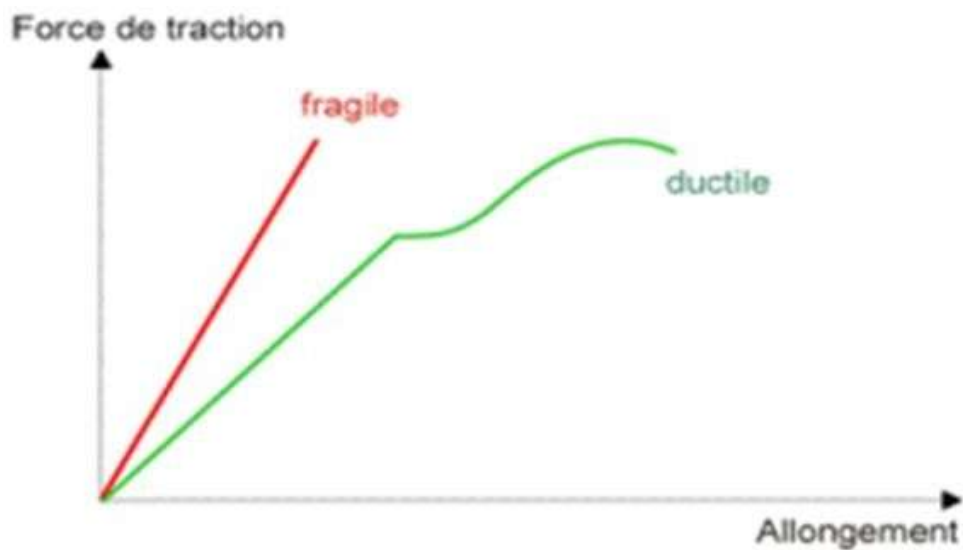


Figure 09 : Courbe de traction typique des matériaux fragiles et ductiles

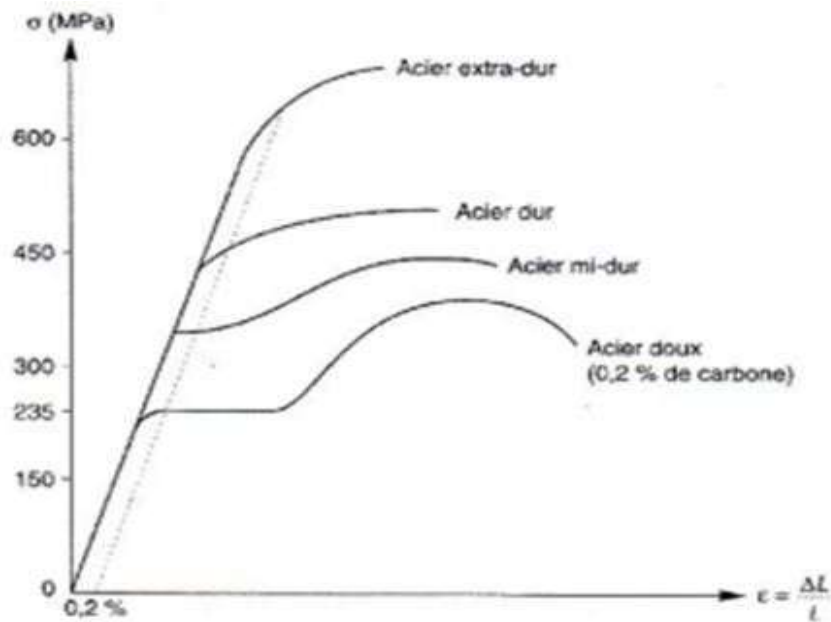


Figure 10 : Courbe de traction des matériaux élastomères.

On donne dans la figure (11) des courbes d'élasticité superposées des différents types d'acier.

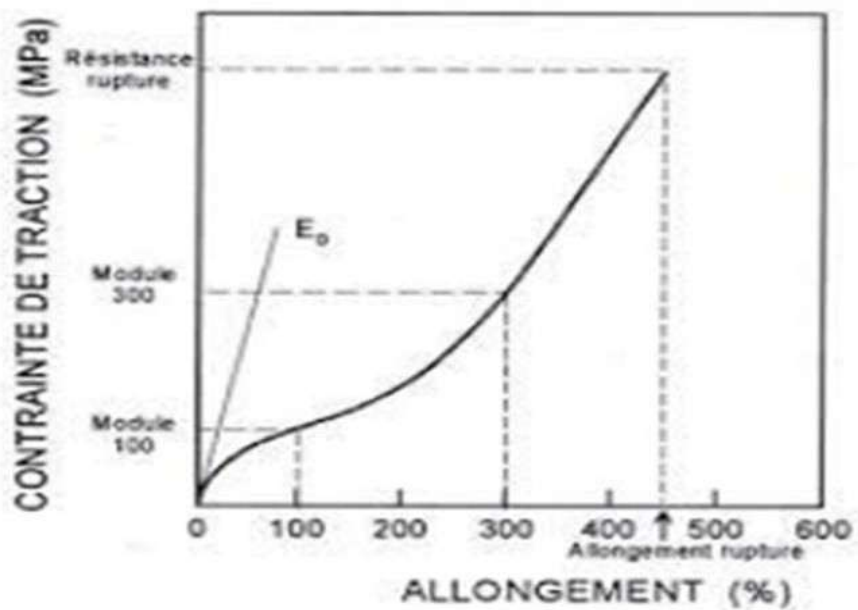


Figure 11 : Courbe des différents types d'acier.

2.2.1 Théorie des poutres d'Euler-Bernoulli

2.2.1.1 Définition géométrique d'une poutre

On peut représenter une poutre par la (figure 12) suivante :

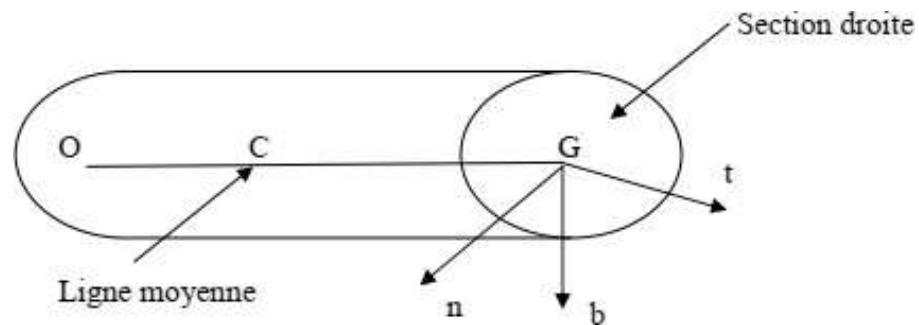


Figure 12 : Le trièdre de Fresnet en un point de la ligne moyenne

Dans ce plan, on définit la section droite de la poutre, de contour extérieur fermé et de centre de gravité sur la ligne moyenne ^[1]. La section droite peut aussi avoir des contours intérieurs. On appelle poutre, le volume engendré par les sections droites lorsque G décrit la ligne moyenne. On suppose de plus que :

Les sections droites sont constantes ou lentement variables lorsque G varie,

Si on appelle une dimension transversale de la section droite, on a en tout point de la poutre $d \ll R$.

Ces deux hypothèses sont essentielles, elles permettent d'assimiler un tronçon de poutre courbe de longueur dl à un tronçon de poutre droite.

Donc la poutre est un élément de modélisation commun caractérisé par une longueur grande par rapport à sa section. Pour bien définir une poutre il faut savoir sa section droite.

Un corps dont l'une des dimensions est bien plus grande que les deux autres est appelée poutre. Il existe plusieurs modèles pour le calcul d'élasticité des poutres (mathématique, la méthode des milieux continus) et puisque on travaille à l'échelle unidimensionnelle on utilise la méthode mathématique simple.

Dans ce cas on peut caractériser la contrainte normale comme suit :

$$\sigma = ky \dots \dots \dots (2.07)$$

Avec k constante, et $y = 0$ la position de l'axe neutre sur lequel la contrainte normale est égale à zéro.

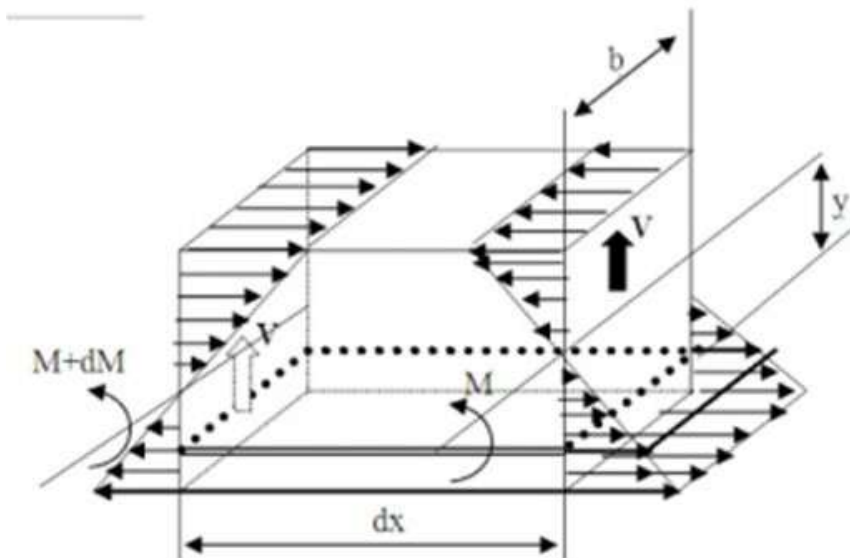


Figure 13 : Élément d'une poutre fléchie

Dans le cas de la poutre unidimensionnelle on doit vérifier ce qui suit :

$$\int S \sigma ds = 0 \dots \dots \dots (2.08) \Leftrightarrow \text{La résultante des efforts internes égale à 0}$$

$$\int S y \sigma ds = -M \dots \dots \dots (2.09) \Leftrightarrow \text{La somme des moments autour de l'axe } y=0 \text{ égale au moment fléchissant}$$

Avec S est l'aire de la section droite de la poutre.

