الجمهورية الجزَائِرية الديمقرَاطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزَارة التعليم العَالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جَامعة عمَار ثليجي بِالأَغوَاط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

قسم الريَاضيَات

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES


**Mémoire de Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique.
**Filière :** Mathématique.
**Option :** Analyse Mathématique.


**Par :**
**CHEKNANE Hadda**


**THEME**

# Algèbre de Sedlock pour les opérateurs de Toeplitz tronqués.

*Soutenu publiquement devant le jury composé de :*

| | | |
|---|---|---|
| Mr. OUCHENANE Djamel | MCA | Président |
| Mr. MERRAD Boularbah | MAA | Examinateur |
| Mr. YAGOUB Ameur | MCA | Encadreur |

**Année Universitaire 2021/2022**

# Remerciements.

*Tout d'abord je remercie* ***Allah*** *le tout puissant, qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

*Je remercie vivement monsieur* ***Dr. OUCHENANE Djamel****, ait accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.*
*Je tiens également à remercier* ***Dr. MERRAD Boularbah*** *pour avoir accepté d'examiner ce travail.*
*Je tiens à remercier mon encadreur* ***Dr. Ameur YAGOUB*** *pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui mont guidé durant la réalisation de ce mémoire.*

**CHeknane**
**Hadda**

# Dédicace .

*e dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord : mes très chers parents* ***KHadija ,Belabace*** *qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant soufré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements.*
*e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.*

*Et je le dédie :*

*tous les membres de ma famille, mes fréres*
***Mohamed , Abou Alkacem , ALbachir et Amer.*** *et mes soeurs*
***Fatma ,Mebarka et Amale.*** *et à la famme de mon frére* ***Khadra****.*
*à notre premier joie* ***Farah*** *et notre deuxiéme joie* ***Saber Taher*** *et au bébé attendu.*
*tous mes amies et mes collègues avec qui*
*j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.*
*à l'âme de mes ancêtres.*

**CHeknane**
**Hadda.**

# ملخّص.

لتكن $H^2, K_u^2$ ، $(K_u^2 \subset H^2)$ ، فضَاء هَاردِي للدّوال التحليلية علَى $\mathbb{D}$ حيث مربع معَاملَات متّتَالية تَايلور قَابلة للتكَامل و فضَاء النموذج، مع $u$ دَالة دَاخلية غير ثَابتة. يعطَى مُوءثر توبليتز المبتور للدليل $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ بـ

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f)$$

حيث $P_u$ هو الاَسقَاط المُتعَامِد ل $L^2(\mathbb{T})$ علَى $K_u^2$.

الغرض من هذَا العمل هو اجرَاء درَاسة عن الشروط اللّاَزمَة و الكَافية بحيث يكون جدَاء مُوءثرين توبليتز المبتور يبقَى مُوءثر توبليتز مبتور.

**مفَاتيح هذه المذكرة.**

فضَاءَات هَاردي، فضَاءَات نموذجي، مُوءثرَات توبليتز، مُوءثرَات توبليتز المبتورة، فَئِة سَادلوك.

# Résumé :

Soient $H^2, K_u^2$, ( $K_u^2 \subset H^2$), l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles la suite de coefficients de Taylor est carré-sommable et l'espace modèle, avec $u$ est une fonction intérieure non constante. L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, est donné par :

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f)$$

tel que $P_u$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $K_u^2$.

Le but de ce travail est de faire une étude sur les conditions nécessaires et suffisantes pour le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués reste un opérateur de Toeplitz tronqué.

**Mots clés** :

Espaces de Hardy, espace modèle, opérateurs de Toeplitz, opérateurs de Toeplitz tronqués, Classe de Sedlock.

# Abstract :

Let $H^2, K_u^2$, $(K_u^2 \subset H^2)$, the Hardy space be holomorphic functions on $\mathbb{D}$ for which the sequence of Taylor coefficients is square-summable and model space, with $u$ is a non-constant inner function. The truncated Toeplitz operator with symbol $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, is given by :

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f)$$

such that $P_u$ is the orthogonal projection of $L^2(\mathbb{T})$ on $K_u^2$.
In this work, we shall study the necessary and sufficient conditions for the product of two truncated Toeplitz operators to be an truncated Toeplitz operator.

**Key words** :
Hardy spaces, models spaces, Toeplitz operators, truncated Toeplitz operators, Sedlock class.

# Table des matières

# Notations.

| | |
|---|---|
| $\mathbb{C}$ | l'ensemble des nombres complexes. |
| $\mathbb{T}$ | le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$. |
| $\mathbb{D}$ | le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. |
| $\overline{\mathbb{D}}$ | le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$. |
| $L^2(\mathbb{T})$ | l'espace de Lebesgue usuel. |
| $\widehat{\mathbb{C}}$ | $= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. |
| $< . >$ | produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$. |
| $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ | espace des fonctions holomorphe sur $\mathbb{D}$. |
| $d\mu$ | la mesure de lebesgue normalisée sur le cercle unité. |
| $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ | l'ensemble des opérateurs linéaires borné sur l'espace $\mathcal{H}$. |
| $\widehat{f}(n)$ | n-ème coefficient de Fourier de $f$. |
| $f^*$ | la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$. |
| $P$ | projection orthogonale de $L^2$ sur $H^2$ . |
| $K_\lambda$ | noyau reproduisant de $H^2$. ll |
| $u$ | fonction intérieure. |
| $S$ | opérateur de shift sur $H^2$. |
| $T_\varphi$ | opérateur de Toeplitz sur $H^2$ de symbole $\varphi$. |
| $K_u^2$ | l'espace modèle $K_u^2 \subset H^2$. |
| $P_u$ | projection ortogonale de $L^2$ sur $K_u^2$. |
| $K_\lambda^u$ | noyau reproduisant de $K_u^2$. |
| $C$ | opérateur de conjugaison sur un espace de Hilbert. |
| $\widetilde{f}$ | $= Cf$. |
| $S_u$ | opérateur de shift sur $K_u^2$. |
| $S_u^\alpha$ | opérateur de shift généralisé sur $K_u^2$, pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ . |
| $A_\varphi^u$ | opérateur de Toeplitz tronqué sur $K_u^2$ de symbole $\varphi$. |
| $\mathcal{T}_u$ | l'ensemble de opérateurs Toeplitz tronqués bornés sur $K_u^2$. |
| $\mathcal{B}_u^\alpha$ | classe de Sedlock. |

# Introduction.

Ce mémoire se situe à l'interface entre l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs et l'analyse complexe, qui consiste en l'étude des quelques propriétés algébriques d'opérateurs sur divers espaces de fonctions analytiques. On note par $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe. $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, et par $L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables sur le cercle unité $\mathbb{T}$, il est bien connu que $L^2$ muni de produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm$. L'espace de Hardy $H^2$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel le coefficient de Fourier négatives sont nulles.

$$H^2 = \{f \in L^2, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}, \; \textit{où } \widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, n \in \mathbb{Z}.$$

Soient $H$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et si $T$ est un opérateur (linéaire) continu sur $H$, $T \neq 0$, s'il existe un sous-espace fermé $M$ de $H$ non trivial (i,e différent de $H$ et de l'espace nul) tel que $T(M) \subset M$, on dit que $M$ est un sous-espace invariant par $T$. Dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, les espaces modèles sont les compléments orthogonaux des sous-espaces invariants non triviaux de l'opérateur shift unilatéral $Sf = zf$ sur $H^2$. Ces derniers sous-espaces ont été caractérisé comme $uH^2$ par Beurling dans son fameux article [2]. Ainsi, les espaces

$$K_u^2 := (uH^2)^{\perp} = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug\rangle = 0, \forall g \in H^2\},$$

sont des sous-espaces invariants par l'opérateur $S^*$ adjoint de $S$ défini par $S^*f = \frac{f-f(0)}{z}$ sur $H^2$ (pour plus de détails voir [11, 12, 18, 21]). Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle $K_u$. Soit $P_u$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $K_u^2$. L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi$, noté $A_\varphi^u$ est défini sur $K_u^2$ par

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f).$$

Une étude systématique des opérateurs Toeplitz tronqués avec des symboles dans $L^2$ a été commencée par Sarason ([21]). Cet article a jeté les bases de la théorie et inspiré une grande partie des travaux sur ces opérateurs, ainsi qu'un énorme intérêt pour cette classe d'opérateurs.

Notre travail consiste à détailler et, si nécessaire, à redémontrer les résultats concernant le produit d'opérateurs de Toeplitz tronqués définis sur les espaces modèles, lorsque ce produit est, ou non, un opérateur de Toeplitz tronqué. Les démonstrations basés principalement sur une caractérisation spéciale pour connaître ces opérateurs.

Le mémoire est organisé de la manière suivante : nous commençons par rappeler les définitions et propriétés concernant les espaces de Hilbert, $L^2$, Hardy $H^2$, et les opérateurs bornés dans le chapitre 1.

Le chapitre 2 est entièrement consacré aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle $K_u^2$. Dans ce chapitre, nous rappelons les outils de base nécessaires pour s'initier à notre mémoire. On y définit les espaces modèles, et on y expose certaines propriétés qui nous seront utiles pour la suite. Ensuite, on introduit les opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués ($\mathcal{T}_u$).

Dans le troisième chapitre, on expose le but de notre travail, concertant les conditions nécessaires et suffisantes pour le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués soit un opérateur de Toeplitz tronqué.

# Chapitre 1

# Préliminaires.

Nous exposons dans ce chapitre les éléments de la théorie des espaces de Hilbert qui correspond à ce cadre, notamment, les notions d'orthogonalité, de projection, les espaces $L^2$ et les espaces de Hardy. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [3, 6, 8, 14, 10, 15, 20]. On terminera ce chapitre par une présentation sommaire de quelques opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert.

## 1.1 Espace de Hilbert, définitions et propriétés.

**Définition 1.1.1.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une produit scalaire, telle que pour tout $x, y, z \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait :*

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ *et, si* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
5. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

**Définition 1.1.2.** *On appelle espace préhilbertien (hermitien) un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ nous verrons que cette quantité est une norme sur un espace préhilbertien $\mathcal{H}$ lorsque nous aurons énoncé les propriétés.*

**Théorème 1.1.1.** *(**Inégalité de Cauchy Schwarz.**) Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Théorème 1.1.2.** ***(Identité du parallélogramme.)*** *Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a :*

$$(\|x+y\|)^2 + (\|x-y\|)^2 \;=\; 2((\|x\|)^2 + (\|y\|)^2).$$

**Définition 1.1.3.** *Lorsqu'un espace préhilbertien $\mathcal{H}$ muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.*

**Exemple 1.1.** *L'espace $l^2 = \{x = (x_j)_{j>0}, x_j \in \mathbb{C}, \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$ muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

*est un espace de Hilbert.*

### 1.1.1 Orthogonalité.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

**Définition 1.1.4.** *Soient $x, y$ deux vecteurs de $\mathcal{H}$, on dit que $x$ est orthogonal à $y$ on not $x \perp y$ si : $\langle x, y\rangle = 0$.*

**Définition 1.1.5.** *Deux sous espaces $F_1, F_2$ d'un hilbertien $\mathcal{H}$ dont dits orthogonaux si : $\forall x \in F_1, \forall y \in F_2$ ; $\langle x, y\rangle = 0$.*

**Proposition 1.1.1.** *Soit $F$ un sous espace d'un hilbertien $\mathcal{H}$, l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{H}$ orthogonaux a $F$ forme un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}$, noté $F^{\perp}$*

$$F^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} / \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F\}.$$

**Proposition 1.1.2.** *(Théoréme de Pythagore) soit $\{x_1, x_2, ...., x_n\}$ un systéme de vecteurs orthogonnaux si $x_i \perp x_j$ , $i \neq j$ alors*

$$\|x_1 + x_2 + ......... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ...... + \|x_n\|^2.$$

**Remarque 1.1.1.** *(Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert réel.)*

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|\|y\|\cos\theta; \quad ou \quad 0 \leq \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

### 1.1.2 Projection orthogonale.

**Théorème 1.1.3.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, est soit $\mathcal{H}_1$ un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}$ **fermé**, l'application*

$$\begin{array}{rcl} P:\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}_1 \\ x & \mapsto & Px \end{array}$$

*est un opérateur linéaire continu et $P \circ P = P$.*

**Théorème 1.1.4.** *Le point $y$ est appelé porjection orthogonale de $x$ sur $\mathcal{H}_1$est il noté $Px$ .*

$$\begin{array}{rcl} P:\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}_1 \\ x & \mapsto & Px = \inf\limits_{y \in \ \mathcal{H}_1} \|y - x\| \end{array}$$

*on vient de voire que $x - Px \in \mathcal{H}_1^{\perp}$*

**Proposition 1.1.3.** *L'application qui à un point de $\mathcal{H}$ fait correspondre sa projection orthogonale sur un sous espace fermé $\mathcal{H}_1$ notée $(P_{H_1}(x))$, possédes les propriétés suivante :*

1. $P_{\mathcal{H}_1}(\alpha x + \beta y) = \alpha P_{\mathcal{H}_1}(x) + \beta P_{\mathcal{H}_1}(y)$.
2. $P_{\mathcal{H}_1} + p_{(\mathcal{H}_1)^{\perp}} = id_{\mathcal{H}_1}$.
3. $(\|x\|)^2 = (\|P_{\mathcal{H}_1}(x)\|)^2 + (\|(id - P_{\mathcal{H}_1})(x)\|)^2$.
4. $P_{\mathcal{H}_1}(x_n) \longrightarrow P_{\mathcal{H}_1}(x) si \|x_n - x\| \longrightarrow 0$.
5. $x \in \ \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow P_{\mathcal{H}_1}(x) = x$.
6. $x \in \mathcal{H}_1^{\perp} \Leftrightarrow P_{\mathcal{H}_1}(x) = 0$.
7. $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow p_{\mathcal{H}_1}(p_{\mathcal{H}_2})(x) = p_{\mathcal{H}_1}(x)$.

