

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par : Khaoula Nouioua

THEME

Produits infinis de fonctions holomorphes et leurs applications

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. A. Belacel

Mr. A. Bougoutaia

Mlle. C. Belabbaci

Professeur

M.C.A

M.C.A

Président

Examineur

Encadreur

Année Universitaire 2021/2022

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

*Je remercie vivement mon encadreur **Dr. Chafika Belabbaci** d'avoir encadré ce travail. Merci pour votre disponibilité et pour vos conseils éclairés.*

*Je remercie également les membres du jury **Pr. A. Belacel** et **Mr. A. Bougoutaia** d'avoir accepté d'évaluer ce travail.*

Un grand merci à ma mère, mon père pour leur patience, leurs soutiens, leurs encouragements et leur amour, que Dieu les garde et les protège.

Je remercie tous les enseignants de département de mathématiques pour leurs efforts fournis pendant la durée de mes études.

Dédicace

Je déduit ce modeste travail :

À ma chère mère et mon cher père.

À mes sœurs Aya, Messaouda.

À mes frères Messaoud, Abderrahmane.

À toute ma famille.

À tous mes amis.

Table des matières

Notations	ii
Introduction	1
1 Rappels	2
1.1 Rappels sur les fonctions à variables complexes	2
1.2 Quelques notions de compacité	4
1.3 Convergence de série de fonction	5
2 Produits infinis des nombres	8
2.1 Produit infini des nombres complexes	8
2.2 Produits infinis des nombres réels	22
3 Produits infinis de fonctions	29
3.1 Critères de convergence	29
3.2 Produits infinis de fonctions holomorphes	35
3.3 Développement des fonctions trigonométriques en produits infinis	39
4 Théorèmes de Weierstrass	43
4.1 Théorème du produit de Weierstrass	43
4.2 Théorème de factorisation du Weierstrass	51
4.3 Formule de Jensen	53
4.4 Produits de Blaschke	55
5 Fonction Gamma d'Euler et la fonction Zêta de Riemann	58
5.1 Fonction Gamma d'Euler	58
5.2 Fonction Zêta de Riemann	61
Conclusion	64
Bibliographie	65

Notations

Ω	Ouvert de \mathbb{C} .
$\mathcal{H}(\Omega)$	Ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .
Σ	Symbole de sommation.
Π	Symbole de multiplication.
Γ	Fonction indicatrice Gamma.
ζ	Fonction indicatrice Zêta.
$n!$	Factorielle de n ; $n! = 1.2 \dots n$.
\mathbb{D}	Disque unité.
$D(a, r)$	Disque ouvert de centre a et de rayon r .
$\bar{D}(a, r)$	Disque fermé.
U	Disque unité ouvert.
X	Espace métrique localement compact.
K	Partie compact.
$\mathcal{C}(X)$	L'espace des fonctions continues sur X .
\mathcal{H}^∞	Ensemble des fonctions holomorphes bornées sur Ω .
$f^{(k)}$	Dérivée k-fois d'une fonction f .
$Res [\Gamma(z); n]$	Résidu de Γ en n .

Introduction générale

De nombreuses fonctions peuvent être représentées par différentes manières, par exemple, elle peuvent être représentés par des polynômes, des séries de Fourier ou encore des produits infinis. Cette dernière notion est apparu en 1579 dans le travail de F. Vieta. Plusieurs autres savants ont étudié et développer cette notion comme L. Euler, Cauchy,

Le but de ce travail est d'étudier le concept des produit infinis des nombres et des fonctions. Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre porte sur les rappels indispensables pour les autres chapitres. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des différents modes de convergence d'un produit infini des nombres complexes et réels. Une étude analogue pour les produits infinis des fonctions est étudié dans le troisièmes chapitre.

Dans le chapitre quatre, on s'intéresse à l'étude des théorèmes de Weierstrass. Plus précisément, on étudie le théorème de factorisation de Weierstrass qui généralise le théorème fondamental de l'algèbre (tout polynôme peut être factorisé dans \mathbb{C} comme produit de fonction de la forme $(x - \alpha_i)$ où α_i étant les zéros du polynôme) au fonction entière dans \mathbb{C} avec des zéros finis ou infinis. La formule de Jensen et le produit de Blaschke sont aussi étudiés dans ce chapitre.

Enfin dans le dernier chapitre, on étudie la fonction Gamma d'Euler qui peut être définie par un produit infini en appliquant le théorème de factorisation de Weierstrass. Ainsi on exprime la fonction Zêta de Riemann comme produit infini.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre on rassemble quelques résultats et notions de base d'analyse complexe que nous utiliserons par la suite, on donne les définitions des fonctions holomorphes, méromorphes, harmoniques et quelques propriétés. Ainsi on donne les critères et les théorèmes de convergences.

1.1 Rappels sur les fonctions à variables complexes

Fonctions holomorphes

Dans toute la suite, on désigne par Ω un ouvert de \mathbb{C} et

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = w \end{aligned}$$

une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Définition 1.1.1. *La fonction f est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω .*

On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω .

Une fonction à variable complexe f peut écrire sous la forme $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $u(x, y)$ est la partie réelle de f , notée $Re(f)$ et $v(x, y)$ est la partie imaginaire de f , notée $Im(f)$. Les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont des fonctions réelles de deux variables réelles x et y .

Remarque 1.1.1. *L'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace vectoriel muni des lois usuelles.*

Définition 1.1.2. On dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique au point $z_0 \in \Omega$ si elle admet un développement en série entière dont le rayon de convergence r n'est pas nul.

On dit que f est analytique sur Ω si elle l'est en tout point $z_0 \in \Omega$. On écrit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k (z - z_0)^k, \quad z \in \Omega$$

où $|z - z_0| < r$ et (u_k) est une suite de nombres complexes.

Définition 1.1.3. Soit f une fonction holomorphe dans Ω , la dérivée logarithmique de f est la forme $\frac{f'}{f}$.

Définition 1.1.4. 1) On dit qu'un point z_0 est un zéro de la fonction f si $f(z_0) = 0$.

2) Le point z_0 est un zéro d'ordre m de f si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

3) On dit que le point z_0 est un zéro isolé de f si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que le cercle $|z - z_0| = \delta$ ne contient pas d'autre zéro autre que z_0 . Autrement dit, s'il existe un voisinage de z_0 ne contenant pas de zéro autre que z_0 .

Théorème 1.1.1. (Principe des zéros isolés). [4] Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle définie dans Ω à valeur dans \mathbb{C} . Alors les zéros de f sont isolés. Autrement dit, l'ensemble des zéros de f dans Ω est discret.

Fonctions méromorphes

Définition 1.1.5. Une fonction f est dite méromorphe si ses seules singularités sont des pôles.

Autrement dit, une fonction f est méromorphe dans Ω s'il existe une partie localement finie A de Ω telle que la fonction f soit holomorphe sur $\Omega \setminus A$ et tout point de A soit un pôle de f .

Notons par $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω .

Théorème 1.1.2. [3] Toute fonction méromorphe dans un ouvert Ω est le quotient de deux fonctions holomorphes dans Ω .

La réciproque de ce théorème est vrai.

Fonctions entières

Définition 1.1.6. Une fonction qui est holomorphe en tout point z de \mathbb{C} (partout sauf à $z = \infty$) est appelée une fonction entière.

Théorème 1.1.3. Soit f une fonction holomorphe dans Ω de \mathbb{C} et a un point dans Ω , le développement de f en série de $(z - a)$ est :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Cette série est appelée la série de Taylor de fonction f au voisinage de $z = a$.

Remarques 1.1.1. 1) Les fonctions e^z , $\sin z$, $\cos z \dots$ sont des fonctions entières.

2) Une fonction entière peut être représentée par une série de Taylor ayant un rayon de convergence infinie.

Fonctions harmoniques

Une fonction f définie sur un ouvert Ω est de classe C^1 si f est dérivable sur Ω et la première dérivée f' est continue sur Ω . On dit que la fonction f est de classe C^k sur Ω si elle est k fois dérivable et que la fonction $f^{(k)}$ continue sur Ω .

Définition 1.1.7. Soit f une fonction, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et si $\Delta f \equiv 0$ sur Ω , où Δf est le Laplacien de f défini par
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Remarque 1.1.2. Toute constante, toute forme linéaire est harmonique. L'ensemble des fonctions harmoniques est un espace vectoriel pour le corps \mathbb{C} .

Proposition 1.1.1. [12] Toute fonction holomorphe est harmonique.

Théorème 1.1.4. [3] Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et si f ne s'annule pas dans Ω , alors la fonction $\ln |f|$ est harmonique sur Ω .

1.2 Quelques notions de compacité

- On dit qu'une partie K de Ω est compacte si toute suite possède une suite extraite convergente.

- Un espace métrique X de Ω est localement compact s'il est séparé, et tout point de X admet un voisinage compact.
- Une partie V d'un espace X est dite relativement compacte si son adhérence est une partie compacte de X .
- Tout espace compact est localement compact.
- Dans un espace localement compact, tout compact est inclus dans un ouvert relativement compact.

1.3 Convergence de série de fonction

Définition 1.3.1. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur Ω converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f définie de Ω dans \mathbb{C} si, quel que soit le compact $K \subset \Omega$, la suite des restrictions $f_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$.

Autrement dit, si

$$\forall K \subset \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(z) - f(z)\|_K = 0,$$

où $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$ est la norme de la convergence uniforme sur K . De même, on dit que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément (respectivement normalement) sur tout compact si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, la série des restrictions $\sum_n f_n|_K$ converge uniformément, c'est-à-dire, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f_k|_K\right)$ converge uniformément (respectivement s'il existe une suite $(u_n)_n$ de réels positifs, telle que $|f_n(z)| \leq u_n, \forall z \in K$ et $\sum_n u_n$ converge).

Théorème 1.3.1. [4] Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

- i) Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement en $x_0 \in [a, b]$ et si la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$, alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, f est de classe C^1 et on a

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

- ii) Si la série $\sum_n f_n$ converge simplement en $x_0 \in [a, b]$ et si la série des dérivées $\sum_n f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers l sur $[a, b]$, l est de classe C^1 et on a

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Théorème 1.3.2. (théorème de convergence de Weierstrass). [12]

- 1) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f , alors on a
 - i) La fonction f est holomorphe dans Ω .
 - ii) La suite des dérivées $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(k)}$, avec $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω . On suppose que cette série converge uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de Ω . Alors
 - i) La somme de cette série est holomorphe sur Ω .
 - ii) La série est dérivable terme à terme sur Ω . En outre, la série $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de Ω .

Remarques 1.3.1. i) La conclusion du théorème (1.3.2) n'est pas vraie en général dans le cas des fonctions à variable réelle, le fait que la convergence uniforme sur tout compact entraîne le même type de convergence pour les suites (séries) des dérivées est faux dans le domaine réel.

ii) En pratique, on peut utiliser le fait qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur Ω converge uniformément sur tout compact de Ω si et seulement si elle converge uniformément sur tout disque compact de Ω .

iii) Rappelons que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème 1.3.3. (Test M de Weierstrass). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie de Ω dans \mathbb{C} , supposons qu'il existe une suite de nombres positive $(M_n)_n$, telle que $|f_n(x)| \leq M_n$, pour tout $n \geq 1$, $x \in \Omega$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente (normalement convergente) dans Ω .

Pour la preuve voir [1].

Théorème 1.3.4. (Critère de Weierstrass). Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réels. Si $|f_n(x)| \geq u_n$, $\forall x \in \Omega$ et si la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, alors la série de fonc-

tions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolument et uniformément sur Ω .

Pour la preuve voir [12].

Remarque 1.3.1. La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement dans Ω si on peut lui appliquer le critère de Weierstrass. Autrement dit, si $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ converge où $\|f_n\| = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)| \leq \infty, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (la convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue).

Chapitre 2

Produits infinis des nombres

Ce chapitre se compose de deux parties, la première partie traite le produits infinis des nombres complexes, après avoir défini un produit infini, on étudié les différents types de convergence (convergence simple, absolue, ...).

Dans la deuxième partie, on étudie les propriétés d'un produit infini des nombres réels.

2.1 Produit infini des nombres complexes

Définitions et convergence simple

Définition 2.1.1. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments dans \mathbb{C} . On appelle produit infini de terme général u_n , la suite définie par :

$$u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \dots u_n \dots$$

On le note par $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$.

Les produits partiels de rang k , P_k sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_1 &= u_1, \\ P_2 &= u_1 \cdot u_2, \\ P_3 &= u_1 \cdot u_2 \cdot u_3, \\ &\vdots \\ P_k &= u_1 \cdot u_2 \dots u_k = \prod_{n=1}^k u_n. \end{aligned}$$

Un produit infini est dit convergent si le produit partiel de rang n , P_n , admet une limite l dans \mathbb{C} .

Si le produit $\prod_n u_n$ converge, on note par $\prod_{n=1}^{\infty} u_n = l$. D'une autre manière, le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ converge si et seulement s'il existe un nombre j tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=j}^{j+n} u_k = l.$$

Dans ce cas, si le produit infini converge, sa valeur égale à $l \cdot \prod_{k=1}^{j-1} u_k$.

Le produit infini est divergent si $\lim_n \prod_n u_n = \infty$ ou $\lim_n \prod_n u_n = 0$.

Quand la limite l est non nulle, on dit parfois que le produit infini est strictement convergent.

Les produits pour lesquels $\lim_n P_n = 0$ sont appelés nilproduits.

Soit $P = \prod_{n=0}^{\infty} u_n$. Supposons que $u_n = 0$ pour un nombre fini de valeur de n , et soit $u_n \neq 0$.

Alors, pour $n > m$ on peut écrire

$$P_n = (u_1 u_2 \dots u_m) (u_{m+1} \dots u_n) = (u_1 u_2 \dots u_m) P_{m,n},$$

où $P_{m,n} = (u_{m+1} \dots u_n)$.

- Si $\lim P_{m,n} = q$, avec q une valeur finie non nul, alors le produit infini converge vers zéro $u_1 u_2 \dots u_m \cdot q = 0$.
- Si $\lim P_{m,n} = 0$ ou $\lim P_{m,n} = \infty$, ou si $P_{m,n}$ n'a pas de limite, alors le produit est divergent.

Supposons que $u_n = 0$ pour une infinité de valeurs de n , alors le produit est divergent. Les produits infinis de ce type ne se produisent pas dans la pratique généralement.

