

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LAGHOUAT



DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES
MEMOIRE DE MAGISTER

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle Et EDP

THEME DU PROJET :

Séparation des convexes par des hyperplans à vaste marge

Présenté par :

M. Chenini Toufik

Dirigé par:

Dr. Mokhtari Abdelkader

DEVANT LES MEMBRES DU JURY

M. Bentobache Mohand	M.C.A, Université de Laghouat	Président
M. Abita Rahmoune	M.C.B, Université de Laghouat	Examineur
Mme. Moussouni Nacima	M.C.B, Université de Laghouat	Examineur
M. Mokhtari Abdelkader	Professeur, Université de Laghouat	Directeur du mémoire

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2018-2019

ملخص:

إن تقنية آلة الأشعة الحاملة (SVM) من أحسن طرق التلقين الإحصائي ، حيث عرفت خلال العشرية الأخيرة تطورا كبيرا من الناحيتين النظرية و التطبيقية .
تعتمد هذه الأخيرة على قواعد نظرية صلبة مبنية على تعظيم الهوة، مما يمنحها قدرة على التعميم و قد تم استخدام طريقة آلة الأشعة الحاملة (SVM) بنجاح في العديد من المجالات ، كالتعرف على الحروف المكتوبة يدويا و التعرف الألى على صور الأشخاص ، و على الأصوات .
في هذه الأطروحة قمنا باقتراح طريقة جديدة خاصة بتقنية آلة الأشعة الحاملة حيث تم اختبار الطريقة المقترحة على عدد لا بأس به من التطبيقات و كانت النتائج مشجعة .

كلمات مفتاحية:

فصل – تحذب- مستو زائدي (مستوي مصعد) – هان بناخ – شكل تربيعي- مسألة الثنوي

Remerciements

Tous mes remerciements s'adressent tous d'abord à tout puissant ALLAH, d'avoir guidé mes pas vers le chemin du savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. Mokhtari Abdelkader, Professeur à l'université de Laghouat, de m'avoir fait l'honneur de diriger mes travaux durant ces années de magister en étant toujours disponible et encourageant, ses conseils, sa rigueur scientifique et ses valeurs humaines m'ont bien guidé.

Je tiens à remercier également M. Bentobache Mohand, M.C.A, Université de Laghouat, d'avoir accepté d'être le président de jury.

Je remercie vivement M. Abita Rahmoune M.C.B, Université de Laghouat, et Mme. Mousouni Nacima M.C.B, Université de Laghouat d'avoir accepté d'être examinateurs.

Je tiens énormément à remercier mes amies et mes collègues pour leurs encouragements. Pour terminer, je tiens à remercier ma femme, et tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

- A mes parents,

- A mon frère,

- A ma femme,

- A mes soeures,

- A toute la famille,

- Enfin je dédie ce mémoire à l'ensemble de tous mes collègues.

Résumé

Les machines à vecteurs supports (Support Vector Machines) sont de nouvelles techniques d'apprentissage statistique proposées par V. Vapnik en 1995. Elles permettent d'aborder des problèmes très divers comme la classification, la régression, la fusion, etc. Depuis leur introduction dans le domaine de la Reconnaissance de Formes (RdF), plusieurs travaux ont pu montrer l'efficacité de ces techniques principalement en traitement d'image.

L'idée essentielle des SVM consiste à projeter les données de l'espace d'entrée (appartenant à deux classes différentes) non-linéairement séparables dans un espace de plus grande dimension appelé espace de caractéristiques de façon à ce que les données deviennent linéairement séparables.

Dans cet espace, la technique de construction de l'hyperplan optimal est utilisée pour calculer la fonction de classement séparant les deux classes.

Dans ce mémoire, un nouvel algorithme est proposé pour résoudre un problème SVM binaire, l'algorithme a été testé sur un bon nombre d'applications, et les résultats ont été encourageants.

MOTS CLES : séparation - convexe – hyperplan - H-Banach - forme quadratique- problème dual.

Abstract

Support vector machines are new statistical learning techniques proposed by V. Vapnik in 1995. They allow to tackle very different problems such as classification, regression, fusion, etc. Since their introduction in the field of Recognition of Shapes (RdF), several works have shown the effectiveness of these techniques mainly in image processing. The essential idea of SVM is to project the input space data (belonging to two different classes) nonlinearly separable into a larger dimension space called feature space so that the data become linearly separable.

In this space, the optimal hyperplane construction technique is used to calculate the ranking function separating the two classes.

In this memory, a new algorithm is proposed to solve a binary SVM problem, the algorithm has been tested on a number of applications, and the results have been encouraging.

Key words : separation - convex - hyperplane - H-Banach - quadratic form - dual problem

Table des matières

Introduction générale	6
1 Éléments d'analyse convexe	9
1.1 Ensembles convexes	9
1.1.1 Ensemble convexe	9
1.1.2 Description interne d'ensembles convexes :	10
1.2 Théorèmes sur les ensembles convexes	15
1.3 Les théorèmes de séparation	16
1.4 Théorème de séparation et théorie d'inégalités linéaires	19
1.5 Fonctionnelles convexes	30
1.6 Conclusion	34
2 Séparation à vaste marge	35
2.1 Séparateur linéaire	37
2.2 Séparabilité	38
2.2.1 Marge	39
2.2.2 Hyperplans canoniques	39
2.3 Un problème d'optimisation	40
2.3.1 Cas linéairement séparable	40
2.3.2 Théorème (KKT) [5]	42
2.3.3 Cas linéairement non séparable	45
2.4 Conclusion	47
3 Séparation non linéaire	48
3.1 Fonctions noyaux	48
3.1.1 Théorème de Mercer	51
3.2 Propriétés des noyaux	51
3.2.1 Commutativité	51
3.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz	51
3.2.3 Combinaison de noyaux	52
3.3 Philosophie des méthodes à noyaux	52
3.4 L'importance de la matrice de Gram	53
3.5 Utilisation de fonctions noyau :	54
3.5.1 Exemple avec $X = R$	54
3.5.2 Exemple avec $X = R^2$: la fonction XOR	55
3.6 Exemples des noyaux	57
3.6.1 Noyau polynomial	57

3.6.2	Noyau gaussien	57
3.6.3	Autres noyaux	59
3.7	Domaines d'application des SVMs	59
3.8	Conclusion	61
4	Algorithme d'optimisation du problème	62
4.1	L'algorithme proposé	63
4.2	Conclusion	70
4.3	Applications	70
	Conclusion générale	76

Introduction générale

Les Support Vector Machines souvent traduit par l'appellation de Séparateur à Vaste Marge (SVM) sont une classe d'algorithmes d'apprentissage initialement définis pour la discrimination c'est-à-dire la prévision d'une variable qualitative binaire. Ils ont été ensuite généralisés à la prévision d'une variable quantitative. Dans le cas de la discrimination d'une variable dichotomique, ils sont basés sur la recherche de l'hyperplan de marge optimale qui, lorsque c'est possible, classe ou sépare correctement les données tout en étant le plus éloigné possible de toutes les observations. Le principe est donc de trouver un classifieur, ou une fonction de discrimination, dont la capacité de généralisation (qualité de prévision) est la plus grande possible.

Cette approche découle directement des travaux de Vapnik en théorie de l'apprentissage depuis 1995. Elle s'est focalisée sur les propriétés de généralisation (ou prévision) d'un modèle en contrôlant sa complexité.

Le principe fondateur des SVM est justement d'intégrer à l'estimation le contrôle de la complexité c'est-à-dire le nombre de paramètres qui est associé dans ce cas au nombre de vecteurs supports. L'autre idée directrice de Vapnik dans ce développement, est d'éviter de substituer à l'objectif initial : la discrimination, un ou des problèmes qui s'avèrent finalement plus complexes à résoudre comme par exemple l'estimation non-paramétrique de la densité d'une loi multidimensionnelle en analyse discriminante.

Le principe de base des SVM consiste à ramener le problème de la discrimination à celui, de la recherche d'un hyperplan optimal. Deux idées ou astuces permettent d'atteindre cet objectif :

- La première consiste à définir l'hyperplan comme solution d'un problème d'optimisation sous contraintes dont la fonction objectif ne s'exprime qu'à l'aide de produits scalaires entre vecteurs et dans lequel le nombre de contraintes " actives " ou vecteurs supports contrôle la complexité du modèle.
- Le passage à la recherche de surfaces séparatrices non linéaires est obtenu par l'introduction d'une fonction noyau (kernel) dans le produit scalaire induisant implicitement une transformation non linéaire des données vers un espace intermédiaire (feature space) de plus grande dimension. D'où l'appellation couramment rencontrée de machine à noyau ou kernel machine. Sur le plan théorique, la fonction noyau définit un espace hilbertien, dit auto-reproduisant et isométrique par la transformation non linéaire de l'espace initial et dans lequel est résolu le problème linéaire.

Cet outil devient largement utilisé dans de nombreux types d'applications et s'avère un concurrent sérieux des algorithmes les plus performants.

L'introduction de noyaux, spécifiquement adaptés à une problématique donnée, lui confère une grande flexibilité pour s'adapter à des situations très diverses (reconnaissance de formes, de séquences génomiques, de caractères, détection de spams, diagnostics...). À noter que, sur le plan algorithmique, ces algorithmes sont plus pénalisés par le nombre d'observations, c'est-à-dire le nombre de vecteurs supports potentiels, que par le nombre de variables. Néanmoins, des versions performantes des algorithmes permettent de prendre en compte des bases de données volumineuses dans des temps de calcul acceptables.

L'objet de ce mémoire est l'étude et la recherche d'une méthode simple pour trouver l'hyperplan à vaste marge. Ceci nous conduit à un problème d'optimisation.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier traite les notions fondamentales des ensembles convexes et fonctionnelles convexes et les théorèmes de séparation et se termine par le Théorème de Hahn-Banach et la séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel.

Le deuxième chapitre décrit en détail la théorie et les fondements des machines à vecteurs supports.

Dans le troisième chapitre, nous présentons également la séparation non linéaire et la Philosophie des méthodes à noyaux.

Le quatrième chapitre contient l'algorithme proposé pour trouver le séparateur (l'hyperplan à vaste marge).

Enfin, une conclusion générale et des perspectives de travail viennent clôturer ce mémoire.

Chapitre 1

Éléments d'analyse convexe

1.1 Ensembles convexes

Segment

Soit E un espace vectoriel réel et soient x, y deux points de cet espace. On appelle segment fermé joignant les points x et y dans E l'ensemble de tous les éléments de la forme

$$\alpha x + \beta y, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

C'est à dire L'ensemble des points $tx + (1 - t)y, \forall t \in [0, 1]$.

Un segment privé de ses extrémités x et y s'appelle segment ouvert.

1.1.1 Ensemble convexe

Un ensemble M de E est dit convexe, si pour tout couple de points $x, y \in M$, le segment joignant ces points est contenu dans M .

C'est à dire

$$\forall (x; y) \in M^2, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in M$$

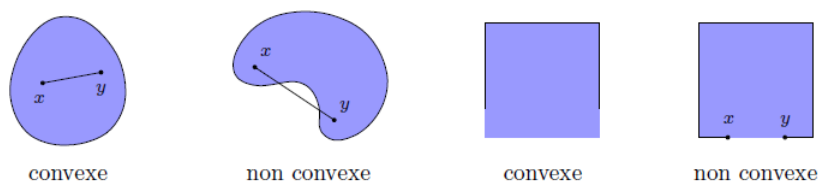


Figure 1.1 : ensemble convexe;ensemble non convexe

Exemples d'ensembles convexes

Quelques ensembles convexes dans R^n

- ϕ (l'ensemble vide),
- R^n (la totalité de l'espace R^n),
- R_+^n (l'ensemble des vecteurs dont les composantes positives ou nulles),
- R_{+*}^n (l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont strictement positives),
- $B_r(a) = \{x / \|x - a\| < r\}$ et $\hat{B}_r(a) = \{x / \|x - a\| \leq r\}$ (les boules ouvertes et fermées de rayon r centrées en a),
- $\{x / b^T x < \beta\}$ et $\{x / b^T x \leq \beta\}$ (un demi-espace ouvert ou fermé),
- $\{x / b^T x = \beta\}$ (un hyperplan, intersection de deux demi-espaces fermés).

Noyau

Soit E un espace vectoriel, M un ensemble de E . on appelle noyau de M l'ensemble suivant : $J(M) = \{x \in M; \forall y \in E, \exists \varepsilon \in R_+ : x + ty \in M, \text{ pour tout } t \in R : |t| < \varepsilon\}$ un ensemble M convexe tel $J(M) \neq \emptyset$ s'appelle corpe convexe.

1.1.2 Description interne d'ensembles convexes :

Combinaisons convexes

Définition 1.1.5.1

Une combinaison convexe de vecteurs y_1, \dots, y_m est leur combinaison affine avec des coefficients non négatifs. Ou, ce qui est identique, une combinaison linéaire

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i.$$

avec des coefficients non négatifs avec la somme de coefficients égale à 1 :

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Le résultat suivant ressemble à ceux qui nous avons obtenu pour des sous-espaces linéaires et ensembles affines.

Proposition 1.1.5.1

Un ensemble M de R^n est convexe si et seulement s'il est fermé par rapport à toutes les combinaisons convexes de ses éléments, c.-à-d., si et seulement si n'importe quelle combinaison convexe des vecteurs de M est encore un vecteur de M .

Preuve.

partie " si " (la suffisance) : supposons que M contient toutes les combinaisons convexes des éléments de M . Alors, avec deux points quelconques $x, y \in M$, M contient également le vecteur $\lambda x + (1 - \lambda)y$ pour tout $\lambda \in [0; 1]$, puisque c'est une combinaison convexe de x et y ; ainsi, M est convexe.

partie " seulement si " (la nécessité) : supposons M convexe; nous devrions montrer qu'alors M contient n'importe quelle combinaison convexe

$$(*) \quad y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i.$$

de vecteurs $y_i \in M$. La preuve est donnée par récurrence sur m . Le cas $m = 1$ est évident (puisque la seule combinaison convexe d'un terme est $1 \cdot y = y_1 \in M$). Supposons que nous savons déjà que n'importe quelle combinaison convexe de $m - 1$ vecteurs, $m \geq 2$, de M est encore un vecteur de M , et montrons que ce résultat demeure valide également pour toutes les combinaisons convexes de m vecteurs de M . Soit $(*)$ une telle combinaison. Nous pouvons supposer que $1 > \lambda_m$, puisqu'autrement il n'y a rien à démontrer. En supposant $\lambda_m < 1$, nous pouvons écrire

$$y = (1 - \lambda_m) \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_m} y_i \right] + \lambda_m y_m.$$

Ce qui est entre les parenthèses est une combinaison convexe de $m - 1$ points de M et, par notre hypothèse inductive c'est un point, disons z , de M ; nous avons

$$y = (1 - \lambda_m)z + \lambda_m y_m.$$

avec z et $y_m \in M$, et $y \in M$ par la définition du convexe M .

Enveloppe convexe

Comme pour les sous-espaces linéaires et ensemble affines nous avons le fait fondamental suivant :

Théorèmes 1.1.5.1

Soit $\{M_\alpha\}_\alpha$ une famille d'ensembles convexes de R^n . Alors l'intersection $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$ est convexe.

Démonstration

soit $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$ tous les ensembles M_α étant convexes. Soient, d'autre part x et y deux points quelconques de M . Le segment joignant ces points appartient à chacun des ensembles M_α , donc à M . Par conséquent, M est bien un ensemble convexe.

Corollaire 1.1.5.1

Soit M un sous-ensemble non vide dans R^n . Alors parmi tous les ensembles convexes contenant M (ces ensembles existent, par exemple, R^n lui-même) il existe le plus petit, à savoir, l'intersection de tous les ensembles convexes contenant M .

Cet ensemble s'appelle enveloppe convexe de M [notation : $Conv(M)$]. Enveloppe linéaire de M est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de M , enveloppe affine est l'ensemble de toutes les combinaisons affines des vecteurs de M .

Proposition 1.1.5.2

Pour $M \subset R^n$ non vide :

$$conv(M) = \{l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de vecteurs de M\}.$$

Preuve :

selon la Proposition, tout ensemble convexe contenant M (en particulier, $Conv(M)$) contient toutes les combinaisons convexes des vecteurs de M . Il reste à vérifier que $Conv(M)$ ne contient rien d'autre. A cet effet il suffit de montrer que l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des vecteurs de M , nous l'appelons M^* , lui-même est convexe (en tenant compte du fait que $Conv(M)$ est le plus petit ensemble convexe contenant M , nous réalisons notre but – l'inclusion $Conv(M) \subset M^*$. Montrer que M^* est convexe est la même chose que de montrer que n'importe quelle combinaison convexe $vx + (1 - v)y$ de deux points quelconques $x = \sum_i \lambda_i x_i$, $y = \sum_i \mu_i x_i$ de M^* – deux combinaisons convexes des vecteurs $x_i \in M$ – est encore une combinaison convexe des vecteurs de M . C'est évident :

$$vx + (1 - v)y = v \sum_i \lambda_i x_i + (1 - v) \sum_i \mu_i x_i = \sum_i \xi_i x_i, \quad \xi_i = v\lambda_i + (1 - v)\mu_i$$

et les coefficients ξ_i sont bien non négatifs avec la somme égale 1.

Le polytope

Définition 1.1.5.2

Un polytope est, par définition, l'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide dans R^n , c.-à-d. l'ensemble de forme

$$\text{Conv}(\{u_1, \dots, u_N\}) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

Un cas important d'un polytope est le simplexe : l'enveloppe convexe de $n + 1$ points v_1, \dots, v_{n+1} affinement indépendants de R^n :

$$M = \text{Conv}(\{v_1, \dots, v_{n+1}\}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\};$$

les points v_1, \dots, v_{n+1} s'appellent les sommets du simplexe.

Notons que nécessairement $\lambda_i \leq 1$ pour $i = 1, \dots, n$. La Figure 1.2 représente le simplexe de R^3 .

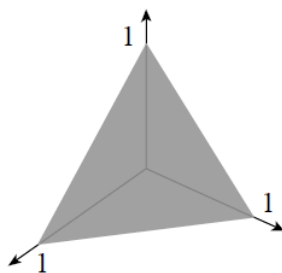


Figure 1.2 Le simplexe de R^3

Le cône

Définition 1.1.5.3

Un sous-ensemble non vide M de R^n s'appelle conique, s'il contient, avec chaque point $x \in M$, le rayon entier $Rx = \{tx / t \geq 0\}$ engendré par le point :

$$x \in M \Rightarrow tx \in M \quad \forall t \geq 0.$$

Un ensemble conique convexe s'appelle cône .

Proposition 1.1.5.3

Le sous-ensemble non vide M de R^n est un cône si et seulement s'il possède les propriétés suivantes :

- il est conique : $x \in M, t \geq 0 \Rightarrow tx \in M$;
- il contient les sommes de ses éléments : $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$.

Comme conséquence immédiate, nous obtenons qu'un cône est fermé par rapport aux combinaisons linéaires avec des coefficients non négatifs de ces éléments. Et vice versa, un ensemble non vide fermé par rapport à ces combinaisons est un cône.

Exemple 1.1.5.1

L'ensemble de solutions d'un système homogène (peut-être infini)

$$a_\alpha^T x \leq 0, \alpha \in L = \{1, 2, \dots, n\}$$

d'inégalités linéaires avec n inconnues x , c.-à-d. l'ensemble

$$K = \{x / a_\alpha^T x \leq 0 \forall \alpha \in L\},$$

est un cône.