En substituant l'équation (2.07) dans (2.08) et (2.09), on aura

$$k \int y ds = 0 \dots \dots \dots (2.10)$$

$$k \int y^2 ds = -M \dots \dots \dots (2.11)$$

On peut déduire la constante k en intégrant l'équation (2.12) et on aura :

$$k = -\frac{M}{I_z} \dots\dots\dots(2.12)$$

Des équations (2.05) et (2.10), la contrainte peut être écrite comme suit :

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_z} \dots\dots\dots(2.13)$$

Revenant à la déformation on peut la formuler en utilisant la loi d'Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{M_y}{EI_z} \dots\dots\dots(2.14)$$

Soit u le déplacement transversal de la poutre. Pour les petites déformations ($\frac{dv}{dx} \ll 1$) on peut être démontré que :

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y} = -\frac{M}{EI_z} \dots\dots\dots(2.15)$$

Avec r le rayon de giration de la déformée de la poutre. Cette équation implique que :

$$M = EI_z \ddot{v} \dots\dots\dots(2.16)$$

Cette équation est connue comme la loi d'Euler-Bernoulli de la théorie élémentaire des poutres

2.3 Vibrations transversales de flexion des poutres d'Euler-Bernoulli

On utilise la méthode des volumes finis pour déterminer l'équation différentielle de vibration transversale de la poutre ; cette méthode consiste à considérer un petit volume fini élémentaire à une distance x de l'extrémité de la poutre dont les dimensions sont infinitésimales (δx).

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta_x - M - V \delta_x - \frac{\delta V}{\delta x} \delta x^2 - F(x, y) \frac{\delta x^2}{2} = 0 \dots\dots(2.17)$$

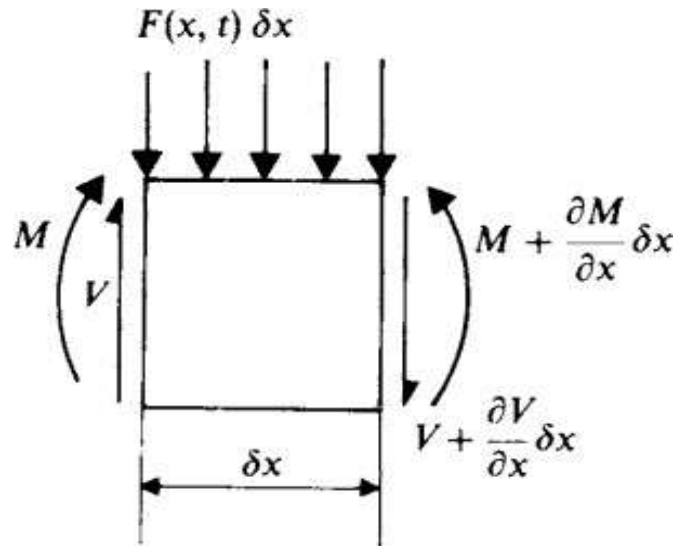


Figure 14 : Section transversale d'une poutre sous charge ^[15]

Pour une longueur infinitésimale petite ($\delta x \rightarrow 0$) cette équation devient :

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \dots\dots\dots(2.18)$$

La condition de l'équilibre dynamique pour la vibration transversale de la poutre est obtenue par l'application de la seconde loi de Newton :

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -V - \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + V + F(x, t) \delta x \dots\dots\dots(2.19)$$

Avec ρ la masse volumique.

Après simplifications, l'équation (2.19) peut être écrite comme :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} + F(x, t) \dots\dots\dots(2.20)$$

Substituons l'équation (2.18) dans (2.20) :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + F(x, t) \dots\dots\dots(2.21)$$

Avec l'équation (2.16), (2.21) devient :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI_z \ddot{v}) + F(x, t) \dots \dots \dots (2.22)$$

Si on assume que et sont constat, alors :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + F(x, t) \dots \dots \dots (2.23)$$

Dans le cas de la vibration libre :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \dots \dots \dots (2.24)$$

Où : ρ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - C^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \dots \dots \dots (2.25)$$

L'équation (2.25) est une équation différentielle partielle du quatrième ordre qui régit la vibration transversale libre de flexion d'une poutre de section droite constante. La solution de cette équation peut être obtenue en utilisant la technique de séparation des variables. Dans notre cas, on assume la solution sous la forme.

$$v = \varphi(x) q(t) \dots \dots \dots (2.26)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction qui dépend que de x et $q(t)$ est une fonction qui dépend que du temps.

L'équation précédente conduit à :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varphi(x) \frac{d^2 q(t)}{dt} = \varphi(x) \ddot{q}(t) \dots \dots \dots (2.27)$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{d^4 \varphi(x)}{dx^2} q(t) = \ddot{\varphi}(x) q(t) \dots \dots \dots (2.28)$$

Substituons ces équations dans (2.25) on aura :

$$\varphi(x) \ddot{q}(t) = - C^2 q(t) \dots \dots \dots (2.29)$$

Ceci nous donne :

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -C^2 \frac{\ddot{\varphi}(x)}{\varphi(x)} = -\omega^2 \dots\dots\dots(2.30)$$

Ou ω est une constante à déterminer.

L'équation (2.30) mène aux deux équations suivantes :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \dots\dots\dots(2.31)$$

$$\ddot{\varphi}(x) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varphi = 0 \dots\dots\dots(2.32)$$

La solution de l'équation (2.31) est donnée par :

$$q = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \dots\dots\dots(2.33)$$

Pour l'équation (2.32) nous assumons une solution sous la forme :

$$\varphi = B e^{\lambda x} \dots\dots\dots(2.34)$$

Substituons cette solution dans l'équation (2.32) :

$$\left[\lambda^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] B e^{\lambda x} = 0 \dots\dots\dots(2.35)$$

$$\left[\lambda^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] 0 = \dots\dots\dots(2.36)$$

Qui peut être écrite comme :

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0 \dots\dots\dots(2.37)$$

Où :

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{c}} \dots\dots\dots(2.38)$$

Les racines de l'équation (2.37) sont :

$$\lambda_1 = \beta\lambda_2 = -\beta\lambda_3 = i\beta\lambda_4 = -i\beta \dots \dots \dots (2.39)$$

Avec $i = \sqrt{-1}$

La solution générale de l'équation (2.32) peut être écrite comme :

$$\varphi(x) = B_1 e^{\beta x} + B_2 e^{-\beta x} + B_3 e^{i\beta x} + B_4 e^{-i\beta x} \dots \dots \dots (2.40)$$

Qui peut être écrite comme suite [15] :

$$\varphi(x) = B_5 \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} + B_6 \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} + B_7 (-i) \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2} + B_8 \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \dots \dots (2.41)$$

Où :

$$B_1 = \frac{B_5 + B_6}{2}, B_2 = \frac{B_6 - B_5}{2}, B_3 = \frac{B_8 - iB_7}{2}, B_4 = \frac{B_8 + iB_7}{2} \dots \dots \dots (2.42)$$

L'équation (2.41) peut être réécrite en utilisant la formule d'Euler des variables complexes :

$$\varphi(x) = B_5 \sinh \beta x + B_6 \cosh \beta x + B_7 \sinh \beta x + B_8 \cosh \beta x \dots \dots (2.43)$$

Substituons les équations (2.33) et (2.43) dans l'équation (2.26) :

$$v(x, t) = (B_5 \sinh \beta x + B_6 \cosh \beta x + B_7 \sinh \beta x + B_8 \cosh \beta x)(A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t) \dots \dots (2.44)$$

Les fréquences naturelles de la poutre, dépendent des conditions aux limites et initiales.

2.3.1 Poutre simplement appuyée aux deux extrémités

Pour une poutre simplement appuyée aux deux extrémités, les conditions aux limites sont :

$$U(0, t) = 0, \ddot{v}(0, t) = 0, v(l, t) = 0 \text{ et } \ddot{v}(l, t) = 0$$

Il est clair que dans ce cas, il y a deux conditions aux limites géométriques qui indiquent les déplacements aux deux extrémités de la poutre et il y a deux conditions aux limites naturelles qui indiquent les moments aux extrémités de la poutre. Substituons ces conditions dans l'équation (2.43) :

$$\left. \begin{cases} B_6 + B_8 = 0 \\ B_6 - B_8 = 0 \\ B_5 \sinh \beta l + B_6 \cosh \beta l + B_7 \sinh \beta l + B_8 \cosh \beta l = 0 \\ B_5 \sinh \beta l + B_6 \cosh \beta l - B_7 \sinh \beta l - B_8 \cosh \beta l = 0 \end{cases} \right\} \dots\dots\dots(2.45)$$

Ces équations sont satisfaites que si : $B_5 = B_6 = B_8 = 0$ et :

$$B_7 \sin \beta l = 0 \dots\dots\dots(2.46)$$

Les racines de l'équation (2.46), sont :

$$\beta l = j\pi, j = 1, 2, 3 \dots\dots\dots(2.47)$$

Donc, les fréquences naturelles sont données par :

$$\omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} c = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \dots\dots\dots(2.48)$$

Avec l'épaisseur de la poutre.

Et les modes de vibration correspondants sont :

$$\phi_j = B_j \sin \beta_j x, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.49)$$

La solution pour la vibration libre d'une poutre simplement appuyée peut être écrite comme :

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j q_j = \sum_{j=1}^{\infty} (C_j \sin \omega_j t + D_j \cos \omega_j t) \sin \beta_j x = \dots \quad (2.50)$$

Les constantes C_j et D_j peuvent être déterminées suivant les conditions initiales. Le module de Young pour ce cas de la poutre peut être déterminé comme suit :

$$E = \frac{12 \rho l^4}{j^4 \pi^4 h^2} \omega_j^2 = \frac{48 \rho l^4}{j^4 \pi^2 h^2} f_j^2 \quad \dots \quad (2.51)$$

Avec f_j la $j^{\text{ème}}$ fréquence propre en Hz.