Étudions quelques exemples

Exemples 2.1. 1. Le produit infini de terme général $u_n = \frac{1}{2}$ diverge.

2. Le produit infini de terme général $u_n = 1$ converge.

3. Considérons le produit infini défini par $0.2.0.2\dots$ où $u_{2k-1} = 0$ et $u_{2k} = 2$, avec $k = 1, 2, \dots$ diverge, car il contient un nombre infini de zéros.

Il n'existe pas un nombre fini non nulle l telle que le produit partiel P_n ne tend pas vers 0 .

4. Le produit infini défini par $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{k} \dots$ diverge malgré qu'il ne contient pas de zéros, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$.

5. Le produit infini défini par $\prod_{k=1}^{\infty} k = 1.2 \dots n \dots$, diverge car $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \infty$.

6. Le produit P défini par $0.0.1.1.1. \dots$ où $u_k = 0$, pour $k = 1, 2$ et $u_k = 1$, pour $k = 3, 4, 5, \dots$ converge, on a $\prod_{k=1}^2 u_k = 0$, $\prod_{k=3}^{\infty} u_k = 1$. La valeur de ce produit infini égal à 1.

7. Le produit partielle

$$\begin{aligned} P_m &= \prod_{n=2}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^m \left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \prod_{n=2}^m (n-1) \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n} \\ &= \prod_{n=2}^{m-1} n \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Donc quand m tend vers l'infini ce produit $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 et le produit est diverge.

8. Le produit partielle

$$\begin{aligned} P_m &= \prod_{n=2}^m \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^m \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \prod_{n=2}^m (n-1) \cdot \prod_{n=2}^m (n+1) \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n^2} \\ &= \prod_{n=1}^{m-1} n \cdot \prod_{n=3}^{m+1} n \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n^2} \\ &= 2m(m+1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m^2} \\ &= \frac{m+1}{2m}. \end{aligned}$$

Le produit $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et sa valeur est $\frac{1}{2}$.

On conclus que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$.

Propriétés 2.1.1. [5] Soient $\prod_n u_n$ et $\prod_n v_n$ deux produits infinis de nombres complexes.

i) Si les deux produits convergent alors le produit $\prod_n u_n v_n$ converge.

ii) Si l'un des deux produits converge et l'autre diverge alors le produit $\prod_n u_n v_n$ diverge.

iii) Si les deux produits divergent vers 0 alors le produit $\prod_n u_n v_n$ diverge vers 0.

Remarque 2.1.1. En général, on ne peut rien conclure si les deux produits divergent comme le montrent les exemples suivants : $u_n = \frac{1}{2}$ et $v_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_n = v_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant présente le critère de Cauchy pour la convergence d'un produit infini.

Théorème 2.1.1. Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $m > n \geq n_0$ entraîne que $\left| \prod_{k=n+1}^m u_k - 1 \right| < \epsilon$.

Démonstration. Supposons d'abord que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, on peut supposer qu'aucun u_n est nul (en écartant un nombre fini de termes si nécessaire). Soient

$$P_n = u_1 \cdot u_2 \dots u_n \quad \text{et} \quad P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n,$$

donc, on a $P_n \neq 0$; et il existe un $M > 0$ tel que $|P_n| > M$ pour tout $n \geq 1$. Puisque $(P_n)_n$ satisfait le critères de Cauchy pour les suites, pour $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $m > n \geq n_0$ entraîne que $|P_m - P_n| < \epsilon \cdot M$.

En divisant par $|P_n|$, nous obtenons $\left| \prod_{k=n+1}^m u_k - 1 \right| < \epsilon$ pour tout $m > n \geq n_0$.

Inversement, supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que

$$\left| \prod_{k=n+1}^m u_k - 1 \right| < \epsilon, \quad \text{pour tout } m > n \geq n_0. \quad (2.1)$$

Notons que si $m > n_0$, alors ceci implique que $u_m \neq 0$, puisque $0 < \epsilon < 1$, en prenant $n = m - 1$, on a

$$||a_m| - 1| < |u_m - 1| < \epsilon.$$

C'est-à-dire

$$0 < 1 - \epsilon < |u_m| < 1 + \epsilon \quad \text{pour tout } m > n_0.$$

Maintenant on prends $\epsilon = \frac{1}{2}$ et soit $q_m = u_{n_0+1} \cdot u_{n_0+2} \dots u_m$.

Pour $m > n_0$, on a

$$\frac{1}{2} < |q_m| < \frac{3}{2}.$$

Par conséquent, si $(q_m)_m$ converge, elle ne peut pas converger vers zéro.

Pour voir que la suite $(q_m)_m$ converge effectivement, soit $\epsilon > 0$ tel que, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, alors il existe un n_0 tel que

$$\left| \frac{q_m}{q_n} - 1 \right| < \frac{2}{3}\epsilon.$$

Ceci implique que

$$|q_m - q_n| < \frac{2}{3}\epsilon |q_n| < \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\epsilon = \epsilon, \quad \text{pour } m > n \geq n_0.$$

Ainsi, la suite $(q_m)_m$ est une suite de Cauchy de nombres réels, et donc converge. D'où le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. \square

Remarque 2.1.2. Prenant $n = m - 1$ dans (2.1), on voit que si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Pour cette raison, les facteurs du produit sont souvent écrits sous la forme $1 + u_n$, de sorte que la convergence du produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Exemples 2.2. 1. Le produit partielle

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \prod_{n=1}^m \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \prod_{n=1}^m (n+1) \cdot \prod_{n=1}^m \frac{1}{n} \\ &= \prod_{n=2}^{m+1} n \cdot \prod_{n=1}^m \frac{1}{n} \\ &= m + 1. \end{aligned}$$

Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge vers l'infini et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Le produit infini $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ diverge vers 0 et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Théorème 2.1.2. Si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ est strictement convergent, alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Démonstration. Soit $l \neq 0$ la limite des P_n , on a :

$$P_{n-1} = u_1 \cdot u_2 \dots u_{n-1} \text{ et } P_n = u_1 \dots u_{n-1} \cdot u_n$$

Calculons la limite u_n , on obtient

$$\lim_n u_n = \lim_n \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{l}{l} = 1.$$

□

Corollaire 2.1.1. *Si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 1 quand n tend vers l'infini, le produit infini diverge.*

Convergence des produits infinis relativement à la convergence des séries infinies

Considérons la partie produit P_n avec la condition supplémentaire que $P_0 = 1$ et la formule de récursivité $P_i = (1 + u_i)P_{i-1} = P_{i-1} + u_i P_{i-1}$. Donc, on a :

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + u_n P_{n-1} \\ &= P_{n-2} + u_{n-1} P_{n-2} + u_n P_{n-1} \\ &= P_{n-3} + u_{n-2} P_{n-3} + u_{n-1} P_{n-2} + u_n P_{n-1} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_n = 1 + \sum_{i=1}^n u_i P_{i-1}. \tag{2.2}$$

Si le produit infini converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ existe, donc la série (2.2) est convergente avec une somme égale à la valeur du produit.

Inversement, si la série est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ existe et le produit converge vers une valeur égale à la somme des séries :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n P_{n-1},$$

d'où la définition suivante.

Définition 2.1.2. *Les séries $1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n P_{n-1}$, s'appelle la série équivalente au produit infini.*

Au moyen de la formule

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n P_{n-1}. \tag{2.3}$$

Un produit infini peut être transformé en une série infinie. Inversement, la somme partielle S_n d'une série $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ peut être transformé en produit. D'après ce qui précède, on a

$$1 = \frac{u_i}{S_{i-1}} = \frac{S_i}{S_{i-1}}, \quad \text{pour } i > 1,$$

ceci implique que

$$S_n = u_1 + \prod_{i=2}^n \left(1 + \frac{u_i}{S_{i-1}}\right). \quad (2.4)$$

Remarque 2.1.3. *En général, les formules (2.3) et (2.4) ne sont pas applicables en pratique, car il est difficile d'exprimer les produits partiels P_n et les sommes partielles S_n sous une forme simple. Cependant, ils ont une valeur théorique.*

Théorème 2.1.3. *Supposons que la série $\sum_n |u_n|^{k+1} < \infty$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors le produit $\prod_n (1 + c \cdot u_n)$ est convergent pour tout $c \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\sum_n u_n, \sum_n u_n^2, \dots, \sum_n u_n^k$ converge.*

Démonstration. Pour tout n assez grand, on a

$$\ln(1 + c \cdot u_n) = c \cdot u_n - \frac{1}{2}c^2 \cdot u_n^2 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}c^k \cdot u_n^k + rc^{k+1} \cdot u_n^{k+1}, \quad |r| \leq 1.$$

Donc le produit $\prod_n (1 + c \cdot u_n)$ est convergent pour tout $c \in \mathbb{C}$, si et seulement si la série

$$\sum_n \left\{ c \cdot u_n - \frac{1}{2}c^2 \cdot u_n^2 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}c^k \cdot u_n^k + rc^{k+1} \cdot u_n^{k+1} \right\} \quad (2.5)$$

est convergente pour tout $c \in \mathbb{C}$.

Par conséquent, une direction de la preuve est triviale, supposons maintenant que la série (2.5) converge pour tout $c \in \mathbb{C}$. Remplacez c par $c \cdot e^{\frac{\pi i}{k}}$ et ajoutez les deux expressions dans l'expression résultante, remplacez c par $c \cdot e^{\frac{\pi i}{(k-1)}}$ et ajoutez les deux expressions, etc, alors la série $\sum_n c(1 + e^{\frac{\pi i}{2}})(1 + e^{\frac{\pi i}{3}}) \dots (1 + e^{\frac{\pi i}{k}})u_n$ est convergente. Donc la série $\sum_n u_n$ est convergente. Maintenant, si le produit $\prod_n (1 + c \cdot u_n)$ converge pour tout $c \in \mathbb{C}$ alors $\prod_n (1 + c \cdot u_n^k)$ l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$, puisque

$$1 + u^k = (c_1 + u) \dots (c_k + u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{C} \text{ et } c_0^k = c.$$

On obtient

$$\prod_n (1 + c_0 c_1^{-1} u_n) \dots (1 + c_0 c_k^{-1} u_n) = \prod_n (1 + c \cdot u_n^k).$$

D'où la conclusion. □

Lemme 2.1.1. Soient $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{C}$, $P_n = \prod_{n=0}^k (1 + u_n)$ et $Q_n = \prod_{n=0}^k (1 + |u_n|)$.
Alors $Q_n \leq e^{(|u_0| + \dots + |u_n|)}$ et $|P_n - 1| \leq Q_n - 1$.

Démonstration. La première inégalité est évidente en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle. La seconde est claire si $n = 0$. Raisonnons par récurrence, il vient

$$P_{n-1} = P_{n-1}(1 + u_n) - 1 = (P_{n-1} - 1)(1 + u_n) + u_n.$$

D'où

$$|P_n - 1| \leq (Q_n - 1)(1 + |u_n|) + |u_n| = Q_n - 1.$$

□

Définition 2.1.3. Le produit infini $\prod_n u_n$ est dit commutativement convergent si, pour toute permutation σ de \mathbb{N} , le produit infini $\prod_n u_{\sigma(n)}$ est convergent.

Proposition 2.1.1. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Alors, on a

- i) Le produit infini $\prod_n (1 + u_n)$ est convergent. Il n'est pas strictement convergent si et seulement si l'un des u_n est égal à -1 .
- ii) Pour toute permutation σ de \mathbb{N} , on a :

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_{\sigma(n)}).$$

Démonstration. D'après les hypothèses et le lemme (2.1.1), il existe un réel C tel que $|P_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, si $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n| \leq \epsilon$. Soit σ une permutation de \mathbb{N} . Notons T_n le produit partiel associé à $\prod (1 + u_{\sigma(n)})$. Si $N \geq N_0$, pour M assez grand, on a $\{0, 1, \dots, N\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(M)\}$. Par suite, $T_M - P_N = P_N \left(\prod_{k \in A} (1 + u_k) - 1 \right)$, avec $A = \frac{\{\sigma(0), \dots, \sigma(M)\}}{\{0, 1, \dots, N\}}$. D'après le lemme (2.1.1), on obtient

$$|T_M - P_N| \leq |P_N| (e^\epsilon - 1) \leq 2|P_N| \epsilon \leq 2C\epsilon. \quad (2.6)$$

Prenant $\sigma = id_{\mathbb{N}}$, on voit alors que la suite $(P_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy, elle est donc convergente. Ainsi, le produit $\prod_n (1 + u_n)$ est convergent.

On obtient $|P_M - P_{N_0}| \leq 2|P_{N_0}|\epsilon$, si $M > N_0$, donc $|P_M| \geq (1 - 2\epsilon)|P_{N_0}|$, puis $|l| \geq (1 - 2\epsilon)|P_{N_0}|$. Par suite, $P = 0$ si et seulement si $P_{N_0} = 0$. D'où le point (i). Enfin, la deuxième assertion résulte trivialement de l'égalité (2.6). \square

Série logarithmique associée

Étudions la relation entre la théorie des produits infinis et la théorie des séries infinies en prenant des logarithmes. La définition suivante est nécessaire pour la suite.

Définition 2.1.4. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ est appelée série logarithmique associée du produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$.

Les théorèmes suivants relient la convergence et la divergence de la série logarithmique associée à la convergence et la divergence de la série infinie associée.

Théorème 2.1.4. Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, avec $(u_n)_n$ une suite numérique, $u_n \neq -1$ pour tout n et la série logarithmique $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ sont convergent ou divergent simultanément.

Démonstration. Supposons que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge. Alors $P_n = \prod_{i=1}^n (1 + u_i)$ s'approche à une limite finie non nulle, notée l . Posons

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + u_i).$$

Alors $\ln P_n = \lambda_n$ et $P_n = e^{\lambda_n}$. Car le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ est convergent, P_n tend vers une limite finie non nulle l , donc λ_n tend vers une limite, notée λ , et $l = e^\lambda$. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ converge.

Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ converge, alors $\lambda_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + u_i)$ tend vers $l \neq 0$. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ est la série logarithmique associée à le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ et $\ln P_n = \lambda_n$ et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$; $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = l$ et $\ln P = \lambda$. \square

Les preuves de la divergence du produit et de ses séries logarithmiques associées sont immédiates.