**Théorème 1.1.5.** *( **Décomposition de Riez.**) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathcal{H}_1$ un sous espace vectoriel **fermé** de $\mathcal{H}$ Alors*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}.$$

**Exemple 1.2.** *1. Soient $\mathcal{H}$ espace de Hilbert, et $x_1 \in \mathcal{H}$ avec $x_1 \neq 0$*

$$\mathcal{H}_1 = \{x_1\} = \{\alpha x_1, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

*on a l'application*

$$\begin{array}{rcl} P:\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}_1 \\ x & \mapsto & Px=\lambda_1 x_1 \end{array}$$

*on va chercher* $\lambda_1$, *ona : ona :*

$$x-\lambda_1 x_1 \in \mathcal{H}_1^{\perp} \implies \langle x-\lambda_1 x_1, x_1\rangle = 0 \implies \langle x, x_1\rangle - \lambda_1 \|x_1\|^2 = 0$$

$\lambda_1 = \frac{\langle x,x_1\rangle}{\|x_1\|^2}$

2. *Soient* $\mathcal{H}$ *espace de Hilbert, et* $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ *avec* $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$

$$\mathcal{H}_1 = \{x_1, x_2\} = \{\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

*et* $x_1 \perp x_2$ *on a l'application*

$$\begin{array}{rcl} P:\mathcal{H} & \to & \mathcal{H}_1 \\ x & \mapsto & Px=\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{array}$$

*on va chercher* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$*on a : ona :*

(a) $\langle x-\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_1\rangle = 0 \implies \langle x, x_1\rangle - \lambda_1\|x_1\|^2 = 0$
$\lambda_1 = \frac{\langle x,x_1\rangle}{\|x_1\|^2}$ ( *on a* $\lambda_2\langle x_1, x_2\rangle = 0$ *car* $x_1 \perp x_2$ ).

(b) $\langle x-\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x_2\rangle = 0 \implies \langle x, x_2\rangle - \lambda_2\|x_2\|^2 = 0$
$\lambda_2 = \frac{\langle x,x_2\rangle}{\|x_2\|^2}$ ( *on a* $\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = 0$ *car* $x_1 \perp x_2$ ).

## 1.2 Espace de Hardy $H^2$.

En analyse complexe, les espaces de Hardy sont des espaces particuliers de fonctions holomorphes sur le disque unité. Nous introduisons maintenant les espaces de fonctions holomorphes principaux que nous étudierons. Les résultats présentés ici sont standards et peuvent être trouvés dans [8, 12].

### 1.2.1 Espace de Lebesgue.

Soit $dm$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité$\mathbb{T}$ , c'est-à-dire $dm = \frac{d\theta}{2\pi}$ où $\theta \in \big[0, 2\pi\big[$. Pour toute fonction mesurable $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ on pose

$$\|f\| = (\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^2 \, dm(\zeta))^{\frac{1}{2}}.$$

On appelle $L^2$ ou bien $L^2(\mathbb{T}, m)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f$ de $\mathbb{T}$ vers  pour lesquelles $\|f\| < \infty$, dans ce cas $\|f\|$ s'appelle la norme $L^2(\mathbb{T})$ de $f$. On définit sur $L^2(\mathbb{T})$ produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, dm(\zeta).$$

Muni de ce produit scalaire et de la norme qui est définie précédemment, $L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.2.1.** *Soit $n \in \mathbb{Z}$, on considère la fonction*

$$\begin{array}{rcl} e_n : \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ \zeta & \mapsto & e_n(\zeta) = \zeta^n. \end{array}$$

*$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.*

**Définition 1.2.1.** *Soient $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$ . On note*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{f}(n) & := & \langle f, \zeta^n\rangle \\ & = & \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta^n}\, dm(\zeta). \end{array}$$

*$\widehat{f}(n)$ est appelé le $n$-ième coefficient de Fourier de $f$. La série de Fourier de $f$ est donnée par :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

**Proposition 1.2.2.** *On peut identifier $L^2$ à $l^2(\mathbb{Z})$ où $l^2(\mathbb{Z}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < +\infty\}$. La correspondance est donnée par*

$$f \in L^2 \iff \{\widehat{f}(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in l^2(\mathbb{Z}). \tag{1.1}$$

**Définition 1.2.2.** *L'espace $L^\infty(\mathbb{T})$ des fonctions essentiellement bornées sur $\mathbb{T}$ muni de la norme*

$$\|f\|_\infty = ess - \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} |f(\zeta)|,$$

*est une algèbre de Banach.*

**Proposition 1.2.3.** *Soit $\varphi$ une fonction mesurable sur $\mathbb{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

*(i)* $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$ *pour tout* $f \in L^2(\mathbb{T})$.

*(ii)* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

*Démonstration.* *(ii) ⇒ (i)* On suppose que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})f(e^{it})|^2\,dt &= \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^2|f(e^{it})|^2\,dt \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \|\varphi\|_\infty^2|f(e^{it})|^2\,dt \\ &= \|\varphi\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt \\ &= \|\varphi\|_\infty^2\|f\|^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

*(i) ⇒ (ii)* upposons que $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varphi \notin L^\infty(\mathbb{T})$. Alors pour tout $c \in \mathbb{R}, m(A(c)) > 0$ avec $A(c) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq c\}$.
Soit $c_1 = 1$ , on choisit $c_2 \geq c_1+1$ tel que $B_1 := A(c_1)\setminus A(c_2)$ soit de mesure non nulle. On choisit $c_3 \geq c_2 + 1$ tel que $B_2 := A(c_2) \setminus A(c_3)$ soit de mesure non nulle. Par itération, on construit une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ensembles de mesures positives, deux à deux disjoints vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta \in B_n, |\varphi(\zeta)| \geq n$. On pose

$$f_n(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m(B_n)}} & \text{si} \quad \zeta \in B_n, \\ 0 & \text{si} \quad \zeta \in \mathbb{T} \setminus B_n. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite orthonormée de

$L^2(\mathbb{T})$ et $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n} \in L^2(\mathbb{T})$. Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |\varphi f(\zeta)|^2 &\geq \int_{\mathbb{T}} |\varphi(\zeta)|^2 \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{n}(\zeta) \right|^2 dm(\zeta) \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \int_{B_n} |\varphi(\zeta)|^2 \frac{\left[m(B_n)\right]^{-1}}{n^2} dm(\zeta) \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \int_{B_n} n^2 \frac{\left[m(B_n)\right]^{-1}}{n^2} dm(\zeta) \quad (car |\varphi(\zeta)| \geq n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} m(B_n) \left[m(B_n)\right]^{-1} \\
&= \frac{N(N+1)}{2},
\end{aligned}$$

contredit le fait que $\varphi f \in L^2(\mathbb{T})$. □

### 1.2.2 Espace de Hardy $H^2$.

Dans ce paragraphe, on définit l'espace de Hardy $H^2$ de deux manières différentes et on montrera que ces deux définitions sont équivalentes à un isomorphisme près. On note par $H(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

**Définition 1.2.3.** *On définit deux types d'espace de Hardy, le premier est un sous-espace de $H(\mathbb{D})$ et le second un sous-espace de $L^1(\mathbb{T})$. Alors on a, sur $\mathbb{D}$*

$$\begin{aligned}
H^2(\mathbb{D}) &= \left\{ F \in H(\mathbb{D}), \|F\|_2 = \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^i\theta)|^2 \, d\theta \setminus 2\pi < \infty \right\}. \\
H^\infty(\mathbb{D}) &= \left\{ F \in H(\mathbb{D}), \sup_{\xi \in \mathbb{D}} |F(\xi)| < \infty \right\}.
\end{aligned}$$

*Sur $\mathbb{T}$, on définit*

$$\begin{aligned}
H^2(\mathbb{T}) &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}. \\
H^\infty(\mathbb{T}) &= \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0 \right\}.
\end{aligned}$$

*ici $\widehat{f}(n)$ est le n-ème coefficient de Fourier de $f$; i.e.*

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta \setminus 2\pi.$$

**Proposition 1.2.4.** *D'après le théorème de Fatou, la limite radiale de toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, qui est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ par*

$$f^*(\zeta) \;=\; \lim_{r \to -1} f(r\zeta), \zeta \in \mathbb{T}$$

*existe presque partout sur $\mathbb{T}$. On peut montrer que $f^* \in H^2(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0$ pour $n < 0$, tel que*

$$\int_{\mathbb{T}} \log |f^*||d\zeta| > -\infty.$$

**Proposition 1.2.5.** *On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$. Car l'application*

$$\begin{array}{rcl} \chi : H^2(\mathbb{D}) & \to & H^2(\mathbb{T}) \\ f & \mapsto & f^* \end{array}$$

*est un isomorphisme isométrique, où $f^*$ est la limite radiale de $f$.*

**Proposition 1.2.6.** *Puisque $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ défini par :*

$$\langle f, g \rangle \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, |d(\zeta)|.$$

**Proposition 1.2.7.** *pour tous $z \neq 0$ , on a $L^2(\mathbb{T}) = H^2 \oplus \overline{zH^2}$ .*

**Remarque 1.2.1.** *$P$ désigne la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2$ définie par*

$$P(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\lambda}\, dm(\zeta), \lambda \in \mathbb{D} \tag{1.2}$$

*On l'appelle aussi l'intégrale de Cauchy ou projection de Riesz. Comme $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ l'intégrale 1.2 est encore définie pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ donc $P$ admet une extension à $f \in L^1(\mathbb{T})$ avec la même expression c'est-à-dire*

$$P(f)(\lambda) \;=\; \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\lambda}\, dm(\zeta), f \in L^1(\mathbb{T}), \lambda \in \mathbb{D}.$$

*L'espace de Hardy possède un noyau reproduisant noté $K_\lambda$.*

$$f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$$

*ou*

$$K_\lambda = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}\zeta}.$$

*pour tout $f \in H^2$ et $\lambda, \zeta \in \mathbb{D}$ On l'appelle aussi noyau de Cauchy.*

### 1.2.3 Fonction intérieure.

**Définition 1.2.4.** *Une fonction $u \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $|u| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$ s'appelle une fonction intérieure. On remarque que $u \in H^\infty(\mathbb{D})$. Toute fonction intérieure peut s'écrire comme $u = bs_\mu$ où $b$ est le produit de Blaschke*

$$b(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} \frac{\lambda_n - z}{1 - \overline{\lambda_n} z} \tag{1.3}$$

*où $m$ est l'ordre de 0 en tant que zéro de $u$ et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est l'ensemble des zéros non nuls (repétés autant de fois que leurs ordres) de $u$ dans $\mathbb{D} - \{0\}$ satisfaisant la condition de Blaschke*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n|) < \infty \tag{1.4}$$

*(ce qui garantit la convergence du produit) et $s_\mu$ est le facteur intérieur singulier*

$$s_\mu := \exp(-\int \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d_\mu(\zeta))$$

*où $\mu \in M$ est une mesure singulière positive.*

Bien que $H^2$ est un espace vectoriel, c'est sa structure multiplicative qui relève sa profonde théorie de fonction. Nous rappelons ici les outils nécessaires pour décrire les factorisations des fonctions dans $H^2$. Toute fonction $f \in H^2$ s'écrit comme $f = WF$, où $W$ est une fonction intérieure $(W = bs_\mu)$ ,

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) |d\zeta|\right)$$

une fonction éxtérieure.