2.3.2 Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre

Dans le cas d'une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre, les conditions aux limites sont:

$$v(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(l,t) = 0$$

Lorsqu'elles sont remplacées dans l'équation (2.43) et après quelques simplifications mathématiques, la matrice des coefficients est obtenue comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sinh(\beta l) + \sin(\beta l) & \cosh(\beta l) + \cos(\beta l) \\ \cosh(\beta l) + \cos(\beta l) & \sinh(\beta l) - \sin(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots \quad (2.52)$$

L'équation de fréquence est alors :

$$\cos \beta l \times \cosh \beta l = -1 \quad \dots \quad (2.53)$$

Ou :

$$-\cos(\beta l) = \frac{1}{\cosh(\beta l)} \quad \dots \quad (2.54)$$

Traçons $-\cos(\beta l)$ et $1/\cosh(\beta l)$ en fonction de βl , et prenons les valeurs de βl au intersections des deux courbes. Les valeurs numériques des différentes fréquences de résonances (différents modes) de la poutre peuvent être déterminés figure (14). Les valeurs de βl aux 5 premiers points d'intersection des deux courbes sont :

$$\beta_1 l = 1.8751$$

$$\beta_2 l = 4.6941$$

$$\beta_3 l = 7.8547$$

$$\beta_4 l = 10.995$$

$$\beta_5 l = 14.137$$

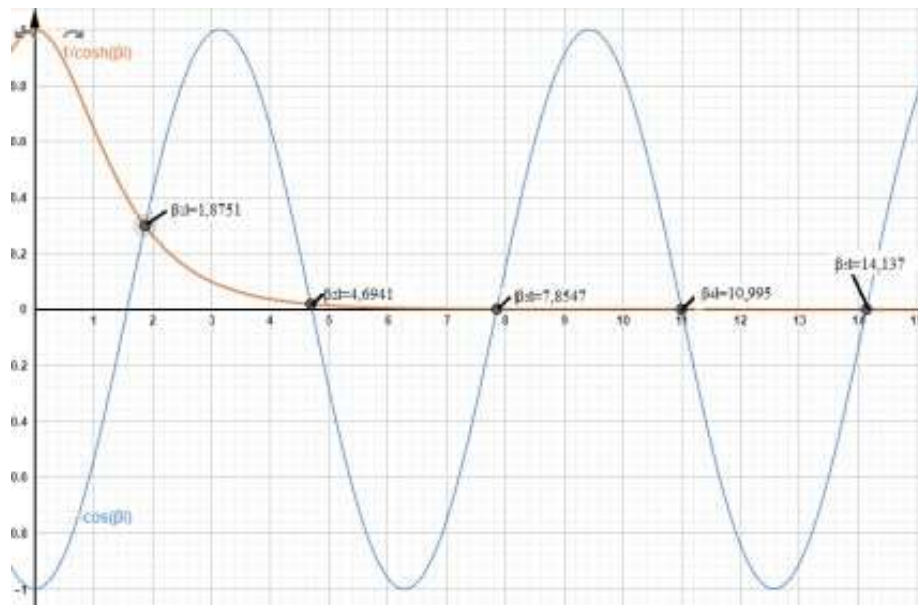


Figure 15 : Courbes $-\cos(\beta l)$ et $1/\cosh(\beta l)$ en fonction de βl .

De ces valeurs, on obtient les premières fréquences naturelles des vibrations de flexion de la poutre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \approx \left(\frac{1.8751}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_2 \approx \left(\frac{4.6941}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_3 \approx \left(\frac{7.8547}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \dots\dots\dots(2.55) \\ \omega_4 \approx \left(\frac{10.995}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_5 \approx \left(\frac{14.137}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \end{array} \right.$$

Ou pour la première fréquence dans le cas de la poutre encastrée-libre :

$$f_1 \approx \frac{(1.8751)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \dots\dots\dots(2.56)$$

L'expression finale du module de Young peut être dérivée d'une des équations précédentes, comme :

$$E \approx \frac{4\pi^2}{(1.8751)^4} \left(\frac{12\rho}{h^2} \right) (f_1 l^2)^2 \dots\dots\dots(2.57)$$

2.3.3 Poutre encastrée aux deux extrémités

Pour une poutre simplement appuyée aux deux extrémités, les conditions aux limites sont :

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = 0$$

Lorsqu'elles sont remplacées dans l'équation (2.43) et après quelques simplifications mathématiques, la matrice des coefficients est obtenue comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sinh(\beta l) - \sin(\beta l) & \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) \\ \cosh(\beta l) - \cos(\beta l) & \sinh(\beta l) + \sin(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.58)$$

La solution non triviale du déterminant de la matrice des coefficients est la suivante :

$$\cosh(\beta_j l) \cos(\beta_j l) = 1 \dots \dots \dots (2.59)$$

Où :

$$\cos(\beta l) = \frac{1}{\cosh(\beta l)} \dots \dots \dots (2.60)$$

Traçons $\cos(\beta l)$ et $\frac{1}{\cosh(\beta l)}$ en fonction de βl , et prenons les valeurs de βl au intersections des deux courbes.

Les valeurs numériques des différentes fréquences de résonances (différents modes) de la poutre peuvent être calculées figure (15).

Les valeurs de βl aux 5 premiers points d'intersection des deux courbes sont :

$$\beta_1 l = 4.73002$$

$$\beta_2 l = 7.85321$$

$$\beta_3 l = 10.956$$

$$\beta_4 l = 14.1370$$

$$\beta_5 l = 17.2970$$

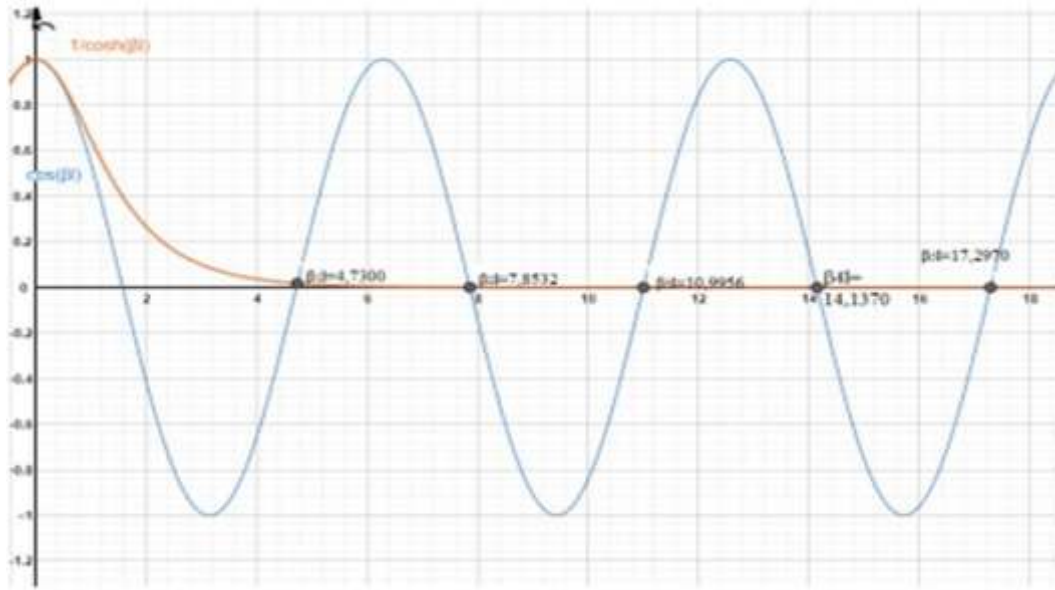


Figure 16 : Courbes $\cos(\beta l)$ et $1/\cosh(\beta l)$ en fonction de βl .

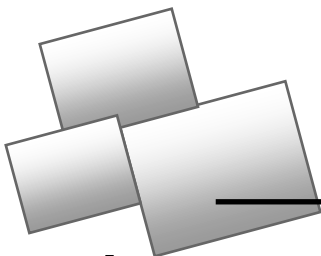
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \approx \left(\frac{4.7300}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_2 \approx \left(\frac{7.8553}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_3 \approx \left(\frac{10.996}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_4 \approx \left(\frac{14.137}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \\ \omega_5 \approx \left(\frac{17.279}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(2.61)$$

Ou pour la première fréquence dans le cas de la poutre encastree-encastree :

$$f_1 \approx \frac{(4.7300)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \dots\dots\dots(2.62)$$

L'expression finale du module de Young peut être dérivée d'une des équations précédentes, comme :

$$E \approx \frac{4\pi^2}{(4.7300)^4} \left(\frac{12\rho}{h^2} \right) (f_1 l^2)^2 \dots\dots\dots(2.63)$$



CHAPITRE :

3

**Détermination dynamique du module de
Young**

Dans cette chapitre, on s'est basé sur les travaux effectués par docteur Hammou et al ^[13,14].

Pour déterminer le module d'élasticité de manière par des tests non destructives (essais dynamiques), en se basant sur la théorie des vibrations transversales des poutres (théorie d'Euler-Bernoulli). Dans ces études ils ont utilisé plusieurs poutres avec différentes longueurs, et ils ont conclu que cette théorie est plus efficace et fiable pour les poutres de grandes longueurs par rapport aux autres dimensions transversales et dans une autre étude, ils ont fait la même théorie, et se sont contentés de la simulation numérique, pour plusieurs poutres de même longueur (1 m), et nous avons procédé à la modification de leur largeur, pour voir l'étendue de cet effet sur l'efficacité de la théorie. Et faites attention aux trois premières fréquences et aux trois premiers modes, car ce sont les plus évidents sur le plan pratique.

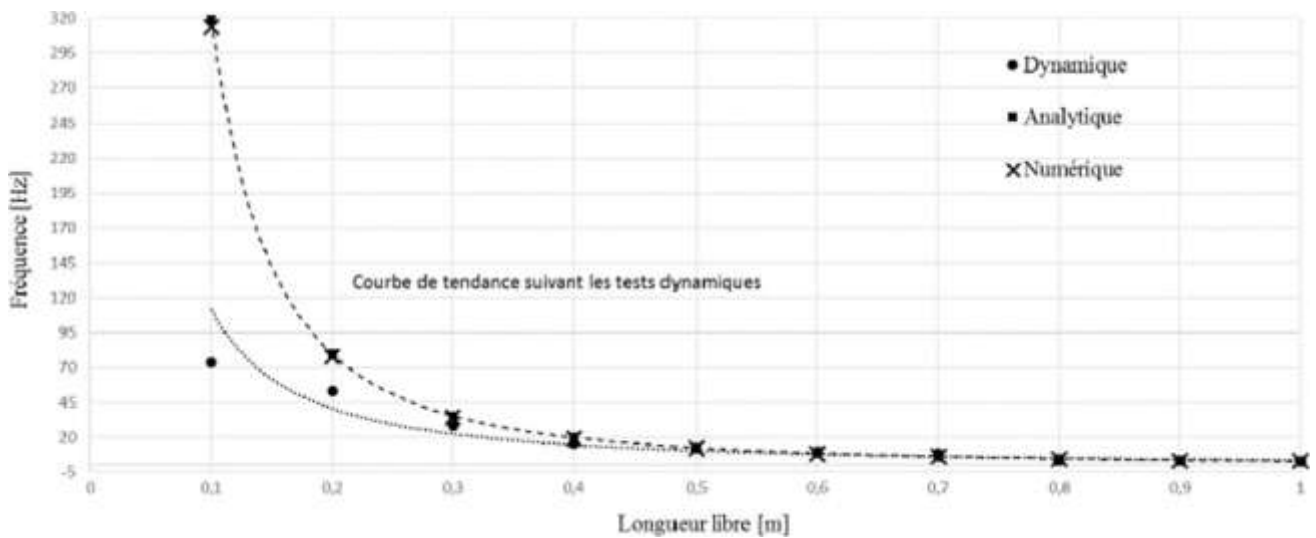


Figure 17 : 1ère fréquence propre en fonction de la longueur des poutres ^[11]