Théorème 2.1.5. *La série à termes positive $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ convergent ou divergent simultanément.*

Démonstration. Le développement en série entière de $\ln(1 + u_n)$ est valable pour $|u_n| < 1$

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} \dots$$

Si $u_n < 1$, alors d'après la théorie des séries alternées, on sait que

$$u_n > \ln(1 + u_n) > u_n - \frac{u_n^2}{2} = u_n \left(1 - \frac{u_n}{2}\right) > \frac{u_n}{2}.$$

Donc les deux séries, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ convergent ou divergent, par le test de comparaison. □

Dans la pratique la convergence d'une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ est généralement pas facile. Le théorème suivant appelé le test de Coriollis.

Théorème 2.1.6. *Si les séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ sont convergentes, alors la série logarithmique $\sum_{n=m+1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ et le produit infini $\prod_{n=m+1}^{\infty} (1 + u_n)$ sont convergents.*

Démonstration. Considérons

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 - \frac{1}{4}u_n^4 + \dots$$

Posons $k_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{4}u_n^2 + \dots$, qui converge si $|u_n| < 1$. Alors $\ln(1 + u_n) = u_n - k_n u_n^2$.

Car la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est supposé convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et k_n tend vers $\frac{1}{2}$ quand u_n tend vers 0, k_n a une borne supérieure k . Donc pour tout entier $r > 0$,

$$\sum_{n=m+1}^{m+r} \ln(1 + u_n) = \sum_{n=m+1}^{m+r} u_n - \sum_{n=m+1}^{m+r} k_n u_n^2.$$

Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ ont été supposés convergentes et la différence de deux séries convergentes est convergente, alors $\sum_{n=m+1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ est convergente.

Si la série $\sum_{n=m+1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ est convergente, alors le produit $\prod_{n=m+1}^{\infty} (1 + u_n)$ est convergent. □

Théorème 2.1.7. [9] *Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge si et seulement s'il existe n_0 tel que $|u_n| < 1$, quel que soit $n \geq n_0$ et la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1 + u_n)$ converge.*

Exemple 2.1. *Montrons que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge.*

D'après le théorème (2.1.7), on doit montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Puisque la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + t} = 1.$$

On conclut que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge en appliquant le test de comparaison.

Proposition 2.1.2. [4] *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls de limite 1.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Le produit infini $\prod_n u_n$ est strictement convergent.*
- ii) La série $\sum_n \ln u_n$ est convergente.*

Convergence absolue d'un produit infini

Un produit infini absolument convergent n'est pas un produit $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ pour lequel $\prod_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge. Une telle définition n'a aucune valeur car tous les produits infinis seraient absolument convergents. La définition de la convergence absolue est comme suite.

Définition 2.1.5. *On dit que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolument si le*

produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ converge. Le produit est dit conditionnellement convergent (ou semi-

convergent) lorsque le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge mais le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ diverge.

Exemple 2.2. *Le produit infini défini par $\prod_n \left(1 + \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right)$, où $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ n'est pas un multiple entier de 2π converge. Il n'est pas absolument convergent si $\alpha \leq 1$.*

Le produit infini défini par $\prod_n \left(1 + \frac{i^{n!}}{n^{\ln(n)}}\right)$ est absolument convergent.

Théorème 2.1.8. [1] Si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolument, alors il converge.

La réciproque du théorème (2.1.8) est fautive. Comme par exemple le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ converge vers 1 mais ne converge pas absolument.

Remarques 2.1.1. La convergence absolue, au sens où le produit $\prod_n |1 + u_n|$ converge, n'implique pas la convergence du produit $\prod_n (1 + u_n)$.

Exemple 2.3. On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{i}{n}$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right| \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

D'une part, on a

$$\left|1 + \frac{i}{n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \epsilon(n),$$

d'où la convergence stricte du produit $\prod_n \left|1 + \frac{i}{n}\right|$.

D'autre part, le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ diverge car la série $\sum_n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ diverge.

La définition d'un produit infini absolument convergent conduit à considérer le théorème suivant.

Théorème 2.1.9. Si la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge, alors le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolument.

Démonstration. Sachant que toute suite monotone bornée est convergente, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge, alors $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ converge. Puisque le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|)$ converge, par la définition de la convergence absolue, alors le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolument. □

Exemple 2.4. Considérons le produit infini défini par $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{(2+i)^n}\right)$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(2+i)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{5})^n}.$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{5})^n}$ est convergente, alors le produit infini est absolument convergent.

La réciproque du théorème (2.1.9) est aussi vrai, on peut faire une démonstration analogue.

On peut prouver que si un produit infini est absolument convergent, alors ses facteurs peuvent être réordonnés sans affecter la valeur du produit. Le théorème suivant traite ce cas.

Théorème 2.1.10. *Si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ est absolument convergent, sa valeur est indépendante à l'ordre de ses facteurs.*

Démonstration. Considérons le produit infini absolument convergent suivant

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n). \quad (2.7)$$

D'après la réciproque du théorème (2.1.9), la convergence absolue du produit (2.7) implique la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ une série obtenue en réarrangeant les termes $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dans n'importe quel ordre, en étant sûr d'inclure tous les termes. Posons $|u_n| = a_n$ et $|v_n| = b_n$, alors

$$U_n = (1 + u_1) \dots (1 + u_n), \quad V_n = (1 + v_1) \dots (1 + v_n).$$

$$A_n = (1 + a_1) \dots (1 + a_n), \quad B_n = (1 + b_1) \dots (1 + b_n).$$

Puis choisissons $p > n$ pour que U_p contienne la totalité de V_n . Par conséquent, A_p contient l'ensemble de B_n , en multipliant, il est évident que $\frac{A_p}{B_n} - 1$ contient tous les termes de $\frac{U_p}{V_n} - 1$, mais avec les signes rendus positifs. D'où

$$\left| \frac{U_p}{V_n} - 1 \right| \leq \frac{A_p}{B_n} - 1.$$

et $V_n \leq U_n$, avec $\left| \frac{U_p - V_n}{V_n} \right| \leq \frac{A_p - B_n}{B_n}$.

Donc, on a

$$|U_p - V_n| \leq A_p - B_n.$$

Comme expliqué dans le théorème (2.2.4), $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ pour, $0 < u_i < 1$, avec $i = 1, 2, \dots, n$.

Par conséquent, on peut trouver un n_0 tel que : $A > A_p > B_n > A - \frac{1}{2}\epsilon$, si $p > n > n_0$.

Donc, $A_p - B_n < \frac{1}{2}\epsilon$, si $n > n_0$, ainsi $|U_p - V_n| < \frac{1}{2}$, si $n > n_0$.

Mais $\lim_{p \rightarrow \infty} U_p = U$, et donc si $p > n > n_1$, $|U - U_p| < \frac{1}{2}\epsilon$, alors si $n' > n_0$ et $n' > n_1$,

$$|U - V_n| < \epsilon \quad \text{si,} \quad n > n'.$$

C'est-à-dire, $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = U$. □

D'une manière analogue avec les séries infinies, un produit infini non absolument convergent peut être amené à converger vers n'importe quelle valeur, ou de diverger, en modifiant l'ordre des facteurs. Considérons le produit $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$.

Clairement, la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ converge absolument pour $|z| < 1$ et donc le produit converge absolument pour $|z| < 1$. Maintenant, on voit

$$\begin{aligned} (1-z)P_0(z) &= 1 - z^2 \\ (1-z)P_1(z) &= (1-z^2)(1+z^2) = 1 - z^{2^2} \\ &\vdots \\ (1-z)P_n(z) &= (1-z^{2^n})(1+z^{2^n}) = 1 - z^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

et donc, pour $|z| < 1$, on obtient

$$(1-z) \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{2^{n+1}}) = 1.$$

Plus généralement, on a

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{R} \right)^{2^k} \right) = \frac{R}{R-z} \quad \text{pour} \quad |z| < R.$$

En particulier,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{R} \right)^{2^k} \right) = \frac{R^2}{R^2 - z^2} \quad \text{pour} \quad |z| < R.$$

Théorème 2.1.11. [12] *Le produit infini $\prod_n u_n$ converge commutativement si et seulement s'il converge absolument.*

Corollaire 2.1.2. [4] *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls et de limite 1.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) *Le produit infini $\prod_n u_n$ est strictement convergent et commutativement convergent.*
- ii) *La série $\sum_n \ln u_n$ est absolument convergente.*

2.2 Produits infinis des nombres réels

Si une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ remplit les conditions de Coriollis (théorème (2.1.6)) alors nécessairement non seulement le produit $\prod_n (1 + x_n)$ converge, mais aussi le produit

$\prod_n (1 + cx_n)$ converge pour tout $c \in \mathbb{R}$. Il s'avère que cette ou même la convergence des produits $\prod_n (1 + c_1 x_n)$ et $\prod_n (1 + c_2 x_n)$ pour deux nombres réels différents de zéro c_1, c_2 est équivalent aux conditions de Coriollis.

Il reste un cas particulier de convergence d'un produit réel qui est caractérisé par les propriétés suivantes : $\prod_n (1 + cx_n)$ converge, $\sum_n x_n = \sum_n x_n^2 = \infty$, dans ce cas l'équilibre des facteurs est détruit par toute mise à l'échelle des écarts par rapport à l'unité $\prod_n (1 + cx_n)$ diverge pour $c \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Théorème 2.2.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels vérifiant $0 \leq u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$.*

Démonstration. Si $P_N = (1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_N)$, on a $P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_N > 0$, c'est-à-dire que la limite P de P_N existe lorsque N tend vers l'infini. Si la série $\sum_n u_n < \infty$, le théorème (3.1.2) implique $P > 0$. Réciproquement

$$P \leq P_N = \prod_{n=1}^N (1 - u_n) \leq e^{-u_1 - u_2 - \dots - u_N}.$$

Si la série $\sum_n u_n = \infty$ alors $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-u_1 - u_2 - \dots - u_N} = 0$. Donc la série $\sum_n u_n$ converge. Ceci implique que $P > 0$. \square

Théorème 2.2.2. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.*

i) Si deux des quatre expressions

$$\prod_n (1 + x_n) \quad , \quad \prod_n (1 - x_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$$

sont convergentes, alors cela vaut aussi pour les deux autres.

ii) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est convergente et la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ ne l'est pas, alors le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n) \text{ diverge vers zéro.}$$

iii) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ est convergente et la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ne l'est pas, alors $\frac{\prod_{n=1}^N (1+x_n)}{e^{\left(\sum_{n=1}^N x_n\right)}}$ tend vers une limite finie pour N tend vers ∞ .

iv) Si le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1+x_n)$ est convergent et la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ ne l'est pas, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$.

v) Si le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1+cx_n)$ est convergent pour deux valeurs différentes $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors le produit est convergent pour tout $c \in \mathbb{R}$.

Pour la démonstration de ce théorème voir [13].

Exemples 2.3. 1. Le produit défini par $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$ diverge vers 0, $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N}$, par contre la série $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$ est convergente.

2. Le produit défini par

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots$$

est convergent, $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(N+1)}{2N}$, par contre la série $\sum_n x_n = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots$, ainsi la série $\sum_n \left(x_n - \frac{1}{2}x_n^2\right)$ divergent, remarquons que $\ln(1+x_n) = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 + O(x_n^3)$.

On a le théorème de Weierstrass sur les inégalités suivant.

Théorème 2.2.3. Si $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$, sont des séries de terme positif inférieur à 1, (P_1 est exclu), alors on a les assertions suivantes :

i) $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots(1+u_n) > 1 + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)$.

ii) $(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)\dots(1-u_n) > 1 - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)$.

De plus, si $\sum_{n=1}^{\infty} u_i < 1$, alors

iii) $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\dots(1+u_n) < [1 - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)]^{-1}$.

iv) $(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3)\dots(1-u_n) < [1 + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)]^{-1}$.

$$\begin{aligned}
v) \quad & \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^{-1} > \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \\
vi) \quad & \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^{-1} > \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n.
\end{aligned}$$

Démonstration. Faisons un raisonnement par récurrence pour démontrer l'assertion (i).

Pour $n = 2$, on a $(1 + u_1)(1 + u_2) = 1 + u_1 + u_2 + u_1u_2 > 1 + (u_1 + u_2)$ est vraie.

Supposons que l'assertion (i) est vrai pour $n = k$.

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_k) > 1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_k) \quad (2.8)$$

et démontrons que l'assertion (i) reste vrai pour $n = k + 1$.

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_{k+1}) > 1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{k+1}). \quad (2.9)$$

Multiplier les deux membres de l'inéquation (2.8) par $(1 + u_{k+1})$

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_k)(1 + u_{k+1}) > (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k)(1 + u_{k+1}).$$

Par suite,

$$1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + u_{k+1} + u_1u_{k+1} + u_2u_{k+1} + \dots + u_ku_{k+1} > 1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{k+1}).$$

D'où l'inéquation (2.9). De même, l'assertion (ii) peut être prouvée par récurrence.

$$\text{Pour } n = 2, \quad (1 - u_1)(1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 - u_1u_2 > 1 - (u_1 + u_2).$$

Supposons que l'assertion (ii) est vrai pour $n = k$.

$$(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_k) > 1 - (u_1 + u_2 + \dots + u_k) \quad (2.10)$$

et démontrons quelle est aussi vrai pour $n = k + 1$.

$$(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_{k+1}) > 1 - (u_1 + u_2 + \dots + u_{k+1}). \quad (2.11)$$

Multiplions les deux membres de l'inéquation (2.10) par $(1 - u_{k+1})$, on obtient

$$\begin{aligned}
(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_k)(1 - u_{k+1}) &> [1 - (u_1 + u_2 + \dots + u_k)] (1 - u_{k+1}), \\
&= [1 - u_1 - u_2 - \dots - u_k] [1 - u_{k+1}].
\end{aligned}$$

Par suite,

$$(1 - u_1 - u_2 \dots - u_k - u_{k+1} + u_1 u_{k+1} + u_2 u_{k+1} + \dots + u_k u_{k+1}) > 1 - (u_1 + u_2 + \dots + u_{k+1}).$$

D'où l'inéquation (2.11).

Maintenant démontrons l'assertion (iii). On a $1 + u_i = \frac{1 - u_i^2}{1 - u_i} < \frac{1}{1 - u_i}$.