**Définition 1.2.5.** *[22]*

1. *(Théorème de convergence non-tangentielle de Fatou [9]). Une fonction $f$ analytique sur $\mathbb{D}$ admet une limite non-tangentielle $l$ au point $\omega \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$, $f(z) \to l$ quand $z \to \omega$ sur toute région non-tangentielle $\Gamma_\theta(\omega) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \omega| < \theta(1 - |\theta|)\}$, on note cette limite par $z \xrightarrow{non-tangentielle} \omega$.*
2. *Pour une fonction intérieure $u$ et un point $\eta \in \mathbb{T}$, on dit que $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory ( ADC) en $\eta$, si les limites non-tangentielles de $u$ et $u'$ existe en $\eta$, et $|u(\eta)| = 1$.*

## 1.3 Opérateurs sur les espaces de Hilbert.

### 1.3.1 Opérateurs bornés.

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert sur le même corps $\mathbb{K}$.

**Définition 1.3.1** (Opérateur). *On appelle opérateur de $E$ dans $F$, toute application $A$ défini de $E$ dans $F$ par :*

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

**Définition 1.3.2.** *{Opérateur linéaire.} On dit que l'opérateur $A : E \longrightarrow F$ est linéaire si*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(x+y) &= Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax. \end{aligned}$$

*C'est un homomorphisme d'espaces vectoriels et l'on a $A(0_E) = 0_F$.*

**Définition 1.3.3.** *{Opérateur continu, borné.} Soit $A$ un opérateur linéaire définit sur un sous ensemble $G \subset E$ dans $F$ est dite **continu** au point $x_0$ de $G$ si on a la propriété suivante :*
*Pour toute suite $x_n$ de $G$ converge vres $x_0$, la suite $Ax_n$ converge vers $A(x_0)$ c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A(x_0).$$

*$A$ est dite **borné** s'il existe une constante $k > 0$ telle que :*

$$\| A(x) \|_F \leq k\|x\|_E \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

**Théorème 1.3.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(1) $A$ est continu .*

*(2) $A$ est continu en 0 .*

*(3) il existe une constante $c$ telle que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$ .*

**Notation :**

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensomble des opérateurs linéaires continus entre $E$ et $F$. Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = K$, on note $E'$ l'espace dual (topologique) de $E$ qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $E$ dans $K$. Par $E''$, on note le bidual de $E$ .

**Définition 1.3.4.** *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On définit l'image de l'opérateur $A$ par*

$$Im(A) = \{Ax, x \in E\}.$$

*et le noyau de l'opérateur $A$ par*

$$Ker(A) = \{x \in E : Ax = 0\}.$$

**Remarque 1.3.1.** *Si $E$ est de dimension finie, alors, tout opérateur linéaire de $E$ dans $F$ est continue.*
*On définit maintenant la norme d'un opérateur linéaire continu.*

**Définition 1.3.5.** *{Norme d'un opérateur linéaire continu} Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu. Le nombre $\sup\limits_{x \in E, x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, qui est par le Théorème 1.3.1 fini, est appelé la norme de $A$ et est noté $\|A\|$.*

**Remarque 1.3.2.**

1. *Si pour une constante $c$, on a $\|Ax\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$, alors, $A$ est borné et $\|A\| \leq c$. De plus, on a*
$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \text{ pour tout } x \in E.$$
2. *On vérifie que $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ ainsi que*
$$\|A\| = \inf \{c : \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}.$$

**Proposition 1.3.1.** *{Propriétés de la norme d'opérateur} Soient $E, F$ et $G$ trois espace de Hilbert.*

1. *Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, $A+B \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$.*
3. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, alors, $\alpha A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$.*
4. *Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|B \circ A\| \leq \|B\|\|A\|$.*

**Notation :**

La composée $A \circ B$ de deux opérateurs $A$ et $B$ sera souvent noté $AB$.

**Théorème 1.3.2.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un espace de Banach. Alors, l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

### Opérateur Adjoint.

**Définition 1.3.6.** *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$, on ait :*

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$$

*est appelé **adjointe** de $A$. De plus on a :*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

*Ce qui prouve que $A^*$ est aussi continue.*

**Proposition 1.3.2.** *Soit $A \longrightarrow A^*$ un operateur antilinéaire, isométrique de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$. De plus pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :*
- $(A^*)^* = A$.
- $\| A^*A\| = \|A\|^2$.

### Opérateur isométrique, normal, unitaire, positif et autoadjoint.

**Définition 1.3.7.**
1. *$U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé unitaire si $U^*U = I_E$ et $UU^* = I_F$ .*
2. *$U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé isométrique (co-isométrique) si $U^*U = I_F$ ( respectivement $UU^* = I_F$).*
3. *$N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si $\|N^*(x)\| = \|N(x)\|$ pour tout $x \in E$, ou $NN^* = N^*N$.*
4. *$U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $U^* = U$.*
5. *$P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si $P$ est auto-adjoint et si pour tout $x \in E$, $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*
6. *Deux opérateurs $A : E \to E$ et $B : F \to F$ sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $U : E \to F$ tel que $A = U^*BU$.*
7. *$Span(x_1, x_2, ...., x_n)$ le sous-espace fermé engendre par $(x_1, x_2, ...., x_n)$.*

### 1.3.2 Opérateurs de rang 1.

Nous allons rappeler la définition et les propriétés élémentaires du produit tensoriel ou opérateur de rang 1.

**Définition 1.3.8.** *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $f, g \in \mathcal{H}/\{0\}$ alors on définit l'opérateur borné de rang 1, $f \otimes g$ par :*

$$\begin{aligned} f \otimes g : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto f \otimes g(h) = \langle h, g \rangle f. \end{aligned}$$

L'image de $f \otimes g$ est le sous-espace de dimension 1, $\mathbb{C}f$.

On peut voir réciproquement que tout opérateur $A$ de rang 1 a la forme peut $f \otimes g$ pour certains vecteurs $f, g \in \mathcal{H}$.

En effet, comme $ImA$ est de dimension 1, pour $f \in ImA$ non nul, $ImA = \mathbb{C}f$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $c_h \in \mathbb{C}$ tel que $Ah = c_h f$ et la forme linéaire $h \in \mathcal{H} \mapsto c_h$ est continue, par continuité de $f \otimes g$. Le Théorème de Riesz assure l'existence de $g \in \mathcal{H}$ tel que $c_h = \langle h, g \rangle$, et alors pour

$$h \in \mathcal{H}, Ah = \langle h, g \rangle f = f \otimes g(h).$$

**Proposition 1.3.3.** *On a les propriétés suivantes : pour tout $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{H}$ éventuellement non nuls, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,*

1. *$A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ et $(f \otimes g)A = (f \otimes A^* g)$.*
2. *$(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1)$.*
3. *$(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ et $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \overline{\alpha}(f \otimes g) + \overline{\beta}(f \otimes g_1)$.*
4. *$Ker(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^\perp$ et $Im(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.*
5. *$(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.*
6. *$(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ avec $f, f_1, g, g_1$ tous non nuls, si et seulement si il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ et $\overline{\lambda}\gamma = 1$.*

*Démonstration.* 1. Pour tout $h \in \mathcal{H}, A(f \otimes g)(h) = \langle h, g \rangle Af = (Af \otimes g)(h)$ et

$$(f \otimes g)(Ah) = \langle Ah, g \rangle f = \langle h, A^* g \rangle f = f \otimes (A^* g)(h).$$

2. Pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1)(h) = f \otimes g \langle h, g_1 \rangle f_1 = \langle h, g_1 \rangle \langle f_1, g \rangle f = \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1) h.$$

3. Par linéarité du produit scalaire.
4. Nous avons déjà vu la seconde affirmation. Pour la première :

$$Ker(f \otimes g) = \{h \in \mathcal{H} | f \otimes g(h) = 0\} = \{h \in \mathcal{H} | \langle h, g \rangle = 0\} = (\mathbb{C}g)^{\perp}.$$

5. Soient $h, k \in \mathcal{H}$.

$$\langle (f \otimes g)^*(h), k \rangle = \langle h, f \otimes g(k) \rangle =$$

$$\langle g, k \rangle \langle h, f \rangle = \langle h, f \rangle \langle g, k \rangle = \langle \langle h, f \rangle g, k \rangle = \langle g \otimes f(h), k \rangle.$$

6. Si $f \otimes g = f_1 \otimes g_1$ alors ils ont mêmes images. Or $Imf \otimes g = \mathbb{C}f$ et $Imf_1 \otimes g_1 = \mathbb{C}f_1$ donc il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ non nul tel que $f = \gamma f_1$. En considérant les adjoints de ces opérateurs, l'assertion précédente affirme que $g \otimes f = g_1 \otimes f_1$. Le raisonnement similaire au précédent affirme qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda g_1$. Ainsi, $\gamma f_1 \otimes \lambda g_1 = f_1 \otimes g_1$ ce qui implique $\gamma \overline{\lambda} = 1$. La réciproque se vérifie trivialement.

□

### 1.3.3 Opérateur de multiplication sur $L^2$.

**Définition 1.3.9.** *Soient $\varphi \in L^2$ et $D(M_\varphi) = \{f \in L^2 : \varphi f \in L^2\}$. On appelle opérateur de multiplication, de symbole $\varphi$ sur $L^2$ l'opérateur défini par*

$$\begin{array}{rcl} M_\varphi : D(M_\varphi) \subseteq L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f & \longmapsto & M_\varphi f = \varphi f. \end{array}$$

Il est clair que $D(M_\varphi)$ est dense dans $L^2$ puisqu'il contient l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ qui lui est dense dans $L^2$. De plus, si $\varphi \in L^\infty$ alors $M_\varphi$ est borné et $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ en fait le théorème suivant, montre que les seuls symboles $\varphi$ pour lesquels $M_\varphi$ est borné sont les fonctions bornées sur $\mathbb{T}$.

**Théorème 1.3.3.** *Soient $\varphi \in L^2$ et $M_\varphi$ opérateur de multiplication. Alors les assertions suivantes sont satisfaites*

*(i) Les assertions suivantes sont équivalentes*

*(a) $\varphi \in L^\infty$*

  (*b*) $D(M_\varphi) = L^2$

  (*c*) $M_\varphi$ *est borné sur* $L^2$, *et* $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

(*ii*) $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$.

(*iii*) $M_\varphi$ *est normal.*

Le théorème suivant donne la première caractérisation de l'opérateur de multiplication.

**Théorème 1.3.4.** *Un opérateur borné sur* $L^2$ *est un opérateur de multiplication si et seulement s'il commute avec* $M_z$. $A$ *et commute avec* $M_z$ *si et seulement si* $AM_z = M_zA$.

### 1.3.4 Opérateur de shift (décalage).

Les opérateurs shift tiennent une place importante dans le monde des opérateurs sur la théorie des fonctions.

**Définition 1.3.10.** *On note* $S : H^2 \longrightarrow H^2$ *défini par* $S(f) = zf$, $z \in \mathbb{T}$ *l'opérateur de décalage à droite(shift), Cet opérateur est borné et une isométrie de* $H^2$.
*L'adjoint de* $S$ *est l'opérateur de décalage à gauche (adjoint de Shift) noté* $S^*$ *défini par :*

$$S^*(f) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

*En effet, pour* $f, g \in H^2$, *on a*

$$\langle Sf, g\rangle = \langle zf, g\rangle = \langle f, \overline{z}g\rangle.$$

*Soit* $k \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \langle zf, k\rangle &= \overline{k}\langle zf, 1\rangle \\ &= \overline{k}\langle zf, k_0\rangle \\ &= \overline{k}\widehat{(zf)}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

*Donc*

$$\langle Sf, g\rangle = \langle f, \overline{z}(g(z) - g(0))\rangle = \langle f, \frac{g(z) - g(0)}{z}\rangle.$$

**Théorème 1.3.5.** *{Beurling}[2] Un sous-espace fermé non trivial $M \neq \varnothing$ de $H^2$ est invariant par le shift si et seulement si $M$ est de la forme :*

$$uH^2 := \{uh \quad h \in H^2\}.$$

*où $u$ est une fonction intérieure non constante.*

# Chapitre 2

# Opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués.

Dans ce chapitre on va parler quelques opérateurs très étudiés sur l'espace de Hardy $H^2$.

## 2.1 Espaces modèles, définitions et propriétés.

Nous allons maintenant considérer les sous-espaces fermés de $H^2$ qui sont invariants par le l'adjoint de shift, $S$, $S^*$. Ces sous-espaces sont connus sous le nom d'espaces modèles. Les résultats énoncés ici ainsi que leurs démonstrations viennent de [18, 17, 19, 12].