En particulier, l'ensemble de solutions d'un système homogène fini de m inégalités linéaires

$$Ax \leq 0$$

(A est une matrice $m \times n$) est un cône; un cône de ce dernier type s'appelle polyhedral. Notez que les cônes donnés par des systèmes d'inégalités homogènes linéaires non strictes sont nécessairement fermés.

Nous verrons bientôt que, vice versa, chaque cône convexe fermé est l'ensemble de solutions d'un tel système, de sorte que l'exemple 1.1.5.1 soit l'exemple générique d'un cône convexe fermé.

Les cônes forment une famille très importante d'ensembles convexes, et on peut développer la théorie de cônes absolument semblable (et dans un sens, équivalent) à celle des ensembles convexes.

Par exemple, en introduisant la notion de combinaison conique des vecteurs x_1, \dots, x_k comme combinaison linéaire des vecteurs avec des coefficients non négatifs, on peut facilement montrer les résultats suivants complètement analogues à ceux qui concernent les ensembles convexes généraux, avec la combinaison conique jouant le rôle de la combinaison convexe :

- Un ensemble est un cône si et seulement s'il est non vide et est fermé par rapport à toutes les combinaisons coniques de ses éléments
- L'intersection de n'importe quelle famille des cônes est encore un cône; en particulier, pour tout ensemble non vide $M \subset R^n$ il existe le plus petit cône contenant M – son enveloppe conique $Cone(M)$, et cette enveloppe conique est composée de toutes les combinaisons coniques des vecteurs de M .

En particulier, l'enveloppe conique d'un ensemble fini non vide $M = \{u_1, \dots, u_N\}$ de vecteurs dans R^n est le cône

$$Conv(M) = \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i / \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Un fait fondamental (cf. l'histoire ci-dessus au sujet des polytopes) est que c'est la description (interne) générique d'un cône polyhedral – d'un ensemble donné par (description externe) un nombre fini d'inégalités linéaires homogènes.

1.2 Théorèmes sur les ensembles convexes

On appelle simplexe de R^n le sous-ensemble suivant

$$F = \left\{ \alpha_i \in R^n / \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.2.1

On appelle combinaison convexe de n points $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ tout point y obtenu par la formule

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ avec } \alpha_i \in F.$$

Lemme 1.2.1 [Caratheodory]

Dans un espace vectoriel de dimension n , toute combinaison convexe de m points, $m > n + 1$, se ramène à une combinaison convexe de $n + 1$ points au plus.

Démonstration.

Soit $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in F$

Il suffit de montrer que si $m > n + 1$, on peut faire décroître m de 1. Ce fait, utilisé de façon répétée, prouvera le résultat. Si on considère les vecteurs $z_i \stackrel{\text{def}}{=} x_i - x_1$ pour $i = 2, \dots, m$ en nombre au moins égal à $n + 1$, ces vecteurs ne peuvent être linéairement indépendants, et il existe donc une combinaison linéaire nulle, à coefficients β_i non tous nuls, de cet ensemble, donc

$$\sum_{i=2}^m \beta_i z_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \beta_i x_i = 0 \text{ avec } \sum_{i=1}^m \beta_i = 0,$$

en ayant posé $\beta_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{i=2}^m \beta_i$. On considère alors

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, m} \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \text{ et } \delta_i = \alpha_i - \frac{\beta_i}{\gamma}, i = 1, \dots, m.$$

Noter que $\gamma \neq 0$ car les β_i ne sont pas tous nuls. On vérifie maintenant que

$$y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^m \delta_i x_i,$$

et que $\delta \in F$ avec au moins un δ_i égal à 0. On a donc bien exprimé y comme une combinaison convexe de moins de m points.

L'ensemble des combinaisons convexes de n points isolés est un sous-ensemble convexe (appelé polytope ou polyèdre).

Remarque 1.2.1

On vérifie aisément qu'un ensemble $M \subset R^n$ est convexe, ssi tout points combinaison convexe de points de M est dans M .

Proposition 1.2.1

Les ensembles suivants sont des convexes de R^n .

1. Tout sous-espace affine (donc en particulier ϕ , les singletons, les droites, les plans, les hyperplans et R^n lui même)
2. Tout segment de droite $[a; b]$,
3. Tout demi-espace H^- ,
4. Toute boule ouverte $B(x; r)$.

1.3 Les théorèmes de séparation**Théorème de Caratheodory**

Appelons dimension d'un ensemble M convexe non vide (notation : $\dim M$) la dimension affine de $Aff(M)$.

Théorème 1.3.1

Soit $M \subset R^n$, et soit $\dim ConvM = m$. Alors tout point $x \in ConvM$ est une combinaison convexe d'au plus $m + 1$ points de M .

Preuve :

Soit $x \in ConvM$. Par Proposition 2.1.3 sur la structure de l'enveloppe convexe, x est une combinaison convexe de certains points x_1, \dots, x_N de M :

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i, \quad \left[\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right].$$

Choisissons parmi toutes ces représentations de x celle avec le plus petit possible nombre N de coefficients non nuls, et supposons que c'est la combinaison ci-dessus. J'affirme que $N \leq m + 1$ (cette affirmation mène au résultat désiré). En effet, si $N > m + 1$, alors les points x_1, \dots, x_N ne sont pas affinement indépendants (puisque n'importe quel ensemble affinement indépendant dans $Aff(M) \supset M$ est composé d'au plus de $\dim Aff(M) + 1 = m + 1$ points. Ainsi, certaine combinaison non triviale de x_1, \dots, x_N avec la somme zéro de coefficients est nulle :

$$\sum_{i=1}^N \delta_i x_i = 0, \quad \left[\sum_{i=1}^N \delta_i = 0, (\delta_1, \dots, \delta_N) \neq 0 \right].$$

Il en suit que pour tout t la combinaison affine

$$(*) \sum_{i=1}^N [\lambda_i + t\delta_i] x_i = x.$$

Ici à gauche nous avons une combinaison affine des x_i . Quand $t = 0$, c'est une combinaison convexe – tous les coefficients sont non négatifs. Quand t est grand, ce n'est pas une combinaison convexe, puisque certains δ_i sont négatifs (en effet, pas tous les δ_i sont zéro,

et la somme de δ_i est 0). Il existe, évidemment, le plus grand t pour lequel la combinaison (*) a des coefficients non négatifs, à savoir

$$t^* = \min_{i:\delta_i < 0} \frac{\lambda_i}{|\delta_i|}.$$

Pour cette valeur de t , la combinaison (*) a tous les coefficients non négatifs, et au moins un des coefficients est zéro. Ainsi, nous avons représenté x comme une combinaison convexe de moins de N vecteurs de M .

Théorème 1.3.2 [Radon]

Soit S ensemble d'au moins $n + 2$ points x_1, \dots, x_N dans R^n . Alors cet ensemble peut être divisé en deux ensembles non vides S_1 et S_2 dont les enveloppes convexes ont un point commun : il existe une partition $I \cup J = \{1, \dots, N\}$, $I \cap J = \emptyset$, de l'ensemble d'indices $\{1, \dots, N\}$ en deux ensembles non vides I et J et les combinaisons convexe des points $\{x_i, i \in I\}$, $\{x_j, j \in J\}$ qui coïncident, c.-à-d. qu'il existe $\alpha_i, i \in I$, et $\beta_j, j \in J$, tels que

$$\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = \sum_{j \in J} \beta_j x_j; \quad \sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 1; \quad \alpha_i, \beta_j \geq 0.$$

Preuve.

Comme $N > n + 1$, les points x_1, \dots, x_N ne sont pas affinement indépendants (car dans R^n tout ensemble affinement indépendant contient au plus $n + 1$ éléments). Ainsi, il existe un combinaison non triviale de x_i égale 0 avec la somme nulle des coefficients :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = 0, \quad \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i = 0, (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \neq 0 \right].$$

Soit $I = \{i/\lambda_i \geq 0\}$, $J = \{i/\lambda_i < 0\}$; alors I et J ne sont pas vides et forment une partition de $\{1, \dots, N\}$. Nous avons

$$a \equiv \sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{j \in J} (-\lambda_j) > 0$$

(la somme des λ_i est nulle et tous les λ_i ne le sont pas zéros). Si on pose

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{a}, \quad i \in I, \quad \beta_j = \frac{-\lambda_j}{a}, \quad j \in J,$$

on obtient

$$\alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad \sum \alpha_i = 1, \quad \sum_{j \in J} \beta_j = 1,$$

et

$$\left[\sum_{i \in I} \alpha_i x_i \right] - \left[\sum_{j \in J} \beta_j x_j \right] = a^{-1} \left(\left[\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right] - \left[\sum_{j \in J} (-\lambda_j) x_j \right] \right) = a^{-1} \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = 0.$$

Théorème 1.3.3 [Helley I]

Soit F une famille finie d'ensembles convexes dans R^n . On suppose que n'importe quels $n + 1$ ensembles de la famille ont un point commun. Alors tous les ensembles ont un point commun.

Preuve :

Montrons le résultat par récurrence en nombre N d'ensembles dans la famille. Le cas de $N \leq m + 1$ est évident. Supposons maintenant que nous avons prouvé le théorème pour toutes les familles avec un certain nombre $N \geq m + 1$ d'ensembles, et soit S_1, \dots, S_N, S_{N+1} une famille de $N + 1$ ensembles convexes qui satisfait les conditions du Théorème de Helley ; nous devrions montrer que leur l'intersection des ensembles S_1, \dots, S_N, S_{N+1} est non vide. En supprimant de notre famille de $N + 1$ ensembles l'ensemble S_i , nous obtenons la famille de N ensemble qui satisfait les conditions du Théorème de Helley et ainsi, par l'hypothèse inductive, possède une intersection non vide de ses membres :

$$(\forall i \leq N + 1) : T^i = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1} \cap S_{i+1} \cap \dots \cap S_{N+1} \neq \phi.$$

Choisissons un point x_i dans chaque ensemble T_i (non vide). Nous obtenons $N + 1 \geq n + 2$ points de R^n . Comme nous le savons du Théorème de Radon, nous pouvons diviser l'ensemble d'indices $\{1, \dots, n + 1\}$ en deux sous-ensembles non vides I et J de telle manière qu'une certaine combinaison convexe x des points $x_i, i \in I$, soit simultanément une combinaison convexe des points $x_j, j \in J$. Pour accomplir la preuve il suffit de vérifier que x appartient à tous les ensembles S_1, \dots, S_{N+1} . En effet, soit i^* un indice de notre ensemble d'indices, montrons que $x \in S_{i^*}$. Nous avons $i^* \in I$, ou $i^* \in J$. Dans le premier cas tous les ensembles $T_j, j \in J$, sont contenus dans S_{i^*} (puisque S_{i^*} participe à toutes les intersections qui donnent T^i avec $i \neq i^*$). En conséquence, tous les points $x_j, j \in J$, appartiennent à S_{i^*} , et donc x , qui est une combinaison convexe de ces points, appartient également à S_{i^*} (tous nos ensembles sont convexes!), comme requis. Dans le deuxième cas le raisonnement semblable indique que tous les points $x_i, i \in I$, appartiennent à S_{i^*} , et donc x , qui est une combinaison convexe de ces points, appartient à S_{i^*} .

Théorème 1.3.4 [Helley II]

Soit F une famille d'ensembles convexes dans R^n . Supposons que

- (a) tous les $n + 1$ ensembles de la famille ont un point commun,
- (b) chaque ensemble de la famille est fermé, et l'intersection des ensembles d'une certaine sous-famille finie est bornée (par exemple, un des ensembles dans la famille est borné).

Alors tous les ensembles de la famille ont un point commun.

Preuve :

Par le théorème précédent, tous les sous-familles finies de F ont les intersections non vides, et ces intersections sont convexes (puisque l'intersection de n'importe quelle famille des ensembles convexes est convexe par Théorème 2.1.2); grâce à (a) ces intersections sont également fermées. Ajoutant à F toutes les intersections des sous-familles finies de F , nous obtenons une famille plus nombreuse F' qui consiste en des ensembles convexes

fermés, et n'importe quel sous-famille finie de cette famille plus nombreuse a encore une intersection non vide. Par ailleurs, (b) implique que cette nouvelle famille contient un ensemble borné Q . Puisque tous les ensembles sont fermés, la famille d'ensembles

$$\{Q \cap Q' / Q' \in F\}$$

est une famille emboîtée d'ensembles compacts (c.-à-d. une famille d'ensembles compacts avec l'intersection non vide de toute sous-famille finie).

Théorème 1.3.5

Soient A et B deux convexes disjoints non vides de E . 1. Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens large, i.e.

$$\exists (f, \alpha) \in E' \times R, \forall a \in A, \forall b \in B, f(a) \leq \alpha \leq f(b).$$

2. Si A est fermé et B compact, alors il existe un hyperplan fermé H qui sépare A et B au sens strict, i.e.

$$\exists (f, \alpha) \in E' \times R, \exists \varepsilon > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, f(a) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq f(b).$$

Remarque 1.3.1

de manière équivalente, on dira que l'hyperplan fermé $H = \{x \in E, f(x) = \alpha\}$ sépare A et B au sens large si

$$\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$$

et au sens strict si

$$\sup_{a \in A} f(a) < \alpha < \inf_{b \in B} f(b).$$

1.4 Théorème de séparation et théorie d'inégalités linéaires

Dans cette section nous allons répondre à la question suivante : supposons que nous avons deux ensembles convexes dans R^n , quand pouvons-nous les séparer par un hyperplan, c.-à-d. trouver une forme linéaire non nulle qui en tout point d'un ensemble est supérieur ou égal à sa valeur en n'importe quel point de l'autre ensemble? Nous verrons que la réponse à cette question forme, dans un sens, le cœur de l'analyse convexe ; elle est à la base de tous nos développements ultérieurs.

Théorème 1.4.1

Un hyperplan M dans R^n (un ensemble affine de dimension $n - 1$), est un ensemble de niveau d'une forme linéaire non triviale :

$$\exists a \in R^n, b \in R, a \neq 0 : M = \{x \in R^n / a^T x = b\}.$$

Nous pouvons, par conséquent, associer à l'hyperplan (ou à la forme linéaire associée a , qui est définie uniquement, à la multiplication par un réel non nul près) les ensembles

suivants :

– les demi-espaces ouverts "haut" et "bas"

$$M^{++} = \{x \in R^n / a^T x > b\}, M^{--} = \{x \in R^n / a^T x < b\};$$

ces ensembles sont convexes, et puisqu'une forme linéaire est continue, et ces ensembles sont donnés par des inégalités strictes sur la valeur d'une fonction continue, ils sont en effet ouverts.

Notez que puisque a est uniquement défini par M , à la multiplication par un réel non nul près, ces demi-espaces ouverts sont uniquement défini par l'hyperplan, à la permutation du "haut" et du "bas" près (qu'un demi-espace est le "haut", dépend du choix particulier de a);

– les demi-espaces "haut" et "bas" fermés

$$M^+ = \{x \in R^n / a^T x \geq b\}, M^- = \{x \in R^n / a^T x \leq b\};$$

Ceux-ci sont également les ensembles convexes, fermés (puisque'ils sont donnés par des inégalités non-strictes sur la valeur d'une fonction continue). On le voit facilement que le demi-espace supérieur ou inférieur fermé est la fermeture du demi-espace ouvert correspondant, et M lui-même est la frontière (c.-à-d. le complément de l'intérieur dans la fermeture) de chacun des quatre demi-espaces. Il est évident que nos demi-espaces et M lui-même donnent une partition de R^n :

$$R^n = M^{--} \cup M \cup M^{++}$$

(partition par des ensembles disjoints),

$$R^n = M^- \cup M^+$$

(M est une intersection des ensembles à droite).

Maintenant nous définissons la notion de base de séparation propre de deux ensembles convexes T et S par un hyperplan.

Séparation propre

Définition 1.4.1

On dit qu'un hyperplan

$$M = \{x \in R^n / a^T x = b\} \quad [a \neq 0]$$

sépare proprement deux ensembles convexes (non vides) S et T , si

- (i) les ensembles appartiennent aux demi-espaces fermés opposés définis par M , et
- (ii) au moins un des ensembles n'est pas contenu dans M .

Nous disons que S et T peuvent être proprement séparés, s'il existe un hyperplan qui sépare proprement S et T , c.-à-d. s'il existe $a \in R^n$ tel que

$$\sup_{x \in S} a^T x \leq \inf_{y \in T} a^T y$$

et

$$\inf_{x \in S} a^T x < \sup_{y \in T} a^T y.$$

Exemples 1.4.1

– l'hyperplane donné par $a^T x \equiv x_2 - x_1 = 1$ dans R^2 sépare proprement les ensembles convexes polyédraux

$$T = \left\{ x \in R^2 / 0 \leq x_1 \leq 1, 3 \leq x_2 \leq 5 \right\} \text{ et } S = \left\{ x \in R^2 / x_2 = 0; x_1 \geq -1 \right\};$$

– l'hyperplane $a^T x \equiv x = 1$ dans R^1 sépare proprement les ensembles convexes

$$S = \{x \leq 1\} \text{ et } T = \{x \geq 1\};$$

– l'hyperplane $a^T x \equiv x_1 = 0$ dans R^2 sépare proprement les ensembles

$$S = \left\{ x \in R^2 / x_1 < 0, x_2 \geq -\frac{1}{x_1} \right\} \text{ et } T = \left\{ x \in R^2 / x_1 > 0, x_2 > \frac{1}{x_1} \right\};$$

– l'hyperplane $a^T x \equiv x_2 - x_1 = 1$ n'est pas sépare proprement les ensembles convexes

$$S = \left\{ x \in R^2 / x_2 \geq 1 \right\} \text{ et } T = \left\{ x \in R^2 / x_2 = 0 \right\};$$

– l'hyperplane $a^T x \equiv x_2 = 0$ dans R^2 sépare les ensembles

$$S = \left\{ x \in R^2 / x_2 = 0, x_1 \leq -1 \right\} \text{ et } T = \left\{ x \in R^2 / x_2 = 0, x_1 \geq 1 \right\}$$

mais ne les sépare pas proprement.

Séparation forte**Définition 1.4.2**

On dit que deux ensembles non vides S et T dans R^n peuvent être séparés fortement, s'il existent deux hyperplans parallèles distincts qui séparent S et T , c.-à-d. s'il existe $a \in R^n$ tel que

$$\sup_{x \in S} a^T x < \inf_{y \in T} a^T y.$$

Il est évident que le

Séparation forte \rightarrow séparation propre

Nous pouvons immédiatement produire des exemples d'ensembles qui peuvent être séparés proprement sans pouvoir être séparés fortement, par exemple, les ensembles

$$\left\{ x \in R^2 / x_1 > 0, x_2 \geq \frac{1}{x_1} \right\} \text{ et } \left\{ x \in R^2 / x_1 < 0, x_2 \geq -\frac{1}{x_1} \right\}.$$

On arrive maintenant à la question :

Quand une paire d'ensembles convexes non vides S et T dans R^n peut être séparée [proprement ou fortement]? La question la plus importante est celle sur la possibilité de séparation propre. La réponse est la suivante :

Théorème 1.4.2

Deux ensembles convexes non vides S et T dans R^n peuvent être séparés proprement si et seulement si leurs intérieurs relatifs sont disjoints :

$$riS \cap riT = \phi.$$

Nécessité

La nécessité de la propriété indiquée (la partie "seulement si" du théorème) est plus ou moins évidente. En effet, supposez que les ensembles sont proprement séparables, de sorte que pour un certain $a \in R^n$ non nul

$$\sup_{x \in S} a^T x \leq \inf_{y \in T} a^T y; \quad \inf_{x \in S} a^T x < \sup_{y \in T} a^T y. \quad (3.1)$$

Nous devrions mener à une contradiction à l'hypothèse que riS et riT ont un certain point commun \bar{x} . Supposons que c'est le cas; alors de la première inégalité dans (3.1) il est évident que \bar{x} maximise la fonction linéaire $f(x) = a^T x$ sur S et donne simultanément le minimum cette fonction sur T . Maintenant, nous avons le simple résultat suivant :

Lemme 1.4.1

La fonction linéaire $f(x) = a^T x$ peut atteindre son maximum ou minimum sur un ensemble convexe Q en un point $x \in riQ$ si et seulement si la fonction est constante sur Q .