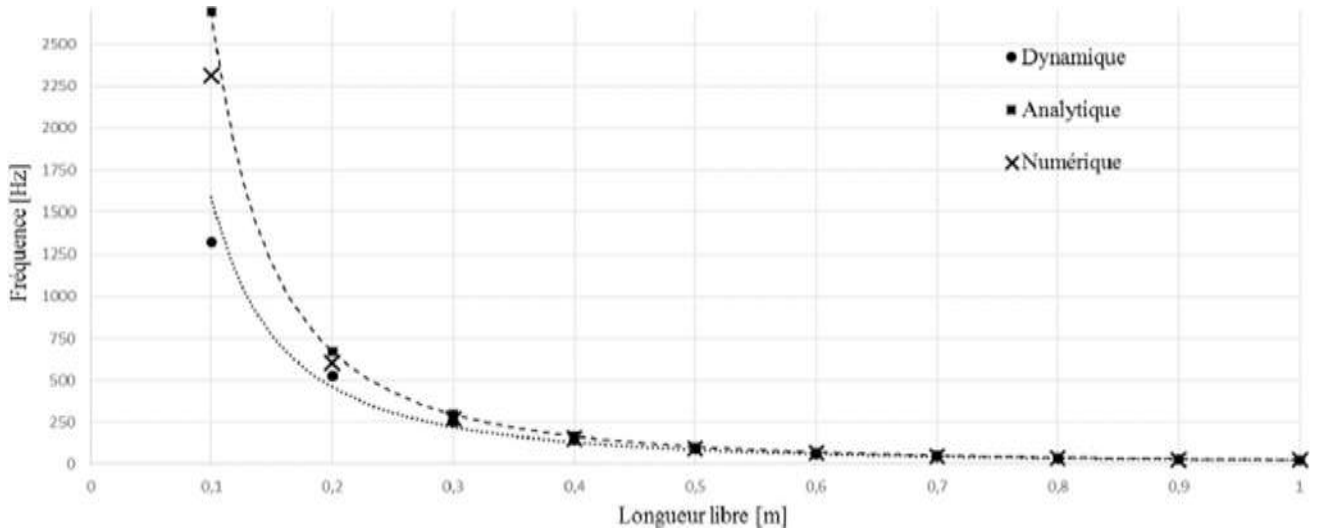


Figure 18 : 2ème fréquence propre en fonction de la longueur des poutres ^[11]

Dans notre travail, nous avons procédé à la même étude, et procédé avec la même théorie, pour plusieurs poutres et sans changer la longueur (1 m), et nous avons procédé à changer leur largeur. Nous nous intéressons aux trois premières fréquences et aux trois premiers modes, car ce sont les plus visibles au niveau des domaines pratiques.

Notre étude c'est limité sur le cas d'une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre, et le cas d'une poutre encastree aux deux extrémités. Nous avons utilisé dans cette étude l'acier comme matériau des poutres par exemple (tableau I).

Tableau I : Représenté propriété matériaux Acier S235 et S335

| Matériau | Acier S235 | Acier S335 |
|--|------------|------------|
| Module d'élasticité (Gpa) | 210 | 210 |
| Densité (Kg/m ³) | 7800 | 7800 |
| Coefficient de poisson | 0.3 | 0.3 |
| Limite d'élastique à la traction (Mpa) | 235 | 335 |

3.1 Essais dynamique

Les poutres sont montées en porte-à-faux sur une table rigide par l'intermédiaire de deux étaux l'une après l'autre successivement (figure 19). Ces poutres sont donc encastrées à une extrémité et libre à l'autre. Le capteur de vibration avec base magnétique est placé près de l'extrémité libre. Ce capteur est relié par un câble adéquat l'analyseur GETAC StudioVib (figure 20).



Figure 19 : Montage d'une poutre pour l'essai dynamique

Après montage de la tête bille mou, on provoque un choc très rapide (théoriquement sous forme d'une fonction de Dirac) sur la poutre. Cette dernière, va répondre au choc par une vibration libre, celle-ci est enregistrée et ensuite analysée

3.1.1 Analyseur GETAC StudioVib

C'est un genre d'ordinateur spécialement conçu pour l'analyse et le traitement des signaux vibration avec une carte d'acquisition.



Figure 20 : Analyseur GETAC StudioVib

StudioVib est un logiciel destiné à l'acquisition et à l'analyse des vibrations.

Ses principales fonctions sont les suivants :

- Pilotage de cartes d'acquisition pour réaliser les mesures.
- Stockage des mesures temporelles brutes (durée non limitée) dans une de données.
- Réalisation d'analyses en post traitement sur le signal de son choix.
- Réalisation d'analyses en mode automatique sur un ensemble de points de mesures à l'image des traditionnels collecteurs de données.
- Visualisation des résultats.

Le logiciel se présente sous forme de fenêtre qui présentent (figure 21)

- Arborescence des points de mesures.
- Tableau pour sélectionner les points de mesures.
- Historique des acquisitions.
- Liste des analyses réalisées ou programmées.
- Fenêtres de visualisation des analyses.

StudioVib s'installe sur tout micro-ordinateur compatible PC avec la configuration suivante :

- Windows XP version pro
- Windows 7 Version Pro
- Word 2003/2010

Sur la partie droite grisée apparaîtront les fenêtres associées à la fonction de construction de la base, d'acquisition des signaux temporels, d'association des mesures aux points de la base (transfert), de définition des analyses...etc.

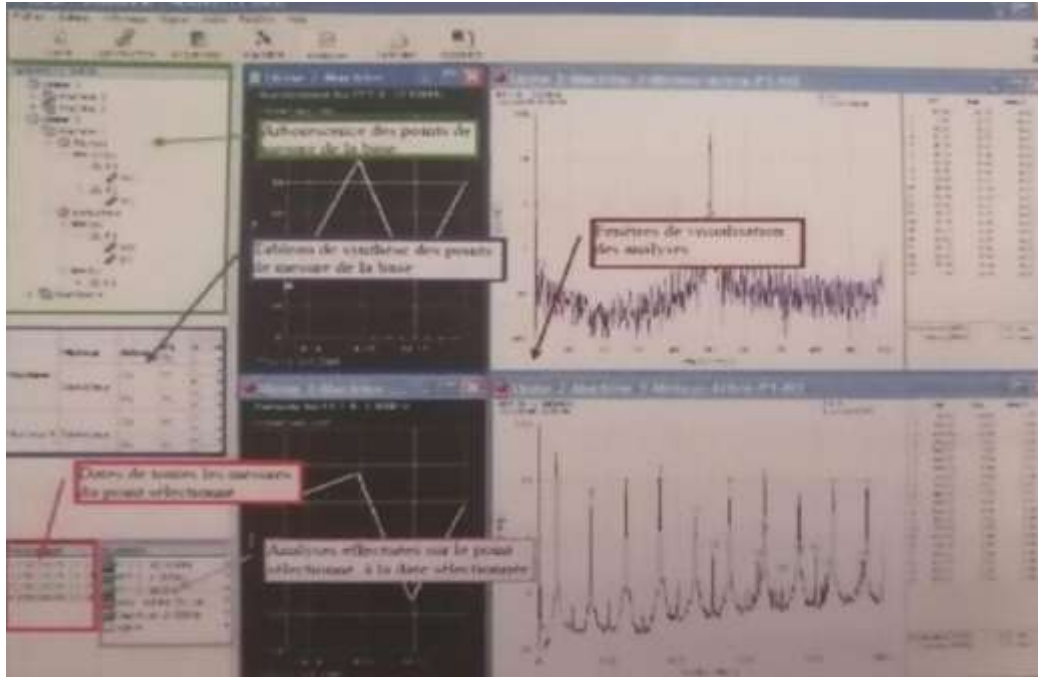


Figure 21 : logiciel StudioVib

StudioVib permet de travailler avec des fichiers temporels issus des systèmes suivants (figure 22) :

- Fichiers « audio » au format « wav ».
- Fichiers issus des cartes National Instrument au format « bin ».

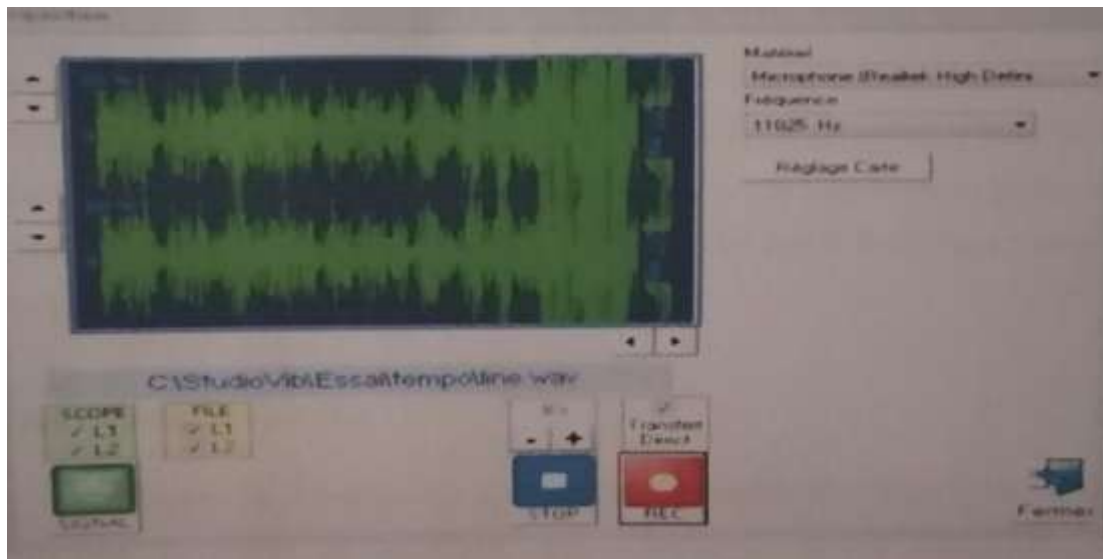


Figure 22 : Fenêtre d'acquisition de StudioVib

3.1.2 Marteau de choc

- Le marteau d'impact est constitué d'une tête fixe contenant un capteur de force, d'un manche avec une poignée en caoutchouc, des extensions interchangeables pour la tête ainsi que différents embouts d'impact (acier, aluminium, plastique dur ou souple) (figure 23).