**Définition 2.1.1.** *Soit $u$ une fonction intérieure. On appelle **espace modèle** correspondant à $u$, le sous-espace de $H^2$ défini par :*

$$\begin{array}{rcl} K_u^2 & = & (uH^2)^{\perp} \\ & := & H^2 \ominus uH^2 \\ & = & \{f \in H^2, \langle f, ug \rangle = 0, \quad \textit{pour tout } g \in H^2\}. \end{array}$$

Cette définition ne suffit pas pour décrire l'espace modèle $K_u^2$ car les éléments de $K_u^2$ se présentent pas immédiatement. La proposition suivante donne plus d'information pour $K_u^2$.

**Proposition 2.1.1.** *Pour chaque fonction intérieure $u$, l'espace modèle $K_u^2$ correspondant est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$ où $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u^2 = H^2(\mathbb{T}) \bigcap u\overline{zH^2(\mathbb{T})} \quad \textit{avec } z : \zeta \in \mathbb{T} \longrightarrow \zeta \in \mathbb{T}$$

*Démonstration.* Si $f \in H^2(\mathbb{T}) \cap u\overline{zH^2(\mathbb{T})}$, il existe $h \in H^2$ telle que $f = u\overline{zh}$ presque partout sur $\mathbb{T}$, et pour tout $g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}\langle f, ug \rangle &= \langle u\overline{zh}, ug \rangle \\ &= \langle \overline{zh}, g \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta g(\zeta) h(\zeta)} dm(\zeta) \\ &= 0\end{aligned}$$

c'est-*à*-dire : $f \in (uH^2)^{\perp} = K_u^2$.
Réciproquement, si $f \in K_u^2$, on a $\langle f, uz^n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-*à*-dire $(\widehat{\overline{u}f})(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\overline{u}zf \in \overline{H^2(\mathbb{T})}$ ou encore $f \in u\overline{zH^2}$. □

Comme les sous-espaces $uH^2$ constituent les sous-espaces invariants non triviaux de $S$. Les sous-espaces modèles $K_u^2$ jouent les rôles analogues pour le $S^*$.

**Corollaire 2.1.** *Soit $u$ une fonction intérieure, l'espace modèle $K_u^2$ correspondant est un sous-espace propre de $H^2$ qui est invariant par $S^*$.*

*Démonstration.* Soit $M$ un sous-espace propre de $H^2$ invariant par $S^*$. Pour $f \in M$ et $g \in M^{\perp}$ on a :

$$\langle f, Sg \rangle = \langle S^* f, g \rangle = 0$$

donc $Sg \in M^{\perp}$ pour tout $g \in M^{\perp}$, d'où $M^{\perp}$ est un sous-espace non trivial de $H^2$, invariant par $S$. D'après le théorème de Beurling, il existe $u$ une fonction intérieure telle que $M^{\perp} = uH^2$. D'où $M = (uH^2)^{\perp}$. □

**Corollaire 2.2.** *Soient $u$ et $v$ des fonctions intérieures. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
*i) $u|v$ c'est-à-dire $\exists f \in H^2, v = uf$.*
*ii) $K_u^2 \subset K_v^2$.*

**Remarque 2.1.1.** *La multiplication par une fonction intérieure est une isométrie sur $H^2$.*
*Cette remarque est utilisée dans la démonstration de cette proposition.*

**Proposition 2.1.2.** *Si $u$ et $v$ sont des fonctions intérieures non constantes et $u_1 = uv$, alors :*

$$K_{u_1}^2 = K_u^2 \oplus uK_v^2$$

*Démonstration.* Comme la multiplication par une fonction intérieure est une isométrie, $vH^2$ est un sous-espace fermé de $H^2$ et donc on peut écrire :

$$H^2 = vH^2 \oplus (vH^2)^{\perp}.$$

La multiplication par $u_1$ est aussi une isométrie et on a :

$$uH^2 = uvH^2 \oplus u(vH^2)^{\perp}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} H^2 &= uH^2 \oplus (uH^2)^{\perp} \\ &= uvH^2 \oplus u(vH^2)^{\perp} \oplus (uH^2)^{\perp} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(uvH^2)^{\perp} = u(vH^2)^{\perp} \oplus (uH^2)^{\perp}$$

c'est-à-dire :

$$K^2_{u_1} = K^2_u \oplus uK^2_v.$$

□

### 2.1.1 Noyau reproduisant de l'espace modèle $K_u$.

L'espace modèle est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert à noyau reproduisant $H^2$ pour chaque fonction intérieure $u$ non constante, l'espace modèle $K_u$ possède un noyau reproduisant. Nous allons identifier ces noyaux et leurs propriétés de base.
Soit $E$ un sous-espace de $H^2$ avec $K_\lambda$ est le noyau reproduisant de $H^2$, alors le noyau reproduisant de $E$ est la projection orthogonale $P^E K_\lambda$ de $K_\lambda$ sur $E$. Donc le noyau reproduisant de $K^2_u$ est la projection orthogonale de $K_\lambda$ sur $K^2_u$, il est donné par :

$$K^u_\lambda(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \overline{\lambda}z} \qquad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

pour toute $h \in H^2$, on a

$$f(\lambda) = \langle f, K^u_\lambda \rangle, \qquad f \in K^2_u$$

.

**Exemple 2.1.** *Si $u(z) = z^n$, alors*

$$K_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{\lambda}^n z^n}{1-\overline{\lambda}z} = 1 + \overline{\lambda}z + \overline{\lambda}^2 z^2 + ... + \overline{\lambda}^{n-1} z^{n-1}.$$

Soient $M_u$ et $M_{\overline{u}}$ les opérateurs de multiplication par $u$ et $\overline{u}$ respectivement, la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $K_u^2$, $P_u$ donné par

$$P_u = P - M_u P M_{\overline{u}}. \tag{2.1}$$

**Proposition 2.1.3.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors*

$$P_u f(\lambda) = \langle f, K_\lambda^u \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

*Démonstration.* Nous avons $P_u$ est un auto-adjoint, alors

$$\langle f, K_\lambda^u \rangle = \langle f, P_u K_\lambda^u \rangle = \langle P_u f, K_\lambda^u \rangle = P_u f(\lambda).$$

□

### 2.1.2 Espaces modèles de dimension finie.

Dans cette section, nous verrons que les espaces modèles les plus simples sont ceux qui correspondent aux produits de Blaschke d'ordre fini et que ce sont les seuls espaces modèles de dimension finie. Nous verrons aussi une caractérisation de leurs éléments.

**Proposition 2.1.4.** *Soit $u$ une fonction intérieure.*

*i) Si $u(z) = z^n$ alors $K_u^2$ est l'ensemble des polynômes de degré $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ . C'est-à-dire :*

$$K_u^2 = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1}, \quad a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}\}.$$

*ii) Si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ comptés avec leurs ordre de multiplicité alors :*

$$K_u^2 = \left\{ \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1}}{(1-\overline{\lambda_1}z)(1-\overline{\lambda_2}z)...(1-\overline{\lambda_n}z)}; \quad (a_i)_{0\leq i \leq n-1} \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.3}$$

*iii) Si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros deux à deux distincts $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ d'ordre de multiplicités respectifs $m_1, m_2, ..., m_n$ alors :*

$$K_u^2 = span \left\{ \frac{d^{l_{j-1}}}{dz} \left[ \frac{1}{1-\overline{\lambda}_j z} \right]; \quad 1 \leq j \leq n \text{ et } 1 \leq l_j \leq m_j \right\}. \tag{2.4}$$

**Proposition 2.1.5.** *$dimK_u^2 < \infty$ si et seulement si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini.*

*Démonstration.* ($\Longleftarrow$) La proposition précédente montre que si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini , on a $dimK_u^2 < \infty$. ($\Longrightarrow$) On suppose que $dimK_u^2 < \infty$. Si $u$ admet un facteur qui est un produit de Blaschke admettant comme zéros la suite infini $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, alors $K_u^2$ contient un système infini linéairement indépendant.
D'autre part, si $u$ admet un facteur $v$ ; qui est une fonction intérieure singulière, alors $v^{\frac{1}{n}}$ est une fonction intérieure qui divise $v$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi $K^2_{v^{\frac{1}{1+n}}} \subsetneq K^2_{v^{\frac{1}{n}}} \subsetneq K^2_v$ pour $n > 1$. Donc on peut trouver une suite infinie orthonormale dans $K_u^2$ en prenant des vecteurs $f_n \in K^2_{v^{\frac{1}{n}}} \ominus K^2_{v^{\frac{1}{1+n}}}$ pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit que $dimK_u^2 < \infty$. □

### 2.1.3 Opérateur de conjugaison.

**Définition 2.1.2.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.* ***Un opérateur de conjugaison*** *sur $\mathcal{H}$ est un opérateur $C : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ vérifiant :*

- $\langle Cx, Cy\rangle = \langle y, x\rangle$.
- $C^2 = Id_{\mathcal{H}}$.

Un opérateur $T$ défini sur $H$ est dit C-symétrique s'il existe un opérateur de conjugaison $C$ sur $H$ tel que $T^* = CTC$. Chaque espace modèle $K_u^2$ admet un opérateur de conjugaison

$$C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2$$

défini par :

$$C[f](z) = u(z)\overline{zf(z)} \quad f \in K_u^2, z \in \mathbb{T}. \tag{2.5}$$

Dans ce qui suit, l'image de chaque fonction $f$ par l'opérateur de conjugaison $C$ défini dans la relation 2.5 est notée $\widetilde{f}$ c'est-à-dire $\widetilde{f} = C[f]$. voir[12, 21]) pour les détails sur ces opérateurs.

**Lemme 2.1.** *Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a :*

1. $\widetilde{K^u_\lambda}(z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}$, *en particulier si* $u(\lambda) = 0, \widetilde{K^u_\lambda}(z) = \frac{u(z)}{z-\lambda}$.
2. $\widetilde{f}(\lambda) = \langle \widetilde{K^u_\lambda}, f\rangle, \quad f \in K_u^2$.

*Démonstration.* Montrons d'abord (1). Puisque $|u| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$, pour tout $z \in \mathbb{T}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{K_\lambda^u}(z) &= u(z)\overline{zK_\lambda^u(z)} \\
&= u(z)\overline{z}\frac{1-u(\lambda)\overline{u(z)}}{1-\lambda\overline{z}} \\
&= \overline{z}\frac{u(z)-u(\lambda)}{1-\overline{z}\lambda} \\
&= \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}.
\end{aligned}$$

La propriété (2) découle des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{K_\lambda^u}, f\rangle &= \langle CK_\lambda^u, f\rangle \\
&= \langle CK_\lambda^u, C^2 f\rangle \\
&= \langle Cf, K_\lambda^u\rangle \\
&= \langle \tilde{f}, K_\lambda^u\rangle \\
&= \tilde{f}(\lambda).
\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.1.2.** *On not*

$$K_0^u = 1-\overline{u(0)}u.$$

*Si $u$ admet une ADC en un point $\eta \in \mathbb{T}$, alors*

$$\begin{aligned}
K_\eta^u(z) &= \frac{1-\overline{u(\eta)}u(z)}{1-\overline{\eta}z}. \\
\widetilde{K_\eta^u}(z) &= \frac{u(z)-u(\eta)}{z-\eta}.
\end{aligned}$$

## 2.2 Opérateurs de Toeplitz sur $H^2$.

Les opérateurs de Toeplitz sont les compressions des opérateurs de multiplication au l'espace de Hardy $H^2$, définie comme suit.