Par conséquent,

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) < \frac{1}{(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n)},$$

et puisque $\sum_{i=1}^n u_i < 1$, alors on utilisons l'assertion (ii), on trouve

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) < [1 - (u_1 + u_2 + \dots + u_n)]^{-1}.$$

Finalement montrons l'assertion (iv). On a $1 - u_i = \frac{1 - u_i^2}{1 + u_i} < \frac{1}{1 + u_i}$.

Par conséquent,

$$(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n) < [(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n)]^{-1},$$

utilisons l'assertion (i), on voit que

$$(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n) < [1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n]^{-1}.$$

Combinons ces résultats et prenons les limites, on obtient les inégalités

$$(v) \quad \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^{-1} > \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) > 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

$$(vi) \quad \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^{-1} > \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

□

En plus des inégalités de Weierstrass nécessaires dans la démonstration du théorème reliant la convergence des produits infinis à celle de la convergence des séries infinies.

Théorème 2.2.4. *Si $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sont comprises tous entre 0 et 1, alors la condition nécessaire et suffisante pour la convergence des produits infinis*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$$

est la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Démonstration. Posons

$$P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \quad \text{et} \quad Q_n = (1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n).$$

C'est évident que la suite $(P_n)_n$ est croissante et la suite $(Q_n)_n$ est décroissante car u_1, u_2, \dots, u_n , sont compris entre 0 et 1.

Supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente et montrons que les produits infinis

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$$
 sont convergents.

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, on peut trouver un N tel que, si

$$S_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots > 1,$$

alors,
$$\frac{1}{1 - S_m} > \frac{1}{1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n)},$$

mais
$$\frac{P_n}{P_m} = (1 + u_{m+1})(1 + u_{m+2}) \dots (1 + u_n) \quad \text{avec,} \quad (m > n).$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Weierstrass, l'inégalité (iii) du théorème (2.2.3), on obtient

$$\frac{P_n}{P_m} < \frac{1}{1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n)}.$$

Par conséquent,
$$\frac{P_n}{P_m} < \frac{1}{1 - S_m},$$
 ou encore

$$P_n < \frac{P_m}{1 - S_m} \quad \text{avec} \quad (n > m). \tag{2.12}$$

De même,
$$\frac{Q_n}{Q_m} > 1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n) \quad , \quad \frac{Q_n}{Q_m} > (1 - S_m),$$

$$Q_n > Q_m(1 - S_m) \quad \text{avec} \quad (n > m). \tag{2.13}$$

La suite $(P_n)_n$ est croissante et l'inégalité (2.12) montre qu'elle est bornée supérieure.

La suite $(Q_n)_n$ est décroissante et bornée inférieure d'après l'inégalité (2.13), donc ces deux suites ont des limites

$$l < \frac{P_m}{1 - S_m} \quad \text{et} \quad l' > Q_m(1 - S_m),$$

puisque toute suite monotone bornée est convergente, alors elle sont convergentes. Donc

les produits infinis $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$ sont convergents.

Supposons que la suite $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est divergente, alors on peut trouver un nombre m tel que pour tout nombre positif j , $u_1 + u_2 + \dots + u_n > j$ pour $n > m$. Rappelons que $P_n = (1 + u_1) \dots (1 + u_n)$, d'après l'inégalité (i) du théorème (2.2.3),

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) > 1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_n),$$

où $P_n > 1 + j$. De même, $Q_n = (1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n)$, d'après l'inégalité (ii) du théorème (2.2.3), on a

$$(1 - u_1)(1 - u_2) \dots (1 - u_n) < \frac{1}{1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_n)},$$

alors $Q_n < \frac{1}{1 + j}$ avec $n > m$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0$. Donc les deux produits sont divergents. Reste à montrer que si $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$ sont convergents, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente.

Tout d'abord, supposons que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ est convergent. Comme $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ est convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = l$, où $P_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n)$. Puisque $0 < u_i < 1$, alors c'est une suite croissante et donc

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) < l.$$

Utilisons l'inégalité (i) du théorème (2.2.3),

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) > 1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_n).$$

Donc $1 + (u_1 + u_2 + \dots + u_n) < l$, où $\sum_{i=1}^{\infty} u_i < l - 1 = r$, c'est à dire $\sum_{i=1}^{\infty} u_i < r$. Puisque $0 < u_i < 1$ pour tout i , la série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ est monotone, et comme elle est bornée supérieure elle est convergente.

Un résultat analogue peut être obtenu pour le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$. □

Exemple 2.5. 1. Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, les produits infinis $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ sont convergents.

2. Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, les produits $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sont divergents.

Le théorème de réarrangement de produits infinis et comme suite.

Théorème 2.2.5. Lorsque $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sont comprise entre 0 et 1, les valeurs des deux produits infinis $P = (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3) \dots$; $Q = (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3) \dots$, sont tous deux indépendants de l'ordre des facteurs.

Démonstration. Soit les réarrangement de P et Q respectivement P' et Q' . Il faut prendre les facteurs de P' et Q' pour inclure les n premiers facteurs de P et Q . Alors

$$P \geq P'_r > P_n \ ; \ Q \leq Q'_r < Q_n, \quad \text{pour } (r \geq n).$$

Maintenant, n peut être pris suffisamment grand pour amener P_n et Q_n , aussi près de P et Q , respectivement.

Par conséquent, $\lim_{r \rightarrow \infty} P'_r = P$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} Q'_r = Q$. De même, si P diverge à l'infini, alors P' aussi et si Q diverge vers 0, Q' est aussi. \square

Remarque 2.2.1. Si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$ converge vers 0, le théorème (2.2.4) est faux, comme dans le cas $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Dans tous les travaux précédents, on a par hypothèse que $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ sont tous inférieurs à un. Cette hypothèse peut être faite sans aucune perte de généralité, car il ne peut y avoir qu'un nombre fini de u_i de valeur supérieure à un. Si cela était faux, le produit serait diverger. Par conséquent, ces facteurs peuvent être omis sans affecter la convergence du produit.

Chapitre 3

Produits infinis de fonctions

Ce chapitre est consacré à l'étude des différents critères des différents modes de convergence (convergence simple, absolue, uniforme, normale, ...) des produits infinis des fonctions et celles de fonctions holomorphes. Dans la dernière section de ce chapitre, on étudie le développement des fonctions trigonométriques en produit infini.

3.1 Critères de convergence

Convergence uniforme

Le concept de la convergence uniforme des produits infinis est défini par analogie avec des séries ou suites infinies.

Définition 3.1.1. Soient $(f_n)_n$ une suite des fonctions $P_n(z) = \prod_{i=1}^n (1 + f_i(z))$, $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$, pour chaque point $z \in \Omega$. On dit que $P_n(z)$ converge uniformément vers $P(z)$ sur un ouvert Ω , si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, dépend uniquement de ϵ et non du valeur particulière de z dans Ω , telle que

$$|P_n(z) - P(z)| < \epsilon, \quad \text{pour tout } n > N.$$

Le théorème suivant associe la convergence uniforme de produits infinis à la convergence uniforme de la série logarithmique associée.

Théorème 3.1.1. Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) = P(z)$ est uniformément convergent dans Ω si et seulement si la série $\lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + f_n(z))$ est uniformément convergente dans Ω .

Démonstration. Si la série logarithmique associée $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + f_n(z))$ est uniformément convergente alors dans un ouvert Ω , pour $\epsilon > 0$, il existe un N , dépend de la valeur particulier de z dans Ω , tel que

$$|\lambda_n(z) - \lambda(z)| < \epsilon \quad \text{pour } n > N.$$

Posons $\lambda(z) = \lambda_n(z) + \mu_n(z)$, c'est-à-dire $\lambda(z) - \lambda_n(z) = \mu_n(z)$. Il existe alors N et $\epsilon > 0$, tels que pour $n > N$; $|\mu_n(z)| < \epsilon$, pour tout z dans Ω . Puisque $\ln P(z) = \lambda(z)$, $\ln P_n(z) = \lambda_n(z)$, alors

$$\begin{aligned} P(z) = e^{\lambda(z)} &= e^{\lambda_n(z) + \mu_n(z)} \\ &= e^{\lambda_n(z)} \cdot e^{\mu_n(z)} \\ &= P_n(z) \cdot e^{\mu_n(z)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $P_n(z) = P(z) \cdot e^{-\mu_n(z)}$; $P(z) - P_n(z) = P(z) - P(z) \cdot e^{-\mu_n(z)}$ et $|P(z) - P_n(z)| = |P(z)| |1 - e^{-\mu_n(z)}|$. Puisqu'il existe N et $\epsilon > 0$, tels que pour $n > N$; $|\mu_n(z)| < \epsilon$. pour tout z dans Ω , $\mu_n(z)$ sa limite tend vers zéro uniformément lorsque n tend vers l'infini, donc $e^{-\mu_n(z)}$ tend vers 1 uniformément lorsque n tend vers l'infini.

Puisque $P(z)$ est fini et $e^{-\mu_n(z)}$ tend vers 1 uniformément lorsque n tend vers l'infini, $|P(z) - P_n(z)| < \epsilon'$ et le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ doit être uniformément convergent dans Ω .

Inversement, si le produit est uniformément convergent dans Ω , il existe N et $\epsilon > 0$ tels que, pour $n > N$; $|P(z) - P_n(z)| < \epsilon$ pour tout z dans Ω . Posons

$$P(z) = P_n(z) (1 + \phi_n(z)) = P_n(z) + P_n(z)\phi_n(z). \quad (3.1)$$

Alors

$$|P(z) - P_n(z)| = |P_n(z)| |\phi_n(z)| < \epsilon.$$

Puisque $|P_n(z)|$ est fini et supérieur à zéro, il existe N et $\epsilon_2 > 0$ tels que pour $n > N$, $|\phi_n(z)| < \epsilon_2$, pour tout z dans ω .

Comme $\ln P(z) = \lambda(z)$ et $\ln P_n(z) = \lambda_n(z)$. Appliquons la fonction logarithme dans

l'équation (3.1), on obtient

$$\lambda(z) = \lambda_n(z) + \ln(1 + \phi_n(z)) \quad \text{et} \quad \lambda(z) - \lambda_n(z) = \ln(1 + \phi_n(z)).$$

Puisqu'il existe N et $\epsilon_2 > 0$ tels que pour $n > N$; $|\phi_n(z)| < \epsilon_2$, pour tout z dans Ω , $\phi_n(z)$ tend vers zéro uniformément lorsque n tend vers l'infini et $\ln(1 + \phi_n(z))$ tend vers zéro uniformément lorsque n tend vers l'infini, ce qui implique que

$$|\ln(1 + \phi_n(z))| < \epsilon_3 \quad \text{et} \quad |\lambda(z) - \lambda_n(z)| < \epsilon_3; \quad \text{pour } n > N, \quad \epsilon_3 > 0 \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \Omega.$$

Ce qui prouve que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + f_n(z))$ converge uniformément dans Ω . \square

Le théorème suivant montre que la convergence uniforme du produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ est liée à la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Théorème 3.1.2. *Si la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ est uniformément convergente dans Ω , tel que les fonctions $f_n(z)$ prend la valeur -1 lorsque z varie sur Ω , alors le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ converge uniformément dans Ω .*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème on utilise l'identité suivante

$$\begin{aligned} \ln(1 + f_n(z)) &= f_n(z) - \frac{f_n(z)^2}{2} + \frac{f_n(z)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{f_n(z)^n}{n} + \dots \\ &= f_n(z) \left(1 - \frac{f_n(z)}{2} + \frac{f_n(z)^2}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{f_n(z)^{n-1}}{n} + \dots \right) \\ &= f_n(z) \cdot g_n. \end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ est uniformément convergente alors elle est convergente, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$. Ainsi, g_n converge pour $0 < f_i < 1$, avec $i = 1, 2, \dots, n$. Comme f_n tend vers 0, g_n tend vers 1, alors g_n admet une borne supérieure pour chaque n . Notons par G la plus grande de ces bornes supérieure. Alors

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} \ln(1 + f_i(z)) \right| \leq |G| \cdot \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(z)|.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ est uniformément convergente et d'après le théorème (3.1.1), le produit infini $P_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ est uniformément convergent dans Ω . \square

De plus si (n_1, n_2, n_3, \dots) est une permutation quelconque de $(1, 2, 3, \dots)$, alors on a

$$P_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_{\sigma(n)}(z)), \quad \text{avec } z \in \Omega.$$

Le théorème suivant est l'analogie du M-test de Weierstrass pour les séries infinies (théorème (1.3.3)).

Théorème 3.1.3. *Si la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ est convergente et si pour tout n et pour tout z dans Ω ,*

$$|f_n(z)| \leq M_n.$$

Alors le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ est uniformément convergent pour tout z dans Ω .

Démonstration. On utilise le M-test de Weierstrass pour les séries infinies. Si la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ est convergente et si pour tout n et pour tout z dans Ω , on a

$$|f_n(z)| \leq M_n, \text{ alors la série infinie } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ converge uniformément pour tout } z \text{ dans } \Omega.$$

D'après le théorème (3.1.2), le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ est uniformément convergent pour tout z dans Ω . □

Convergence localement uniformément

Soit X un espace métrique localement compact. Notons par $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs dans \mathbb{C} . Considérons le produit infini défini par $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ pour $(f_n)_n$, $n = 1, 2, \dots$, une suite des fonctions définie sur $\mathcal{C}(X)$.

Définition 3.1.2. *Le produit infini est appelé localement uniformément convergente dans Ω , si pour tout ensemble compact K dans Ω , il existe un indice $m = m(K)$ tel que la suite $P_{m,n} := f_m f_{m+1} \dots f_n$, pour $n \geq m$, converge uniformément sur K à une fonction non nul L_m .*

On appelle la fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ la limite du produit et on écrit : $f = \prod_n f_n$, sur le compact K on a $f|K = (f_0|K) \dots (f_{m-1}|K) \cdot L_m$.

Étudions quelque propriété de la convergence localement uniformément.

Propriétés 3.1.1. [2]

i) Si le produit infini $\prod_n f_n$ converge localement uniformément vers f dans X , alors f est continue dans X et la suite $(f_n)_n$ converge localement uniformément dans X vers 1.

ii) Si les produits $\prod_n f_n, \prod_n g_n$ convergent localement uniformément dans X , alors le produit $\prod_n f_n g_n$ converge localement uniformément et

$$\prod_n f_n g_n = \left(\prod_n f_n \right) \left(\prod_n g_n \right).$$

Exemples 3.1.