Preuve :

La partie "si" est évidente. Pour prouver la partie "seulement si", supposons que $\bar{x} \in riQ$ est le minimiseur de $f(x)$ sur Q et y est un point arbitraire de Q ; nous devrions montrer que $f(\bar{x}) = f(y)$. Il n'y a rien à prouver si $y = \bar{x}$, ainsi nous pouvons supposer que $y \neq \bar{x}$. Comme $\bar{x} \in riQ$ le segment $[y, \bar{x}]$, qui est contenu dans Q , peut être prolongé un peu par le point \bar{x} , sans quitter Q , de sorte qu'il existe $z \in Q$ tel que $\bar{x} \in [y, z)$, c.-à-d. $\bar{x} = (1 - \lambda)z + \lambda y$ avec un certain $\lambda \in (0, 1]$. Comme $y \neq \bar{x}$, nous avons en fait $\lambda \in (0, 1)$. Et puisque f est linéaire, nous avons

$$f(\bar{x}) = (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(y).$$

Comme $f(\bar{x}) \leq \min \{f(y), f(z)\}$ et $0 < \lambda < 1$ cette relation peut être satisfaite seulement si $f(\bar{x}) = f(y) = f(z)$.

Revenant à nos considérations liées à (3.1), nous concluons du Lemme que sous notre hypothèse ($\exists \bar{x} riS \cap riT$, c.-à-d. quand $f(x) = a^T x$ atteint son maximum sur S et son minimum T en \bar{x}) f est constante (et égale à $a^T \bar{x}$) sur les deux ensembles S et T ; mais ceci contredit la deuxième inégalité dans (3.1). Ainsi, nous avons montré que la condition $riS \cap riT = \emptyset$ est nécessaire pour la séparation propre de S et T .

Suffisance

La preuve de la partie suffisance du théorème de séparation est beaucoup plus instructif. Il y a plusieurs manières de la prouver, et nous allons suivre le chemin qui passe par Lemme de Farkas.

Lemme de Farkas Homogène :

Soit a_1, \dots, a_N et a des vecteurs de R^n . On s'intéresse à la question : quand a appartient-il au cône engendré par les vecteurs a_1, \dots, a_n . Autrement dit, quand est-ce que a peut être représenté comme une combinaison linéaire a_i avec des coefficients non négatifs ? Une condition nécessaire pour ceci est évidente : si

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \quad [\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N]$$

alors tout vecteur h qui a des produits scalaires non négatifs avec tous les a_i doit aussi avoir le produit scalaire non négatif avec a :

$$a = \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0 \forall i, h^T a_i \geq 0 \forall i \Rightarrow h^T a \geq 0.$$

Le Lemme de Farkas Homogène dit que cette condition est aussi suffisante :

Lemme 3.1.2

Soit a, a_1, \dots, a_N vecteurs de R^n . Le vecteur a est une combinaison conique des vecteurs a_i si et seulement si tout vecteur h qui satisfait $h^T a_i \geq 0, i = 1, \dots, N$, satisfait aussi $h^T a \geq 0$.

Preuve :

La nécessité – la partie "seulement si" – est évidente. Pour prouver la suffisance de la condition du lemme supposons que chaque vecteur h satisfaisant $h^T a_i \geq 0, \forall i$ satisfait également $h^T a \geq 0$, et montrons que a est une combinaison conique des vecteurs a_i . Il n'y a rien à montrer quand $a = 0$ – le vecteur zéro naturellement est une combinaison conique des vecteurs a_i . Ainsi, dorénavant nous supposons que $a \neq 0$.

1. Soit $\Pi = \{h / a^T h = -1\}$ et soit $A_i = \{h \in \Pi / a_i^T h \geq 0\}$.

Π est un hyperplan dans R^n , et chaque A_i est un ensemble polyhedral contenu dans cet hyperplan.

2. Nous savons que l'intersection de tous les ensembles $A_i, i = 1, \dots, n$, est vide (puisque un vecteur h de l'intersection aurait les produits intérieurs non négatifs avec tout le a_i et le produit intérieur -1 avec a , et on sait qu'un tel h n'existe pas).

Choisissons la plus petite, en nombre d'éléments, sous-famille de la famille A_1, \dots, A_N qui a toujours l'intersection vide de ses membres.

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que c'est la famille A_1, \dots, A_k . Ainsi, l'intersection de tous les k ensembles A_1, \dots, A_k est vide, mais l'intersection de n'importe quels ensembles de $k - 1$ de la famille A_1, \dots, A_k est non vide.

3. J'affirme que

– A. $a \in \text{Lin}(\{a_1, \dots, a_k\})$;

– B. Les vecteurs a_1, \dots, a_k sont linéairement indépendants.

A. est facile : en supposant que $a \notin E = \text{Lin}(\{a_1, \dots, a_k\})$, nous obtenons que la projection orthogonale f du vecteur a sur le complément orthogonal E^\perp de E est non nul. Le produit scalaire de f et de a est identique que $f^T f$, c.-à-d. est positif, alors que $f^T a_i = 0 = 1, \dots, k$.

Si on pose $h = -(f^T f)^{-1} f$, nous voyons que $h^T a = -1$ et $h^T a_i = 0, i = 1, \dots, k$. En d'autres termes, h appartient à chaque ensemble $A_i, i = 1, \dots, k$, par la définition de ces ensembles, et donc l'intersection des ensembles A_1, \dots, A_k est non vide, qui est une contradiction.

La preuve de B, est donné par le Théorème de Helley I. En effet, supposons que a_1, \dots, a_k sont linéairement dépendants, et menons cette supposition à une contradiction.

Comme a_1, \dots, a_k sont linéairement dépendants, la dimension m de $E = \text{Lin}(\{a_1, \dots, a_k\})$ est pour sur $< k$. Nous savons déjà du A. que $a \in E$.

Soit maintenant $A'_i = A_i \cap E$. J'affirme que toutes les familles de $k - 1$ des ensembles A'_i ont une intersection non vide, alors que tous ces k ensembles ont l'intersection vide. La deuxième affirmation est évidente – puisque A_1, \dots, A_k ont l'intersection vide, le même est le cas avec leurs parties A' . La première affirmation est également facilement vérifiable : prenons par exemple $k - 1$ des ensembles "à trait" A'_1, \dots, A'_{k-1} . Par la construction, l'intersection de $[A_1, \dots, A_{k-1}$ est non vide ; soit h un vecteur de cette intersection, c.-à-d. un vecteur avec les produits scalaires non négatifs avec a_1, \dots, a_{k-1} et le produit -1 avec a . En remplaçant h avec sa projection orthogonale h' sur E , nous ne changeons pas tous ces produits intérieurs, puisque ce sont des produits avec des vecteurs de E ; ainsi, h' est également un point commun de A_1, \dots, A_{k-1} , et puisque c'est un point de E , c'est aussi bien un point commun des ensembles A'_1, \dots, A'_{k-1} . Maintenant nous pouvons accomplir la preuve du B. : les ensembles A'_1, \dots, A'_k sont les ensembles convexes appartenant à l'hyperplan $\Pi' = \Pi \cap E = \{h \in E / a^T h = -1\}$ (Π' est en effet un hyperplan dans E car $0 \neq a \in E$) dans le sous-espace linéaire m -dimensionnel E . Π' est un ensemble affine de dimension $l = \dim E - 1 = m - 1 < k - 1$ (dans notre cas $m = \dim E < K$), et tous $l + 1 \leq k - 1$ des sous-ensembles convexes A'_1, \dots, A'_K de Π' ont une intersection non vide. Du Théorème de Helley I (qui naturellement est valide pour les sous-ensembles convexes d'un ensemble affine, la dimension affine de l'ensemble jouant le rôle de n dans la formulation originale) il découle que tous les ensembles A'_1, \dots, A'_K ont un point commun, ce qui, comme nous le savons, n'est pas le cas. Ainsi, par contradiction, on obtient que a_1, \dots, a_k sont linéairement indépendant.

4. Le A. et le B. étant dans notre disposition, nous pouvons facilement finir la preuve de la partie "si" du lemme de Farkas comme suit : par A. nous avons $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ avec des coefficients réels λ_i , et tous ce que nous avons à montrer est que ces coefficients ne sont pas négatifs. Supposons, au contraire, que, par exemple $\lambda_1 < 0$. Augmentons le système (linéairement indépendant par B.) des vecteurs a_1, \dots, a_k par les vecteurs f_1, \dots, f_{n-k} à une base dans R^n (ce qui est possible par Théorème 1.2.1). Soit maintenant $\xi_i(x)$ soit les coordonnées d'un vecteur x dans cette base (ξ_1 correspond à a_1). La fonction $\xi_1(x)$ est une forme linéaire de x et donc, selon la Section 1.1.2, est le produit intérieur avec un certain vecteur : $\xi_1(x) = f^T x \forall x$.

Nous avons $f^T a = \xi_1(a) = \lambda_1 < 0$ et $f^T a_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & i = 2, \dots, k, \end{cases}$

ainsi $f^T a_i \geq 0, i = 1, \dots, k$. On en déduit par la normalisation appropriée de f que le vecteur $|\lambda_1|^{-1} f$, appartient aux A_1, \dots, A_k , ce qui est la contradiction désirée – par la construction, cette intersection est vide.

Remarque 3.1.1 :

Une conséquence immédiate du Lemme de Farkas Homogène est que l'enveloppe conique

$$\text{cone}(\{a_1, \dots, a_N\}) = \left\{ a = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i / \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

d'un ensemble fini non vide est l'ensemble de toutes les solutions d'un certain système d'inégalités linéaires homogènes non strictes, notamment,

$$\left\{ h^T a \geq 0 \forall (h : h^T a_i \geq 0, i = 1, \dots, N) \right\}.$$

Ainsi, l'enveloppe conique d'un ensemble fini de vecteurs est convexe et fermé.

Du Lemme de Farkas au Théorème de séparation

Maintenant nous sommes enfin équipés pour prouver la partie suffisance du Théorème de Séparation.

Étape 1.

Séparation d'un polytope convexe et d'un point extérieur au polytope.

Commentons par le cas apparemment très particulier du théorème, où un des ensembles est un polytope – l'enveloppe convexe de l'ensemble fini de points x_1, \dots, x_N – et l'autre est un singleton $T = \{x\}$. Nous devrions montrer que si $x \notin S = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_N\})$, il existe alors une forme linéaire qui sépare proprement x et S . En fait, nous prouverons même l'existence de la séparation forte.

Associons aux vecteurs n -dimensionnels x_1, \dots, x_N, x les vecteurs $a = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a_i = \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix}$ $(n+1)$ -dimensionnels, $i = 1, \dots, n$. J'affirme que a n'appartient pas à l'enveloppe conique de a_1, \dots, a_n . En effet, si a serait représentable comme une combinaison linéaire de a_1, \dots, a_n avec des coefficients non négatifs, alors, en regardant la $(n+1)$ -ème coordonnée dans une telle représentation, on déduirait que la somme des coefficients devrait être 1, de sorte que cette représentation, en réalité, est une combinaison convexe de x_1, \dots, x_n avec la valeur x , ce qu'on a supposé impossible.

Comme a n'appartient pas à l'enveloppe conique de a_1, \dots, a_n , par le Lemme de Farkas Homogène, il existe un vecteur $h = \begin{pmatrix} f \\ \alpha \end{pmatrix} \in R^{n+1}$ qui "sépare" a et a_1, \dots, a_n , c.-à-d. que

$$h^T a > 0, h^T a_i \leq 0, i = 1, \dots, n.$$

Ainsi, bien sur,

$$h^T a > \max_i h^T a_i.$$

Puisque les composants dans tous les produits scalaires $h^T a, h^T a_i$ qui proviennent des $(n+1)$ -èmes coordonnées sont égaux entre eux, nous en concluons que le composant n -dimensionnel f de h sépare x et x_1, \dots, x_n :

$$\left[h^T a - \alpha = \right] f^T x > \max_i f^T x_i \quad \left[= \max_i h^T a_i - \alpha \right].$$

Comme pour toute combinaison convexe $y = \sum_i \lambda_i x_i$ des points x_i on a $f^T y \leq \max_i f^T x_i$, on conclut, finalement, que

$$f^T x > \max_{y \in \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_N\})} f^T y,$$

et f sépare fortement $T = \{x\}$ et $S = \text{Conv}(\{x_1, \dots, x_N\})$.

Remarque 3.1.2

Un sous-produit de notre raisonnement est qu'un polytope – l'enveloppe convexe d'un ensemble non vide fini de vecteurs – est l'ensemble de solutions d'un système d'inégalités linéaires non strictes, notamment, du système

$$\left\{ f^T X \leq \max_{i=1, \dots, N} f^T v_i \quad \forall f \right\}.$$

$$\text{Conv}(\{v_1, \dots, v_N\})$$

Il en suit que un polytope est non seulement convexe, mais également fermé.

Étape 2.

Séparation d'un ensemble convexe et d'un point extérieur.

Soit maintenant S un ensemble non vide convexe arbitraire et $T = \{x\}$ est un singleton extérieur à S (à la différence avec l'étape 1 est que maintenant on ne suppose pas que S soit un polytope). Tout d'abord, sans perte de généralité nous pouvons supposer que S contient 0 (si ce n'est pas le cas, nous pouvons soumettre S et T à la translation $S \mapsto S - a$, $T \mapsto T - a$ avec $a \in S$). Soit L l'enveloppe linéaire de S . Si $x \notin L$, la séparation est facile : en prenant comme f la composante de x orthogonale à L , nous obtenons

$$f^T x = f^T f > 0 = \max_{y \in S} f^T y,$$

et f sépare fortement S et $T = \{x\}$. Il nous reste le cas $x \in L$. Comme $S \subset L$, $x \in L$ et $x \notin S$, L est un sous-espace linéaire différent de 0. Soit $\Sigma = \{h \in L / |h| = 1\}$ la sphère unité dans L . C'est un ensemble fermé et borné dans R^n (la fermeture vient du fait que $|\cdot|$ est continu et L est fermé, cf. la section 1.4.1). En conséquence, Σ est un ensemble compact (Proposition 1.1.1). Montrons qu'il existe $f \in \Sigma$ qui sépare x et S dans le sens que

$$f^T x \geq \sup_{y \in S} f^T y.$$

Supposons, au contraire, qu'un tel f n'existe pas. Sous notre hypothèse pour chaque $h \in \Sigma$ il existe $y_h \in S$ tel que

$$h^T y_h > h^T x.$$

Puisque l'inégalité est stricte, il existe un voisinage U_h du vecteur h tels que

$$(h')^T y_h > (h')^T x \quad \forall h' \in U_h.$$

La famille d'ensembles ouverts $\{u_h\}_{h \in \Sigma}$ que nous obtenons est une couverture de Σ ; puisque Σ est compact, nous pouvons en extraire une couverture finie U_{h_1}, \dots, U_{h_N} de

Σ . Soit $y_1 = y_{h_1}, y_2 = y_{h_2}, \dots, y_N = y_{h_N}$ les points correspondants et soit le polytope $S' = \text{Conv}(\{y_1, \dots, y_N\})$ est engendré par ces points. En raison de l'origine de y_i , ils sont tous des points de S ; puisque S est convexe, le polytope S' est contenu dans S et, par conséquent, ne contient pas x . Par Étape 1, x peut être fortement séparé de S' : il existe a tels que

$$a^T x > \sup_{y \in S'} a^T y. \quad (3.4)$$

Comme x et $S' \subset S$ appartiennent à L , nous pouvons supposer que $a \in L$ (il suffit de remplacer a avec sa projection orthogonale sur L , ce qui ne change pas les deux cotés de (3.4)). En normalisant a , nous pouvons également avoir $|a| = 1$, de sorte que $a \in \Sigma$. Maintenant nous obtenons une contradiction : comme $a \in \Sigma$ et U_{h_1}, \dots, U_{h_N} forment une couverture de Σ , a appartient à un certain U_{h_i} . Or, par la construction de U_{h_i} (regardez (3.3) nous avons

$$a^T y_i \equiv a^T y_{h_i} > a^T x,$$

ce qui contredit (3.4) car $y_i \in S'$. La contradiction que nous obtenons montre que il existe $f \in \Sigma$ qui satisfait (3.2). Montrons qu'en fait f sépare proprement S et $\{x\}$: étant donné (3.2), tout ce que nous avons à montrer est que la forme linéaire $f(z) = f^T z$ n'est pas constante sur S . C'est évident : par notre hypothèse initiale, $0 \in S$, de sorte que si $f(z)$ étaient constants sur S , f soit orthogonal à n'importe quel vecteur de S et par conséquent à $L = \text{Lin}(S)$, ce qui est impossible, puisque, encore par construction, $f \in L$ et $|f| = 1$.

Étape 3.

Séparation de deux ensembles convexes non vides disjoints

Maintenant nous sommes en mesure de montrer que deux ensembles non vides et convexes d'intersection vide S et T peuvent être proprement séparés. A cet effet considérons la différence arithmétique

$$\Delta = S - T = \{x - y \mid x \in S, y \in T\}.$$

Comme $S \cap T = \emptyset$, Δ ne contient pas 0. Par Étape 2, nous pouvons proprement séparer Δ et $\{0\}$: il existe h tels que

$$f^T 0 = 0 \geq \sup_{z \in \Delta} f^T z \text{ et } f^T 0 > \inf_{z \in \Delta} f^T z.$$

Autrement dit,

$$0 \geq \sup_{x \in S, y \in T} [f^T x - f^T y] \text{ et } 0 > \inf_{x \in S, y \in T} [f^T x - f^T y],$$

ce qui signifie que f sépare proprement S et T .

Étape 4.

Séparation d'ensembles convexes non vides avec les intérieurs relatifs disjoints.