Le marteau d'impact dynamique a deux impératifs : Exciter la structure d'essai avec une force constante dans la gamme de fréquence recherchée et, générer une impulsion de tension analogique qui doit être la représentation exacte de l'impact d'entrée (F, t), à la fois en amplitude et en phase. On peut monter sur ce marteau trois type de tête bille (mou, moyen et dur) pour les différentes plages de fréquences voulues.



Figure 23 : Marteau d'impact

Les marteaux d'impact utilisent un capteur de force à quartz qui compense l'accélération cette technologie exclusive permet d'éviter que la résonance propre du marteau produise un pulse parasite de mesure sur le signal de sortie L'importante rigidité du capteur de force associée à une compensation de l'accélération génère un signal de mesure propre et lisse, qui est l'exacte représentation de la fonction d'entrée, à la fois en amplitude et en phase.

3.1.3 Capteur de vibration

Un capteur de vibration est un transducteur capable de convertir en signal électrique le niveau de vibrations qu'il subit à un instant donné. Il est dit différentiel s'il mesure le mouvement dynamique relatif entre ses deux points d'attache : c'est typiquement le cas des capteurs inductifs à noyau plongeur, ou celui des vibromètres laser. Si l'on ne peut garantir la totale immobilité d'une des deux interfaces, il sera dit relatif.

Le capteur utilisé dans les tests est un accéléromètre Wilcoxon modèle 736/736T (figure 24) avec une sensitive égale à 100mv/g (5-15000HZ) collé sur la structure par l'intermédiaire d'un aimant.



Figure 24 : Accéléromètre Wilcoxon

Le capteur est monté près de l'extrémité libre des poutres (figure 25).

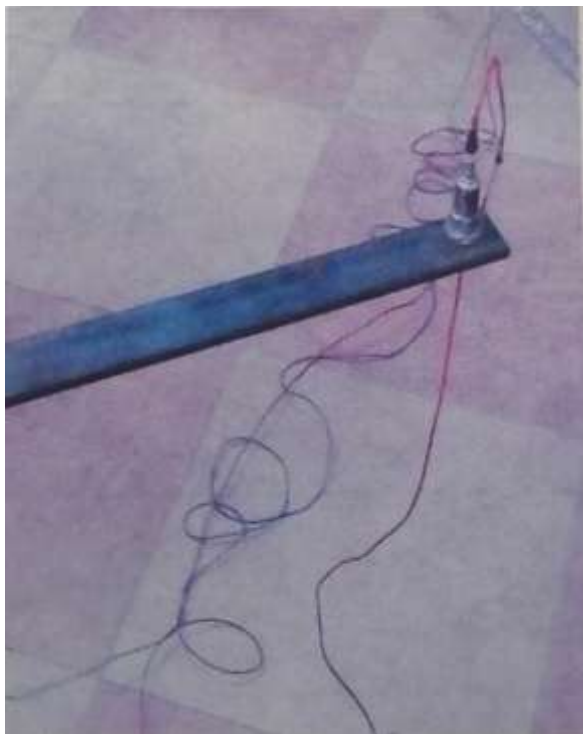
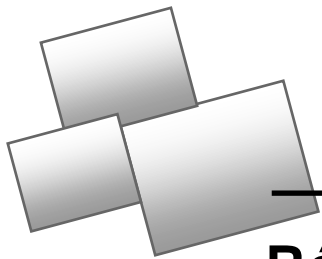


Figure 25 : Montage du capteur de vibration



CHAPITRE :

4

Résultats et discussions

4.1 Modélisation analytique

Nous avons modélisé la méthode Euler-Bernoulli pour déterminer les trois premières fréquences de poutre à partir des équations analytiques (2,55 et 2,61), à l'aide de l'outil Excel, sur plusieurs poutres d'épaisseurs différentes dans chaque cas (poutre encastre-libre).

Les tableaux suivants (tableaux II) représentent les fréquences des trois premières poutres dans chaque cas.

Tableau II : Les trois premières fréquences analytiques pour différentes largeurs d'une poutre encadrée-libre.

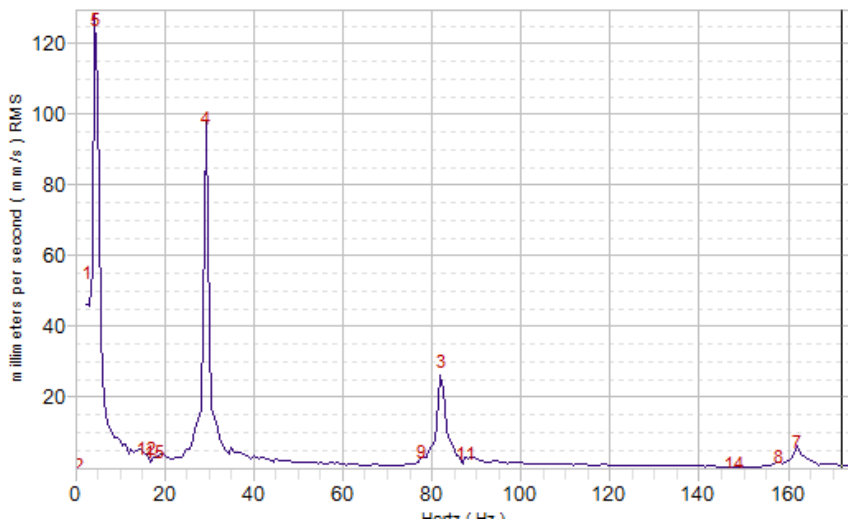
| | | fréquence analytique (Hz) pour différentes largeurs (m) | | | | | | |
|-------------------|----------------|---|------|-------|------|-------|------|------|
| Epaisseur h (m) | | 0.005 | 0.01 | 0.015 | 0.02 | 0.025 | 0.03 | 0.06 |
| 0.006 | 1ère fréquence | 4.907 | | | | | | |
| | 2ème fréquence | 30.755 | | | | | | |
| | 3ème fréquence | 86.115 | | | | | | |

4.2 Résultats des tests dynamiques

Pour les tests dynamiques, on a utilisé sept poutres et de différentes largeur (60 mm, 30 mm, 25mm, 20 mm, 15 mm, 10 mm, 5 mm).

FFT Vel. 0 -500Hz
02/06/2021 15:33:39

X = 171,7912
Y = 0,8504858



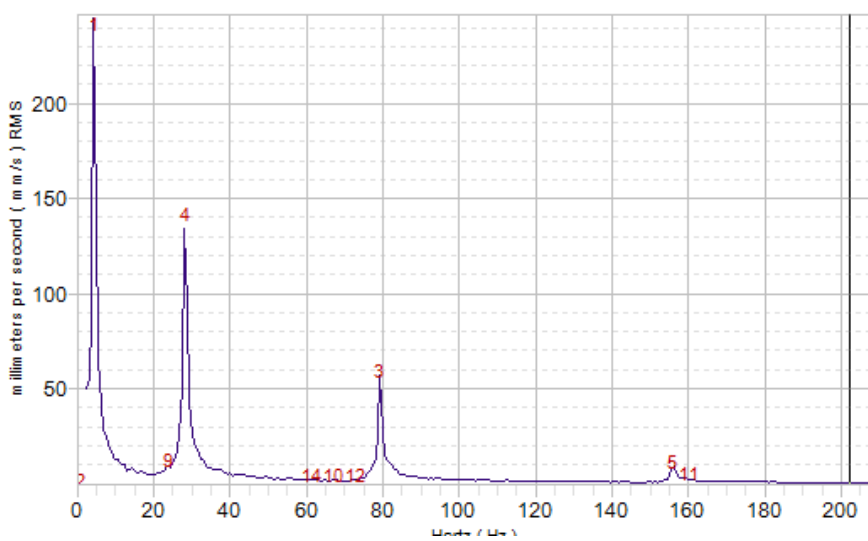
| | Hz | mm/s |
|----|--------|----------|
| 1 | 2,81 | 54,17 |
| 2 | 0,94 | 1,18E-15 |
| 3 | 82,11 | 29,07 |
| 4 | 29,38 | 97,89 |
| 5 | 4,60 | 139,96 |
| 6 | 269,06 | 0,94 |
| 7 | 162,08 | 6,59 |
| 8 | 157,82 | 2,13 |
| 9 | 77,78 | 3,47 |
| 10 | 400,92 | 0,18 |
| 11 | 87,81 | 3,28 |
| 12 | 15,96 | 4,61 |
| 13 | 257,84 | 0,24 |
| 14 | 147,79 | 0,52 |
| 15 | 17,75 | 3,57 |

Velocity [RMS] 192,0 mm/s

Figure 26 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (60 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

FFT Vel. 0 -500Hz
02/06/2021 15:59:56

X = 201,9969
Y = 0,6792989



| | Hz | mm/s |
|----|--------|----------|
| 1 | 4,44 | 246,55 |
| 2 | 0,94 | 1,18E-15 |
| 3 | 79,38 | 57,11 |
| 4 | 28,28 | 139,36 |
| 5 | 156,02 | 9,80 |
| 6 | 390,34 | 0,60 |
| 7 | 261,56 | 1,56 |
| 8 | 386,60 | 1,64 |
| 9 | 24,02 | 10,70 |
| 10 | 67,20 | 2,35 |
| 11 | 160,32 | 2,96 |
| 12 | 72,80 | 2,27 |
| 13 | 399,17 | 0,06 |
| 14 | 61,55 | 2,82 |
| 15 | 404,04 | 0,05 |