**Définition 2.2.1.** *Soit $\varphi \in L^\infty$,* ***l'opérateur de Toeplitz*** *de symbole $\varphi$ sur $H^2$ est défini par :*

$$\begin{array}{rccl} T_\varphi : & H^2 & \longrightarrow & H^2 \\ & f & \longrightarrow & T_\varphi(f) = P(\varphi f), \end{array}$$

*où $P$ est la projection orthogonale de $L^2$ sur $H^2$.*

**Remarque 2.2.1.** *Dans le cas où $\varphi \in H^\infty$, l'opérateur de Toeplitz est juste l'opérateur de multiplication $M_\varphi$ c'est-à-dire $T_\varphi = M_\varphi$.*

**Théorème 2.2.1.** *L'opérateur de Toeplitz $T_\varphi$ est borné si et seulement si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, et l'application $\varphi \longmapsto T_\varphi$ de $L^\infty(\mathbb{T})$ à l'ensemble des opérateurs continu sur $H^2$ est linéaire et injective.*

**Proposition 2.2.1.** *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ tel que $T_\varphi$ est un opérateur continu, alors*

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

**Proposition 2.2.2.** *Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Alors,*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a : $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.*
2. *$T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*
3. *L'opérateur identité $I$ de $H^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 1$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole $0$.*
4. *$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.*
5. *Pour tous $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\varphi f, g\rangle = \langle T_\varphi f, g\rangle$.*
6. *$T_\varphi$ est positif si et seulement si $M_\varphi$ est positif.*
7. *$T_\varphi$ est auto-adjoint si et seulement si son symbole est à valeur réelle presque partout sur $\mathbb{T}$.*

## Produit d'opérateur de Toeplitz.

Dans la suite, nous allons donner quelque résultat sur le produit de deux opérateurs de Toeplitz. Le problème sur le produit d'opérateurs de Toeplitz a été étudié par A. Brown et P. R. Halmos dans [4].

**Théorème 2.2.2.** *Soient $T_\varphi, T_\Psi$ deux opérateurs de Toeplitz bornés sur $H^2$. Le produit $T_\varphi T_\Psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $\Psi$ est anyi-analytique ou si $\varphi$ est analytique. Dans ce cas on a : $T_\varphi T_\Psi = T_{\varphi\Psi}$.*

Le théoréme suivant résume les résultats sur la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dans $H^2(\mathbb{T})$.

**Théorème 2.2.3.** *Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :*

1. *$\varphi$ et $\psi$ sont toutes les deux analytiques.*
2. *$\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$sont toutes les deux analytiques.*
3. *il existe deux constantes $a$ et $b$, non tous nuls tels que $a\varphi + b\psi$ est une fonction constante.*

## 2.3 Opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle.

Nous allons maintenant rappeler de nombreux résultats classiques sur les opérateurs de Toeplitz tronqués. Ils sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle $K_u^2$. Les opérateurs de Toeplitz tronqués ont été formellement introduits par Sarason dans [21].

**Définition 2.3.1.** *Soit $\varphi \in L^2$, **l'opérateur de Toeplitz tronqué** de symbole $\varphi$ sur $K_u^2$ est défini par :*

$$\begin{array}{rccl} A_\varphi^u : & K_u^2 & \longrightarrow & K_u^2 \\ & f & \longrightarrow & A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \end{array}$$

*où $P_u$ est la projection orthogonale de $L^2$ sur $K_u^2$.*
*L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués sur $K_u^2$ est noté par $\mathcal{T}_u$.*

Les opérateurs de Toeplitz tronqués vérifient les propriétés suivantes :

**Proposition 2.3.1.** *Soient $\varphi$ et $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $A_\varphi^u, A_\psi^u \in \mathcal{T}_u$. Alors*

1. *Pour tous nombres complexes $a$ et $b$, $A_{a\varphi+b\psi}^u = aA_\varphi^u + bA_\psi^u$.*
2. *$(A_\varphi^u)^* = A_{\overline{\varphi}}^u$.*

Le résultat suivant montre que les opérateurs de Toeplitz tronqués bornés ($\in \mathcal{T}_u$) sont C-symétriques.

**Lemme 2.2.** *Les opérateurs dans $\mathcal{T}_u$ sont C-symétriques.*

*Démonstration.* On note par $K_u^\infty = K_u^2 \bigcap H^\infty$, le sous espace $K_u^\infty$ est dense dans $K_u^2$. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ avec $A_\varphi^u$ est borné. Pour $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\langle CA_\varphi^u Cf, g\rangle &= \langle Cg, A_\varphi^u Cf\rangle \\ &= \int_\mathbb{T} u(\zeta)\overline{\zeta g(\zeta)\varphi(\zeta)u(\zeta)}\zeta f(\zeta)dm(\zeta) \\ &= \int_\mathbb{T} \overline{\varphi(\zeta)}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta) \\ &= \langle A_{\overline{\varphi}}^u f, g\rangle \\ &= \langle (A_\varphi^u)^* f, g\rangle.\end{aligned}$$

Puisque $K_u^\infty$ est dense dans $K_u^2$, on a le résultat.
La réciproque de ce résultat est fausse en général. En effet, Sarason [21]a montré que si $dimK_u^2 > 2$, il y a des opérateurs de rang 1 sur $K_u^2$ qui sont C-symétrique mais qui ne sont pas des opérateurs de Toeplitz tronqués. □

**Lemme 2.3.** *[21] $I - S_u S_u^* = K_0^u \otimes K_0^u$ et $I - S_u^* S_u = \widetilde{K_0^u} \otimes \widetilde{K_0^u}$.*

**Lemme 2.4.** *Si $\varphi \in K_u^2$, $A_\varphi^u$ commute avec $S_u$ et $A_{\overline{\varphi}}^u$ commute avec $S_u^*$.*

**Lemme 2.5.** *[21]*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, on a :*

$$S_u^* K_\lambda^u = \overline{\lambda} K_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{K_0^u}, \quad S_u \widetilde{K_\lambda^u} = \lambda \widetilde{K_\lambda^u} - u(\lambda) K_0^u \tag{2.6}$$

2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ,on a :*

$$S_u K_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}} K_\lambda^u - \frac{1}{\overline{\lambda}} K_0^u, \quad S_u^* \widetilde{K_\lambda^u} = \frac{1}{\lambda}\widetilde{K_\lambda^u} - \frac{1}{\lambda}\widetilde{K_0^u} \tag{2.7}$$

*Si de plus u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$, les relations* 2.6 *et* 2.7 *sont vraies si on replace $\lambda$ par $\eta$.*

*Démonstration.* 1. Pour la première égalité, on a

$$\begin{aligned}S_u^* K_\lambda^u &= S^*((1 - \overline{u(\lambda)}u)K_\lambda) \\ &= (1 - \overline{u(\lambda)}u)S^* K_\lambda + K_\lambda(0) S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u) \\ &= \overline{\lambda}(1 - \overline{u(\lambda)}u)K_\lambda - \overline{u(\lambda)} S^* u \\ &= \overline{\lambda} K_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{K_0^u}.\end{aligned}$$

Et, on obtient la deuxième égalité pour appliquant $C$ à la première égalité :

$$\begin{aligned} S_u\widetilde{K_\lambda^u} &= CS_u^*CCK_\lambda^u \\ &= CS_u^*K_\lambda^u \\ &= C(\overline{\lambda}K_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{K_0^u}) \\ &= \lambda\widetilde{K_\lambda^u} - u(\lambda)K_0^u \end{aligned}$$

2. Pour $\lambda \neq 0$, on a :

$$S_uK_\lambda^u = P_uSK_\lambda^u = P_uS((1-\overline{u(\lambda)}u)K_\lambda) = P_uSK_\lambda$$

De puis

$$\begin{aligned} SK_\lambda(z) &= \frac{z}{1-\overline{\lambda}z} \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} - 1) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(K_\lambda(z) - 1). \end{aligned}$$

On trouve

$$S_uK_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}}P_u(K_\lambda - 1) = \frac{1}{\overline{\lambda}}(K_\lambda^u - K_0^u).$$

Pour la deuxième égalité de 2.7 ou appliquant $C$ à la première $\square$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur borné sur $K_u^2$ est un opérateur de Toeplitz tronqué.

**Théorème 2.3.1.** *[21].*
*Un opérateur $A$ borné sur $K_u$ appartient à $\mathcal{T}_u$ si, et seulement si, il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u$ tels que :*

$$A - S_uAS_u^* = \varphi_1 \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \varphi_2. \tag{2.8}$$

*Dans ce cas, $A = A^u_{\varphi_1+\overline{\varphi_2}}$.*

**Remarque 2.3.1.** *En appliquant l'opérateur de conjugaison $C$ à la relation (2.8), on a la caractérisation équivalente : un opérateur $A$ borné sur $K_u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe deux fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u$ tels que*

$$A - S_u^*AS_u = \varphi_1 \otimes \widetilde{k_0^u} + \widetilde{k_0^u} \otimes \varphi_2. \tag{2.9}$$

*Dans ce cas, $A = A^u_{\widetilde{\varphi_2}+\overline{\widetilde{\varphi_1}}}$.*

**Théorème 2.3.2.** *[21] Soit $\varphi \in L^2$. Alors $A^u_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$.*

*Démonstration.* Supposons que $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$ c'est-à-dire $\varphi = u\varphi + \overline{u\psi}$ avec $\varphi, \psi \in H^2$. Pour $f \in K_u^\infty$, on a :

$$\varphi f = u\varphi f + \overline{u\psi} f, \;\; et \; P_u(\Phi f) = P_u(u\varphi f) + P_u(\overline{u\psi} f) = 0,$$

car $uf \in H^\infty \Rightarrow \psi uf \in uH^\infty$, et $\overline{uf} \in \overline{zH^\infty} \Rightarrow \overline{\psi u} f \in \overline{zH^\infty}$. Donc $A^u_\varphi = 0$ sur $K_u^\infty$, et comme $K_u^\infty$ est dense dans $K_u^2$, $A^u_\varphi = 0$ sur $K_u^2$.
Réciproquement, supposons que $A^u_\varphi = 0$ et notons $\varphi = \varphi + \overline{\psi}$ avec $\varphi, \psi \in H^2$. Montrons que $\varphi \in uH^2$ et $\psi \in \overline{uH^2}$, $A^u_\varphi = 0$ équivaut à $A^u_\varphi = -A^u_{\overline{\psi}}$. D'après le Lemme 2.4, $A^u_{\overline{\psi}}$ et $A^u_\varphi$ commutent respectivement avec $S_u^*$ et $S_u$. Ainsi d'après le théorème 2.3.1 on a :

$$A^u_\varphi(I - S_u S_u^*) = (I - S_u S_u^*) A^u_\varphi. \tag{2.10}$$

En utilisant le lemme 2.5 et en appliquant la relation 2.10 à $K_0^u$, on a

$$\langle K_0^u, K_0^u \rangle A_\varphi K_0^u = \langle A^u_\varphi K_0^u, K_0^u \rangle K_0^u$$

c'est-à-dire $A^u_\varphi K_0^u = cK_0^u$ où $c$ est constante complexe non nulle. Il s'ensuit que

$$0 = (A^u_\varphi - cI) K_0^u = P_u[(\varphi - c)(1 - \overline{u(0)} u)] = P_u(\varphi - c)$$

c'est-à-dire $\varphi - c \in uH^2$ et $A^u_\varphi = cI$ .Comme $A^u_\varphi = -A^u_{\overline{\psi}}$ ,$A^u_{\overline{\psi}} = -cI$ .En faisant le même raisonnement,on a $\psi + \overline{c} \in uH^2$ c'est-à-dire $\overline{\psi} + c \in \overline{uH^2}$ Donc $\Phi = (\varphi - c) + (\overline{\psi} + c) \in uH^2 + \overline{uH^2}$. □

On a la proposition suivante :

**Proposition 2.3.2.** *Soient $\varphi, \psi \in K_u^2$ . Alors $A^u_{\varphi + \overline{\psi}} = 0$ si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = cK_0^u$ et $\psi = -\overline{c} K_0^u$.*

*Démonstration.* Si $\varphi = cK_0^u$ et $\psi = -\overline{c} K_0^u$ avec $c \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi + \overline{\psi} &= c(K_0^u - \overline{K_0^u}) \\ &= c(1 + \overline{u(0)} u - 1 + u(0)\overline{u}) \\ &= c(\overline{u(0)} u + u(0)\overline{u}) \end{aligned}$$

Donc $A^u_{\varphi+\overline{\psi}} = A^u_{c\overline{(\overline{u(0)}u+u(0)\overline{u})}} = c_1 A^u_u + c_2 A^u_{\overline{u}} = 0$ car $A^u_u = 0$
Réciproquement, si $A^u_{\varphi+\overline{\psi}} = 0$, d'aprés la relation **??**, on a

$$A^u_{\varphi+\overline{\psi}} - S_u A^u_{\varphi+\overline{\psi}} S^*_u = 0 = \varphi \otimes K^u_0 + K^u_0 \otimes \psi$$

c'est-à-dire

$$\varphi \otimes K^u_0 = -K^u_0 \otimes \psi$$

Donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = cK^u_0$ et $\psi = -\overline{c}K^u_0$. □

Le théorème suivant de Sarason [21], donne la caractérisation d'opérateurs de Toeplitz tronqué de rang 1.