Soit S et T deux ensembles convexes non vides avec les intérieurs relatifs dont l'intersection est vide. Nous devrions montrer que S et T peuvent être proprement séparés. C'est immédiat : comme nous savons du Théorème 2.1.1, les ensembles $S' = riS$ et $T' = riT$ sont non vides et convexes ; puisque nous sommes donnés que leur intersection est vide, ils peuvent être proprement séparés par l'étape 3 : il existe f tels que

$$\inf_{x \in T'} f^T x \geq \sup_{y \in S'} f^T y \text{ et } \sup_{x \in T'} f^T x > \inf_{y \in S'} f^T y. \quad (3.5)$$

On peut voir facilement que f sépare proprement S et T . En effet, les quantités sur les cotés gauches et droites de la première inégalité de (3.5) ne changent pas si nous remplaçons S' avec clS' et T' avec clT' ; par Théorème 2.1.1, $clS' = clS \supset S$ et $clT' = clT \supset T$, et nous obtenons $\inf_{x \in T'} f^T x = \inf_{x \in T} f^T x$, et, de la même façon, $\sup_{y \in S'} f^T y = \sup_{y \in S} f^T y$. Ainsi, nous obtenons de (3.5)

$$\inf_{x \in T} f^T x \geq \sup_{y \in S} f^T y.$$

Il suffit de remarquer que $T' \subset T$, $S' \subset S$, et la seconde inégalité dans (3.5) implique

$$\inf_{x \in T} f^T x > \inf_{y \in S} f^T y.$$

Séparation forte

Nous savons du Théorème de Séparation ce qui sont les conditions nécessaires et suffisantes simples pour la séparation propre de deux ensembles convexes - leurs intérieurs relatifs devraient être disjoints. Il y a également une condition nécessaire et suffisante simple pour que deux ensembles soient fortement séparables :

Proposition 3.1.1

Deux ensembles convexe non vides S et T dans R^n peuvent être séparés fortement si et seulement si la "distance entre ces ensembles est positive" :

$$\rho(S, T) = \inf_{x \in S, y \in T} |x - y| > 0.$$

Ceci est, en particulier, le cas quand un des ensembles est compact, l'autre est fermé et les ensembles sont disjoints.

Preuve

La nécessité est évidente : si S et T peuvent être séparés proprement, c.-à-d. que pour un certain a on a

$$\alpha \equiv \sup_{x \in S} a^T x < \beta \equiv \inf_{y \in T} a^T y,$$

alors pour toute paire (x, y) avec $x \in S$ et $y \in T$ on a

$$|x - y| \geq \frac{\beta - \alpha}{|a|}$$

(autrement on aurait par l'inégalité de Cauchy

$$a^T y - a^T x = a^T (y - x) \leq |a| |y - x| < \beta - \alpha,$$

qui est impossible).

Pour prouver la suffisance, considérons l'ensemble $\Delta = S - T$. C'est un ensemble convexe qui ne contient pas de vecteurs de longueur plus petite que $\rho(S, T) > 0$; par conséquent, il n'intersecte pas la boule B d'un certain rayon positif r centré à l'origine. En conséquence, par le Théorème de Séparation Δ peut être séparé proprement de B : il existe a tel que

$$\inf_{z \in B} a^T z \geq \sup_{x \in S, y \in T} a^T (x - y) \text{ et } \sup_{z \in B} a^T z > \inf_{x \in S, y \in T} a^T (x - y). \quad (3.6)$$

Du seconde inégalité nous obtenons que $a \neq 0$; ainsi $\inf_{z \in B} a^T z < 0$, et la première inégalité dans (3.6) dit que a sépare fortement S et T .

1.5 Fonctionnelles convexes

Definition 1.5.1

une fonctionnelle non négative $P : E \rightarrow R_+$ est dite convexe telle que

$$\begin{aligned} P(x + y) &\leq p(x) + p(y) \\ P(\lambda x) &= \lambda P(x) \text{ pour } \lambda > 0 \end{aligned}$$

On peut avoir $P(x) = +\infty$

Théorème 1.5.1

Soit P une fonctionnelle convexe sur l'espace vectoriel E , k et une constante positive.

i) L'ensemble $M = \{x \in E : P(x) \leq k\}$ est convexe.

ii) Si $P(x) < +\infty$ alors M est un corps convexe, et $J(M) = \{x \in E : P(x) < k\}$.

Démonstration

i) Si $x, y \in E$ et $\lambda \geq 0$ en effet

$$\begin{aligned} P(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq P(\lambda x) + P((1 - \lambda)y) \\ &\leq \lambda P(x) + (1 - \lambda)P(y) \\ &\leq \lambda k + (1 - \lambda)k = k \end{aligned}$$

ii) Si $P(x) < +\infty$ pour tout $x \in E$; pour tout $t > 0$, et $y \in E$, $x \in M$ on a :

$$P(x \pm ty) \leq P(x) + tP(\pm y)$$

Si $P(y) = P(-y) = 0$, on a $P(x \pm ty) \leq P(x) \leq k$ alors $x \pm ty \in E$ pour tout $t > 0$

Si un des nombres non négatif $P(y)$, $P(-y)$ est différent de zéro ;

$$P(x) + tP(\pm y) < k \Rightarrow t < \frac{k - P(x)}{\max(P(y); P(-y))}$$

pour tout $x \in E$ avec $P(x) < k$, $\varepsilon = \frac{k - P(x)}{\max(P(y); P(-y))}$

Fonctionnelle de Minkowski

Étudions la liaison existant entre les fonctionnelles convexes et les ensembles convexes.

Théorème 1.5.2

Si p est une fonctionnelle convexe sur l'espace vectoriel E et k est un nombre positif, l'ensemble

$$M = \{x : p(x) \leq k\}$$

est convexe. Si la fonctionnelle p est partout finie, alors M est un corps convexe ayant pour noyau l'ensemble

$$M = \{x : p(x) < k\}$$

(contenant nécessairement le point 0).

Démonstration

Si $x, y \in M$ et $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, alors

$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha p(x) + \beta p(y) \leq k$$

c.-à-d. M est un ensemble convexe. Supposons maintenant la fonctionnelle p finie, $p(x) < k$; alors pour $t > 0$ et $y \in M$ on a

$$p(x \pm ty) \leq p(x) + tp(\pm y).$$

si $p(-y) = p(y) = 0$, on a $x \pm ty \in M$ pour tous les t ; si, par contre, au moins l'un des nombres non négatifs $p(y), p(-y)$ est différent de 0, on a $x \pm ty \in M$ pour

$$t < \frac{k - p(x)}{\max(p(y), p(-y))}.$$

Choisissons une valeur bien déterminée de k , par exemple, $k = 1$.

Alors toute fonctionnelle convexe finie p définit de façon unique dans E un corps convexe

$$M = \{x : p(x) \leq 1\}$$

tel que $0 \in J(M)$. Inversement, soit M un corps convexe dont le noyau contient le point 0. Alors

$$p_M(x) = \inf \left\{ r : \frac{x}{r} \in E, r > 0 \right\} \quad (2)$$

est une fonctionnelle convexe finie. On l'appelle fonctionnelle de Minkowski pour le corps convexe M .

Montrons que la fonctionnelle de Minkowski (2) est convexe. Pour tout $x \in E$ l'élément $\frac{x}{r}$ appartient à E , si r est assez grand; donc, la valeur de $p_M(x)$ définie par l'égalité (2), est non négative et finie. Si $t > 0$ et $y = tx$, on a

$$\begin{aligned} p_M(y) &= \inf \left\{ r > 0 : \frac{y}{r} \in M \right\} = \inf \left\{ r > 0 : \frac{tx}{r} \in M \right\} \\ &= \inf \left\{ tr' > 0 : \frac{x}{r'} \in M \right\} = t \inf \left\{ r' > 0 : \frac{x}{r'} \in M \right\} \\ &= tp_E(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Soient maintenant $x_1, x_2 \in E$ et $\varepsilon > 0$ quelconque. Choisissons les nombres $r_i (i = 1, 2)$ de façon que $p_E(x_i) < r_i < p_E(x_i) + \varepsilon$; alors $\frac{x_i}{r_i} \in M$. posons $r = r_1 + r_2$; $\frac{x_1 + x_2}{r} = \frac{r_1 x_1}{r r_1} + \frac{r_2 x_2}{r r_2}$ appartient au segment d'extrémités $\frac{x_1}{r_1}$ et $\frac{x_2}{r_2}$. En vertu de la convexité de M , ce segment est contenu dans M ; en particulier, son point $\frac{x_1 + x_2}{r}$ appartient à M . Par conséquent,

$$P_M(x_1 + x_2) \leq r = r_1 + r_2 < p_M(x_1) + p_M(x_2) + 2\varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a

$$P_M(x_1 + x_2) \leq p_M(x_1) + p_M(x_2). \quad (4)$$

Les relations (3) et (4) signifient précisément que la fonctionnelle $p_M(x)$ est convexe.

Si M est un ensemble convexe contenant le point 0, alors l'égalité (2) définit une fonctionnelle $p_M(x)$ convexe, mais non nécessairement finie.

Théorème 1.5.3 [Hahn-Banach]

Soient E un espace vectoriel réel et E_0 un sous-espace quelconque de E . Soit, en outre, f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur le sous-espace E_0 . Une fonctionnelle f , définie sur l'espace E tout entier, est appelée prolongement de la fonctionnelle f_0 , si

$$f(x) = f_0(x), \forall x \in E_0.$$

Séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réelle, M et N deux sous-ensembles de E . $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonctionnelle linéaire.

On dit que f sépare M et N s'il existe une constante C telle que

$$f(x) \leq C, \forall x \in M \text{ et } f(x) \geq C, \forall x \in N$$

Les deux assertions qui suivent sont des conséquences immédiates de cette définition.

- 1) La fonctionnelle linéaire f sépare les ensembles M et N si et seulement si elle sépare les ensembles $M - N$ et $\{0\}$ (c.-à-d. l'ensemble de tous les éléments de la forme $x - y$ avec $x \in M, y \in N$ et le point 0).
- 2) La fonctionnelle linéaire f sépare les ensembles M et N si et seulement si pour tout $x \in E$ elle sépare les ensembles $M - x$; et $N - x$.

Du théorème de Hahn-Banach on obtient facilement le théorème suivant sur la séparation des ensembles convexes dans un espace vectoriel qui admet de nombreuses applications.

Théorème 1.5.4

Soient M et N deux ensembles convexes disjoints dans un espace vectoriel réel E . Si au moins l'un d'eux, par exemple M , possède un noyau non vide (c.-à-d. est un corps convexe), il existe une fonctionnelle linéaire non nulle f définie sur E qui sépare M et N .

Démonstration

Sans restreindre la généralité on peut supposer que le point 0 appartient au noyau de l'ensemble M .

(Dans le cas contraire on aurait considéré les ensembles $M - x_0$ et $N - x_0$, où x_0 est un point quelconque du noyau de M .) Soit y_0 un point quelconque de l'ensemble N ; alors le point $-y_0$ appartient au noyau de l'ensemble $M - N$ et 0 appartient au noyau de l'ensemble $K = M - N + y_0$. Les ensembles M et N étant disjoints, on a $0 \notin M - N$ et $y_0 \notin K$. Soit p la fonctionnelle de Minkowski pour l'ensemble K . Alors $p(y_0) \geq 1$ (car $y_0 \notin K$). Introduisons la fonctionnelle linéaire

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$$

Elle est définie sur le sous-espace de dimension 1, constitué des éléments de la forme αy_0 , et vérifie la condition

$$f_0(\alpha y_0) \leq p(\alpha y_0)$$

car $p(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$ pour $\alpha \geq 0$ et $f_0(\alpha y_0) = \alpha f_0(y_0) < 0 < p(\alpha y_0)$ pour $\alpha < 0$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, la fonctionnelle f_0 peut être prolongée de façon à obtenir une fonctionnelle linéaire f , définie sur tout l'espace E et vérifiant sur E la condition $f(y) \leq p(y)$. On en déduit que $f(y) \leq 1$ pour $y \in K$ et, en même temps, $f(y_0) \geq 1$.

Ainsi, la fonctionnelle f sépare les ensembles E et $\{y_0\}$ et donc les ensembles $M - N$ et $\{0\}$; par conséquent, f sépare les ensembles M et N .

1.6 Conclusion

Ce chapitre expose l'essentiel des résultats de convexité-les Théorèmes sur ensembles convexes -et Les théorèmes de séparation.

Ainsi, le résumé d'analyse convexe se limite à énoncer les principales propriétés géométriques et topologiques des ensembles convexes (en particulier les théorèmes de séparation)

Chapitre 2

Séparation à vaste marge

Introduction

Les machines à vecteurs supports (ou séparateurs à vaste marge) sont un ensemble de techniques d'apprentissage destinées à résoudre des problèmes de discrimination, c'est-à-dire décider à quelle classe appartient un échantillon, ou de régression, c'est-à-dire prédire la valeur numérique d'une variable.

Les SVM sont une généralisation des classifieurs linéaires. Les SVM ont été développés dans les années 1990 à partir des considérations théoriques de Vladimir Vapnik [10] sur le développement d'une théorie statistique de l'apprentissage : la Théorie de Vapnik-Chervonenkis.

Les SVM ont rapidement été adoptés pour leur capacité à travailler avec des données de grandes dimensions, le faible nombre d'hyper paramètres, le fait qu'ils soient bien fondés théoriquement, et leurs bons résultats en pratique.

Les SVM ont été appliqués à de très nombreux domaines (bio-informatique, recherche d'information, vision par ordinateur, finance...).

Historique

Les séparateurs à vastes marges reposent sur deux idées clés :

- la notion de marge maximale et
- la notion de fonction noyau.

Ces deux notions existaient depuis plusieurs années avant qu'elles ne soient mises en commun pour construire les SVM.

L'idée des hyperplans à marge maximale a été explorée dès 1963 par Vladimir Vapnik et A. Lerner, et en 1973 par Richard Duda et Peter Hart dans leur livre *Pattern Classification*. Les fondations théoriques des SVM ont été explorées par Vapnik et ses collègues dans les années 70 avec le développement de la Théorie de Vapnik-Chervonenkis.

L'idée des fonctions noyaux n'est pas non plus nouvelle : le théorème de Mercer date de 1909, et l'utilité des fonctions noyaux dans le contexte de l'apprentissage artificiel a

été montrée dès 1964 par Aizermann, Bravermann et Rozoener [10].

Ce n'est toute fois qu'en 1992 que ces idées seront bien comprises et rassemblées par Boser, Guyon et Vapnik dans un article, qui est l'article fondateur des séparateurs à vaste marge.

L'idée des variables ressorts, qui permet de résoudre certaines limitations pratiques importantes, ne sera introduite qu'en 1995. À partir de cette date, qui correspond à la publication du livre de Vapnik, les SVM gagnent en popularité et sont utilisées dans de nombreuses applications.

Principe général

Les SVM peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes de discrimination, c'est-à-dire décider à quelle classe appartient un échantillon, ou de régression, c'est-à-dire prédire la valeur numérique d'une variable.

La résolution de ces deux problèmes passe par la construction d'une fonction f qui à un vecteur d'entrée x fait correspondre une sortie $y : y = f(x)$.

On se limite pour l'instant à un problème de discrimination à deux classes (discrimination binaire), c'est-à-dire $y \in \{-1, 1\}$, le vecteur d'entrée x étant dans un espace X muni d'un produit scalaire. On peut prendre par exemple $X = \mathbb{R}^n$.

2.1 Séparateur linéaire

Données du problème et notations

Hyperplan

Plaçons-nous dans le cas d'une classification binaire (i.e. les exemples à classifier répartis en 2 classes). On appelle hyperplan séparateur un hyperplan qui sépare les deux classes (figure 2.1), en particulier il sépare leurs points d'apprentissage. Comme il n'est en général pas possible d'en trouver un, on se contentera donc de chercher un hyperplan discriminant qui est une approximation au sens d'un critère à fixer (maximiser la distance entre ces deux classes).

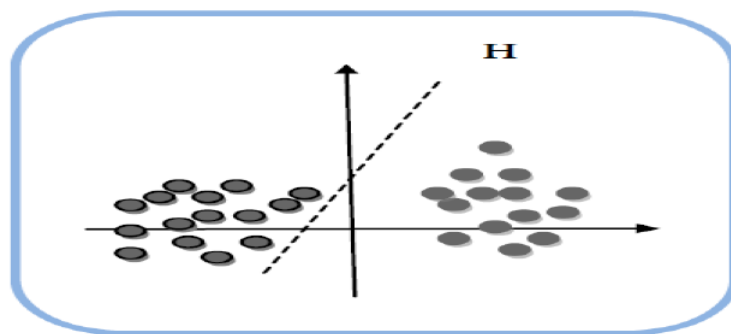


Figure 2.1 : L'hyperplan H qui sépare les deux ensembles de points

Les exemples

Nous noterons x un vecteur de R^n , dans notre cas, nous dirons que l'ensemble des vecteurs étiquetés que nous nous donnons est l'ensemble des exemples noté X , qui contient p éléments. $X = \{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq p}$ avec $\forall i, y_i \in \{-1, 1\}$. L'appartenance d'un vecteur à une classe ou à l'autre est matérialisée ici par la valeur -1 ou 1 de l'étiquette y , ce qui nous arrangera pour les calculs.

Le séparateur linéaire

Nous noterons le produit scalaire de deux vecteurs $\langle w, x \rangle$. Cette notation posée, nous pouvons définir le séparateur linéaire $f_{w,b}$ par l'équation suivante :

$$f_{w,b}(x) = \langle w, x \rangle + b.$$

Ce séparateur ne fournit pas des valeurs valant exclusivement -1 ou 1 , mais nous dirons que quand le résultat $f_{w,b}(x)$ est positif, le vecteur x appartient à la même classe que les exemples d'étiquette 1 , et que quand ce résultat est négatif, le vecteur x appartient à la même classe que les exemples d'étiquette -1 .

Notons avant de discuter plus avant cette notion de séparateur linéaire que l'équation $f_{w,b}(x) = 0$ définit la frontière de séparation entre les deux classes, et que cette frontière est un hyperplan affine dans le cas du séparateur linéaire.

2.2 Séparabilité

Reprenons notre base d'exemples X , et décomposons-la en deux sous-ensembles selon la valeur de l'étiquette y . Définissons donc :

$$X^+ = \{x : (x, y) \in X \text{ et } y = 1\},$$

$$X^- = \{x : (x, y) \in X \text{ et } y = -1\}.$$

Dire que X est linéairement séparable signifie qu'il existe w et b tel que :

$$f_{w,b}(x) > 0, \quad \forall x \in X^+,$$

$$f_{w,b}(x) < 0, \quad \forall x \in X^-.$$

Ce n'est pas toujours faisable, il peut avoir des distributions d'étiquettes sur les vecteurs de X qui rendent X non linéairement séparable. Dans le cas d'exemples pris dans le plan, dire que la distribution d'exemples est linéairement séparable signifie qu'on peut tracer un trait (un hyperplan) tel que les exemples de la classe 1 et ceux de la classe -1 se retrouvent de part et d'autre de cette frontière.

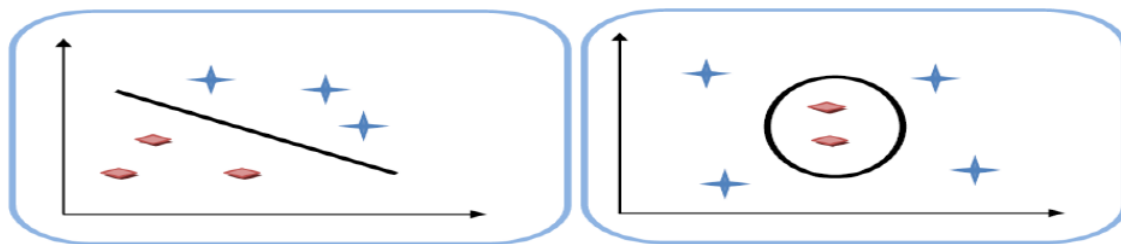


Figure 2.2 : à gauche cas linéairement séparable, à droite non linéairement séparable

Vecteurs supports

une tâche de détermination de l'hyperplan séparable des SVM est d'utiliser seulement les points les plus proches (i.e. les points de la frontière entre les deux classes des données) parmi l'ensemble total d'apprentissage, ces points sont appelés vecteurs supports (figure 2.3).