1) Les fonctions $f_n = \left(1 + \frac{2z}{2n-1}\right) \left(1 + \frac{2z}{2n+1}\right)^{-1}$, pour tout $n \geq 1$ sont holomorphes dans le disque unité \mathbb{D} . On a

$$P_{2,k} = \left(1 + \frac{2}{3}z\right) \left(1 + \frac{2z}{2k+1}\right)^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

Par conséquent, $\lim_n P_{2,k} = 1 + \frac{2}{3}z$, et donc le produit $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ est localement uniformément convergent dans \mathbb{D} vers la fonction $f(z) = 1 + 2z$.

2) Soit $f_n(z) = z$ pour tout $n \geq 0$. Le produit $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ ne converge pas dans le disque unité \mathbb{D} . Puisque la suite $P_{m,k} = z^{k-m+1}$ converge vers zéro pour tout m .

Le théorème suivant présente le critère de convergence.

Théorème 3.1.4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur X à valeurs dans \mathbb{C} . Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que toute fonction f_n , avec $n \geq m$, ait un logarithme $\ln f_n \in \mathcal{C}(X)$.

Si la série logarithmique $\lambda_n(z) = \sum_{n \geq m} \ln f_n$ converge localement uniformément dans X vers $\lambda(z) \in \mathcal{C}(X)$ pour tout $z \in X$, alors le produit $P(z) = \prod_{n \geq 1} f_n$ converge localement uniformément dans X vers $f_0 f_1 f_2 \dots f_{m-1} \cdot e^\lambda$.

Pour la démonstration de ce théorème voir [2].

Convergence normale

Rappelons le concept de la convergence normale d'une série de fonctions. Soit X un espace localement compact, la série $\sum_n f_n$ avec $f_n \in \mathcal{C}(X)$ est normalement convergente

dans X si et seulement si la série $\sum_n |f_n|_K < \infty$ pour tout ensemble compact $K \subset X$. Les séries normalement convergentes sont localement uniformément convergentes, la convergence normale est préservée au passage aux sommes partielles et aux réarrangements arbitraires.

Définition 3.1.3. *Un produit $\prod_n (1 + f_n)$ dans $\mathcal{C}(X)$ est appelé normalement convergent sur X si la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur X .*

Propriétés 3.1.2. [2] *Soit $\prod_{n \geq 0} f_n$ converge normalement dans X , alors*

i) *Chaque sous-produit $\prod_{j \geq 0} f_{n_j}$ converge normalement dans X .*

ii) *Si les deux produits $\prod_n f_n$ et $\prod_n g_n$ sont normalement convergent dans X , alors le produit $\prod_n (f_n g_n)$ converge aussi normalement dans X .*

Théorème 3.1.5. [2] *Si le produit $\prod_{n \geq 0} f_n$ converge normalement dans \mathbb{C} , alors il converge localement uniformément.*

On a le théorème de réarrangement suivant.

Théorème 3.1.6. *Soit le produit $\prod_{n \geq 0} f_n$ converge normalement dans X . Alors il existe une fonction f de X dans \mathbb{C} telle que pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, le produit du réarrangement $\prod_{n \geq 0} f_{\sigma(n)}$ converge localement uniformément vers f dans X .*

Démonstration. Soit z un élément dans le disque unité \mathbb{D} , on a $\ln(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

Ceci implique que

$$|\ln(1+z)| \leq |z| (1 + |z| + |z|^2 + \dots).$$

Par conséquent, $|\ln(1+z)| \leq 2|z|$ si $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Soit $K \subset X$ un ensemble compact et soit $g_k = f_k - 1$. Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que : $|g_k|_K \leq \frac{1}{2}$ pour $k \geq m$. Pour tout k , on a

$$\ln(f_k) = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} g_k^n \in \mathcal{C}(K), \text{ où } |\ln(f_k)|_K \leq 2|g_k|_K.$$

On voit que $\sum_{n \geq m} |\ln(f_n)|_K \leq \sum_{n \geq m} |g_n|_K < \infty$. Par conséquent, on a pour toute permutation σ de $\mathbb{N}_m := \{k \in \mathbb{N} : k \geq m\}$, la série $\sum_{n \geq m} \ln(f_{\sigma(n)})$ converge uniformément dans K vers

$\sum_{n \geq m} \ln f_n$. D'après ce qui précède, on a pour tel σ les produits $\prod_{n \geq m} f_{\sigma(n)}$ et $\prod_{n \geq m} f_n$ convergent uniformément dans K à la même fonction limite. Mais une permutation quelconque σ de \mathbb{N} ne diffère que par un nombre fini de transpositions (qui n'ont aucun effet sur la convergence) d'une permutation $\sigma' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec $\sigma'(\mathbb{N}_m) = \mathbb{N}_m$. Il existe donc une fonction f de X dans \mathbb{C} telle que tout produit $\prod_{n \geq 0} f_{\sigma(n)}$ converge localement uniformément dans X vers f . \square

Les produits peuvent converger localement uniformément sans être normalement convergent, comme l'indique l'exemple suivant.

Exemple 3.1. Soit le produit infini $\prod_{n \geq 1} (1 + g_n)$, avec $g_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Il est toujours vrai que $(1 + g_{2n-1})(1 + g_{2n}) = 1$ d'où $P_{1,k} = 1$ pour k pair et $P_{1,k} = 1 + \frac{1}{k}$ pour k impair. Le produit $\prod_{n \geq 1} (1 + g_n)$ converge localement uniformément vers 1 dans \mathbb{C} .

Remarquons que dans cet exemple le sous-produit $\prod_{n \geq 1} (1 + g_{2n-1})$ n'est pas convergent.

3.2 Produits infinis de fonctions holomorphes

Définition 3.2.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω . Le produit infini $\prod_{n \geq 1} f_n(z)$ converge dans Ω si le produit partiel $P_{1,n} = f_1 f_2 \dots f_n$ de fonctions holomorphes converge uniformément sur une partie A de Ω .

S'il en est ainsi, la limite $f(z)$ des P_n est holomorphe dans Ω . On introduit d'autres notions de convergence qui nous permettront d'obtenir des résultats intéressants.

Définition 3.2.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω et A une partie de Ω . On dit que le produit infini $\prod_n f_n(z)$, converge absolument uniformément (respectivement converge normalement) sur A si les conditions suivantes sont réalisées :

i) La suite $f_n(z)$ converge uniformément vers la fonction constante 1, sur A , c'est-à-dire ;

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0, z \in A \Rightarrow |f_n - 1| < 1.$$

ii) La série $\sum_{n \geq n_0} |\ln f_n(z)|$, définie sur A pour n assez grand, converge uniformément (respectivement normalement) sur A .

D'après l'hypothèse i), la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 1 sur A , donc la suite $(|\ln f_n|)_n$ est bien définie sur A , ce qui entraîne que la détermination principale $\ln f_n(z)$ est définie sur A . Comme \ln est la détermination principale du logarithme complexe (sa partie imaginaire est dans $]-\pi, \pi[$), $\ln f_n(z)$ est défini et l'on a

$$\ln P_{1,n}(z) = \ln \prod_{k=k_0}^n f_k = \sum_{k=k_0}^n \ln f_k(z).$$

Par ailleurs, sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_x^-$, on sait que \ln est continue, donc si la série $\sum_{k=k_0}^{\infty} \ln f_k$ converge uniformément sur A , alors

$$\ln \lim_{n \rightarrow \infty} P_{1,n}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n(z) = \sum_{k=k_0}^n \ln f_k(z) = g_z.$$

et g est une fonction continue.

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = e^{g(z)}.$$

Proposition 3.2.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω . Soit A une partie de Ω , posons $f_n = 1 + u_n$, avec $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors le produit infini $\prod_n f_n(z)$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur A si et seulement si la série $\sum_n |u_n|$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur A .*

Démonstration. La fonction $z \rightarrow \frac{\ln(1+z)}{z}$ a une singularité en 0. Elle se prolonge en une fonction f holomorphe et sans zéro dans le disque unité \mathbb{D} . Par suite, il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $c_1 \leq |f(z)| \leq c_2$ si $2|z| \leq 1$. Ainsi, si $2|z| \leq 1$:

$$c_1 |z| \leq |\ln(1+z)| \leq c_2 |z|.$$

Les deux conditions impliquent que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur A . Ainsi, il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on ait $2|u_n(z)| \leq 1$ pour tout $z \in A$. Par suite, si $m \geq N$ et $z \in A$.

$$c_1 \|u_m\|_A \leq \|\ln(1+u_m)\|_A \leq c_2 \|u_m\|_A,$$

$$c_1 \sum_{n=m}^{\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |\ln(1+u_n(z))| \leq c_2 \sum_{n=m}^{\infty} |u_n(z)|.$$

□

Exemple 3.2. Montrons que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n})$ converge normalement sur tout compact du disque unité \mathbb{D} et que pour tout $z \in \mathbb{D}$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}.$$

En effet, soit K un compact de \mathbb{D} . Pour tout $z \in K$ tel que $|z| \leq r < 1$, on a $|z^{2^n}| \leq r^{2^n}$. La série $\sum_n r^{2^n}$ converge et d'après le critère de Weierstrass, théorème (1.3.4), la série $\sum z^{2^n}$ converge normalement sur K . D'après la proposition (3.2.1), le produit infini converge normalement sur K . Puisque la fonction $\frac{1}{1 - z}$ est holomorphe sur \mathbb{D} , posons $P_n(z) = \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k})$, on obtient $(1 + z)P_n(z) = 1 - z^{2^{n+1}}$, pour $|z| < 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{2^{n+1}} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = \frac{1}{1 - z}$ d'où le résultat.

Propriétés 3.2.1. [2, 4]

- i) Le produit infini $\prod_n f_n$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de Ω si, pour tout compact K de Ω , le produit infini $\prod_n (f_n|_K)$ converge absolument uniformément (respectivement normalement).
- ii) Tout produit $\prod_n f_n$ des fonction f_n holomorphes dans Ω qui converge localement uniformément dans Ω a une limite holomorphe dans Ω .

Théorème 3.2.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω . On suppose que le produit infini $\prod_n f_n$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur tout compact K de Ω . Alors on a :

- i) La fonction $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe sur Ω .
- ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, on a $f = f_0 f_1 \dots f_m \prod_{n=m+1}^{\infty} f_n$.
- iii) Pour toute permutation σ de \mathbb{N} , on a : $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}(z)$.
- iv) $Z(f) = \bigcup_n Z(f_n)$, $m_Z(f) = \sum_n m_Z(f_n)$, où $Z(f)$ (respectivement $Z(f_n)$) désigne l'ensemble des zéros de f (respectivement f_n) et $m_Z(f)$ (respectivement $m_Z(f_n)$) est l'ordre de multiplicité du zéro de f (respectivement f_n).

Pour la démonstration voir [4].

Théorème 3.2.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert Ω telle que le produit infini $\prod f_n$ converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de Ω . Soit $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$. Alors la série de fonctions méromorphes $\sum \frac{f'_n}{f_n}$, converge absolument uniformément (respectivement normalement) sur tout compact de Ω et sa somme est la dérivée logarithmique,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}.$$

Démonstration. Soit V un ouvert relativement compact de Ω , tel que pour tout $n \geq p$ la fonction $\ln(f_n)$ est définie sur V . Comme le produit $\prod_n f_n$ converge normalement sur V , alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 1 sur V , c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0, z \in V \Rightarrow |f_n(z) - 1| < 1,$$

et en outre, la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(f_n)$, converge normalement sur V . On a

$$\prod_{n=1}^p f_n = f_1 \cdots f_{n_0} \cdot f_{n_0+1} \cdots f_p = g \cdot \prod_{n=n_0+1}^p f_n,$$

où $g = \prod_{n=1}^{n_0} f_n$. Comme

$$f = g \cdot \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n, \text{ alors } \ln(f) = \ln(g) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \ln(f_n).$$

Or la série $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \ln(f_n)$ de fonctions holomorphes $\ln(f_n)$, ($n > n_0$), est uniformément convergente dans V et d'après le théorème de Weierstrass, on peut la dériver terme à terme et on a dans V ,

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f'_n}{f_n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln(f_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f'_n}{f_n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n}{f_n}.$$

□

3.3 Développement des fonctions trigonométriques en produits infinis

Les fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ sont à développer dans cette section. Le développement de $\sin x$ est comme suit. L'identité

$$\sin nx = u_0 \sin^n(x) + u_1 \sin^{n-1}(x) + \dots + u_{n-1} \sin(x).$$

où n est un entier impair et les coefficients u_i sont des nombres entiers seront utilisés pour développer le produit infini de $\sin x$.