**Théorème 2.3.3.** ***(opérateurs de Toeplitz tronqué de rang 1.)***

*(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, les opérateurs $K^u_\lambda \otimes \widetilde{K^u_\lambda}$ et $\widetilde{K^u_\lambda} \otimes K^u_\lambda$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $\frac{\overline{u}}{z-\lambda}$, $\frac{u}{z-\lambda}$.*

*(ii) Si $\eta \in \mathbb{T}$ et $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en $\eta$, l'opérateur $K^u_\eta \otimes K^u_\eta$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $K^u_\eta + \overline{K^u_\eta} + 1$.*

*(iii) Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués non nul de rang 1 sont des multiples des opérateurs dans (i) et (ii).*

**Corollaire 2.3.** $I = A^u_1 = A^u_{K^u_0} = A^u_{\overline{K^u_0}}$

*Démonstration.* Pour tout $f \in K^2_u$ , on a

$$A^u_1(f) = P_u(1f) = P_u(f)$$

on a $f \in K^2_u$ alors $A^u_1(f) = f = I(f)$.
Et

$$A^u_{K^u_0} = A^u_{1-\overline{u(0)}u} = A^u - A^u_{\overline{u(0)}u}$$

on a $\overline{u(0)}u \in uH^2$ , alors $A^u_{\overline{u(0)}u} = 0$ , donc $A^u_{K^u_0} = A^u_1 = A^u$. de plus, $A^u_{\overline{K^u_0}} = A^*_u = I^* = I$. □

# Chapitre 3

# Classe de Sedlock.

Dans toute la suite, on fixe $u$ comme étant une fonction intérieure.

## 3.1 Opérateurs de Toeplitz tronqués de type Sedlock.

Nous allons maintenant déﬁner de nombreux résultats d'opérateur de Toeplitz tronqué de type Sedlock [24, 23] en 2010. On pose $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

**Définition 3.1.1.** *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Un opérateur de Toeplitz tronqué $A$ est dit de type $\alpha$ (ou de type Sedlock) si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que*

$$A = \begin{cases} A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c} & \text{si } \alpha \in \mathbb{C}, \\ A^u_{\varphi} & \text{si } \alpha = 0, \\ A^u_{\overline{\varphi}} & \text{si } \alpha = \infty. \end{cases}$$

**Définition 3.1.2.**
1. *On note par $\mathcal{B}_u^\alpha$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$.*
2. *Dans le cas où $\alpha = 0$, on dit que $A^u_\varphi$ est un opérateur du type analytique, et si $\alpha = \infty$ on dit que $A^u_{\overline{\varphi}}$ est du type anti-analytique.*
3. *On note par $\{A\}'$ l'ensemble des opérateurs bornés sur $K_u^2$ qui commutent avec $A$.*

**Remarque 3.1.1.**

$$\mathcal{B}_u^\alpha \subset \mathcal{T}_u.$$

Définissons la notion d'un opérateur de shift généralisé. Les opérateurs de shifts généralisés ont été déﬁnis par Sarason ([21]), ils sont la somme deux opérateurs de Toeplitz tronqués.

**Définition 3.1.3.** *Soit $\alpha \in \mathbb{D}$, l'opérateur de shift généralisé est défini par*

$$S_u^\alpha := S_u + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}. \tag{3.1}$$

Dans la proposition suivant, on a un exemple d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$.

**Proposition 3.1.1.** *[23] Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ . L'opérateur $S_u^\alpha$ est un opérateur de type $\alpha$, telle que*

$$S_u^\alpha = \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u K_0^u + \alpha \overline{\widetilde{K_0^u}}}$$

## 3.2 Produit d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Nous présentons maintenant le premier objet de nos études, on est intéressé par le cas où $A^u_\varphi A^u_\Psi$ est encore un opérateur de Toeplitz tronqué. Bien que la somme de deux opérateurs de Toeplitz tronqués soit toujours un opérateur de Toeplitz tronqué, le résultat n'est pas vrai pour le produit. Le problème sur le produit d'opérateurs de Toeplitz a été étudié par N. Sedlock dans [24, 23]. Voici une condition nécessaire et suffisante pour que ceci soit vraie.

**Théorème 3.2.1.** *Soient $\varphi = \varphi_1 + \overline{\varphi_2}$ , $\Psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ avec $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in K_u^2$, tels que $A^u_\varphi, A^u_\Psi \in \mathcal{T}_u$. Alors $A^u_\varphi A^u_\Psi$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si il existe $\varphi_0$,$\psi_0 \in K_u^2$ , tel que*

$$\varphi_1 \otimes \psi_2 - S_u\widetilde{\varphi_2} \otimes S_u\widetilde{\psi_1} = \varphi_0 \otimes K_0^u + K_0^u \otimes \psi_0. \tag{3.2}$$

*Dans ce cas le symbole du produit donné par*

$$A^u_\varphi \psi_1 - \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle K_0^u + \overline{A^u_\Psi \varphi_2} + \varphi_0 + \overline{\psi_0}. \tag{3.3}$$

*Démonstration.* Soit $A^u_\varphi, A^u_\Psi \in \mathcal{T}_u$, alors

$$\begin{aligned} A^u_{\varphi_1+\overline{\varphi_2}} A^u_{\psi_1+\overline{\psi_2}} &= (A^u_{\varphi_1} + A^u_{\overline{\varphi_2}})(A^u_{\psi_1} + A^u_{\overline{\psi_2}}) \\ &= \underbrace{A^u_{\varphi_1} A^u_{\psi_1}}_{a} + \underbrace{A^u_{\varphi_1} A^u_{\overline{\psi_2}}}_{b} + \underbrace{A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\psi_1}}_{c} + \underbrace{A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}}}_{d} \end{aligned}$$

comme $A^u_{\varphi_1}, A^u_{\psi_1}$sont commute avec $S_u$ et $A^u_{\overline{\varphi_2}}, A^u_{\overline{\psi_2}}$ sont commute avec $S^*_u$, alors pour l'équation (a) nous avons :

$$\begin{aligned} A^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1} - S_uA^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1}S^*_u &= A_{\varphi_1}A^u_{\psi_1} - A^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1}S_uS^*_u \\ &= A^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1}(I - S_uS^*_u) \\ &= A^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1}(K^u_0 \otimes K^u_0) \\ &= A^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1}K^u_0 \otimes K^u_0. \end{aligned}$$

Pour l'équation (b) nous avons :

$$\begin{aligned} A^u_{\varphi_1}A^u_{\overline{\psi_2}} - S_uA^u_{\varphi_1}A^u_{\overline{\psi_2}}S^*_u &= A^u_{\varphi_1}A^u_{\overline{\psi_2}} - A^u_{\varphi_1}S_uS^*_uA^u_{\overline{\psi_2}} \\ &= A^u_{\varphi_1}(I - S_uS^*_u)A^u_{\overline{\psi_2}} \\ &= A^u_{\varphi_1}(K^u_0 \otimes K^u_0)A^u_{\overline{\psi_2}} \\ &= A^u_{\varphi_1}K^u_0 \otimes A^*_{\overline{\psi_2}}K^u_0 \\ &= A^u_{\varphi_1}K^u_0 \otimes A^u_{\psi_2}K^u_0. \end{aligned}$$

nous avons $A^u_{\varphi_1}K^u_0 = P_u\varphi_1K^u_0 = P_u\varphi_1(1-\overline{u(0)}u) = P_u\varphi_1 - \overline{u(0)}P_u\varphi_1u = \varphi_1$ (car $\varphi_1 \in K^2_u$ et $u\varphi_1 \in uH^2 \setminus P_u(uH^2) = 0$). de mêm pour $A^u_{\psi_2}K^u_0 = \psi_2$.
Donc $A^u_{\varphi_1}A^u_{\overline{\psi_2}} - S_uA^u_{\varphi_1}A^u_{\overline{\psi_2}}S^*_u = \varphi_1 \otimes \psi_2$.
Pour l'équation (c) nous avons :

$$\begin{aligned} A^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\psi_1} - S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\psi_1}S^*_u &= A^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\psi_1} - S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}(S^*_uS_u + \tilde{K}^u_0 \otimes \tilde{K}^u_0)A^u_{\psi_1}S^*_u \\ &= A^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\psi_1} - \underbrace{S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}S^*_uS_uA^u_{\psi_1}S^*_u}_{1} - \underbrace{S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}(\tilde{K}^u_0 \otimes \tilde{K}^u_0)A^u_{\psi_1}S^*_u}_{2}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}S^*_u &= A^u_{\overline{\varphi_2}} - K^u_0 \otimes \varphi_2 \\ S_uA^u_{\psi_1}S^*_u &= A^u_{\psi_1} - \psi_1 \otimes K^u_0. \end{aligned}$$

Donc l'équation (1) égale

$$\begin{aligned} & (A^u_{\overline{\varphi_2}} - K^u_0 \otimes \varphi_2)(A^u_{\psi_1} - \psi_1 \otimes K^u_0) \\ =\ & A^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\psi_1} - A^u_{\overline{\varphi_2}}(\psi_1) \otimes K^u_0 - (K^u_0 \otimes A^u_{\psi_1}\varphi_2) + (K^u_0 \otimes \varphi_2)(\psi_1 \otimes K^u_0) \\ =\ & A^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\psi_1} - A^u_{\overline{\varphi_2}}(\psi_1) \otimes K^u_0 - (K^u_0 \otimes A^*_{\psi_1}\varphi_2) + \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle K^u_0 \otimes K^u_0. \end{aligned}$$

pour l'équation (2)est égale à

$$\begin{aligned} & S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}\tilde{K}^u_0 \otimes (A^u_{\psi_1}S^*_u)^*\tilde{K}^u_0 \\ =\ & S_uA^u_{\overline{\varphi_2}}\tilde{K}^u_0 \otimes S_uA^u_{\overline{\psi_1}}\tilde{K}^u_0. \end{aligned}$$

Comme $A^u$ et C-symétrique ($CA^u_\varphi C = A^*_\varphi = A^u_{\overline{\varphi}}$), alors

$$S_u A^u_{\overline{\varphi_2}} \tilde{K^u_0} = S_u A^u_{\overline{\varphi_2}} C K^u_0 = S_u C C A^u_{\overline{\varphi_2}} C K^u_0 = S_u C A_{\varphi_2} K^u_0 = S_u C \varphi_2 = S_u \tilde{\varphi}_2.$$

donc $S_u A^u_{\overline{\varphi_2}} \tilde{K^u_0} \otimes S_u A^u_{\overline{\psi_1}} \tilde{K^u_0} = S_u \tilde{\varphi}_2 \otimes S_u \tilde{\psi}_1$.
Alors
$A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\psi_1} - S_u A^u_{\overline{\varphi_2}} A_{\psi_1} S^*_u = A^u_{\overline{\varphi_2}} \psi_1 \otimes K^u_0 + (K^u_0 \otimes A^*_{\psi_1} \varphi_2) - \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle (K^u_0 \otimes K^u_0) - S_u \tilde{\varphi}_2 \otimes S_u \tilde{\psi}_1$.
Pour l'équation (d) nous avons :

$$\begin{aligned}
A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}} - S_u A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}} S^*_u &= A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}} - S_u S^*_u A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}} \\
&= (I - S_u S^*_u) A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}} \\
&= (K^u_0 \otimes K^u_0) A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}} \\
&= K^u_0 \otimes (A^u_{\overline{\varphi_2}} A^u_{\overline{\psi_2}})^* K^u_0 \\
&= K^u_0 \otimes A^*_{\overline{\varphi_2}} A^*_{\overline{\psi_2}} K^u_0 \\
&= K^u_0 \otimes A^u_{\varphi_2} A^u_{\psi_2} K^u_0.
\end{aligned}$$

Finalement $A^u_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} A^u_{\psi_1 + \overline{\psi_2}} \in \mathcal{T}_u$ si est seulment si $A^u_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} A^u_{\psi_1 + \overline{\psi_2}} - S_u A^u_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} A^u_{\psi_1 + \overline{\psi_2}} S^{*_u} = A^u_{\varphi_1} A^u_{\psi_1} K^u_0 \otimes K^u_0 + \varphi_1 \otimes \psi_2 + A^u_{\overline{\varphi_2}} \psi_1 \otimes K^u_0 + (K^u_0 \otimes A^*_{\psi_1} \varphi_2) - \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle (K^u_0 \otimes K^u_0) - S_u \tilde{\varphi}_2 \otimes S_u \tilde{\psi}_1 + K^u_0 \otimes A^u_{\varphi_2} A^u_{\psi_2} K^u_0$
$= \varphi_1 \otimes \psi_2 - S_u \tilde{\varphi}_2 \otimes S_u \tilde{\psi}_1 + K^u_0 \otimes (A^u_{\psi_2} A^u_{\varphi_2}) + (A^u_{\varphi_1} \psi_1 + A^u_{\overline{\varphi_2}} \psi_1 + \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle K^u_0) \otimes K^u_0$
$\Leftrightarrow \varphi_1 \otimes \psi_2 - S_u \tilde{\varphi}_2 \otimes S_u \tilde{\psi}_1 = \varphi_0 \otimes K^u_0 + K^u_0 \otimes \psi_0$. Dans ce cas le symbole du produit donné par

$$A^u_\varphi \psi_1 - \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle K^u_0 + \overline{A^u_\Psi \varphi_2} + \varphi_0 + \overline{\psi_0}. \tag{3.4}$$