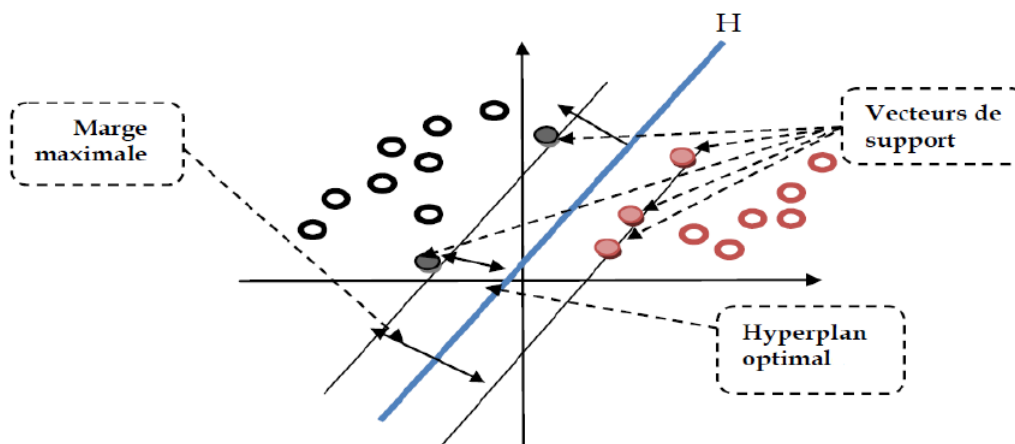


Figure 2.3 : l'hyperplan H optimal, vecteurs supports et marge maximale

2.2.1 Marge

Il existe une infinité d'hyperplans capable de séparer parfaitement les deux classes d'exemples.

Le principe des SVM est de choisir celui qui va maximiser la distance minimale entre l'hyperplan et les exemples d'apprentissage (i.e. la distance entre l'hyperplan et les vecteurs supports), cette distance est appelée la marge (figure 2.4)

Définition 2.2.1

1. On définit la marge d'un séparateur f pour un point (x, y) par $\gamma_{(x,y)}^f = y \cdot f(x)$ ce qui est proportionnel à la distance de (x, y) à la séparation.
2. Pour la base d'exemples la marge est $\gamma_X^f = \min_{(x,y) \in X} \gamma_{(x,y)}^f$

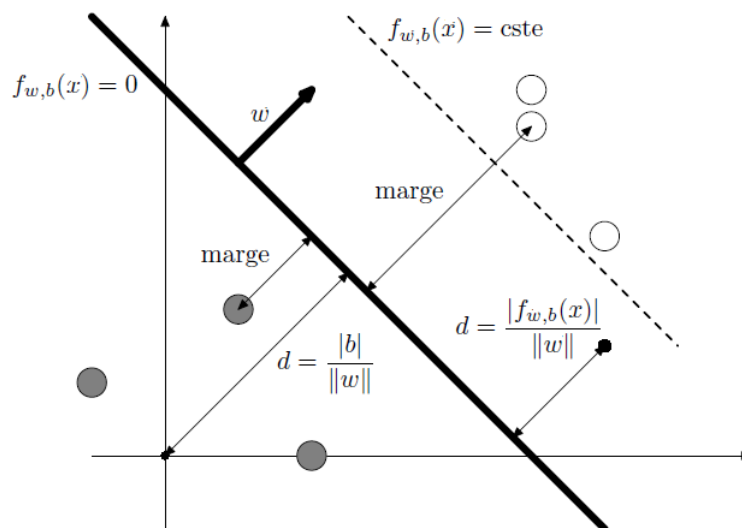


Figure 2.4 : Définition d'un séparateur $f_{w,b}$.

2.2.2 Hyperplans canoniques

Dans le cadre de classificateurs à marge maximale, l'hyperplan séparateur correspond à la médiatrice du plus petit segment de droite reliant les enveloppes convexes des deux catégories.

Notons que l'on suppose aussi que l'ensemble d'apprentissage est linéairement séparable. Dès lors, on peut définir deux plans se trouvant de part et d'autre de l'hyperplan et parallèles à celui-ci, sur lesquels reposent les exemples les plus proches. La figure 2.5 illustre cette situation. Il est possible que différentes équations correspondent au même plan géométrique :

Il est donc possible de redimensionner w et b de telle sorte que les deux plans parallèles aient respectivement pour équation : $\langle w, x \rangle + b = 1$ et $\langle w, x \rangle + b = -1$. Les deux hyperplans sont appelés hyperplans canoniques. Notons que la marge des hyperplans canoniques est $\frac{1}{\|w\|}$.

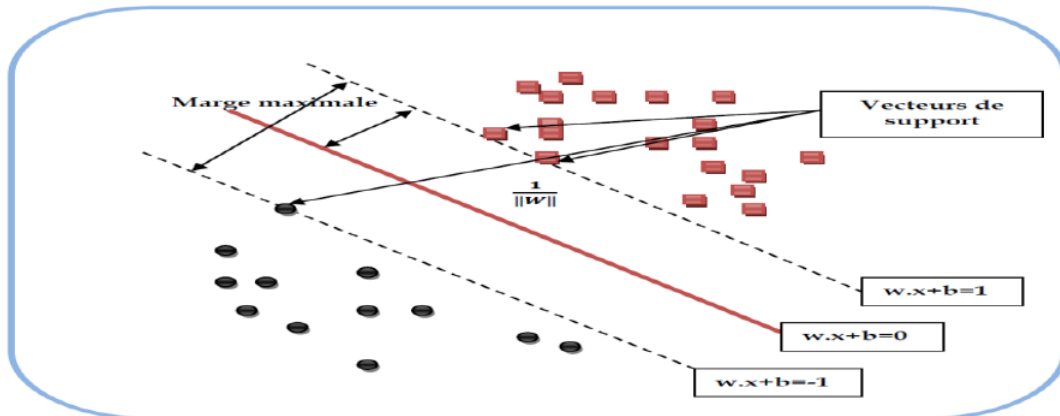


Figure 2.5 : Exemple graphique des données linéairement séparables

2.3 Un problème d'optimisation

2.3.1 Cas linéairement séparable

Un classificateur est dit linéaire lorsqu'il est possible d'exprimer sa fonction de décision par une fonction linéaire en x . Dans la suite, nous supposons que les exemples nous sont fournis dans le format vectoriel. Notre espace d'entrée X correspond donc à R^n où n est le nombre de composantes des vecteurs contenant les données

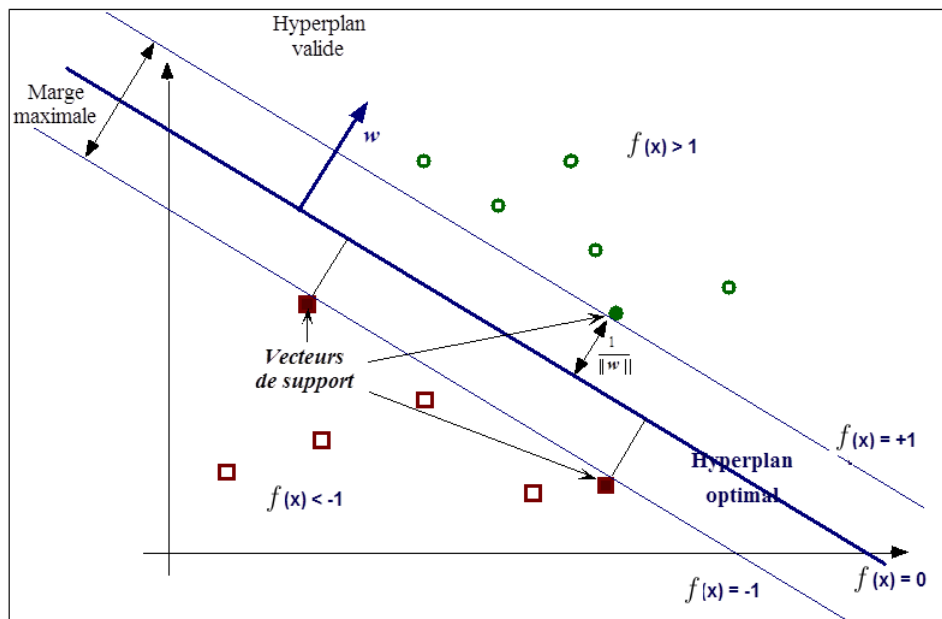
$$f(x) = \langle w, x \rangle + b = \sum_{j=1}^n w_j x_j + b.$$

Si les données sont linéairement séparables, alors il existe un hyperplan d'équation

$$\begin{aligned} \langle w, x \rangle + b &= 0 \text{ et tel que} \\ \langle w, x \rangle + b &\geq 1 \text{ si } y_i = 1 \\ \langle w, x \rangle + b &\leq -1 \text{ si } y_i = -1 \end{aligned}$$

On peut combiner ces deux inéquations en une seule $y_i(\langle w, x \rangle + b) \geq 1$. Nous n'allons plus nous contenter d'en trouver un hyperplan séparateur, mais nous allons en plus chercher parmi ceux-ci l'hyperplan optimal.

L'hyperplan optimal est celui qui maximise la marge γ_X^f .



Maximiser la marge γ_X^f est équivalent à maximiser la somme des distances euclidiennes des deux classes par rapport à l'hyperplan. Ainsi, la marge a l'expression mathématique suivante :

$$\begin{aligned}
 \gamma_X^f &= \min_{(x_i, y_i = -1)} \frac{|f_{(w,b)}(x_i)|}{\|w\|} + \min_{(x_i, y_i = 1)} \frac{|f_{(w,b)}(x_i)|}{\|w\|} \\
 &= \frac{1}{\|w\|} \left[\min_{(x_i, y_i = -1)} |\langle w, x_i \rangle + b| + \min_{(x_i, y_i = 1)} |\langle w, x_i \rangle + b| \right] \\
 &= \frac{1}{\|w\|} [1 + 1] \\
 &= \frac{2}{\|w\|}.
 \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons défini les notions de marges et d'hyperplans canoniques, nous pouvons formuler un problème d'optimisation mathématique tel que sa solution nous fournisse l'hyperplan optimal (maximisant la marge) :

$$(QP1) \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ y_i (\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1 \quad \forall (x_i, y_i) \in X. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème quadratique dont la fonction-objectif est à minimiser. Cette fonction-objectif est le carré de l'inverse de la double marge. L'unique contrainte stipule que les exemples doivent être bien classés et qu'ils ne dépassent pas les hyperplans canoniques.

Dans cette formulation, les variables à fixer sont les composantes w_i et b . Le vecteur w possède un nombre de composantes égal à la dimension de l'espace d'entrée. En gardant cette formulation telle quelle, nous souffrons des mêmes problèmes que les méthodes classiques.

Pour éviter cela, il est nécessaire d'introduire une formulation dite duale du problème. Un problème dual est un problème fournissant la même solution que le primal mais dont la formulation est différente.

Pour dualiser (QP1), nous devons former ce que l'on appelle le Lagrangien.

Il s'agit de faire rentrer les contraintes dans la fonction-objectif et de pondérer chacune d'entre elles par une variable duale : $L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i [y_i(\langle w, x_i \rangle + b) - 1]$.

Les variables duales α_i intervenant dans le Lagrangien sont appelées multiplicateurs de Lagrange.

Elles représentent la « force » avec laquelle la solution appuie sur la contrainte i .

Ainsi, un hyperplan qui violerait la contrainte pour x_i (il classe cet exemple du mauvais côté) rendrait α_i très grand ce qui ferait fortement augmenter la fonction-objectif (L). Cette solution ne pourra donc pas être retenue comme solution optimale.

Notons que L doit être minimisé par rapport aux variables primales et maximisé par rapport aux variables duales.

A présent, nous introduisons les conditions Karush Kuhn et Tucker (KKT) statuant sur l'optimalité d'une solution.

2.3.2 Théorème (KKT) [5]

Pour les problèmes différentiables convexes : Considérons un problème d'optimisation de la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } g(x) \\ & \text{Telque } \begin{cases} c_i(x) \leq 0, & \forall i = 1 \dots n \\ e_j(x) = 0, & \forall j = 1 \dots n' \end{cases} \end{aligned}$$

avec $g(\cdot)$, $c_i(\cdot)$, $e_j(\cdot)$. convexes et différentiables.

Le Lagrangien est formé comme suit :

$$L(x, \alpha) = g(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i(x) + \sum_{j=1}^{n'} \beta_j e_j(x)$$

La solution \bar{x} est optimale si et seulement si il existe $\bar{\alpha} \in R^n$ avec $\alpha_i \geq 0 \forall i = 1 \dots n$ et $\bar{\beta} \in R^{n'}$ avec $\beta_j \text{ s.r.s } \forall j = 1 \dots n'$ tels que :

$$\partial_x L(\bar{x}, \bar{\alpha}) = \partial_x g(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_x c_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n'} \beta_j \partial_x e_j(\bar{x}) = 0$$

$$\partial_{\alpha_i} L(\bar{x}, \bar{\alpha}) = c_i(\bar{x}) \leq 0$$

$$\partial_{\beta_j} L(\bar{x}, \bar{\alpha}) = e_j(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{\alpha}_i c_i(\bar{x}) = 0 \forall i = 1 \dots n$$

$$\bar{\beta}_j e_j(\bar{x}) = 0 \forall j = 1 \dots n'$$

Ce théorème fondamental en optimisation mathématique, nous fournit une condition suffisante et nécessaire pour l'optimalité d'une solution dans le cadre de problèmes différentiables convexes (ce qui est notre cas).

Les deux dernières conditions sont souvent appelées conditions *KKT* complémentaires.

Ces conditions expriment deux choses. Pour le voir prenons la première :

1. $\alpha_i = 0$: Dans ce cas la solution n'est pas « sur la contrainte ». Il n'y a donc rien à imposer au niveau de la solution.

2. $\alpha_i \neq 0$: La solution est « sur la contrainte ».

Dans ce cas, la nullité du produit impose que la solution ne dépasse pas la contrainte (elle reste faisable).

Déterminons à présent les conditions KKT de notre problème d'optimisation (QP1).

$$\begin{cases} \partial_w L(w, b, \alpha) = w - \sum \alpha_i y_i x_i = 0 & (1) \\ \partial_b L(w, b, \alpha) = \sum \alpha_i y_i = 0 & (2) \\ \partial_{\alpha_i} L(w, b, \alpha) = -y_i (\langle w, x_i \rangle + b) + 1 \leq 0 & (3) \\ \alpha_i (y_i (\langle w, x_i \rangle + b) - 1) = 0 \forall i = 1 \dots n & (4) \end{cases}$$

L'équation (1), permet de d'exprimer w : $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i$ (5)

Remarquons qu'avec cette formulation, on peut calculer w en fixant seulement n paramètres.

L'idée va donc être de formuler un problème dual dans lequel w est remplacé par sa formulation (5).

De cette façon, le nombre de paramètres à fixer est relatif au nombre d'exemples du set d'entraînement et non plus à la dimension de l'espace d'entrée (supposé très élevée).

Pour ce faire, nous substituons (2) et (5) dans le Lagrangien :

$$\begin{aligned} L(w, b, \alpha) &= \frac{1}{2} \langle w, w \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i [y_i (\langle w, x_i \rangle + b) - 1] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle \end{aligned}$$

A partir de quoi nous pouvons formuler le problème dual :

$$\begin{aligned} QP2 \text{ Maximiser } W(\alpha) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \alpha_i \alpha_j \langle x_i, x_j \rangle \\ \text{tel que } &\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \\ \alpha_i \geq 0 \forall i = 1 \dots n \end{cases} \end{aligned}$$

La résolution du dual permet donc de calculer le vecteur w à moindre coût, cependant cette formulation ne fait à aucun moment apparaître le terme b .

Pour calculer ce dernier nous devons utiliser les variables primales :

$$b = -\frac{\max_{y_i=-1}(\langle w, x_i \rangle) + \max_{y_i=+1}(\langle w, x_i \rangle)}{2}.$$

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour exprimer la fonction de décision de notre classificateur linéaire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \langle x, x_i \rangle + b.$$

Notons qu'un grand nombre de termes de cette somme sont nuls. En effet seuls les α_i correspondants aux exemples se trouvant sur les hyperplans canoniques (sur la contrainte) sont non nuls. Ces exemples sont appelés vecteurs support (SV).

On peut les voir comme les représentants de leurs catégories car si l'ensemble d'apprentissage n'était constitué que des SV, l'hyperplan optimal que l'on trouverait serait identique. Les vecteurs qui ne sont pas de support ($\alpha_i = 0$) n'ont aucune influence dans la solution.

La fonction de décision pour la classification de vecteurs inconnus x est donnée par

$$f(x) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \langle x, x_i \rangle + b\right),$$

où m est le nombre de vecteurs supports.

2.3.3 Cas linéairement non séparable

Le classificateur de marge maximale ne peut pas être utilisé dans la plupart des problèmes réels :

si les données ont été affectées par le bruit, il n'y a pas de séparation linéaire entre elles.

Dans ce cas, le problème d'optimisation ne peut pas être résolu.

Pour surmonter cette nouvelle contrainte, nous allons introduire une notion de « tolérance » faisant appel à une technique dite des variables ressort

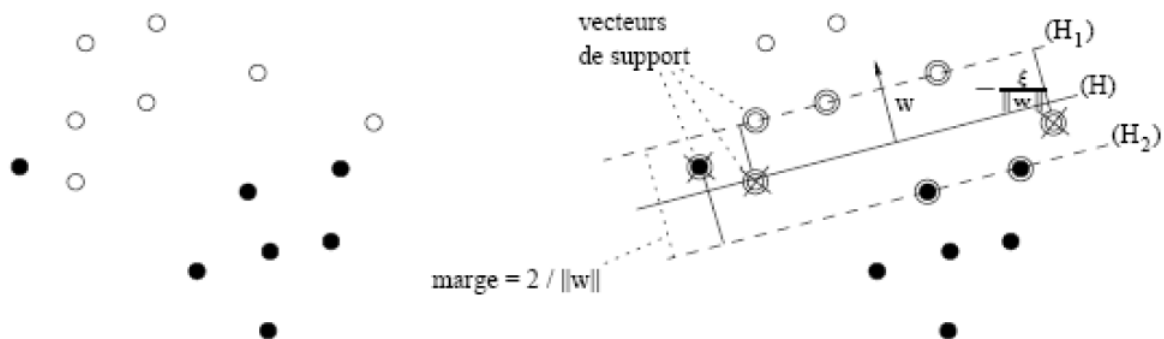


Figure 2.7 à gauche un ensemble de données non linéairement séparable, à droite la solution SVM linéaire à marge douce . Les vecteurs de support sont encadrés et les points d'apprentissage mal classés sont marqués d'une croix .

Le problème d'optimisation initial était
$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{s.c. } y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1 \quad \forall (x_i, y_i) \in X \end{cases}$$

La technique des variables ressort permet de construire un hyperplan en admettant des erreurs, mais en les minimisant, ce qui amène à assouplir les contraintes en introduisant les variables ressort $\xi_i \geq 0$ dans la définition des contraintes :

$$\begin{aligned} w \cdot x_i + b &\geq +1 - \xi_i \quad \text{si } y_i = +1 \\ w \cdot x_i + b &\leq -1 + \xi_i \quad \text{si } y_i = -1 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit $y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1 - \xi_i \quad \forall i = 1 \dots n$

Quand une erreur de classification intervient, la variable ξ_i a une valeur plus grande que 1, donc $\sum_i \xi_i$ est une borne supérieure du nombre d'erreurs à l'apprentissage.