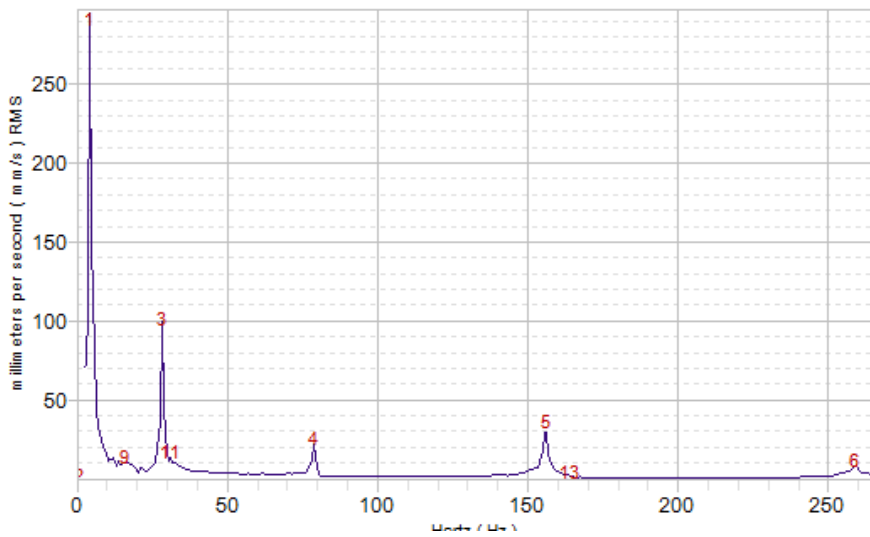
Velocity [RMS] 311,6 mm/s

Figure 27 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (30 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

Chapitre 4 Résultats et discussions

FFT Vel. 0 -500Hz
02/06/2021 16:09:07

X = 271,3889
Y = 0,7456242



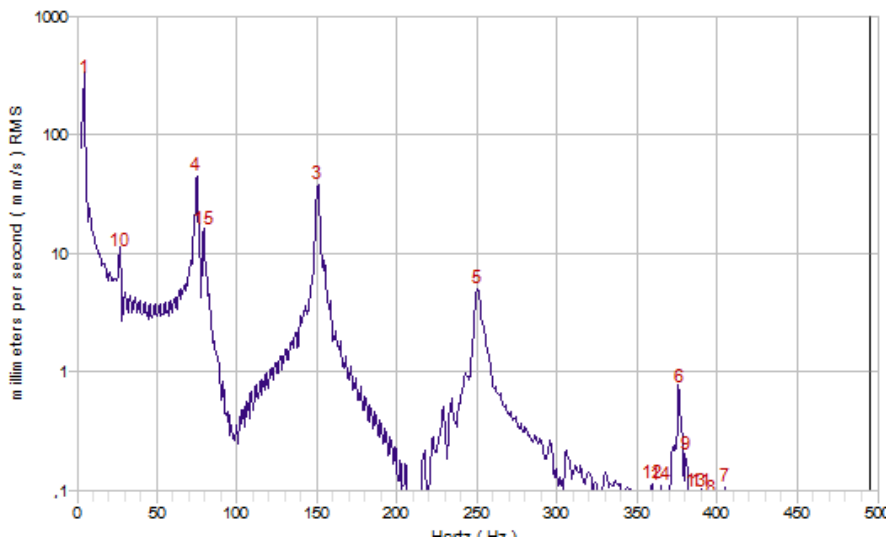
| | Hz | mm/s |
|----|--------|----------|
| 1 | 4,38 | 294,71 |
| 2 | 0,94 | 1,18E-15 |
| 3 | 28,13 | 99,26 |
| 4 | 78,85 | 22,65 |
| 5 | 155,93 | 34,34 |
| 6 | 259,04 | 9,34 |
| 7 | 387,81 | 3,00 |
| 8 | 404,07 | 0,37 |
| 9 | 15,94 | 11,81 |
| 10 | 274,68 | 0,93 |
| 11 | 31,01 | 14,22 |
| 12 | 285,94 | 0,41 |
| 13 | 164,09 | 2,20 |
| 14 | 325,94 | 0,21 |
| 15 | 296,57 | 0,22 |

| | |
|----------------|------------|
| Velocity [RMS] | 333,7 mm/s |
|----------------|------------|

Figure 28 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (25 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

FFT Vel. 0 -500Hz
02/06/2021 16:42:48

X = 494,7863
Y = 2,949142E-02



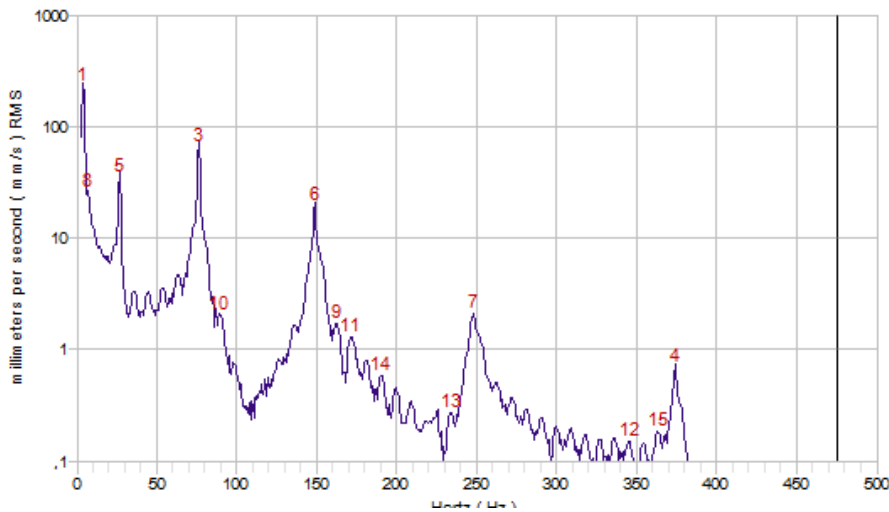
| | Hz | mm/s |
|----|--------|----------|
| 1 | 4,36 | 335,63 |
| 2 | 0,94 | 1,18E-15 |
| 3 | 150,34 | 42,74 |
| 4 | 74,72 | 50,77 |
| 5 | 250,29 | 5,81 |
| 6 | 375,87 | 0,84 |
| 7 | 405,28 | 0,12 |
| 8 | 395,93 | 0,10 |
| 9 | 380,26 | 0,22 |
| 10 | 26,71 | 11,71 |
| 11 | 389,75 | 0,11 |
| 12 | 359,08 | 0,13 |
| 13 | 386,54 | 0,11 |
| 14 | 364,67 | 0,13 |
| 15 | 79,12 | 17,89 |

| | |
|----------------|------------|
| Velocity [RMS] | 356,5 mm/s |
|----------------|------------|

Figure 29 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (20 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

FFT Vel. 0 -500Hz
02/06/2021 16:50:36

X = 474,7843
Y = 3,976035E-02



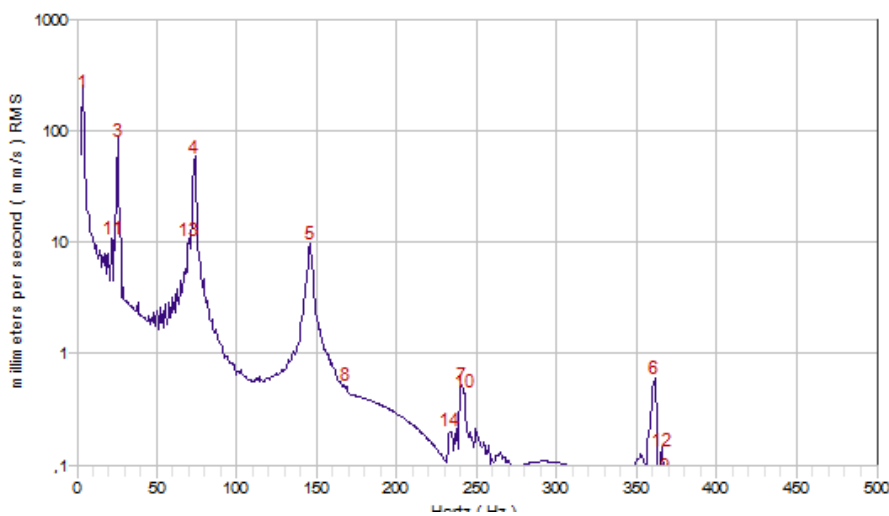
| Hz | mm/s |
|----|--------|
| 1 | 3,95 |
| 2 | 0,94 |
| 3 | 76,13 |
| 4 | 373,99 |
| 5 | 26,79 |
| 6 | 148,52 |
| 7 | 247,81 |
| 8 | 6,60 |
| 9 | 162,19 |
| 10 | 89,07 |
| 11 | 171,56 |
| 12 | 345,30 |
| 13 | 234,05 |
| 14 | 190,31 |
| 15 | 363,43 |

Velocity [RMS] 312,3 mm/s

Figure 30 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (15 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

FFT Vel. 0 -500Hz
02/06/2021 16:58:11

X = 500
Y = 5,739617E-02



| Hz | mm/s |
|----|--------|
| 1 | 3,75 |
| 2 | 0,94 |
| 3 | 25,63 |
| 4 | 73,51 |
| 5 | 145,91 |
| 6 | 361,00 |
| 7 | 240,34 |
| 8 | 168,42 |
| 9 | 367,83 |
| 10 | 242,19 |
| 11 | 22,17 |
| 12 | 365,40 |
| 13 | 70,22 |
| 14 | 233,45 |
| 15 | 497,83 |

Velocity [RMS] 274,1 mm/s

Figure 31 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (10 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

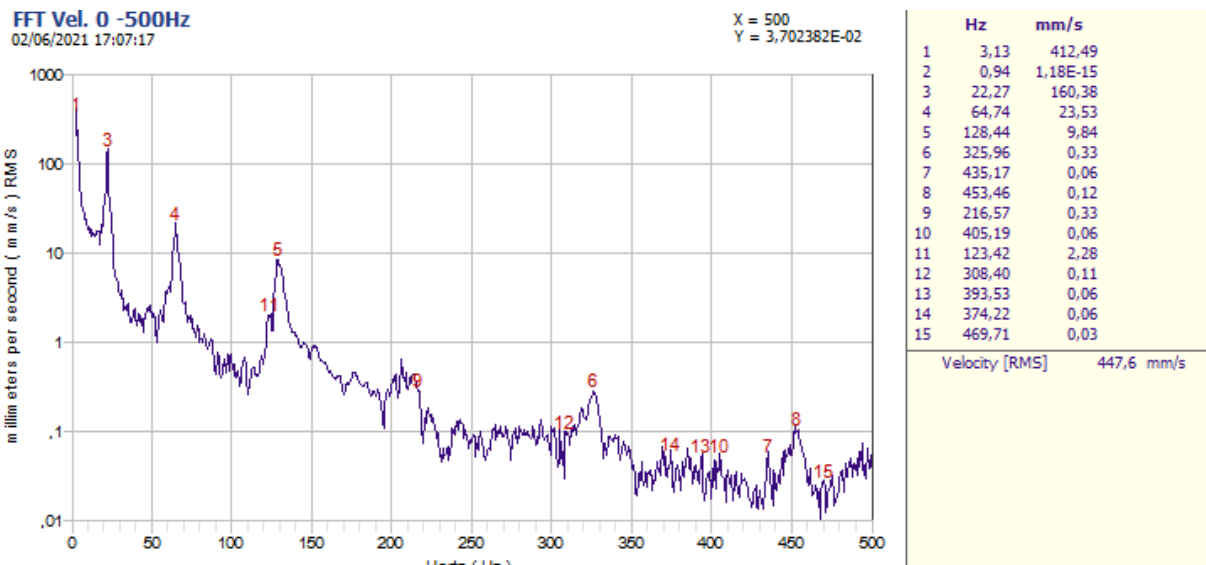


Figure 32 : Les spectres FFT Vel [0-500 Hz] à poutre (5 mm) de la largeur ($h=0.006m$)

Dans les tableaux suivant (III.IV.V) nous représentons respectivement les trois fréquences expérimentales correspondante pour les poutres encastrees-libres pour les différentes largeurs avec l'épaisseur ($h=0.006m$).