Posons $\sin x = t$,

$$\sin nx = F_n(t) = u_0 t^n + u_1 t^{n-1} + \dots + u_{n-1} t, \quad \text{pour } n \text{ fini.}$$

Puisque $F_n(t)$ est un polynôme de degré n , $F_n(t)$ doit avoir n racines, qui correspondent aux valeurs de x comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui font $\sin nx = 0$, pour n fini, à savoir,

$$0, \pm \sin \frac{\pi}{n}, \pm \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, \pm \sin \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

La fonction $F_n(t)$ peut s'écrire sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} F_n(t) &= u_0 t \left(t - \sin \frac{\pi}{n} \right) \left(t + \sin \frac{\pi}{n} \right) \left(t - \sin \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(t - \sin \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right) \\ &= u_0 t \left(t^2 - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) \left(t^2 - \sin^2 \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(t^2 - \sin^2 \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right) \\ &= u_0 \sin x \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi}{n} \right) \dots \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Multiplions et divisons le membre droit par $\sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{n} \dots \sin^2 \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}$. On obtient,

$$\sin nx = k \cdot \sin x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}} \right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}} \right). \quad (3.2)$$

où k est une constante. Divisons (3.2) par $\sin x$, et remarquons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = n$, donc k est égal à n . Remplaçons maintenant x par $\frac{x}{n}$ et $k = n$. Alors

$$\sin x = n \cdot \sin \frac{x}{n} \cdot \prod_{r=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} \right).$$

Posons, $P(x) = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right)$, alors

$$P(\sin x, n) = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} \right), \quad \lambda(x) = \ln P(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right);$$

$$\lambda(\sin x, n) = \ln P(\sin x, n) = \sum_{r=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} \right).$$

Écrivons,

$$\lambda(\sin x, n) = \lambda_m(\sin x, n) + \bar{\lambda}_m(\sin x, n).$$

$$\text{Alors } \lambda_m(\sin x, n) = \sum_{r=1}^m \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} \right) \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_m(\sin x, n) = \sum_{r=m+1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} \right).$$

Utilisons la même notation, écrivons $\lambda(x) = \lambda_m(x) + \bar{\lambda}_m(x)$. Alors

$$|\lambda(\sin x, n) - \lambda(x)| \leq |\lambda_m(\sin x, n) - \lambda_m(x)| + |\bar{\lambda}_m(\sin x, n)| + |\bar{\lambda}_m(x)|.$$

Montrons que si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\frac{x}{2} < \sin x < x$. c'est-à-dire $\frac{1}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Calculons la dérivée de f , on a

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x \cdot (x - \tan x)}{x^2} < 0.$$

Puisque $f' < 0$, f est décroissante, donc $f(x)$ atteint son maximum lorsque x se rapproche à 0 et son minimum lorsque x se rapproche à $\frac{\pi}{2}$. Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers 1 et lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $f(x)$ approche à $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} > \frac{1}{2}$. Donc

$$\frac{1}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{2} < \sin x < x.$$

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{x}{2} < \sin x < x$, r est supérieur à un certains m ,

$$\frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} > \frac{\frac{x^2}{4n^2}}{\frac{r^2 \pi^2}{n^2}} = \frac{x^2}{4r^2 \pi^2}.$$

Par conséquent, pour m_1 tel que $\frac{x}{m_1} < 1$,

$$\ln \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}} \right) < \ln \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2 r^2} \right) \quad \text{avec } r > m. \quad (3.3)$$

Ensuite, montrons l'inégalité $-\ln(1-u) < u + ku^2$, pour $0 < u < 1$, k est une constante. Considérons l'inégalité :

$$\begin{aligned} -\ln(1-u) &= u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \dots \\ &= u + \frac{u^2}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Soit la suite $k_n = \frac{1}{2} + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{4} + \dots$, qui est convergente pour $|u| < 1$. Alors, comme montrons le théorème (2.1.6), k_n admet une borne supérieure, k et $-\ln(1-u) < u + ku^2$ pour k une constante, $0 < u < 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} -\sum_{r=m_1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2 r^2}\right) &< \sum_{r=m_1}^{\infty} \frac{x^2}{4\pi^2 r^2} + k \cdot \sum_{r=m_1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4\pi^2 r^2}\right)^2 \\ &< \frac{x^2}{4\pi^2} \sum_{r=m_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} + k \cdot \frac{x^4}{16\pi^4} \sum_{r=m_1}^{\infty} \frac{1}{r^4}. \end{aligned}$$

Mais les séries $\sum_{r=m_1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$ et $\sum_{r=m_1}^{\infty} \frac{1}{r^4}$ sont convergentes, donc $\sum_{r=m_1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2 r^2}\right)$ est convergente, ce qui implique que $\prod_{r=m_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2 r^2}\right)$ est convergent. D'après l'inégalité (3.3), on a

$$\lambda(\sin x, n) = \sum_{r=m_1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{r\pi}{n}}\right),$$

est convergente. Par conséquent, si m est suffisamment grand, ceci implique que

$$|\bar{\lambda}_m(\sin x, n)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\bar{\lambda}_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalement montrons que

$$|\lambda_m(\sin x, n) - \lambda_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.4)$$

Considérons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{m\pi}{n}}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right)} \quad (3.5)$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{n} \cdot \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{n^2}}{\sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{n} \cdot \frac{\pi^2}{n^2} \cdot \frac{x^2}{n^2}}{\frac{x^2}{n^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi^2}{n^2}} \longrightarrow \frac{x^2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

On peut voir que la limite (3.5) tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Mais la limite (3.5) est égal à $\lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda_m(\sin x, n) - \lambda_m(x)]$ qui tend vers 0. Ceci implique que $|\lambda_m(\sin x, n) - \lambda_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, qui est égal à l'équation (3.4). Alors

$$|\lambda(\sin x, n) - \lambda(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\sin x, n) = \lambda(x)$. Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sin x, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(\sin x, n)} = e^{\lambda(x)} = P(x).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{x}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x.$$

D'où

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

La représentation du produit infini de $\cos x$ peut être dérivée de celui de $\sin x$. L'identité $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ sera utilisé.

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{n^2 \pi^2} \right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)} \\ &= \frac{\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2m-1)^2 \pi^2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right).$$

Chapitre 4

Théorèmes de Weierstrass

Après avoir défini les produits infinis des nombres et des fonctions, dans ce quatrième chapitre, on va exploiter cette notion et donner les théorèmes de Weierstrass et théorème de factorisation de Weierstrass, la formule de Jensen et le produit de Blaschke sont aussi étudiés dans ce chapitre.

4.1 Théorème du produit de Weierstrass

Considérons maintenant la factorisation des fonctions entières. Soit f une fonction entière qui ne s'annule pas dans \mathbb{C} . Alors on peut exprimer $f(z)$ comme $e^{g(z)}$, où $g(z)$ est une fonction entière. Comme $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est analytique dans \mathbb{C} , $\frac{f'(z)}{f(z)}$ possède une primitive $g(z)$ sur \mathbb{C} , $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, pour une certaine fonction entière g . Utilisons ceci, on voit que $(f(z)e^{-g(z)})' = 0$ c'est-à-dire $f(z) = c.e^{g(z)}$ pour une constante c . D'où la représentation.

Ensuite, étant donné un ensemble fini de nombres complexes $\{0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ($z_k \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n$), on peut toujours trouver une fonction entière ayant des zéros à ces points d'ordre m, m_1, \dots, m_n , respectivement. Puisque une telle fonction entière est analytique dans \mathbb{C} sans aucune singularités sauf en l'infini, une telle fonction entière est le polynôme

$$P(z) = z^m \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{u_k}\right)^{m_k}.$$

De plus, si f est une fonction entière avec un nombre fini de zéros à 0, z_k ($z_k \neq 0$) pour $1 \leq k \leq n$, d'ordre m, m_k ($1 \leq k \leq n$) respectivement, alors

$$h(z) = \frac{f(z)}{P(z)}.$$

Il s'ensuit alors que $h(z)$ définit une fonction entière qui n'as pas de zéro dans \mathbb{C} . Par conséquent,

$$f(z) = e^{g(z)}P(z) = e^{g(z)}z^m \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{u_k}\right)^{m_k}.$$

Donc $f(z)$ peut être exprimé comme produit d'un polynôme.

Enfin, la question se pose de savoir si une fonction entière peut être trouvée dont les seuls zéros sont à une suite des points quelconque. Malheureusement, la réponse est non. Par exemple, si une fonction entière a des zéros à $\frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers zéro, alors la fonction entière doit être identiquement nulle. Plus généralement, une fonction entière non constante doit être non identiquement nulle dans \mathbb{C} . Par conséquent, l'ensemble des zéros d'une fonction entière qui a une infinité de zéros dans \mathbb{C} doit avoir l'infini comme point limite uniquement. Par exemple,

$$\begin{aligned} 0 = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &\implies e^{2iz} = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)} \\ &\implies z = (2k+1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0 = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} &\implies e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i} \\ &\implies z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

avec $e^z - 1 = 0 \implies z = 2k\pi i$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc, dans chaque cas, le point limite des zéros des fonctions $\cos z$, $\sin z$ et e^z est l'infini. Montrons cependant que si la suite de zéros d'une fonction entière n'a pas de point limite fini, alors la question concernant la factorisation peut recevoir une réponse affirmative. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers l'infini soit arrangée de telle sorte que

$$0 < |u_1| \leq |u_2| \leq |u_3| \leq \dots$$

Une supposition naïve pour une telle fonction entière est

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right).$$

Le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right)$ peut diverger. Si $f(z)$ est une fonction entière, alors la fonction doit être nulle des zéros seulement aux points de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 4.1. *Considérons le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ qui admet des zéros dans $z = \pm n$, $n \in \mathbb{N}$. Fixons $R > 0$. Si $|z| \leq R$, choisissons N assez grand pour que*

$$\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{R}{n} < 1, \quad \text{pour tout } n \geq N$$

et donc $\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \neq 0$ pour $|z| \leq R$ et pour $n \geq N$. On peut écrire

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = P_{N-1}(z) \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = P_{N-1}(z) F_N(z).$$

Notons que $P_{N-1}(z)$ est entière et n'admet des zéros qu'aux points $z = \pm n$, ($n < N$) et $F_N(z)$ est un produit infini sans zéro dans $|z| \leq R$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^2}{n^2}\right| = |z|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Par conséquent, d'après le théorème (3.1.3), le produit infini est uniformément convergent pour $|z| \leq R$ et donc, sur tout sous-ensemble compact de \mathbb{C} . On conclut que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ est entier et le produit infini est nul seulement qu'en $z = \mp n$, $n \in \mathbb{N}$.

Déterminons les restrictions sur $(u_n)_n$ pour lesquelles $f(z)$ est entière. Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|u_n|}$ converge. Fixons $R > 0$. Si $|z| \leq R$, alors $\left|\frac{z}{u_n}\right| \leq \frac{R}{|u_n|}$ et une application du théorème (3.1.3) montre que $P_n(z)$ converge uniformément vers $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right)$ avec $|z| \leq R$ et donc, sur tout sous-ensemble compact de \mathbb{C} . Alors $f(z)$ doit être une fonction entière. Par exemple, on peut construire une fonction entière dont les seuls zéros sont à 1, 4, 9, 16, ... Le produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ est une telle fonction.

Cependant, il est plus difficile de construire une fonction entière dont les zéros sont aux nombres entiers positifs.

Propriété 4.1.1. *L'expression $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)$ ne représente pas une fonction entière.*

Démonstration. En effet, posons $z = -1$ on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|u_n|}$ diverge mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|u_n|^2}$ converge, on peut montrer que le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right) e^{\frac{z}{u_n}}$$

est une fonction entier. Montrons d'abord que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \tag{4.1}$$

est une fonction entière. Posons

$$1 + f_n(z) = \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Pour déterminer la convergence uniforme du produit, on doit trouver une borne supérieure pour $|f_n(z)|$. Écrivons

$$1 + f_n(z) = e^{\ln\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n}}.$$

Choisissons $R > 0$. Si $|z| \leq R$, alors choisissons N assez grand pour que $N \geq 2R$. Alors $\left|\frac{z}{n}\right| \leq \frac{R}{n} < 1$ pour tout $n \geq N$, et donc l'identité

$$\ln\left(1 - \frac{z}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \quad (4.2)$$

est valable pour $|z| \leq R$. On obtient,

$$\begin{aligned} \left|\ln\left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n}\right| &= \left|-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k\right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{R}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{R^2}{n^2}}{1 - \frac{R}{n}} \leq \frac{R^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Car $R < 2R \leq N \leq n$. Donc

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &= \left|e^{(\ln(1-\frac{z}{n})+\frac{z}{n})} - 1\right| \\ &\leq e^{|\ln(1-\frac{z}{n})+\frac{z}{n}|} - 1 \\ &\leq e^{\left(\frac{R^2}{n^2}\right)} - 1 \\ &\leq \left(\frac{R^2}{n^2}\right) e^{\left(\frac{R^2}{n^2}\right)}, \quad (\text{car } e^x - 1 \leq xe^x \text{ pour } x \geq 0) \\ &\leq e^{\left(\frac{R^2}{n^2}\right)} = M_n, \quad (\text{car } \frac{R}{n} < 1) \end{aligned}$$

Par suite,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |f_n(z)| \leq eR^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad (N > 2R).$$

D'après le théorème (2.1.7), le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ converge uniformément pour $|z| \leq R$.

D'où

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

est une fonction entière. Une autre fonction de ce type peut être obtenu simplement en multipliant $f(z)$ par une fonction entière non nulle.

De même, $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ est une fonction entière qui admet des zéros simple seulement aux entiers négatifs. Par conséquent, une fonction entière ayant un zéro simple

à chaque entier est donnée par

$$\begin{aligned} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n} - \frac{z}{n}} \\ &= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

□

Le réarrangement des facteurs dans la première égalité se justifie par la convergence absolue des produits infinis.

Une méthode plus générale pour construire une fonction entière avec zéros est indiquée par l'égalité (4.2).

Exemple 4.2. *Supposons qu'on cherche une fonction entière admet des zéros aux points $z = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Puisque*

$$\ln \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^3 - \dots,$$

la méthode précédente montre que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\right) e^{\left(\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{n}\right)}$ est la fonction cherchée.

De même, une fonction entière qui admet des zéros simples sur l'axe réel seulement aux points $z = \pm n^{\frac{1}{4}}$ ($n \geq 0$), est donnée par

$$z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\sqrt{n}}\right) e^{\left(\frac{z^2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^4}{n}\right)}.$$

Plus généralement, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|u_n|^{m+1}}$ converge pour un certain nombre entier positif p , alors

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right) E_p \left(\frac{z}{u_n}\right) \quad (4.3)$$

est une fonction entière dont les seuls zéros sont à $z = u_n$, où

$$E_p(z) = e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + \frac{1}{p}z^p}$$

est appelé facteur de convergence.

Construons maintenant une fonction entière dont les zéros apparaissent aux points $\ln n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$). On ne peut pas utiliser l'égalité (4.3) car la série $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(\ln n)^p}\right)$ diverge pour tout m .

On a le théorème du produit de Weierstrass.