De là, un moyen naturel pour pénaliser les erreurs est de remplacer la fonction précédente à minimiser par :

$$\frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Autrement dit, on cherche à maximiser la marge en s'autorisant pour chaque contrainte une erreur positive ξ_i la plus petite possible [10].

Le coefficient C est défini comme un paramètre de régularisation, il donne un compromis

entre la marge et le nombre d'erreurs admissibles. L'ajout du terme $C \sum_{i=1}^n \xi_i$ peut être considéré comme une mesure d'une certaine quantité de mauvaise classification.

Ainsi, une faible valeur de C entraîne une faible tolérance. D'autres formulations existent, comme $C \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ [10].

En suivant la même démarche du Lagrangien que précédemment, nous aboutissons à la forme duale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{I=1}^n \xi_I - \sum_{i=1}^n \alpha_i [y_i (\langle w, x_i \rangle + b) - 1 + \xi_i] - \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i \\ \partial_w L(w, b, \alpha) = w - \sum \alpha_i y_i x_i = 0 \\ \partial_b L(w, b, \alpha) = \sum \alpha_i y_i = 0 \\ \partial_{\xi_i} L = C - \alpha_i - \mu_i = 0 \end{aligned}$$

La seule différence avec le cas linéairement séparable est que

$$\begin{aligned} C - \alpha_i - \mu_i &= 0 \\ \mu_i &\geq 0 \\ \alpha_i &\leq C \quad \forall i \in 1 \dots n \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation est équivalent au cas de la marge maximale, avec une contrainte additionnelle ($\alpha_i \leq C$).

Cette formulation est connue comme « contrainte de boîte », car chaque valeur α_i est limitée par 0 d'un côté et par C de l'autre. C s'est révélé être un compromis entre la précision et la régularisation (le contrôle de l'erreur).

Les conditions KKT sont désormais :

$$\begin{aligned} \alpha_i |y_i (\langle w, x_i \rangle + b) - 1 + \xi_i| \\ \xi_i (\alpha_i - C) = 0 \quad \forall i \in 1 \dots n \end{aligned}$$

Ces conditions impliquent que les variables d'écart soient différentes de zéro quand $\alpha_i = C$ c'est à dire, quand leur marge est moins de $\frac{1}{\|w\|}$. Les vecteurs pour lesquels $0 \leq \alpha_i \leq C$: sont considérés comme vecteurs supports.

Il existe trois statuts différentiels :

1. $\alpha_i = 0$: L'exemple est bien classé et n'est pas sur un des deux hyperplans canoniques. On dira que l'exemple est un non SV.

2. $0 < \alpha_i < C$: L'exemple est bien classé et se trouve sur un hyperplan canonique. Il s'agit donc d'un SV.

3. $\alpha_i = C$: L'exemple est mal classé. Il sera malgré tout considéré comme SV puisque $\alpha_i > 0$. Il s'agit d'un outlier.

La fonction de décision pour la classification de vecteurs inconnus x reste :

$$f(x) = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \langle x, x_i \rangle + b \right).$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a tenté de présenter d'une manière simple le concept de système d'apprentissage introduit par Vladimir Vapnik, les « Support Vecteur Machine bi-classes » on a donné une vision générale et une vision purement mathématique des SVM. Cette méthode de classification est basée sur la recherche d'un hyperplan qui permet de séparer au mieux des ensembles de données, on a exposé les cas linéairement séparable et dans le chapitre suivant, nous présentons les cas de séparation non-linéaire.

Chapitre 3

Séparation non linéaire

Avant d'introduire la formulation d'une séparation non linéaire, on présente tout d'abord les fonctions noyaux (ou kernel en anglais)

3.1 Fonctions noyaux

Généralités

Le classificateur à marge maximale que nous venons de présenter, permet d'obtenir de très bons résultats lorsque les données sont linéairement séparables. L'intérêt principal d'un classificateur de ce type réside dans le fait que l'on contrôle facilement la capacité et donc le pouvoir de généralisation. Naturellement, un grand nombre de jeux de données sont non linéairement séparables.

Pour classer ce genre de données on pourrait utiliser une fonction de décision non linéaire. Géométriquement, cela reviendrait à avoir une (hyper)courbe qui marquerait la frontière entre les exemples positifs et négatifs.

L'idée retenue dans SVM va dans un autre sens : on va tenter de trouver une transformation (mapping) de l'espace d'entrée vers un autre espace appelé « espace de caractéristique » dans lequel les données sont linéairement séparables [4].

La figure (3.2) donne une représentation imagée de ce genre de transformation. Nous pouvons alors appliquer une méthode à marge maximale dans l'espace de caractéristique et garder le contrôle (qui est indépendant de la dimension de l'espace dans lequel nous travaillons) que nous avons sur la capacité.

La dimension de l'espace des caractéristiques est généralement très élevée. Cela ne pose pas de problème pour notre classificateur à marge maximale vu que sa formulation duale fixe le nombre de variables à déterminer en fonction de la taille de l'ensemble d'apprentissage.

Nous noterons l'espace de caractéristique F , et la transformation vers cet espace $\phi : X \rightarrow F$

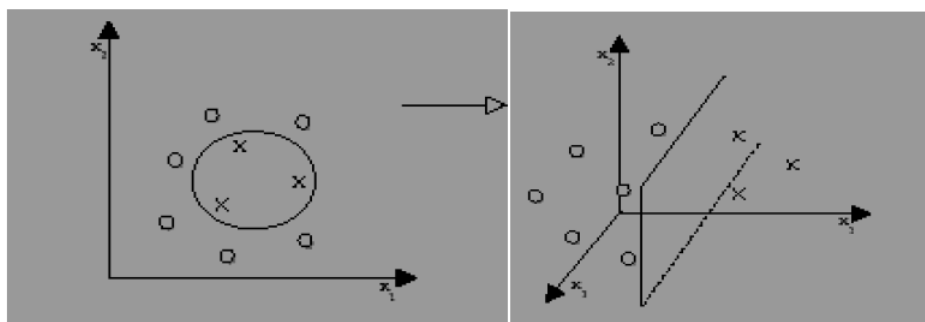


Figure 3.2 Une transformation ϕ rendant les exemples linéairement séparables [4]

Comme on peut le remarquer à la figure (3.2) l'espace de caractéristiques est de dimension supérieure à celle de l'espace de départ. Les nouveaux axes contiennent une surgénération d'information par rapport aux précédents, ce qui permet idéalement d'effectuer une discrimination linéaire.

Avec cette logique, deux étapes se dégagent pour construire un SVM non linéaire :

- 1- Une transformation non linéaire pour placer les données dans l'espace de caractéristiques.
- 2- Un SVM linéaire pour classifier les vecteurs.

La normale de l'hyperplan séparateur dans le nouvel espace devient :

$$w = \sum_{i=1}^l \alpha_i y_i \phi(x_i)$$

Les α_i doivent être calculés dans l'espace de caractéristiques. La classification d'un vecteur x inconnu se fait par la fonction : $f(x) = \text{sign}(w \cdot \phi(x) + b)$

Ainsi, le classificateur résultant $f(x)$ exprime un séparateur non linéaire dans l'espace des exemples X .

Exemple 3.1.1

Étudions un ensemble de données à deux attributs x_1, x_2 , que l'on transpose dans un espace des caractéristiques à cinq dimensions à l'aide de la transformation suivante :

$$\phi(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2, x_1, x_2)$$

Par cette transformation, l'exemple $x_a = (2, 7)$ est associé au vecteur de caractéristiques

$\phi(x_a) = (4, 49, 14, 2, 7)$. Le classificateur linéaire dans $f(x)$ dans l'espace des caractéristiques exprime un séparateur quadratique dans l'espace des exemples (X) :

$$f(x_1, x_2) = \text{sign}(w_1x_1^2 + w_2x_2^2 + w_3x_1x_2 + w_4x_1 + w_5x_2 + b)$$

En particulier, si $w = (1, 1, 0, 0, 0)$ et $b = 1$, la frontière de séparation entre les exemples classés positivement et ceux classés négativement est le cercle de rayon unité dans l'espace des exemples.

Exemple 3.1.2

On a la transformation Φ tel que :

$$\begin{aligned} \Phi : R^2 &\rightarrow R^3 \\ X = (x_1, x_2) &\xrightarrow{\Phi} (x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2) \\ K(x, x') &= \Phi(x) \cdot \Phi(x') \\ &= (x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2) \begin{pmatrix} x_1'^2 \\ \sqrt{2}x_1'x_2' \\ x_2'^2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1^2x_1'^2 + 2x_1x_1'x_2x_2' + x_2^2x_2'^2) \\ &= (x_1x_1' + x_2x_2')^2 \\ &= \left[(x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \right]^2 = (x \cdot x')^2 \end{aligned}$$

Ceci veut dire que le produit interne entre les images des points transformés par la fonction Φ est équivalent à celui obtenu par un noyau polynomial $K(x, x') = (x \cdot x')^2$ calculé dans l'espace d'entrée.

Fonction Noyaux :

Le fait de représenter une fonction de décision complexe par un séparateur linéaire dans un espace de caractéristiques de très haute dimensionnalité peut engendrer un coût computationnel élevé. Fréquemment, l'étude des algorithmes d'apprentissage révèle que les seules opérations manipulant les vecteurs de caractéristiques consistent en des produits scalaires. La stratégie du noyau permet alors de substituer ces produits scalaires par une fonction $k(x, x')$ rapidement calculable. Le résultat de $k(x, x')$ doit être équivalent en produit scalaire entre $\phi(x)$ et $\phi(x')$ dans un certain espace de caractéristiques F . Ainsi le noyau K est associé à ϕ lorsque : $k(x, x') = \phi(x) \cdot \phi(x')$

Nous établissons par la suite une condition permettant de déterminer si une fonction $X \times X \rightarrow R$ correspond au produit scalaire dans un espace F est un noyau. Cette condition est appelée condition de Mercer.

Condition de Mercer [5]

La matrice contenant les similarités entre tous les exemples de l'ensemble d'apprentissage.

$$G = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}; k_{ij} = k(x_i, x_j)$$

est appelée matrice de Gram.

Nous énonçons à présent le théorème de Mercer fournissant une condition suffisante et nécessaire pour qu'une fonction soit un noyau.

3.1.1 Théorème de Mercer

Soit une fonction symétrique $k : X \times X \rightarrow R$ avec $X \subset R^n$, il existe une fonction ϕ telle que $k(x, y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ si et seulement si pour toute fonction f élément de l'ensemble des fonctions définies sur X , telle que :

$$\int_X f(x) dx \text{ existe}$$

et

$$\int_{X \times X} k(x, y) f(x) f(y) dx dy \geq 0.$$

La positivité de l'intégrale permet de définir l'existence du noyau, qui est un produit scalaire dans un espace de Hilbert.

3.2 Propriétés des noyaux

3.2.1 Commutativité

Soient x et y deux éléments de l'espace $X \subset R^n$, la fonction noyau étant symétrique, nous avons la commutativité : $k(x, y) = k(y, x)$

3.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Considérons toujours x et y deux éléments de $X \subset R^n$, et ϕ une fonction qui projette les vecteurs dans un autre espace vectoriel. Nous avons :

$$[k(x, y)]^2 = [\phi(x) \cdot \phi(y)]^2 \leq \|\phi(x)\|^2 \cdot \|\phi(y)\|^2$$

Par conséquent : $[k(x, y)]^2 \leq k(x, x) \cdot k(y, y)$

3.2.3 Combinaison de noyaux

Soient k_1 et k_2 deux noyaux définis de $X \times X$, $X \subset R^n$ dans R . Les fonctions suivantes sont aussi des noyaux :

1. $k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$

2. $k(x, y) = ak_1(x, y)$ avec $a \in R^+$

3. $k(x, y) = k_1(x, y).k_2(x, y)$

4. $k(x, y) = \exp(k_1(x, y))$

5. $k(x, y) = p(k_1(x, y))$ avec $p : R \rightarrow R$ une fonction polynomiale à coefficients positifs.

6. $k(x, y) = x^T B y$ avec B une matrice semi-définie positive.

La formulation duale d'un SVM non linéaire est la suivante :

$$\text{Max } L_D(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \alpha_i \alpha_j K_{ij}.$$

$$\text{Tel que } \begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C \end{cases} \quad QP2$$

La fonction de décision pour la classification de vecteurs inconnus x reste :

$$f(x) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i k(x_i, x) + b\right)$$

L'introduction de noyaux permet donc aux machines à vecteurs supports de déterminer une surface de décision non linéaire en gardant un formalisme provenant d'une approche linéaire de la classification.

3.3 Philosophie des méthodes à noyaux

Quatre grandes idées sous-tendent l'approche générale :

1. Les données décrites dans l'espace d'entrée X sont projetées dans un espace vectoriel de redescription F
2. Des régularités linéaires sont cherchées dans cet espace F
3. Les algorithmes de recherche n'ont pas besoin de connaître les coordonnées des projections des données dans F , mais seulement leurs produits scalaires
4. Ces produits scalaires peuvent être calculés efficacement grâce à l'utilisation de fonctions noyau.

Cette approche permet ainsi d'employer tout l'arsenal des méthodes linéaires développées dans les années soixante pour découvrir des relations non-linéaires dans les données.

La figure 3.3 résume les étapes génériques de la méthode. Il est crucial de réaliser que, dans cette approche, l'essentiel des informations sur les données, en dehors de leurs étiquettes, s'exprime dans la matrice noyau K , ou encore matrice de Gram, qui encode les produits scalaires entre les projections des données d'apprentissage $G = \langle \Phi(X), \Phi(X)^T \rangle$.

3.4 L'importance de la matrice de Gram

La matrice de Gram (ou matrice noyau) contient toute l'information utilisée par les méthodes à noyaux sur les données. Elle est symétrique : $G_{ij} = G_{ji}$. L'utilisation exclusive des informations contenues dans cette matrice à propos des données d'apprentissage a pour conséquence qu'une partie des informations sur ces données est perdue. Par exemple, cette matrice est invariante par

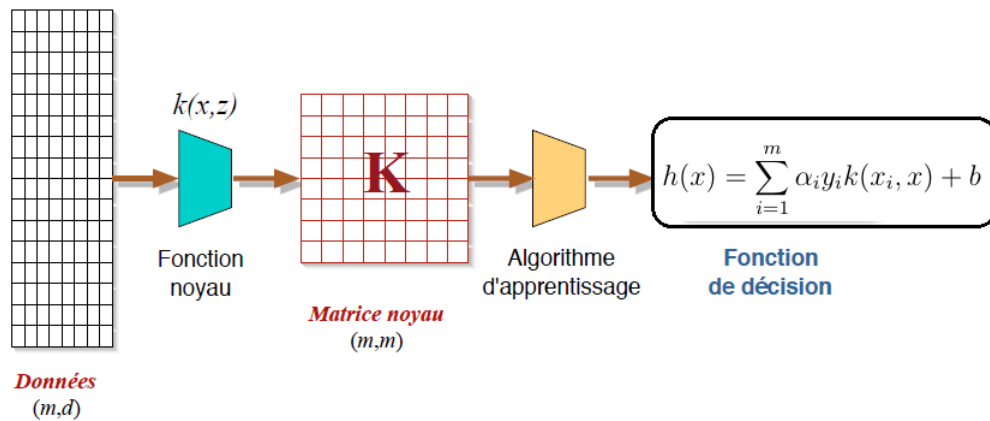


Figure 3.3 : Chaîne de traitements génériques d'une méthode à noyau

rotation des points dans l'espace d'entrée X . La position angulaire des données par rapport à un référentiel est donc ignorée, de même que les alignements éventuels des données sur les axes.

3.5 Utilisation de fonctions noyau :

3.5.1 Exemple avec $X = R$

Afin d'illustrer le fonctionnement des méthodes à noyaux, nous allons considérer un des problèmes de discrimination les plus simples. On suppose que l'espace des entrées est réduit à R , c'est-à-dire à une dimension. On suppose que l'on a cinq points d'apprentissage associés à deux classes '+1' et '-1' :

$$S = \{(x_1 = 1, y_1 = 1), (x_2 = 2, y_2 = 1), (x_3 = 4, y_3 = -1), (x_4 = 5, y_4 = -1), (x_5 = 6, y_5 = 1)\}$$

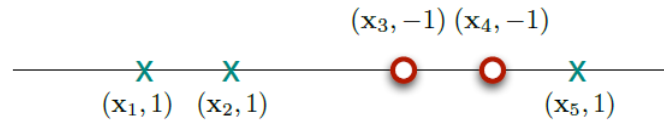


Figure 3.6 : Un problème de discrimination à une dimension.

Il n'est pas possible de trouver une séparatrice linéaire (un seul seuil sur l'axe R) permettant de distinguer les exemples '+1' des exemples '-1'.

Supposons que l'on choisisse d'utiliser la fonction noyau $k(x, x') = (x \cdot x' + 1)^2$. Cela signifie que l'on est disposé à considérer les corrélations au deuxième ordre entre les positions des exemples.

En choisissant $C = 100$, le problème d'optimisation associé est :

$$\begin{cases} \max_{\alpha} \sum_{i=1}^5 \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^5 \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j + 1)^2 \\ \sum_{i=1}^5 \alpha_i y_i = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq 100 \quad (\forall i) \end{cases}$$

Un programme de résolution de problème quadratique de ce type retourne la solution :

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 2.5; \alpha_3 = 0; \alpha_4 = 7.333; \alpha_5 = 4.833$$

La frontière de décision correspondante, de la forme $h(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^* y_i k(x, x_i) + w_0^*$ est ainsi :

$$\begin{aligned} h(x) &= 2.5(1)(2x + 1)^2 + 7.333(-1)(5x + 1)^2 + 4.833(1)(6x + 1)^2 + w_0 \\ &= 0.6667x^2 - 5.333x + w_0 \end{aligned}$$

où w_0 est obtenue en résolvant $f(2) = 1$ ou $f(5) = -1$ ou $f(6) = 1$, puisque x_2, x_4 et x_5 sont sur la droite $y_i(w^T \Phi(x) + w_0) = 1$ pour $i \in \{2, 4, 5\}$. Ce qui donne $w_0 = 9$, d'où :

$$f(x) = \text{signe} \{0.6667x^2 - 5.333x + 9\}$$

C'est une frontière quadratique qui se traduit par deux seuils dans l'espace d'origine $X = R$. Les exemples x_2, x_4, x_5 sont les exemples critiques.

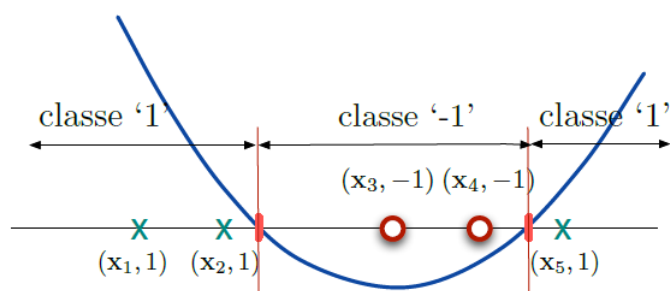
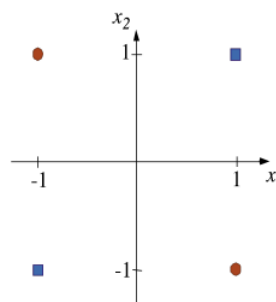


Figure 3.7 : Un problème de discrimination à une dimension. La séparatrice est issue d'une fonction à deux dimensions qui se traduit par deux seuils sur $X = R$.