□

**Proposition 3.2.1.** *Si $A^u_\varphi$ est de type $\alpha$, alors il existe $\varphi_0 \in K^2_u$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que $\varphi_0(0) = 0$ et $A^u_\varphi = A^u_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi_0}} + c}$.*

*Démonstration.* Par définition $A^u_\Phi$ est de type $\alpha$ si $\Phi \overset{\mathrm{A}}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c_1$ avec $\varphi \in K_u$ et $c_1 \in \mathbb{C}$. Soit la fonction $\varphi_0 = \varphi - c_2 k^u_0$, avec $c_2 = \frac{\varphi(0)}{\|k^u_0\|^2}$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi_0}} + c &\overset{\mathrm{A}}{\equiv} (\varphi - c_2 k^u_0) + \alpha \overline{S_u (\widetilde{\varphi - c_2 k^u_0})} + c \\
&\overset{\mathrm{A}}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c - (c_2 k^u_0 + c_2 \alpha \overline{S_u \widetilde{k^u_0}}) \\
&\overset{\mathrm{A}}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c - c_2 (k^u_0 - \alpha \overline{u(0)} \overline{k^u_0}), \quad (car, S_u \widetilde{k^u_0} = -u(0) k^u_0) \\
&\overset{\mathrm{A}}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c - c_2 (1 - \alpha \overline{u(0)}), \quad (car, \overline{k^u_0} \overset{\mathrm{A}}{\equiv} k^u_0 \overset{\mathrm{A}}{\equiv} 1).
\end{aligned}$$

En prenant $c = c_1 + c_2(1 - \alpha\overline{u(0)})$, on a $\varphi_0 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}} + c \stackrel{\mathrm{A}}{\equiv} \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c_1$, avec $\varphi_0(0) = 0$. □

**Proposition 3.2.2.** *Soient $A$ et $B$ deux opérateurs $C$-symétriques dans un espace de Hilbert. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$AB$ est un opérateur C-symétrique.*
2. *$AB = BA$.*
3. *$(AB)^* = A^*B^*$.*

*Démonstration.* Pour 1. ⇒ 2.) on a $AB = CCABCC = C(AB)^*C = CB^*A^*C = BA$.
2. ⇒ 3.) on a $(AB)^* = (BA)^* = A^*B^*$.
3. ⇒ 1.) on a $C(AB)C = CACCBC = A^*B^* = (AB)^*$. □

**Proposition 3.2.3.** *Si $\varphi_1, \psi_1 \in K_u^2$ et $\overline{\varphi_2}, \overline{\psi_2} \in K_u^2$ , alors*

1. *$A^u_{\varphi_1}A^u_{\psi_1} \in \mathcal{T}_u$.*

2. *$A^u_{\overline{\varphi_2}}A^u_{\overline{\psi_2}} \in \mathcal{T}_u$.*

Le théorème suivant donné par Sedlock qui montré dans [24, 23] que la seule classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués qui est stable par la multiplication est la classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués du type Sedlock.

**Théorème 3.2.2.** *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$, tel que $A^u_\varphi$ et $A^u_\psi$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués. Alors $A^u_\varphi A^u_\psi$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si l'un des deux cas suivants est vérifié :*

1. *cas trivial : $A^u_\varphi$ ou $A^u_\psi$ est égal à $cI$ avec $c \in \mathbb{C}$.*
2. *cas non trivial : il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ telle que $A^u_\varphi$ et $A^u_\psi$ sont tous les deux de type $\alpha$. Dans ce cas $A^u_\varphi A^u_\psi$ est aussi de type $\alpha$.*

*Démonstration.* ⇐) Soit $\Phi, \Psi \in L^2(\mathbb{T})$. Soit $A^u_\Phi, A^u_\Psi \in \mathcal{T}_u$, alors pour les deux cas :
cas trivial : si $A^u_\Phi$ ou $A^u_\Psi$ est égal à $cI$ avec $c \in \mathbb{C}$, alors $A^u_\Phi A^u_\Psi$ est clairement dans $\mathcal{T}_u$.
Dans le cas non trivial : si $\alpha = 0$ ou $\infty$, le produit est clairement dans $\mathcal{T}_u$ d'après la Proposition 3.2.3. Supposons donc $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et $\Phi =$

$\varphi+\overline{S_u\widetilde{\varphi}}, \Psi=\psi+\overline{S_u\widetilde{\psi}}$, $\varphi,\psi\in K_u^2, \varphi(0)=0, \psi(0)=0$, puisque $S_uC=CS_u^*$, on a

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi\otimes S_u\widetilde{\psi})-\alpha[(S_u\widetilde{S_u\widetilde{\varphi}})\otimes S_u\widetilde{\psi}] &= \alpha(\varphi-S_uS_u^*\varphi)\otimes S_u\widetilde{\psi}\\ &= [(K_0^u\otimes K_0^u)\varphi]\otimes(\overline{\alpha}S_u\widetilde{\psi})\\ &= K_0^u\otimes[\overline{\alpha\varphi(0)}S_u\widetilde{\psi}]=0.\end{aligned}$$

D'où d'après Théorème 3.2.1, $A_\Phi^uA_\Psi^u\in\mathcal{T}_u$. De-plus, nous avons

$$A_{\varphi+\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+c_1}A_{\overline{\psi+\overline{S_u\widetilde{\psi}}+c_2}}=A_\Phi^uA_\Psi^u+c_2A_\Phi^u+c_1A_\Psi^u+c_1c_2I,$$

alors $A_\Phi^uA_\Psi^u\in\mathcal{T}_u\Leftrightarrow A^u_{\Phi+c_1}A^u_{\Psi+c_2}\in\mathcal{T}_u$.
$\Rightarrow$) Supposons $A_\Phi^uA_\Psi^u\in\mathcal{T}_u$. Il suffit de montrer que l'un de $A_\Phi^u$ et $A_\Psi^u$ est de type $\alpha$ pour certains $\alpha$. Il existe $\varphi_i,\psi_i\in K_u^2, i=1,2$, tel que $\Phi=\varphi_1+\overline{\varphi_2}$ et $\Psi=\psi_1+\psi_2$. Alors d'après le Théorème 3.2.1 :

$$\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi}_2)\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=\Phi_0\otimes K_0^u+K_0^u\otimes\Psi_0,$$

pour certains $\Phi_0,\Psi_0\in K_u^2$, on a 5 cas possibles :

(1) $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=0$ .
(2) $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=c(K_0^u\otimes K_0^u), c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
(3) $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=\Phi_0\otimes K_0^u, \Phi_0\neq cK_0^u$.
(4) $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=K_0^u\otimes\Psi_0, \Psi_0\neq cK_0^u$.
(5) $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=\Phi_0\otimes K_0^u+K_0^u\otimes\Psi_0, \Phi_0,\Psi_0\neq cK_0^u$.

cas 1 : On a $\varphi_1\otimes\psi_2=(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)$ ce qui signifie que $\psi_2$ et $S_u\widetilde{\psi_1}$ sont linéairement dépendants. Tous les deux $\psi_2$ et $S_u\widetilde{\psi_1}$ sont non nuls, donc $\psi_2=\overline{\alpha}S_u\widetilde{\psi_1}$ pour $\alpha\neq0$ et il s'ensuit que $A_\Psi^u$ est de type $\alpha$. De même pour $\varphi_2=\overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi_1}$.

cas 2 : On a $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=c(K_0^u\otimes K_0^u), c\neq0$, donc soit $\varphi_1$ et $S_u\widetilde{\varphi_2}$ sont linéairement dépendants, ou $S_u\widetilde{\psi_1}$ et $\psi_2$ le sont. Dans ce dernier cas, on obtient à encore a $A_\Psi^u$ est de type $\alpha$ pour un certain $\alpha\neq0$ supposons plutôt que $\varphi_1=c_1S_u\widetilde{\varphi_2}$ pour $c_1\neq0$. Il est donc que $S_u\widetilde{\varphi_2}=c_2K_0^u$ ce qui signifie que $A_\Phi^u$ est de type holomorphe.

cas 3 : O na $\varphi_1\otimes\psi_2-(S_u\widetilde{\varphi_2})\otimes(S_u\widetilde{\psi}_1)=\Phi_0\otimes K_0^u, \Phi_0\neq cK_0^u$, donc soit $\varphi_1$ et $S_u\widetilde{\varphi_2}$ sont linéairement dépendants, soit $S_u\widetilde{\psi_1}$ et $\psi_2$ le sont.

Dans ce dernier cas, on obtient à encore a $A^u_\Psi$ est de type $\alpha$ pour un certain $\alpha \neq 0$, supposons plutôt que $\varphi_1 = c_1 S_u\widetilde{\varphi_2}$ pour $c_1 \neq 0$. Alors $(S_u\widetilde{\varphi_2}) \otimes (\overline{c_1}\psi_2 - S_u\widetilde{\psi_1}) = \Phi_0 \otimes K^u_0$, donc $\overline{c_1}\psi_2 - S_u\widetilde{\psi_1} = c_2 K^u_0, c_2 \neq 0$. $A^u_\Psi$ est de type $\alpha$ pour certains $\alpha$.

cas 4 : On a $\varphi_1 \otimes \psi_2 - (S_u\widetilde{\varphi_2}) \otimes (S_u\widetilde{\psi}_1) = K^u_0 \otimes \Psi_0, \Psi_0 \neq cK^u_0$. Donc soit $\varphi_1$ et $S_u\widetilde{\varphi_2}$ sont linéairement dépendants, soit $S_u\widetilde{\psi_1}$ et $\psi_2$ le sont, si $\varphi_1$ et $S_u\widetilde{\varphi_2}$ sont linéairement dépendant, alors il s'ensuit que $\varphi_1 = c_1 K^0_u$ et donc $\Phi$ est de type $\infty$. Sinon il existe un $\alpha \neq 0$ tel que $\psi_2 = \overline{\alpha} S_u\widetilde{\psi_1}$ ce que $A^u_\Psi$ est de type $\alpha$.

cas 5 : On a $\varphi_1 \otimes \psi_2 - (S_u\widetilde{\varphi_2}) \otimes (S_u\widetilde{\psi}_1) = \Phi_0 \otimes K^u_0 + K^u_0 \otimes \Psi_0, \Phi_0, \Psi_0 \neq cK^u_0$. Il existe $f \in K^2_u$ tel que $f(0) = 0$ et $\langle f, \Phi_0\rangle = 1$. Alors on a

$$\begin{aligned} K^0_u &= (\Psi_0 \otimes K^u_0 + K^u_0 \otimes \Phi_0)f && (3.5)\\ &= (\psi_2 \otimes \varphi_1)f - (S_u\widetilde{\psi_1} \otimes S_u\widetilde{\varphi_2})f && (3.6)\\ &= \psi_2\langle f, \varphi_1\rangle - S_u\widetilde{\psi_1}\langle f, S_u\widetilde{\varphi_2}\rangle. && (3.7) \end{aligned}$$

Si $\langle f, \varphi_1\rangle = 0$, alors $cK^u_0 = S_u\widetilde{\psi_1}$, et donc $A^u_\Psi$ est de type $\infty$. De mêm, si $\langle f, S_u\widetilde{\varphi_2}\rangle = 0$ alors $cK^u_0 = \psi_2$ est de type 0. Donc on suppose que $\psi_2 = \overline{\alpha} S_u\widetilde{\psi_1} + cK^u_0$ pour certains $\alpha \neq 0$. Donc $A^u_\Psi$ est de type $\alpha$ .

□

## 3.3 Propriétés de classe de Sedlock.

Nous allons donner quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz tronqués de type Sedlock.