Théorème 4.1.1. *Pour tout suite complexe n'ayant pas de point limite fini, il existe une fonction entière qui a des zéros à ces points et seulement à ces points.*

Démonstration. Supposons que la fonction $f(z)$ à construire admet des zéros aux points $(u_n)_n$ telle que $0 < |u_1| \leq |u_2| \leq |u_3| \leq \dots$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'aucun des u_n soit nul, alors $z^k f(z)$ a la propriété désirée. Pour chaque n , on a

$$P_n(z) = \frac{z}{u_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{u_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{u_n} \right)^n.$$

Donc, $e^{P_n(z)} = E_n \left(\frac{z}{u_n} \right)$, où $E_n(z)$ est le facteur de convergence. Montrons que la fonction

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n} \right) E_n \left(\frac{z}{u_n} \right)$$

satisfait les conditions du théorème. Il suffit de montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{u_n} \right) + P_n(z) \right],$$

converge uniformément sur un sous-ensemble compact arbitraire $|z| \leq R$ dans Ω . Choisissons $|u_n|$ assez grand telle que $|u_n| \geq 2R \geq 2|z|$. Alors on a

$$\begin{aligned} \left| \ln \left(1 - \frac{z}{u_n} \right) + P_n(z) \right| &= \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{u_n} \right)^k \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{z}{u_n} \right|^k \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left| \frac{z}{u_n} \right|^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \left| \frac{z}{u_n} \right|^n \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Posons $1 + f_n(z) = e^{\ln(1 - \frac{z}{u_n}) + P_n(z)}$, alors on obtient

$$|f_n(z)| \leq e^{\frac{1}{2^n}} - 1 \leq \left(\frac{1}{2^n} \right) e.$$

D'après le théorème (2.1.7), le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ converge uniformément vers $f(z)$ pour $|z| \leq R$. Comme R est choisi arbitrairement, le produit infini définit une fonction entière avec des zéros. □

Remarques 4.1.1. i) Le théorème n'exclut pas le cas des zéros multiples, il est possible que $u_k = u_{k+1}$ pour un certain k .

ii) La fonction $f(z)$ n'est pas uniquement déterminée par les zéros. Par exemple, on a vu que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$ est une fonction entière ayant des zéros aux nombres entiers positifs. Dans la preuve du théorème précédent, on a montré que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{z}{n}\right)^n}$$

est une autre fonction de ce type. On peut aussi montrer que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\left(\frac{z}{n}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{n}\right)^2}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\left(\frac{z}{n}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{z}{n}\right)^3},$$

et une infinité d'autres fonctions entières qui ont les seuls zéros aux entiers positifs.

Supposons que deux fonctions entières aient les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités. Comment les deux fonctions se comparent-elles ?

Théorème 4.1.2. [1] Si $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions entières dont les zéros coïncident en emplacement et en multiplicité, alors il existe une fonction entière $\varphi(z)$, telle que

$$f(z) = e^{\varphi(z)} g(z).$$

Le théorème de Weierstrass montre que pour une suite de points prédéfinie, on peut construire un produit infini qui représente une fonction entière ayant des zéros à cette suite. Réciproquement, étant donné une fonction entière dont les zéros sont connus. Alors on a le théorème suivant.

Théorème 4.1.3. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes non nuls et $f(z)$ une fonction entière qui a des zéros à u_n , répertorié avec des multiplicités. Supposons que f ait un zéro d'ordre $k \geq 0$ à zéro. Alors il existe une fonction entière $g(z)$ telle que

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right) E_n \left(\frac{z}{u_n}\right).$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [1].

Plus généralement, on peut remplacer le produit, dans la dernière équation, par

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right) E_{p_n} \left(\frac{z}{u_n}\right),$$

où $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans \mathbb{N} telle que pour chaque $R > 0$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|u_n|}\right)^{p_n+1} < \infty$.

Supposons que $P_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(z))$ est un produit fini de fonctions holomorphes sur un domaine C simplement connexe. La dérivé logarithmique de $P(n)$ donne

$$\frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)},$$

Notons que $\frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$ a des pôles aux zéros de $P_n(z)$. Cette procédure reste valable pour les produits infinis uniformément convergents de fonctions holomorphes.

Théorème 4.1.4. *Soit $(f_n(z))_{n \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes dans un domaine C simplement connexe et soit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ convergent uniformément dans C vers $f(z)$.*

Alors

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1 + f_k(z)},$$

où la somme converge uniformément dans C lorsque $f(z) \neq 0$.

Pour la démonstration de ce théorème voir [1].

Exemple 4.3. *Développement de la fonction $\sin(\pi z)$ en produit infini. Considérons le produit infini*

$$f_n(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (4.4)$$

Ce produit converge normalement sur tout compact du plan \mathbb{C} , car la série $\sum_n \frac{z^2}{n^2}$ converge normalement sur tout compact, puisque la série numérique $\sum_n \frac{1}{n^2}$ est convergente. Donc $f(z)$ est une fonction holomorphe dans \mathbb{C} , et ses zéros sont toutes les valeurs entières de z , ils sont simples. D'après le théorème (3.2.2), la dérivé logarithmique de $f(z)$ donne la série de fonctions méromorphes, normalement convergente sur tout compact de Ω ,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (4.5)$$

La série (4.5) est une série de fonctions méromorphes son terme générale est égale à $\frac{z}{n(z-n)}$, qui converge normalement et sa somme est

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}.$$

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)},$$

en posant $g(z) = \sin \pi z$. Ainsi $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$ d'où

$$\frac{f(z)}{z} = c \frac{\sin \pi z}{z}.$$

Il reste à déterminer la constante c . D'après l'égalité (4.4), $\frac{f(z)}{z}$ tend vers 1 lorsque z tend vers 0, et comme $\frac{\sin \pi z}{z}$ a pour limite π , on voit que $c = \frac{1}{\pi}$. D'où

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

C'est-à-dire

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

4.2 Théorème de factorisation du Weierstrass

Le théorème de factorisation du Weierstrass est donné par.

Théorème 4.2.1. [3] Soit f une fonction entière pour laquelle $f(0) \neq 0$, et soit u_1, u_2, \dots , la suite des zéros de f , chacun compté avec son ordre de multiplicité. Il existe une fonction entière g et une suite d'entiers non négatifs $(p_n)_n$, telle que

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{u_n}\right). \quad (4.6)$$

Démonstration. Soit le produit infini $P(z) = \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{u_n}\right)$, construit à partir des zéros de la fonction f . La fonction $\frac{f}{P}$ ne possède que des singularités dans le plan complexe, donc est une fonction entière. Puisque $\frac{f}{P}$ ne possède aucun zéro sur ce même plan, qui est simplement connexe, pour une certaine entière g on a $\frac{f}{P} = e^g$. \square

Remarques 4.2.1. *i)* Lorsque f possède un zéro d'ordre k en $z = 0$, ce qui précède s'applique à la fonction $\frac{f(z)}{z^k}$.
ii) La factorisation (4.6) n'est pas unique : une unicité peut être établie pour des fonction f dont les zéros satisfont la condition requise pour la convergence d'un produit canonique.

Théorème 4.2.2. [11] Soit $f(z)$ une fonction entière possède des zéros u_k d'ordre n_k .

Supposons que $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ vérifie la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad \text{pour des courbes fermées } C_n.$$

De plus, supposons que $f(0) \neq 0$. Alors la fonction $f(z)$ peut être représenté par

$$f(z) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_k}\right)^{m_k}$$

qui est uniformément convergente dans Ω .

Exemple 4.4. Développons en produit infini la fonction suivante.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, la dérivée logarithmique de $f(z)$ est

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= \frac{\left(\frac{\sin z}{z}\right)'}{\left(\frac{\sin z}{z}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2}\right)}{\left(\frac{\sin z}{z}\right)} \\ &= \cot z - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Dans ce cas les zéros de $f(z)$ sont $z_k = k\pi$, pour $k = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

4.3 Formule de Jensen

La formule de Jensen procure une inégalité où interviennent les valeurs frontières des fonctions holomorphes bornées sur Ω (rappelons que la famille de telles fonctions a été notée \mathcal{H}^∞). La formule rend possible la détermination explicite des conditions que doivent satisfaire les zéros d'une fonction non constante $f \in \mathcal{H}^\infty$.

Le lemme suivant permettons d'évaluer d'une certaine intégrale définie.

Lemme 4.3.1. *L'intégrale* $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$.

Démonstration. Soit $\Omega = \{z : \operatorname{Re}(z) < 1\}$. Puisque $(1 - z) \neq 0$ sur Ω et Ω est simplement connexe, il existe une fonction $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que, pour tout z dans Ω $e^{h(z)} = 1 - z$.

Cette fonction h est déterminée de façon unique si on suppose $h(0) = 0$. Puisque $\operatorname{Re}(1 - z) > 0$ dans Ω , on a

$$\operatorname{Re}(h(z)) = \ln |1 - z| ; \quad |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } z \in \Omega. \quad (4.7)$$

Pour $\epsilon > 0$, on définit le chemin Λ par,

$$\Lambda(t) = e^{it} \quad \text{avec} \quad \epsilon \leq t \leq 2\pi - \epsilon,$$

et η un arc circulaire center en 1 qui passe par $e^{i\epsilon}$ à $e^{-i\epsilon}$ tout en restant dans un sous ensemble de Ω . Dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \ln |1 - e^{i\theta}| d\theta &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} h(z) \frac{dz}{z} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} h(z) \frac{dz}{z} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La dernière égalité provient du théorème de Cauchy. On note que $h(0) = 0$.

La longueur de η est inférieure à $\pi\epsilon$, donc l'égalité (4.7) montre que la valeur absolue de la dernière intégrale dans l'égalité (4.8) est inférieure à $c \cdot \epsilon \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$, pour une certaine constante c . D'où le résultat quand on fait tendre ϵ vers 0 dans l'égalité (4.8). \square

Le théorème suivant nous donne la formule de Jensen.

Théorème 4.3.1. [3] *Soient $\Omega = D(0, R)$ le disque de centre 0 et de rayon R , la fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, avec $f(0) \neq 0$, $0 < r < R$, et soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ les zéros de f appartenant à*

$\overline{D}(0, r)$, rangés avec leur ordre de multiplicité. Alors

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = e^{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \right)}. \quad (4.9)$$

Démonstration. Ordonons les points α_j de sorte que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ appartiennent à $D(0, r)$ et $|\alpha_{m+1}| = \dots = |\alpha_N| = r$. (On peut avoir $m = N$ ou $m = 0$). Posons

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^m \frac{r^2 - \overline{\alpha}_n z}{z(\alpha_n - z)} \prod_{n=m+1}^N \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z}. \quad (4.10)$$

La fonction $g \in \mathcal{H}(D)$ où $D = D(0, r + \epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$. La fonction g n'admet pas de zéro dans D , donc $\ln |g|$ est une fonction harmonique dans D d'après le théorème (1.1.4) et par conséquent

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |g(re^{i\theta})| d\theta. \quad (4.11)$$

Grâce à l'égalité (4.10), on a

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^m \frac{r}{|\alpha_n|}. \quad (4.12)$$

Pour $1 \leq n \leq m$, les facteurs de la formule (4.10) ont un module égale à 1 si $|z| = r$. Si $\alpha_n = re^{i\theta_n}$, pour $m < n \leq N$, alors

$$\ln |g(re^{i\theta})| = \ln |f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^N \ln \left(|1 - e^{i(\theta - \theta_n)}| \right). \quad (4.13)$$

D'après le lemme (4.3.1), l'intégrale dans l'égalité (4.11) ne change pas si on remplace g par f . Comparons l'égalité (4.12) avec l'égalité (4.11), on obtient l'égalité (4.9). \square

Remarque 4.3.1. *L'hypothèse $f(0) \neq 0$ ne pose pas de problème dans les applications car, si f admet un zéro d'ordre k en 0, il suffit d'appliquer cette formule à $\frac{f(z)}{z^k}$.*

Zéros des fonctions entières

Soit f une fonction entière, $M(r) = \sup_{\theta} |f(re^{i\theta})|$ pour $0 < r < \infty$, et $n(r)$ le nombre de zéros de f appartenant à $\overline{D}(0, r)$. Supposons que $f(0) = 1$. La formule de Jensen nous

donne

$$\begin{aligned} M(2r) &\geq e^{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(2re^{i\theta})| d\theta\right)} \\ &= \prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq 2^{n(r)}, \end{aligned}$$

où $(\alpha_n)_n$ est la suite des zéros de f rangé de façon que $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \dots$. Alors

$$n(r) \ln(2) \leq \ln M(2r). \quad (4.14)$$

La densité des zéros de f est contrôlée par la croissance de $M(r)$. Supposons que pour un certain r assez grands, on a l'estimation

$$M(r) < e^{Rr^k}, \quad (4.15)$$

avec R et k sont des nombres positifs donnés. La relation (4.14) conduit à

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = k. \quad (4.16)$$

Ceci montre qu'il n'est pas possible d'améliorer l'estimation donnée dans l'égalité (4.16).

4.4 Produits de Blaschke

À partir de maintenant, on notera U le disque unité ouvert. Le cercle unité, qui est la frontière de U dans le plan complexe sera noté T .

Théorème 4.4.1. [3] Soit $(\alpha_n)_n$ une suite dans U telle que $\alpha_n \neq 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$, si k est un entier non négatif et si

$$\mathbf{B}(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad \text{pour } z \in U. \quad (4.17)$$

Alors la fonction $\mathbf{B} \in \mathcal{H}^{\infty}$ et elle ne possède pas d'autres zéros que les points α_n (l'origine si $k > 0$).

Démonstration. Pour $|z| \leq r$, le n -ième terme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|$ est égal à

$$\left| \frac{\alpha_n + |\alpha_n|z}{(1 - \bar{\alpha}_n z)\alpha_n} \right| (1 - |\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r} (1 - |\alpha_n|).$$

D'après le théorème (3.1.2), $\mathbf{B} \in \mathcal{H}(U)$ et \mathbf{B} n'a pas d'autres zéros que les points α_n .

Puisque chaque facteur de formule (4.17) a une valeur absolue inférieure à 1 dans U , on en déduit $|\mathbf{B}(z)| < 1$, ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 4.4.1. 1) La fonction \mathbf{B} est appelée produit de Blaschke.

2) Notons que certains des α_n peuvent être répétés, ce qui fournit un zéro multiple pour \mathbf{B} en ce point et que chaque facteur de (4.17) a une valeur absolue égale à 1 sur T .

3) Le terme "produit de Blaschke" pourra être utilisé dans le cas d'un nombre fini de facteurs et éventuellement s'il n'y a pas de facteur du tout en posant $\mathbf{B}(z) = 1$.

Le théorème précédent (4.4.1) montré que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty, \quad (4.18)$$

est une condition suffisante pour l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{H}^{\infty}$ dont l'ensemble de zéros est (α_n) . Cette condition est nécessaire car si les zéros d'une fonction $f \in \mathcal{H}^{\infty}$ et f est non identiquement nulle les zéros de f vérifiant la relation (4.18). Notons que cette condition est nécessaire pour une classe plus générale de fonction, décrivons cette classe.