3.5.2 Exemple avec $X = R^2$: la fonction XOR

Soient des données décrites en deux dimensions : $X = R^2$, et soient les exemples d'apprentissage décrits dans la table suivante :

Indice i	\mathbf{x}_i	u_i
1	(1, 1)	1
2	(1, -1)	-1
3	(-1, -1)	1
4	(-1, 1)	-1



Supposons que l'on choisisse la fonction noyau polynomiale de degré 2 :

$$\begin{aligned}
 \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= (1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'))^2 \\
 &= (1 + (x_1x'_1 + x_2x'_2))^2 \\
 &= 1 + 2(x_1x'_1 + x_2x'_2) + (x_1x'_1 + x_2x'_2)^2 \\
 &= 1 + 2x_1x'_1 + 2x_2x'_2 + x_1^2x_1'^2 + x_2^2x_2'^2 + 2x_1x'_1x_2x'_2
 \end{aligned}$$

qui correspond à la projection Φ :

$$(x_1, x_2)^T \xrightarrow{\Phi} (1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)^T$$

On doit alors résoudre le problème :

$$\begin{cases} \max_{\alpha} \sum_{i=1}^4 \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \alpha_i \alpha_j y_i y_j (x_i \cdot x_j + 1)^2 \\ \sum_{i=1}^4 \alpha_i y_i = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C \quad (\forall i) \end{cases}$$

où l'on doit maximiser :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \frac{1}{2}(9\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_4 + 9\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4 + 9\alpha_3^2 - 2\alpha_3\alpha_4 + 9\alpha_4^2)$$

Soit, en dérivant par rapport à chaque multiplicateur de Lagrange α_i :

$$\begin{cases} 9\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 - 9\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 9\alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 9\alpha_4 = 1 \end{cases}$$

On trouve alors la valeur optimale des multiplicateurs de Lagrange :

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha_3^* = \alpha_4^* = \frac{1}{8}.$$

Les quatre exemples sont donc tous des exemples critiques, et la fonction de décision est alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{signe} \left\{ \sum_{i=1}^{m_s} \alpha_i^* y_i k(x, x_i) + w_0 \right\} \\ &= \text{signe} \left\{ \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 y_i [(x^T \cdot x_i) + 1]^2 \right\} \end{aligned}$$

soit :

$$f(x) = \text{signe} \left\{ \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 y_i [1 + (x \cdot x_i)]^2 \right\}$$

Tous calculs faits, on arrive à l'équation de la séparatrice dans l'espace d'entrée X :

$$f(x) = \text{signe} \{-x_1 x_2\}$$

qui est une fonction non linéaire (voir figure 3.8, à gauche). Quelle est l'équation de la séparatrice dans l'espace de redescription F ? On a :

$$h(x) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^* y_i k(x_i, x) + w_0 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^* y_i \langle \varphi(x_i), \varphi(x) \rangle + w_0 = W^{*T} \Phi(x) + w_0$$

avec $W^* = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^* y_i \Phi(x_i)$, et $w_0 = 0$ dans ce problème symétrique par rapport à l'origine.

On a alors $W^* = \frac{1}{8} [-\Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3) - \Phi(x_4)]$. En calculant les projections $\Phi(x_i)$ des quatre points, on trouve :

$$W^* = \frac{1}{8} \left\{ - \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où l'équation de la frontière de décision dans l'espace de caractéristique F :

$$\begin{aligned} h_F(x) &= W^{*T} \Phi(x) \\ &= (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0)(1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2)^T \\ &= -\sqrt{2}x_1x_2 = 0 \end{aligned}$$

qui est donc une équation linéaire dans l'espace F (sixième coordonnée constante) (voir figure 3.8 à droite).

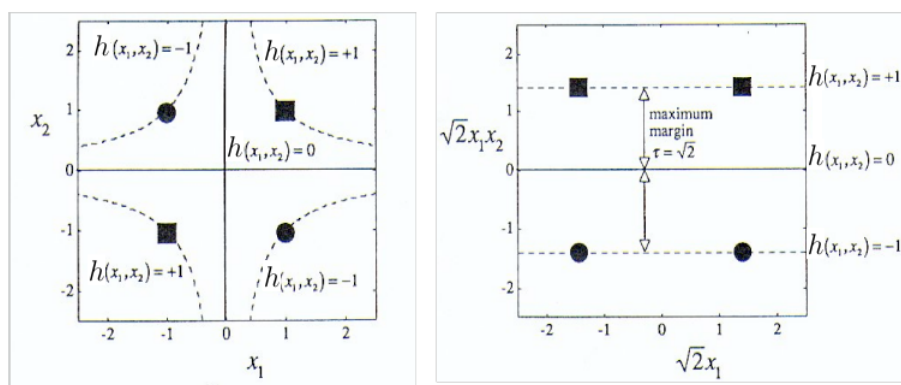


figure 3.8 Les frontières de décision pour le problème du XOR. À gauche dans l'espace d'entrée X , à droite dans l'espace de caractéristique F en projetant sur deux coordonnées parmi les 6.

3.6 Exemples des noyaux

3.6.1 Noyau polynomial

La fonction noyau polynomial de degré n est définie par :

$$k(x, y) = (ax \cdot y + b)^n \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Le noyau polynomial exprimant un produit scalaire dépend de la direction des vecteurs et de leur norme. Ainsi, l'image d'un vecteur x avec ceux de même direction produit de fortes valeurs de noyau.

La dimension du nouvel espace F , lorsqu'on utilise le noyau polynomial de degré n pour projeter les données de l'espace X vers F , vaut :

$$\dim F = \frac{(n + \dim X - 1)!}{n! (\dim X - 1)!}$$

3.6.2 Noyau gaussien

Le noyau RBF : (Radial Basis Function) ou (Noyau gaussien), noyau très utilisé dans la pratique qui s'évalue selon

$$k(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{\sigma^2}\right).$$

ou σ est un réel positif qui représente la largeur de bande du noyau.

Les classificateurs exprimés par un noyau linéaire sont équivalents aux séparateurs linéaires exprimés directement dans l'espace des exemples (sans utiliser la stratégie du noyau).

Aussi les variables n et σ des noyaux polynômiaux et RBF constituent des hyperparamètres des algorithmes d'apprentissage. Leur valeur modifie grandement le type de frontières de décision générées et, conséquemment la qualité des classificateurs résultants.

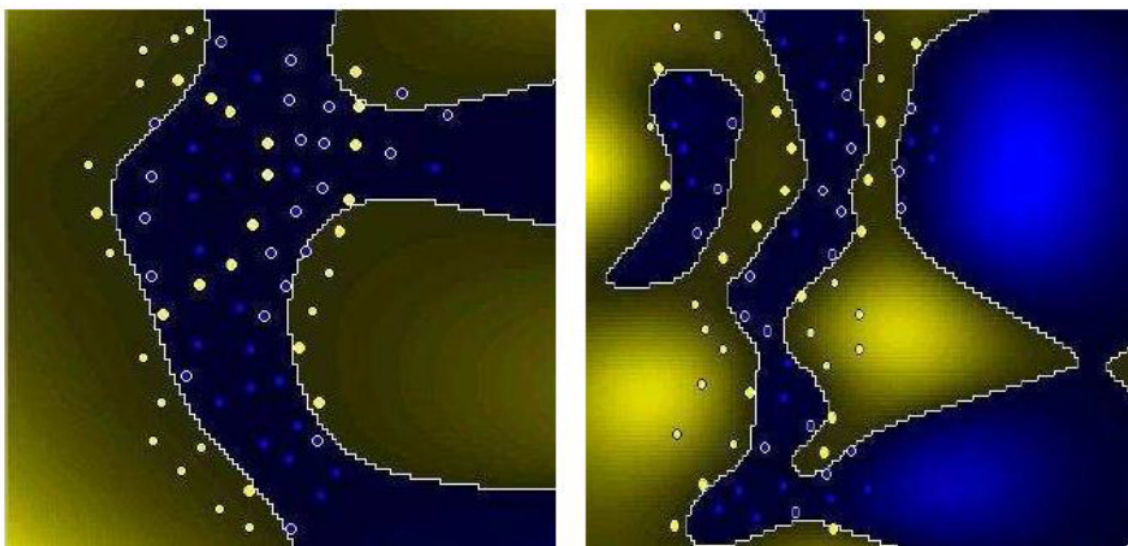


Figure 3.9 : à gauche noyau linéaire , à droite noyau polynômial

La figure 3.9 illustre le type de frontières de décision qu'ils permettent d'obtenir sur un exemple d'ensemble de données dont le noyau polynômial classe mieux les données que le noyau linéaire.

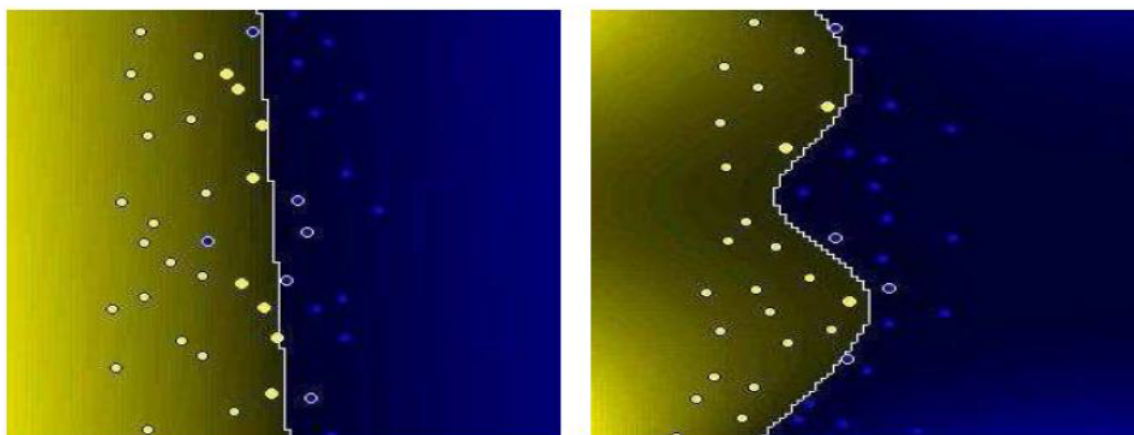


Figure 3.10 : à gauche noyau polynômial , à droite noyau RBF

La figure 3.10 illustre le type de frontières de décision qu'ils permettent d'obtenir sur un exemple d'ensemble de données dont le noyau RBF classe mieux les données que le noyau polynômial.

3.6.3 Autres noyaux

Nous pouvons aussi citer comme fonctions noyaux : - le noyau linéaire pour caractériser l'absence de projection dans un autre espace

$$k(x, y) = x.y$$

- le noyau Laplacien

$$k(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x - y\|}{c}\right)$$

- le noyau sigmoïdal qui ne vérifie pas le théorème de Mercer

$$k(x, y) = \tanh(ax.y + b)$$

- le noyau inverse multiquadratique

$$k(x, y) = (\|x - y\| + c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- le noyau KMOD [3]

$$k(x, y) = a \left(\exp\left(\frac{\gamma^2}{\|x - y\|^2 + \sigma^2}\right) - 1 \right)$$

3.7 Domaines d'application des SVMs

Traitement d'images

- Reconnaissance de caractères manuscrits
- Reconnaissance de scènes naturelles
- Reconnaissance de visages
- Entrées : image bidimensionnelle en couleur ou en tons de gris
- Sortie : classe (chiffre / personne)

Application : images couleurs

- Exemple : Base d'images Corel Stock Photo Collection
- 200 catégories
- 100 images / catégorie
- Codage
- Pixel = vecteur dans espace à trois dimensions (RGB)
- Image = histogramme (fraction des pixels d'une couleur donnée)
- Invariant / nombreuses opérations
- Noyau :

$$K(x, z) = \exp\left(-\frac{d(x, z)}{\sigma^2}\right)$$

$$d(x, z) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - z_i)^2}{x_i + z_i}$$

Catégorisation de textes

Classification d'emails
Classification de pages web

Entrées : document (texte ou html)
Approche « sac de mots »
Document = vecteur de mots
Sortie : catégorie (thème, spam/non-spam)
Noyau :
Produit scalaire des vecteurs

Diagnostic médical

- Évaluation du risque de cancer
- Détection d'arythmie cardiaque
- Évaluation du risque d'accidents cardio-vasculaires à moins de 6 ans

- Entrées : état du patient (sexe, age, bilan sanguin, ...)
- Sortie :
- Classe : à risque ou non
Probabilité d'accident à échéance donnée.

3.8 Conclusion

SVM est une méthode de classification qui montre de bonnes performances dans la résolution de problèmes variés. Cette méthode a montré son efficacité dans de nombreux domaines d'applications tels que le traitement d'image, la catégorisation de textes ou le diagnostic médical et ce même sur des ensembles de données de très grandes dimensions.

La réalisation d'un programme d'apprentissage par SVM se ramène à résoudre un problème d'optimisation impliquant d'un résolution de système dans un espace de dimension conséquente. L'utilisation de ces programmes revient surtout à sélectionner une bonne famille de fonctions noyau et à régler les paramètres de ces fonctions. Ces choix sont les plus souvent faits par une technique de validation croisée, dans laquelle on estime la performance du système en la mesurant sur des exemples n'ayant pas été utilisés en cours d'apprentissage.

L'idée est de chercher les paramètres permettant d'obtenir la performance maximale. Si la mise en oeuvre d'un algorithme de SVM est en général peu coûteuse en temps, il faut cependant compter que la recherche des meilleurs paramètres peut requérir des phases de test assez longues.

La méthode des SVM est applicable pour des tâches de classification à deux classes, mais il existe des extensions pour la classification multi-classe. Les SVM peuvent également s'utiliser pour des tâches de régression, c'est-à-dire de prédiction d'une variable continue en fonction d'autres variables, comme c'est le cas par exemple dans de la prédiction de consommation électrique en fonction de la période de l'année, de la température, etc.

Le champ d'application des SVM est donc large. Elles représentent une classe de méthodes très séduisantes. L'un des axes de recherche actuel est de parvenir à coder des connaissances a priori dans ces systèmes, c'est-à-dire à mieux comprendre le rôle des fonctions noyau.

Chapitre 4

Algorithme d'optimisation du problème

Introduction

L'apprentissage d'un SVM se ramène essentiellement à résoudre un problème d'optimisation impliquant la résolution d'un programme quadratique dans un espace de dimension finie, c'est pourquoi ces programmes utilisent des méthodes spéciales pour y parvenir de manière efficace, le succès des SVMs a entraîné le développement de nombreux algorithmes permettant leur mise en oeuvre, parmi ces méthodes, l'algorithme *SMO* (Sequential Minimal Optimization) proposé par J.C.Platt en 1998 [J.platt, 1998]. Cet algorithme d'apprentissage pour SVMs est généralement rapide, simple à implémenter et nécessite un espace mémoire réduit.

Un autre algorithme aussi bien connu et très utilisé est le *SVM^{light}* décrit dans [Joachim 2002] et disponible sur le lien ([www.download.joachims.org/SVM^{light}](http://www.download.joachims.org/SVMlight)).

L'algorithme Simple SVM basé sur la méthode des contraintes actives fut proposé par Vishwanathan en 2003 [Vishwanathan 2003] puis repris et amélioré par G. Loosli et S.Canu en 2005 [Loosli 2005].

Ici, on propose un algorithme de recherche de l'optimum du problème .

4.1 L'algorithme proposé

Soient \bar{x}_+ , et \bar{x}_- deux éléments de X^+ , X^- respectivement; tels que $\|\bar{x}_+ - \bar{x}_-\| =$
 $\inf_{\substack{x_- \in X^- \\ x_+ \in X^+}} \|x_+ - x_-\|$ Etudions le cas ou $\overset{\circ}{X^+} \neq \phi$, $\overset{\circ}{X^-} \neq \phi$.
 Posons

$$(p) : \begin{cases} \text{Max} \{-\|w\|^2\} \\ wx_+ + b \geq \frac{1}{2} \\ wx_- + b \leq -\frac{1}{2} \\ x_+ \in X^+, x_- \in X^- \end{cases}$$

et soit \bar{w}, \bar{b} la solution de ce problème. On a :

$$i) \left\{ w \in R^n, b \in R : wx_+ + b \geq \frac{1}{2}, x_+ \in X^+, wx_- + b \leq -\frac{1}{2}, x_- \in X^- \right\} \\ \subset \left\{ w \in R^n : w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, \forall x_+ \in X^+, w(x_- - \bar{x}_-) \leq 0, \forall x_- \in X^- \right\}.$$

En effet ,

$$\forall (w, b) \in R^{n+1} : \begin{cases} wx_+ + b \geq \frac{1}{2} \\ wx_- + b \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} wx_+ + b \geq \frac{1}{2} \\ -wx_- - b \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

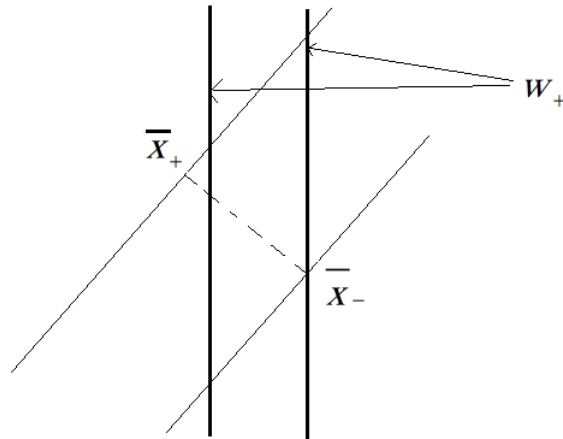
en particulier $wx_- + b \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow w\bar{x}_- + b = -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$
 alors on a : $wx_+ + b - wx_- - b \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, \forall x_+ \in X^+$.
 Considérons alors le problème (p_+) suivant :

$$(p_+) \begin{cases} \text{Max} \{-\|w\|^2\} \\ wx_+ + b \geq \frac{1}{2}, \forall x_+ \in X^+ \\ w\bar{x}_- + b = -\frac{1}{2} \\ w(x_- - \bar{x}_-) \leq 0, \forall x_- \in X^- \end{cases}$$

c'est la séparation à vaste marge de X^+ et $\{\bar{x}_-\}$, comme $b = -\frac{1}{2} - w\bar{x}_-$, (p_+) devient :

$$(p_+) \begin{cases} \text{Max} \{-\|w\|^2\} \\ w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, \forall x_+ \in X_+ \\ w(x_- - \bar{x}_-) \leq 0, \forall x_- \in X_- \end{cases}$$

Soit w_+ la solution de (p_+)



$$ii) \left\{ (w, b) \in R^{n+1} : wx_+ + b \geq \frac{1}{2}, \forall x_+ \in X_+; wx_- + b \leq -\frac{1}{2}, \forall x_- \in X_- \right\}$$

$$\subset \left\{ w \in R^n : w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1, \forall x_- \in X_-; w(\bar{x}_+ - x_+) \leq 0, \forall x_+ \in X_+ \right\}.$$

Considérons le problème suivant

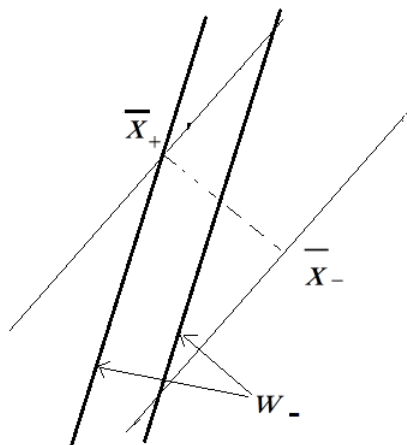
$$(p_-) \begin{cases} \text{Max} \{ -\|w\|^2 \} \\ w\bar{x}_+ + b = \frac{1}{2} \\ wx_- + b \leq -\frac{1}{2}, \forall x_- \in X_- \end{cases}$$

C'est la séparation à vaste marge de X_- et $\{\bar{x}_+\}$.