Tableau III : Le première pic expérimental correspond à la première fréquence pour différentes largeurs d'une poutre encastree-libre.

| Largeur (m) | 0.005 | 0.01 | 0.015 | 0.02 | 0.025 | 0.03 | 0.06 |
|----------------|-------|------|-------|------|-------|------|------|
| Fréquence (Hz) | 3.13 | 3.75 | 3.95 | 4.36 | 4.38 | 4.44 | 4.6 |

Tableau IV : Le deuxième pic expérimental correspond à la deuxième fréquence pour différentes largeurs d'une poutre encastree-libre.

| Largeur (m) | 0.005 | 0.01 | 0.015 | 0.02 | 0.025 | 0.03 | 0.06 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Fréquence (Hz) | 22.27 | 25.63 | 26.79 | 26.71 | 28.13 | 28.28 | 29.38 |

Tableau V : Le troisième pic expérimental correspond à la troisième fréquence pour différentes largeurs d'une poutre encastree-libre.

| | | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Largeur (m) | 0.005 | 0.01 | 0.015 | 0.02 | 0.025 | 0.03 | 0.06 |
| Fréquence (Hz) | 64.74 | 73.51 | 76.13 | 74.72 | 78.85 | 79.38 | 82.11 |

On a les figures suivant (33 à 35) nous représentons graphiquement respectivement les trois fréquences Analytiques avec les fréquences Expérimentales correspondants pour les poutres encastrees-libre pour les différentes largeurs avec l'épaisseur ($h=0.006$).

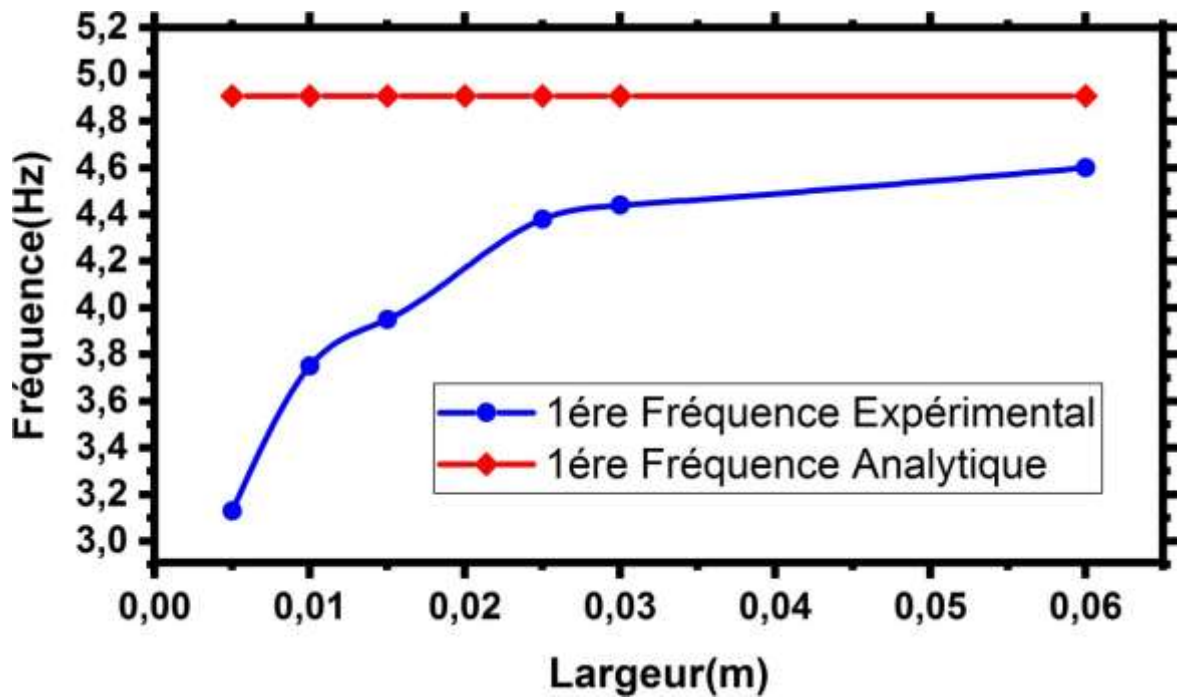


Figure 33 : Courbe de la première fréquence (Analytique et Expérimentale) en fonction de la largeur ($h=0.006$ m)

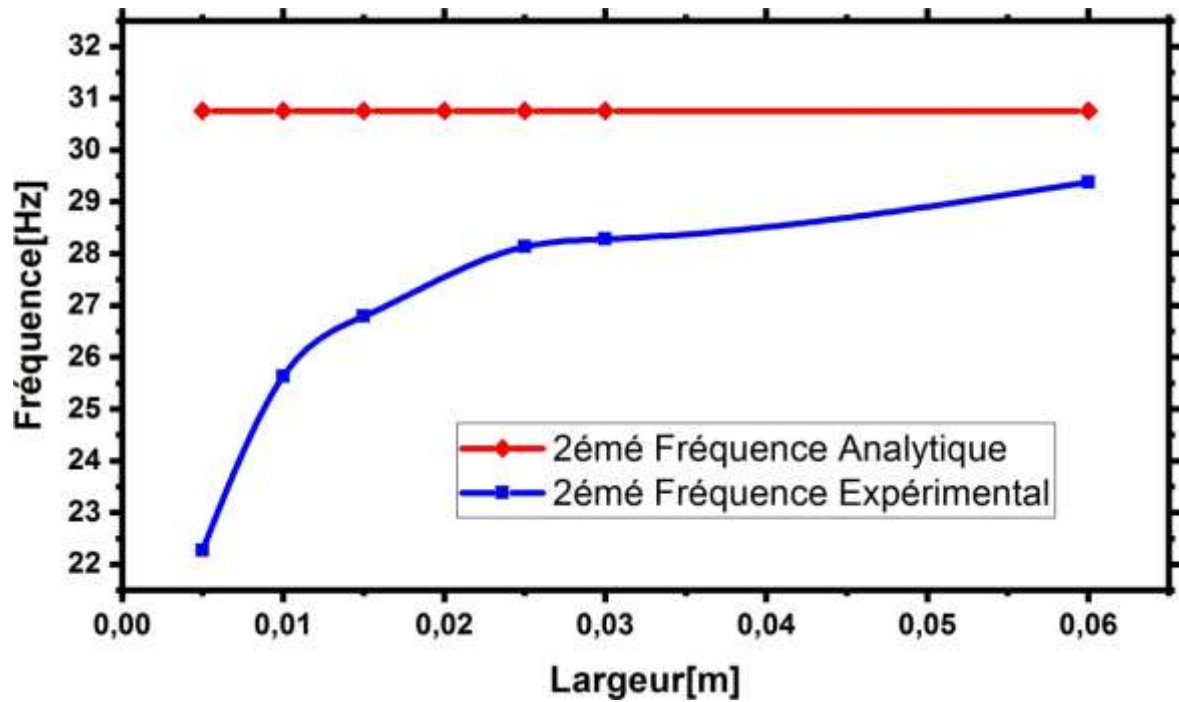


Figure 34 : Courbe de la deuxième fréquence (Analytique et Expérimental) en fonction de la largeur ($h=0.006m$)

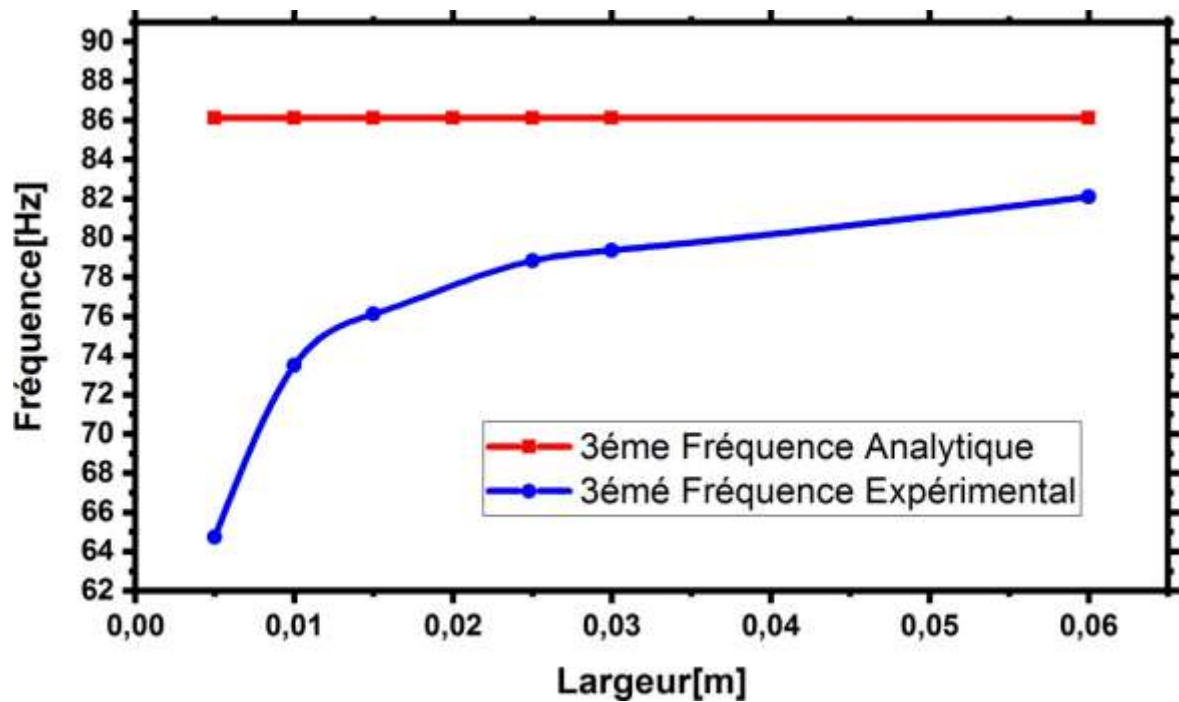
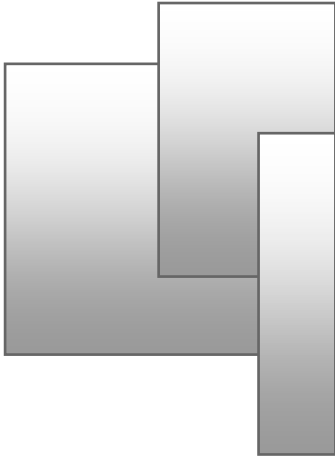