Pour tout nombre réel t , on définit $\ln^+ t = \ln t$ si $t \geq 1$ et $\ln^+ t = 0$ si $t < 1$. Considérons \mathcal{N} la classe des fonctions $f \in \mathcal{H}(U)$ telles que

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty. \quad (4.19)$$

Il est évident que $\mathcal{H}^{\infty} \subset \mathcal{N}$. Notons que (4.19) impose une restriction sur la croissance de $|f(z)|$ lorsque $|z|$ tend vers 1, tandis que l'hypothèse des bornes d'intégrales

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad (4.20)$$

imposent aucune restrictions. La formule (4.20) est indépendant de r si $f = e^g$ pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(U)$. La formule (4.20) peut rester petite car $\ln |f|$ prendra des valeurs négatives grandes en valeurs absolues, aussi bien que de grandes valeurs positives, tandis que $\ln^+ |f| \geq 0$.

Théorème 4.4.2. [3] Soient $f \in \mathcal{N}$ une fonction non identiquement nulle dans U et $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, les zéros de fonction f , numérotés selon leur multiplicité. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty. \quad (4.21)$$

Supposons que f possède une infinité de zéros dans U . Car autrement la somme précédente (4.21) étant finie, il n'y a rien à prouver. Aussi, $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$.

Démonstration. Si f possède un zéro d'ordre m à l'origine et $g(z) = z^{-m}f(z)$, alors la fonction $g \in \mathcal{N}$ et elle possède les mêmes zéros que f sauf à l'origine. On peut donc

supposer sans perdre de généralité que $f(0) \neq 0$. Soit $n(r)$ le nombre des zéros de f dans $\overline{D}(0, r)$. Fixons k et choisissons $r < 1$ de sorte que $n(r) > k$. D'après la formule de Jensen

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = e^{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \right)}. \quad (4.22)$$

Cette dernière implique que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^k \frac{r}{|\alpha_n|} \leq e^{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right)}. \quad (4.23)$$

L'hypothèse $f \in \mathcal{N}$ équivaut à l'existence d'une constante $c < \infty$, qui dépasse le membre droit de l'égalité (4.23) pour tout r tel que $0 < r < 1$. On obtient

$$\prod_{n=1}^k |\alpha_n| \geq c^{-1} |f(0)| r^k. \quad (4.24)$$

L'inégalité reste vraie pour tout k et quand r tend vers 1. D'où

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \geq c^{-1} |f(0)| > 0. \quad (4.25)$$

Utilisons le théorème (2.2.1), on voit que l'égalité (4.25) implique l'égalité (4.21). \square

Chapitre 5

Fonction Gamma d'Euler et la fonction Zêta de Riemann

Après avoir défini les théorèmes de Weierstrass et donner leurs propriétés, dans ce chapitre on a donné leurs applications les deux fonctions Gamma d'Euler et Zêta de Riemann.

5.1 Fonction Gamma d'Euler

L'une des fonctions spéciales les plus célèbres en mathématiques apparaît tout naturellement dans le contexte des produits infinis de fonction holomorphe. C'est la fonction Gamma de Leonhard Euler (1707-1783), notée Γ .

D'après la formule (4.1) la fonction

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

est une fonction entière avec des zéros simples en $z = 0, -1, -2, \dots$. De même pour la fonction $f(z-1)$,

$$f(z-1) = e^{g(z)} z f(z), \tag{5.1}$$

où $g(z)$ est une fonction entière. Ensuite, nous montrons que $g(z)$ est une constante. En formant la dérivée logarithmique dans l'égalité (5.1), nous obtenons

$$\frac{f'(z-1)}{f(z-1)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

le théorème (4.1.4), donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n} \right) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right). \tag{5.2}$$

La somme du membre gauche de l'égalité (5.2) peut être exprimée comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} - 1\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

En comparant cela avec le membre droit de l'égalité (5.2), trouvons que $g'(z) = 0$. Ainsi $g(z) = \gamma$, pour γ est une constante. Pour déterminer γ , on pose $z = 1$ dans l'égalité (5.1). On obtient

$$1 = f(0) = e^{\gamma} f(1) = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}},$$

où $e^{-\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \right]$. Par conséquent, en utilisant le logarithme, trouvons

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

La constante γ dans l'égalité (5.3) s'appelle la constante d'Euler, sa valeur numérique est d'environ 0,577... Alors que cette limite existe et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. La fonction

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} z f(z)} := \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \tag{5.4}$$

s'appelle la fonction Gamma d'Euler. Elle représente une fonction analytique en tous points sauf les entiers négatifs et zéro, où il a des pôles simples. Puisque $g(z) = \gamma$ dans l'égalité (5.1), on a $f(z) = e^{\gamma}(z+1)f(z+1)$.

Étudions l'équation fonctionnelle de la fonction Gamma d'Euler.

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{e^{\gamma(z+1)}(z+1)f(z+1)} = \frac{1}{e^{\gamma z} f(z)} = z\Gamma(z). \tag{5.5}$$

Lorsque $z = n$ un entier positif, l'égalité (5.5) montre que

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)\dots 2\Gamma(1).$$

Mais

$$\Gamma(1) = \frac{1}{e^{\gamma} f(1)} = \frac{1}{e^{\gamma} e^{-\gamma}} = 1,$$

on obtient alors $\Gamma(n+1) = n!$.

Résumons les résultats précédents dans le théorème suivant.

Théorème 5.1.1. [1] La fonction Gamma d'Euler est holomorphe dans Ω , pour $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Ainsi,

$\Gamma(z+1) = \Gamma(z)$ et $\Gamma(n+1) = n!$, pour $n \in \mathbb{N}$. En outre,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad \text{avec } z \neq 0, -1, -2, \dots$$

est une fonction entière.

Il existe une relation intéressante entre la fonction Gamma d'Euler et la fonction sinus. Appliquons les relations

$$\sin \pi z = \pi z f(z) f(-z) \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z} \Gamma(z)},$$

par l'égalité (5.4), on obtient

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{e^{\gamma z} \Gamma(z) (-z) e^{-\gamma z} \Gamma(-z)} = \frac{\pi}{-z \Gamma(-z) \Gamma(z)}.$$

Puisque, $-z \Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$, alors

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z) \Gamma(1-z)$$

, pour toutes les valeurs non entières de z . En particulier, pour $z = \frac{1}{2}$, trouvons

$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$. Comme Γ est une fonction positive sur \mathbb{R}_+ , on déduit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Donc, la fonction $\Gamma(z)$ est différent de zéro car pour $z \neq 0, -1, -2, \dots$, la fonction Gamma d'Euler est donnée par un produit infini convergent de facteurs non nuls. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \left(\frac{2n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

alors l'identité précédant donne

$$\Gamma\left(-\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi \left(n + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right)} = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{\Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 7 \dots (2n+1)}.$$

Remarques 5.1.1. 1) Dans l'analyse réelle. La fonction Gamma d'Euler définie par l'égalité (5.4) peut être exprimée sous cette forme intégrale pour toutes les valeurs réelles positives de z .

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{pour } x > 0. \quad (5.6)$$

2) On peut aussi évaluer la fonction $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par la définition 5.6. Nous avons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Remplacent t par y^2 , on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Proposition 5.1.1. [1] La dérivée logarithmique de la fonction Gamma d'Euler est donnée par

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)} = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right),$$

pour $z \neq 0, -1, -2, \dots$

Exemple 5.1. D'après le théorème (5.1.1), la fonction Gamma d'Euler définie par l'égalité (5.4) est une fonction méromorphe dans Ω qui admet des pôles simples en $0, -1, -2, \dots$ et l'équation $\Gamma(z+1) = \Gamma(z)$ montre que

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)\Gamma(z+n-1) = (z+n-1)\dots(z+1)z\Gamma(z),$$

pour $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\dots(z+1)z} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\dots(-n+1)(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'où $\text{Res}[\Gamma(z); -n] = \frac{(-1)^n}{n!}$.

5.2 Fonction Zêta de Riemann

Formule du produit d'Euler pour la fonction Zêta de Riemann

En 1734, Euler a découvert que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

et il trouva plus tard des formules pour

$$\begin{aligned}\zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ \zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \\ \zeta(8) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} \\ &\vdots\end{aligned}$$

mais il n'a pas réussi à trouver une formule pour $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Définition 5.2.1. On appelle fonction zêta de Riemann, noté ζ , la fonction défini pour tout z dans le demi plan ouvert $\{w \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 1\}$, par la somme suivante

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Remarques 5.2.1. La fonction zêta de Riemann est bien défini pour z réel dans l'intervalle $]1, +\infty[$ car c'est une série de Riemann. On voit notamment que la fonction ζ ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

Étudions le lien entre les produits infinis et les nombres premiers. Le théorème suivant présente la formule du produit d'Euler.

Théorème 5.2.1. Soit p_k le k -ième nombre premier, pour z réel, $z > 1$, on a

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}},$$

et le produit infini converge absolument.

Démonstration. Pour $m \geq 1$, soit $P_m = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$ le m -ième produit partiel du produit infini. Écrivons chaque facteur comme une série géométrique convergente, on obtient

$$P_m = \prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{p_k^z} + \frac{1}{p_k^{2z}} + \dots \right),$$

qui est un produit d'un nombre fini de séries infinies absolument convergentes, en multipliant ces séries et en réarrangeant les termes selon des dénominateurs croissants, on obtient une autre série infinie absolument convergente,

$$\frac{1}{p_1^{a_1 z} \cdot p_2^{a_2 z} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m z}} = \frac{1}{n^z}$$

où $n = p_1^{u_1 z} \cdot p_2^{u_2 z} \dots p_m^{u_m z}$ et $u_i \geq 0$, pour $i = 1, 2, \dots, m$. Donc

$$P_m = \sum \left\{ \frac{1}{n^z} \text{ tous les facteurs de } n \text{ sont inférieurs ou égal à } p_m \right\}.$$

On voit que chacun de ces n apparaît exactement une fois dans la sommation. Donc

$$\zeta(z) - P_m = \sum \left\{ \frac{1}{n^z} \text{ tous les facteurs premiers de } n \text{ sont supérieur à } p_m \right\}$$

et puisque ces facteurs premiers variant parmi les entiers $n > p_m$, on a

$$|\zeta(z) - P_m| \leq \sum_{n > p_m} \frac{1}{n^z}.$$

Lorsque m tend vers l'infini, la somme tend vers 0, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ converge. Par conséquent,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = \zeta(z).$$

Enfin, le produit est de la forme $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ où $u_n = \frac{1}{p_n^z} + \frac{1}{p_n^{2z}} + \dots$, et la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge absolument si elle est de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, donc le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$ converge absolument. \square

Le théorème suivant présente l'équation fonctionnelle de la fonction Zêta de Riemann.

Théorème 5.2.2. *Pour $Re(z) > 1$, on la relation suivante*

$$\zeta(1 - z) = \frac{2}{(2\pi)^z} \zeta(z) \Gamma(z) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

Alors la fonction ζ admet un prolongement méromorphe dans \mathbb{C} et vérifie

$$\zeta(z) \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-\frac{z}{2}} = \zeta(1 - z) \Gamma\left(\frac{1 - z}{2}\right) \pi^{-\frac{1 - z}{2}}.$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [10].

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié les propriétés fondamentales, les types de convergences et les principaux théorèmes des produits infinis des nombres complexes et réels, produit infinis des fonctions holomorphes avec les différents théorèmes de Weierstrass. Comme application on étudié les fonctions Gamma d'Euler et Zêta de Riemann.

Bibliographie

- [1] S. Ponnusamy, H. Silverman, Complex variables with applications. Birkhauser, 2006.
- [2] R. Remmert, Graduate texts in mathematics : Classical topics in complex function theory. Springer, 1998.
- [3] W. Rudin, Analyse réelle et complexe : Cours et exercices. Dunod, 1998.
- [4] P. Tauvel, Analyse complexe. Dunod, 2006.
- [5] B.P.Palka, An introduction to comlex function theory. Springer, 1991.
- [6] M.O. Gonzalez, Complex analysis : Selected Topics Pure and applied mathematics. Dekker, 1992.
- [7] G.Tenenbaum, Introduction to analytic and probabilistic number theory, third edition. American Mathematical Society, 2015.
- [8] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, 1995.
- [9] K. Knopp, Theory and application of infinite series, Dover Publications, 1990.
- [10] M. Rao, H. Stetkaer, Complex analysis an invitation. World Scientific, 1991.
- [11] M. Ya. Antimirov, A. A. Kolyshkin, R. Vaillancourt, Complex variables. Academic Press, 1998.
- [12] A. Lesfari, Variables complexes : Cours et exercices corrigés. Ellipses Marketing, 2014.
- [13] M. E. Wermuth, Some elementary properties of infinite products. The american mathematical monthly, vol. 99, N°6 p 530-537, 1992.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة بعض تطبيقات الجدائات اللانهائية لدوال هولومورفيك. ندرس معايير التقارب المختلفة لجداء لانهايي من الأرقام و الدوال، نظرية العوامل فيرستراس و عواقبه كتطبيق لهذه النظرية الأخيرة. تحديد وظيفة غاما لاولير كجداء لانهايي.

كلمات مفتاحية: جداء لانهايي، نظرية فيرستراس، تحليل عوامل فيرستراس، صيغة جونسن، جداء بلاشك، دالة زيتا ريمان، دالة غاما لاولير.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de quelques applications des produits infinis des fonctions holomorphes. On étudie les différents critères de convergence d'un produit infini des nombres et des fonctions, le théorème de factorisation de Weierstrass et ses conséquences. Comme application de ce dernier théorème, on définit la fonction Gamma d'Euler comme produit infini.

Mots clés : produits infinis, théorème de Weierstrass, factorisation de Weierstrass, formule de Jensen, produit de Blaschke, fonction Zêta de Riemann, fonction Gamma d'Euler.

Abstract

The aim of this work is the study of some applications of infinite products of holomorphic functions. We study the different criteria of convergence of an infinite product of numbers and functions, the Weierstrass factorization theorem and its consequences. As an application, we define Euler's Gamma function as an infinite product.

Keywords : infinite products, Weierstrass theorem, Weierstrass factorization, Jensen formula, Blaschke product, Riemann's Zêta function, Euler's Gamma function.