**Proposition 3.3.1.** *Soit* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. *Alors*

$$A \in \mathcal{B}^\alpha_u \iff A^* \in \mathcal{B}^{1/\overline{\alpha}}_u. \tag{3.8}$$

*Démonstration.* Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \infty$ c'est évident car $(A^u_\varphi)^* = A^u_{\overline{\varphi}}$. Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et soit $A \in \mathcal{B}^\alpha_u$. Alors d'après la proposition 3.2.1, il existe $\varphi \in K_u$ avec $\varphi(0) = 0$ tel que $A = A^u_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c}$, avec $c \in \mathbb{C}$, on a

$$A^* = A^u_{\overline{\varphi + c} + \overline{\alpha} S_u\widetilde{\varphi}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} S_u\widetilde{\overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi}} &= \alpha S_u C S_u C\varphi = \alpha S_u S_u^*\varphi \\ &= \alpha(I - K_0^u \otimes K_0^u)\varphi = \alpha\varphi - \alpha\varphi(0)K_0^u \\ &= \alpha\varphi. \end{aligned}$$

on pose $\psi = \overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi}$, alors

$$A^* = A^u_{\overline{\varphi+c}+\overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi}} = A^u_{\psi+\frac{1}{\overline{\alpha}}\overline{S_u\widetilde{\psi}}+\overline{c}} \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}.$$

$\square$

**Proposition 3.3.2.** *Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = \mathbb{C}I$.*

**Proposition 3.3.3.** *Soit $A$ un opérateur borné dans $K_u^2$ et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$ si et seulement si $A$ est de type $\alpha$, dans ce cas, $A = A^u_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}}$, avec $\varphi = \frac{AK_0^u}{1-\overline{u(0)}\alpha}$.*

*Démonstration.* Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Si $A$ est de type $\alpha$ et $S_u^\alpha \in \mathcal{B}_u^\alpha$ (Proposition (3.1.1)), d'après le théorème (3.2.2), on a $AS_u^\alpha$ de type $\alpha$. Par la proposition 3.2.2, on a $A$ commute avec $S_u^\alpha$.
Réciproquement, supposons $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$. Comme $AS_u^\alpha = AS_u + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(AK_0^u \otimes \widetilde{K_0^u})$, $S_u^\alpha A = S_uA + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(K_0^u \otimes A^*\widetilde{K_0^u})$, $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$ et

$A^*C = CA$, on a

$$\begin{aligned}
A - S_u A S_u^* &= A - (S_u^\alpha A - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(K_0^u \otimes A^*\widetilde{K_0^u}))S_u^* \\
&= A - (AS_u^\alpha - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(K_0^u \otimes \widetilde{AK_0^u}))S_u^* \\
&= A - (AS_u + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(AK_0^u \otimes \widetilde{K_0^u}) \\
&- \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(K_0^u \otimes \widetilde{AK_0^u}))S_u^* \\
&= A - AS_uS_u^* - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(AK_0^u \otimes S_u\widetilde{K_0^u}) \\
&+ \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(K_0^u \otimes S_u\widetilde{AK_0^u}) \\
&= AK_0^u \otimes K_0^u + \frac{\overline{u(0)}\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(AK_0^u \otimes K_0^u) \\
&+ \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(K_0^u \otimes S_u\widetilde{AK_0^u}) \\
&= \frac{AK_0^u}{1-\overline{u(0)}\alpha} \otimes K_0^u + K_0^u \otimes \overline{\alpha} S_u \left(\widetilde{\frac{AK_0^u}{1-\overline{u(0)}\alpha}}\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.3.1, $A = A^u_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}}$, avec $\varphi = \frac{AK_0^u}{1-\overline{u(0)}\alpha}$. D'où $A$ est de type $\alpha$. $\square$

**Exemple 3.1.** ***(représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués pour*** $u(z) = z^n$***. )*** *L'espace modèle $K_u$ est de dimension finie si et seulement si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini. Si $u(z) = z^n$ alors*

$$K_{z^n} = span\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\} = \{\sum_{K\geq 0}^{n-1} a_K z^K, a_K \in \mathbb{C}\},$$

*et*

$$K_0^{z^n} = 1, \widetilde{K_0^{z^n}} = z^{n-1}.$$

*Soit $f \in K_{z^n}$ donc*

$$f(z) = \sum_{k\geq 0}^{n-1} \widehat{f}(K) z^k, \;\; et \;\; \widetilde{f}(z) = \sum_{K\geq 0}^{n-1} \overline{\widehat{f}(n-1-k)} z^K.$$

*Dans ce cas, les opérateurs de Toeplitz tronqués sont bornés si et seulement si ils ont un symbole borné, et ils avoir une représentation matricielle naturelle comme : soit* $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T})$*, et soit* $\widehat{\Phi}(n)$ *les coefficients de Fourier de la fonction* $\Phi$*, alors* $M_{A_\Phi^{z^n}}$ *la représentation matricielle de* $A_\Phi^{z^n}$ *par rapport à la base* $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ *est*

$$M_{A_\Phi^{z^n}} = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}(0) & \widehat{\Phi}(-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\Phi}(-n+2) & \widehat{\Phi}(-n+1) \\ \widehat{\Phi}(1) & \widehat{\Phi}(0) & \widehat{\Phi}(-1) & \ddots & & \widehat{\Phi}(n-1) \\ \widehat{\Phi}(2) & \widehat{\Phi}(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\Phi}(0) & \widehat{\Phi}(-1) \\ \widehat{\Phi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\Phi}(2) & \widehat{\Phi}(1) & \widehat{\Phi}(0) \end{pmatrix}$$

**Remarque 3.3.1.** *La représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole holomorphe sont des matrices triangulaires inférieurs, et la représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole antiholomorphe sont des matrices triangulaires supérieures.*

### Matrice de type Sedlock.

*Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et soit* $\varphi \in K_{z^n}$*. Alors*

$$\varphi(z) = \sum_{K \geq 0}^{n-1} \hat{\varphi}(K) z^k$$

*avec* $\hat{\varphi}(n)$ *les coefficients de Fourier de la fonction* $\varphi$*, et*

$$S_{z^n}\tilde{\varphi} = z^n \overline{(\varphi(z) - \varphi(0))} = \sum_{K \geq 1}^{n-1} \overline{\hat{\varphi}(n-k)} z^K$$

*alors*

$$\varphi + \alpha \overline{S_{z^n}\tilde{\varphi}} = \sum_{K \geq 0}^{n-1} \hat{\varphi}(K) z^K + \alpha \sum_{K \geq 1}^{n-1} \hat{\varphi}(n-K) z^{-K}$$

*donc $M_A$ la représentation matricielle de $A^{z^n}_{\varphi+\alpha\overline{S_{z^n}\widetilde{\varphi}}}$ par rapport à la base $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ est*

$$M_A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \alpha\widehat{\varphi}(2) & \alpha\widehat{\varphi}(1) \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) & \ddots & & \alpha\widehat{\varphi}(2) \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) \\ \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) \end{pmatrix}.$$

*Pour $\alpha = \infty$, on a*

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) \\ 0 & 0 & \widehat{\varphi}(n-1) & \ddots & & \widehat{\varphi}(2) \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \widehat{\varphi}(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3.4 Applications sur la classe de Sedlock.

Chalendar et Timotin ont continué l'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$ ([5]). Dans la suite nous allons présenter quelques théorèmes concernant le produit d'opérateurs.

**Théorème 3.4.1** ([5])**.** *Soit $A^u_\varphi \in \mathcal{T}_u$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A^u_\varphi$ est unitaire.*
2. *$A^u_\varphi$ est isométrie.*
3. *$A^u_\varphi$ est co-isométrie.*
4. *$(A^u_\varphi)^* A^u_\varphi - I \in \mathcal{T}_u$.*
5. *$A^u_\varphi (A^u_\varphi)^* - I \in \mathcal{T}_u$.*
6. *Il existe $\alpha \in \mathbb{T}$, tel que $A^u_\varphi \in \mathcal{B}^\alpha_u$ pour certains condition sur $\varphi$.*

**Proposition 3.4.1** ([24])**.** *Soit $A \in \mathcal{T}_u$ est inversible. $A^{-1} \in \mathcal{T}_u$ si est seulement si $A \in \mathcal{B}^\alpha_u$. De plus si $A^{-1} \in \mathcal{T}_u$ alors $A^{-1} \in \mathcal{B}^\alpha_u$.*

*Démonstration.* Si $A^{-1} \in \mathcal{T}_u$, alors $A$ et $A^{-1}$ sont de typa $\alpha$ pour certains $\alpha$ puisque leur produit est $I = A^u_{K_0^u} \in \mathcal{T}_u$. Si $A$ est de type $\alpha$, alors si $|\alpha| \leq 1$ ou $A^*$ est de type $\beta = \frac{1}{\alpha} \leq 1$ dans le premier cas, on a $AS^\alpha_u = S^\alpha_u A$, alors

$$A^{-1}S^\alpha_u = A^{-1}S^\alpha_u AA^{-1} = A^{-1}AS^\alpha_u A^{-1} = S^\alpha_u A^{-1}$$

donc $A^{-1} \in \mathcal{T}_u$ de type $\alpha$. Dans le second cas, on a que $A^* \in \mathcal{T}_u$ inversible de type $\beta$ avec $|\beta| \leq 1$, d'où $A = (A^*)^* \in \mathcal{B}^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}} = \mathcal{B}^\alpha$. □

**Théorème 3.4.2** ([5]). *Soit $u$ une fonction intérieure. Si $A^u_\varphi, A^u_\psi \in \mathcal{T}_u$ alors les assertions suivants sont équivalentes :*

*(i)* $A^u_\varphi A^u_\psi = A^u_\psi A^u_\varphi$.

*(ii)* $A^u_\varphi A^u_\psi - A^u_\psi A^u_\varphi \in \mathcal{T}_u$.

*(iii) L'un des suivants est vrai :*

  *(a) Il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $A^u_\varphi$ et $A^u_\psi$ tous deux appartiennent à $\mathcal{B}^\alpha_u$.*

  *(b) Les opérateurs $I, A^u_\varphi, A^u_\psi$ ne sont pas linéairement indépendants.*

**Théorème 3.4.3** ([5]). *Soit $u$ une fonction intérieure.Si $A^u_\varphi \in \mathcal{T}_u$ alors les assertions suivants sont équivalentes :*

*(i)* $A^u_\varphi \in \mathcal{T}_u$ *est normal.*

*(ii)* $A^u_\varphi (A^u_\varphi)^* - (A^u_\varphi)^* A^u_\varphi \in \mathcal{T}_u$.

*(iii) L'un des deux assertions est vérifiée :*

  *(a) Il existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tel que $A^u_\varphi \in \mathcal{B}^\alpha_u$.*

  *(b) $A^u_\varphi$ est une combinaison linéaire des $OTT$ auto-adjoint et de l'identité .*

# Bibliographie


[1] F. Baratin, Introduction à l'étude des opérateurs Fouriers Intégraux : Intégrale oscillante . exp. n 23, p. 1-11, 1971.

[2] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).

[4] A. Brown, P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 : 89-102, 1963/1964.

[5] I. Chalendar, D. Timotin. Commutation relations for truncated Toeplitz operators, Operators and Matrices, 8, No. 3, 877-888 (2014).

[6] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[7] J. J. Duistermaat, Fourier integral operators. Courant Institute Lecture Notes, New-york 1973.

[8] P. L. Duren, Theory of $H^p$ spaces, Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[9] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math., 30(1),335-400, 1906.

[10] P. A. Fuhrmann, Linear systems and operators in Hilbert space, McGraw-Hill 1981.

[11] S.R. Garcia. Conjugation, The backward shift, and Toeplitz kernels. J. Operator Theory, 54 :2 :239-250, 2005.

[12] S. R. Garcia, J. E. Mashreghi, W. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge University Press, 2016.

[13] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Springer, GTM 236, 2007.

[14] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea Publishing Company, Kew York, 1957.

[15] J. Ph. Labrousse, Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice (1970).

[16] Djaa. B. Messirdi, Etude spectrale des Opérateurs de Multiplications .Maghreb. Math .Rev. Volume 8 No 1/2, 1999.

[17] N. Nikolski, Operators, functions, and systems : an easy reading, vol 1. Mathematical surveys and monographes, vol 92. American Mathematical Society, 2002.

[18] N. Nikolski, Treatise on the shift operator : spectral function theory. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 1986, ISBN 9783540150213.

[19] M. Rosenblum, et J. Rovnyak, Hardy classes and operator theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1985.

[20] Wa. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980.

[21] D. Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Operators And Matrices, 1(4) : 491-526, 2007.

[22] D. Sarason, Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk, John Wiley, Sons Inc., New York, 1994.

[23] N. A. Sedlock, Algebras of truncated Toeplitz operators , Oper. Matrices 5 (2011), 309-326.

[24] N. A. Sedlock, Properties of Truncated Toeplitz Operators, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Ph.D. thesis, Washington University in St. Louis.