Figure 35 : Courbe de la troisième fréquence (Analytique et Expérimental) en fonction de la largeur ($h=0.006m$)

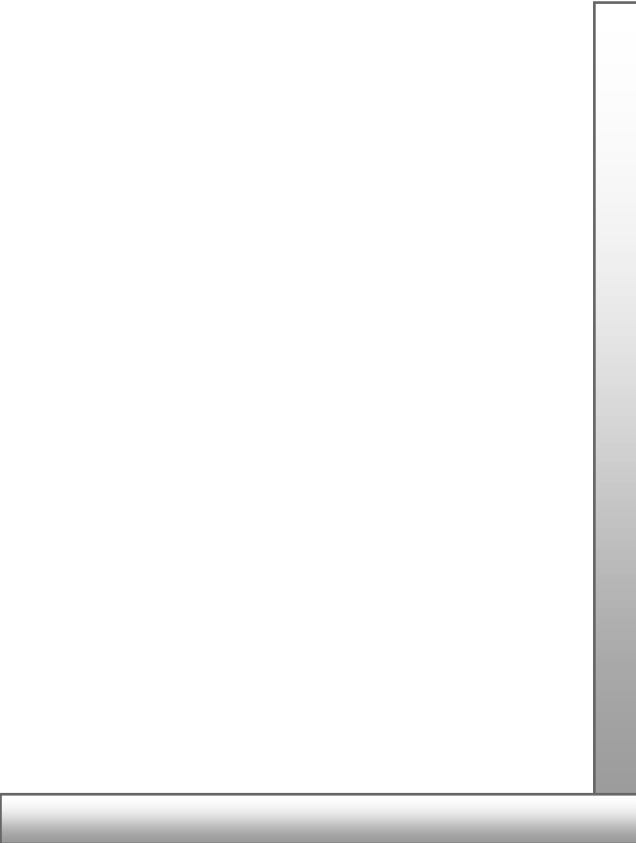
4.3 Comparaison et interprétation

D'après le tableau (II) les valeurs des fréquences analytiques (les trois premières) restent constantes, et cela est dû à la déclaration analytique précédente concernant largeur et la longueur uniquement par la méthode Euler-Bernoulli. Équation (2,55); Équation (2,61).

Les courbes (26 ; 27 ; 28) donnent les variations de fréquence (expérimentales et analytiques) premier, deuxième et troisième pour sept poutres de longueur et épaisseurs constantes (1 m, 0,006 m), en fonction de leurs différentes largeurs. Là où on remarque que dans la largeur des poutres (de 0,005 à 0,06 m) elle augmente la fréquence et lorsqu'elle est supérieure à 0,06 m est constante avec l'analytique.



Conclusion générale



Conclusion générale

Notons dans la conclusion, que le but initial de notre travail était de vérifier l'influence de la largeur des poutres dans les fréquences naturelles par des tests dynamiques expérimentaux.

- Notre travail est basé sur des études antérieures, visant à déterminer le module d'élasticité longitudinal par la méthode d'essai de traction standard et la méthode d'essai dynamique, qui conclut que la méthode d'essai dynamique est meilleure que le premier essai, en termes de temps et de coût.

Et la modélisation numérique par simulation à l'aide de la bibliothèque logicielle Abaqus correspond étroitement aux équations analytiques de la théorie de la vibration transversale des poutres en flexion pour toutes les poutres étudiées.

- De ce point de vue, nous permet de connaître l'étendue de l'effet de la forme géométrique sur les fréquences des vibrations transversales des poutres, où plusieurs poutres sont utilisées qui sont de largeurs différentes, prenant la même longueur et d'épaisseurs, ce qui convient à son tour pour vérifier la théorie des vibrations transversales.
- Le module de Young connu, il a été utilisé dans la détermination des premières fréquences propres analytiques des poutres en porte-à-faux pour différentes largeurs.
- Nous constatons aussi que la largeur des poutres (expérimentales et analytiques) de (0,005 à 0,06 m) elle augmente la fréquence et lorsqu'elle est supérieure à 0,06 m est constante avec l'analytique.
- Cette importante approximation nous permet de traiter un cas plus complexe d'une poutre vibrante, tout simplement en traitant chaque mode propre individuellement.



Références bibliographiques



Références bibliographiques

- [¹] - Allongement à la rupture définition 2016, ikrame Naciri
- [²] – E. Goens, Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegungsschwingungen, Annalen der Physik, 1931 - Wiley Online Library. doi: 10.1002/andp.19314030602
- [³] - John M. Ide, Some Dynamic Methods for Determination of Young's Modulus, Review of Scientific Instruments 6, 296 (1935). doi :10.1063/1.1751876.
- [⁴] - W. L. Li, Free vibrations of beams with general boundary conditions, Journal of sound and vibration (2000), 237(4), 729-725
- [⁵] - D. S. Joshi, M. L. Bhatnagar and R. S. Shrivastava, A simple technique for the determination of Young's modulus. Journal of scientifique Instruments (Journal of Physics E). 1969. 2. 831-834
- [⁶] - F. Wilson and A. E. Lord, Young's modulus via simple inexpensive static and dynamic measurements, American Journal of Physics. 1973.41. 653-656
- [⁷] - S. Tyagi and A. E. Lord, Simple and inexpensive apparatus for Young's modulus measurement, American Journal of Physics. 1980.48. 205-206
- [⁸] - A. Wolfenden, Dynamic Young's modulus measurements in metallic materials: results of an interlaboratory testing program. Journal of Testing and Evaluation. 1989. 17. 2-13
- [⁹] - Turvey, An undergraduate experiment on the vibration of a cantilever and its application to the determination of Young's modulus. American Journal of Physics. 1990. 58. 483-487
- [¹⁰] - T. Plachy, P. Padevet and M. Polak, Comparison of Two Experimental Techniques for Determination of Young's Modulus of Concrete Specimens, Recent Advances in Applied and Theoretical Mechanics, Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Applied and Theoretical Mechanics (MECHANICS '09). Puerto De La Cruz, Tenerife, Canary Islande, Spain. Décembre 14-16, 2009

- [11] - A.D. Hammou, G. Zaza, A. Benchatti, O. Allaoui, Extraction Dynamique du Module d'Elasticité Longitudinale et des Fréquences Naturelles d'une Poutre en Porte-à-Faux, Le 4ème Séminaire sur les Technologies Mécaniques, Avancées 14 et 15 Novembre 2017.
- [12] - Z.Boukhari, M. A. Mokhtari, Détermination Dynamique du Module de Young, Mémoire de Master Construction Mécanique, Université Ammar Telidji Laghouat Juin 2017
- [13] - Michael F. Ashby and David R.H. Jones, Engineering Materials1, Butterworth Heinemann, 4th Edition • 2012
- [14] - université de l'école de technologie supérieure mec-200 session 1 et 2 Caractérisation des matériaux (<https://slideplayer.fr/slide/12230868/>)
- [15] - Mechanical Engineering Séries, Frederick F. Ling, Séries Editor A.A.Shabana, Département of Mechanical Engineering, University of Illinois at. Chicago, P.O. Box 4348 Chicago, IL 60680, USA, doi: 10.1007/978-1-4684-0380-0.

ملخص الدراسة

عنوان المذكرة تحديد معامل المرونة (معامل يونغ) بتحليل الاهتزازات

يتلخص عملنا في استخراج وحساب معامل المرونة بطريقة غير هدامة، حيث قمنا بالاعتماد على خصائص العوارض المثبتة من طرف واحد، وتمت مقارنتها مع النتائج المتحصل عليها من اختبارات الشد الأولى، كما اننا استخرجنا معامل يونغ من نظرية الاهتزازات العرضية للحزم في الانحناء باستخدام عدة عروض للانحناء وفقاً للنتائج التي تم الحصول عليها، ان هذه النظرية صالحة فقط للحزم الطويلة والعرضية.

الكلمات المفتاحية: معامل يونغ، الاهتزازات، الشد

RÉSUMÉ

Dans notre travail, nous avons déterminé le module d'élasticité transverse d'après des tests dynamiques où on soumet une poutre en porte-à-faux à un impact et on mesure les premières fréquences naturelles. Le module de Young est ainsi extrait d'après la théorie des vibrations transversales des poutres en flexion. Différentes largeurs de la poutre sont utilisées. On a pu, suivant les résultats obtenus, que cette théorie n'est valable que pour les poutres longues et transversales.

Mots-clés : Module d'Young, Fréquence propre, traction

ABSTRACT

In our work, we determined the transverse modulus of elasticity according to dynamic tests where the cantilever beam is affected and the first natural frequencies are measured. Thus, the Young's modulus is derived from the theory of transverse vibrations of firmness in flexion. Different widths are used. It is possible, according to the results obtained, that this theory is valid only for long and wide beams.

Keywords: small unit, appropriate frequencies, tension