Comme $b = \frac{1}{2} - w\bar{x}_+$,

$$(p_-) : \begin{cases} \text{Max} \{ -\|w\|^2 \} \\ w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1, \forall x_- \in X_- \\ w(\bar{x}_+ - x_+) \leq 0, \forall x_+ \in X_+. \end{cases}$$

Soit w_- la solution de (p_-) .



Comme \bar{w} est une solution de (p_+) et (p_-) , on a :

$$\frac{1}{\|w_+\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|} \text{ et } \frac{1}{\|w_-\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}, \text{ car } \bar{w} \text{ n'est pas optimale pour } (p_+) \text{ et } (p_-).$$

D'après (i) et (ii), on a

$$iii) \left\{ (w, b) \in R^{n+1} : wx_+ + b \geq \frac{1}{2}, \forall x_+ \in X_+; wx_- + b \leq -\frac{1}{2}, \forall x_- \in X_- \right\} \subset D$$

ou

$$D = \{w \in R^n : w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, \forall x_+ \in X_+\} \cap \{w \in R^n : w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1, \forall x_- \in X_-\}.$$

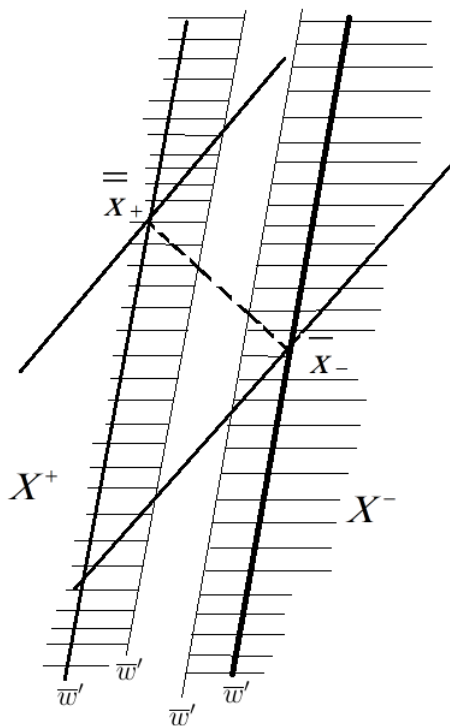
Considérons alors le problème (p') suivant :

$$(p') \begin{cases} \text{Max} \{ -\|w\|^2 \} \\ w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, \forall x_+ \in X_+ \\ w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1, \forall x_- \in X_- \end{cases}$$

Soit \bar{w}' la solution de (p') . D'après (iii), on a $\frac{1}{\|\bar{w}'\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}$.

Comme la solution de (p) est unique (projection de 0 sur les hyperplans) alors $\|\bar{w}'\| = \|\bar{w}\|$.

Il reste à déterminer \bar{b} .



Calcul de \bar{b} .

On sait que la projection de zero sur (D)est un point frontière D car $0 \notin D$. On a alors :

i) $\exists \bar{x}_+ \in X_+ : \bar{w}(\bar{x}_+ - \bar{x}_-) = 1$, si non on a :

ii) $\exists \bar{x}_- \in X_- : \bar{w}(\bar{x}_- - \bar{x}_+) = -1$. Car \bar{w} est un point frontière de D .

on i) et ii) ou même \bar{x}_+ (ou bien \bar{x}_-) est un vecteur support , et

$$\bar{w}\bar{x}_+ + b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} - \bar{w}\bar{x}_+ \text{ (ou bien } b = -\frac{1}{2} - \bar{w}\bar{x}_-).$$

La solution de (p') est par la technique de projection , on peut même utiliser les algorithmes connus (par passage au dual,...).

Notes que la solution de (p_+) et (p_-) permet de déterminer les vecteur supports;si

$$\overset{\circ}{X}^+ = \overset{\circ}{X}^- = \phi ; \text{ la marge est magnée par } \|\bar{x}_+ - \bar{x}_-\|.$$

Le problème (p') ne contient plus la constante b .

$$\overset{\circ}{X}^+ = \overset{\circ}{X}^- = \phi \Rightarrow w_+ = w_- = (\bar{x}_+ - \bar{x}_-).$$

Soit $\|\bar{x}_+ - \bar{x}_-\| = \inf_{\substack{x_+ \in X^+ \\ x_- \in X^-}} \|x_+ - x_-\|$;s'il existe plusieurs \bar{x}_+ et \bar{x}_- ; il suffit de choisir \bar{x}_+

et \bar{x}_- de manière quelconque.

Considérons le problème suivant :

$$(p_1) \begin{cases} \text{Max} \{-\|w\|^2\} \\ w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, x_+ \in X^+. \end{cases}$$

C'est à dire ,on veut séparer X^+ et $\{\bar{x}_-\}$; en effet ,

$$\begin{aligned} w\bar{x}_- + b = -\frac{1}{2} &\Rightarrow b = -\frac{1}{2} - w\bar{x}_- , \text{ et} \\ w x_+ + b \geq \frac{1}{2} &\Rightarrow w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, x_+ \in X^+. \end{aligned}$$

Notons par w_- la solution de ce problème , et si \bar{w} est la solution du problème

$$(p_2) \begin{cases} \text{Max} \{-\|w\|^2\} \\ w x_+ + b \geq \frac{1}{2}, x_+ \in X^+ \\ w x_- + b \geq -\frac{1}{2}, x_- \in X^-. \end{cases}$$

Comme est la solution de (p_1).

Alors $\frac{1}{\|w_-\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}$. Si $w_-x_- + (-\frac{1}{2} - w_-\bar{x}_-) \geq -\frac{1}{2}$, $\forall x_- \in X^-$. Alors w_- est solution de (p_2) , et $\|w_-\| = \|\bar{w}\|$.

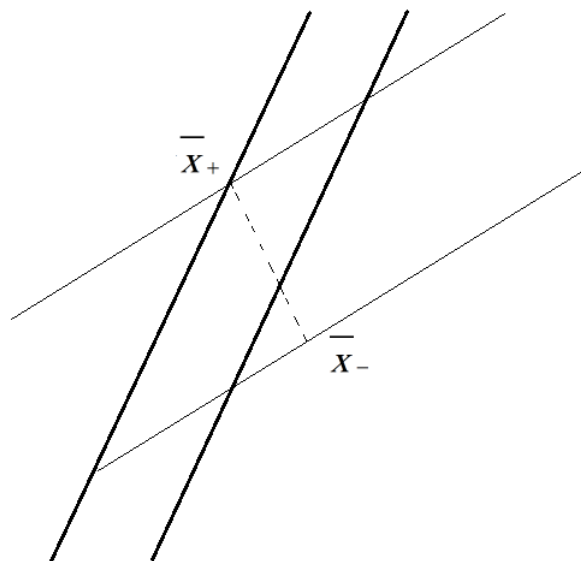
Sinon , il existe $\bar{x}_+ \in X^+ : w_-(\bar{x}_+ - \bar{x}_-) = 1$.

On considère le problème suivant :

$$(p_3) \begin{cases} \text{Max} \{-\|w\|^2\} \\ w(x_- - \bar{x}_+) \geq -1, x_- \in X^-. \end{cases}$$

C'est à dire , on veut séparer X^- et $\{\bar{x}_+\}$;en effet ,

$$\begin{aligned} w\bar{x}_+ + b = \frac{1}{2} &\Rightarrow b = \frac{1}{2} - w\bar{x}_+ , \text{ et} \\ w x_- + b \geq -\frac{1}{2} &\Rightarrow w x_- + \frac{1}{2} - w\bar{x}_+ \geq -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow w(x_- - \bar{x}_+) \geq -1. \end{aligned}$$



Notons par w_+ la solution de ce problème .Alors $\frac{1}{\|w_+\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}$.

Si $w_+x_+ + (\frac{1}{2} - w_+\bar{x}_+) \geq \frac{1}{2}$ c'est à dire $w_+x_+ - w_+\bar{x}_+ \geq 0$, $\forall x_+ \in X^+$, alors w_+ est solution de (p_2) , et $\|w_+\| = \|\bar{w}\|$

Sinon , il existe $\bar{x}_- \in X^-$: $w_+(\bar{x}_- - \bar{x}_+) = -1$.
Comme $\frac{1}{\|w_-\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}$ et $\frac{1}{\|w_+\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}$
car \bar{w} est solution du (p_1) et (p_3) et dans la marge est pour (p_2) , et (p_2) a plus de
Le problème

$$(p_0) \begin{cases} \text{Max} \{ -\|w\|^2 \} \\ w(x_+ - \bar{x}_-) \geq 1, \forall x_+ \in X^+ \\ w(x_- - \bar{x}_+) \geq -1, \forall x_- \in X^- \end{cases}$$

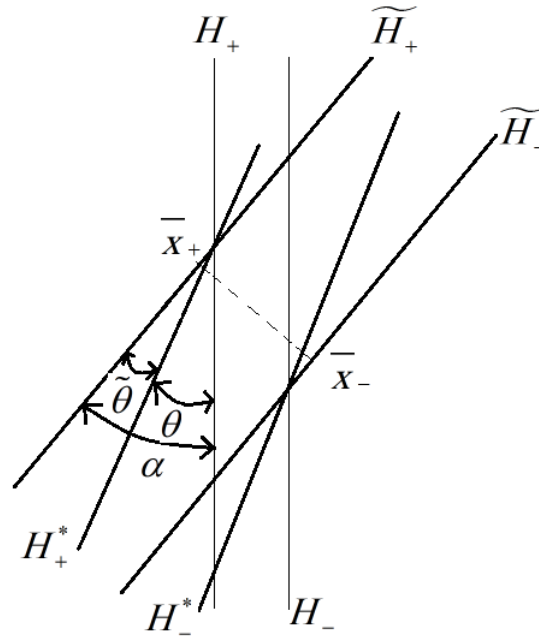
C'est la séparation de X^+ et $\{\bar{x}_-\}$ et X^- et $\{\bar{x}_+\}$ une solution de ce problème est \bar{w} .

On note par w_0 la solution de (p_0) , alors $\frac{1}{\|w_0\|} \geq \frac{1}{\|\bar{w}\|}$.

soit α l'angle fermé entre H_+ et \widetilde{H}_+ ; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Posons $\tilde{\theta}$ l'angle fermé entre \widetilde{H}_+ et H_+^* , et

θ l'angle fermé entre H_+^* , et H_+ ; $\tilde{\theta} + \theta = \alpha$.



Montrons qu'il existe $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ tels que si H_+^* a pour equation $w^* x + b = 0$, alors

$$w^* = \lambda_1 w_+ + \lambda_2 w.$$

$$\langle w^*, w_+ \rangle = \langle \lambda_1 w_+ + \lambda_2 w, w_+ \rangle = \|w^*\| \|w_+\| \cos \tilde{\theta}$$

car l'angle fermé entre deux plans est l'angle fermé entre les deux normales aux plans.

$$\|w^*\| \|w_+\| \cos \tilde{\theta} = \lambda_1 \|w_+\|^2 + \lambda_2 \|w\| \|w_+\| \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \|w_+\| + \lambda_2 \|w\| \cos \alpha = \|w^*\| \cos \tilde{\theta} \quad (1).$$

$$\langle w^*, w \rangle = \langle \lambda_1 w_+ + \lambda_2 w, w \rangle = \|w^*\| \cdot \|w\| \cos \theta$$

$$\|w^*\| \cdot \|w\| \cos \theta = \lambda_1 \|w_+\| \cdot \|w\| \cos \alpha + \lambda_2 \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \|w_+\| \cos \alpha + \lambda_2 \|w\| = \|w^*\| \cos \theta \quad (2).$$

D'on le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 \|w_+\| + \lambda_2 \|w\| \cos \alpha = \|w^*\| \cos \tilde{\theta} \\ \lambda_1 \|w_+\| \cos \alpha + \lambda_2 \|w\| = \|w^*\| \cos \theta \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \|w_+\| & \|w\| \cos \alpha \\ \|w_+\| \cos \alpha & \|w\| \end{vmatrix} = \|w_+\| \cdot \|w\| \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \|w_+\| \cdot \|w\| (1 - \cos^2 \alpha); \alpha \neq 0 \Rightarrow \Delta > 0.$$

$$\Delta_{\lambda_1} = \left| \begin{array}{cc} \|w^*\| \cos \tilde{\theta} & \|w\| \cos \alpha \\ \|w^*\| \cos \theta & \|w\| \end{array} \right| = \|w^*\| \cdot \|w\| \cdot (\cos \tilde{\theta} - \cos \alpha \cos \theta)$$

Mais

$$\tilde{\theta} = \alpha - \theta \Rightarrow \cos \tilde{\theta} = \cos(\alpha - \theta) = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta.$$

D'où

$$\Delta_{\lambda_1} = \|w^*\| \cdot \|w\| \sin \alpha \cdot \sin \theta ; \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\lambda_1} \geq 0. \quad D'ou \quad \lambda_1 = \frac{\Delta_{\lambda_1}}{\Delta} \geq 0.$$

De même

$$\Delta_{\lambda_2} = \left| \begin{array}{cc} \|w_+\| & \|w^*\| \cos \tilde{\theta} \\ \|w_+\| \cos \alpha & \|w^*\| \cos \theta \end{array} \right| = \|w_+\| \cdot \|w^*\| \cdot (\cos \theta - \cos \tilde{\theta} \cos \alpha)$$

Mais

$$\theta = \alpha - \tilde{\theta} \Rightarrow \cos \theta = \cos(\alpha - \tilde{\theta}) = \cos \alpha \cos \tilde{\theta} + \sin \alpha \sin \tilde{\theta}.$$

$$\Delta_{\lambda_2} = \|w_+\| \cdot \|w^*\| \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\theta} ; \quad 0 \leq \tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\lambda_2} \geq 0. \quad D'ou \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_{\lambda_2}}{\Delta} \geq 0.$$

$$\Rightarrow \Delta_{\lambda_2} \geq 0. \quad D'ou \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_{\lambda_2}}{\Delta} \geq 0.$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \exists! \lambda_1, \exists! \lambda_2 : w^* = \lambda_1 w_+ + \lambda_2 w, \quad \lambda_1 \geq 0 \text{ et } \lambda_2 \geq 0.$$

pour chaque valeur de $\tilde{\theta}$ et θ .

Notons que si

$$w_+ x_+ + b_+ \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x_+ \in X^+ \setminus \widetilde{X}^+$$

$$w_+ x_+ + b \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x_+ \in X^+ \setminus \widetilde{X}^+$$

Alors

$$\exists b^* \in R : w^* x_+ + b^* \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x_+ \in X^+ \setminus \widetilde{X}^+$$

en effet

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 w_+ x_+ + \lambda_1 b_+ \geq \frac{1}{2} \lambda_1 \\ \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_2 w_+ x_+ + \lambda_2 b \geq \frac{1}{2} \lambda_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 w_+ + \lambda_2 w) x_+ + \lambda_1 b_+ + \lambda_2 b \geq \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} w_+ + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} w \right) x_+ + \frac{\lambda_1 b_+ + \lambda_2 b}{\lambda_1 + \lambda_2} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x_+ \in X^+ \setminus \widetilde{X}^+$$

$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}w_+ + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}w, \frac{\lambda_1b_+ + \lambda_2b}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$ est un angle séparateur de $X^+ \setminus \widetilde{X}^+$

on encore $(\lambda_1w_+ + \lambda_2w, \lambda_1b_+ + \lambda_2b)$.

$(w^*, \lambda_1b_+ + \lambda_2b)$ ou $b^* = \lambda_1b_+ + \lambda_2b$.

Du point de vue "géométrique" il est évident de H_+^* sépare X^+ / \widetilde{X}^+ .

4.2 Conclusion

H_+ et H_- forment une marge de séparation X^+ / \widetilde{X}^+ et X^- / \widetilde{X}^-

\widetilde{H}_+ et \widetilde{H}_- forment une marge de séparation X^+ / \widetilde{X}^+ et X^- / \widetilde{X}^-

H_+^* et H_-^* forment une marge de séparation X^+ / \widetilde{X}^+ et X^- / \widetilde{X}^-

On détermine alors l'hyperplans H_+^* et H_-^* qui séparent \widetilde{X}^+ et \widetilde{X}^- .

Comme ils séparent aussi $X^+ \setminus \widetilde{X}^+$ et $X^- \setminus \widetilde{X}^-$, sa marge ne dépasser pas celle de H_+ , H_- .

4.3 Applications

Exemple 4.3.1

$$\begin{aligned} X^+ &= \{(1, 3)\} \\ X^- &= \{(2, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$

1)

$$\begin{aligned} x_+ &= (1, 3) \\ x_- &= (2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} w_{11} + 3w_{12} = 1 \\ 2w_{11} + 2w_{12} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_{11} = -\frac{5}{4} \\ w_{12} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 0 \quad (H)$$

$$\|W\|^2 = \frac{25}{16} + \frac{9}{16} = \frac{34}{16} = 2.125$$

$$-\frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 1 \quad (H_+) \quad \text{et} \quad -\frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = -1 \quad (H_-)$$

2)

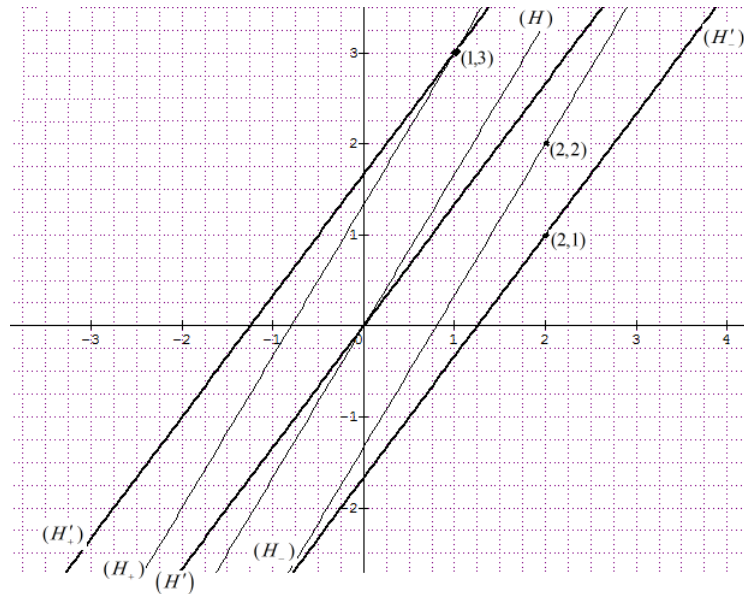
$$\begin{aligned} x_+ &= (1, 3) \\ x_- &= (2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} w_{11} + 3w_{12} = 1 \\ 2w_{11} + w_{12} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_{11} = -\frac{4}{5} \\ w_{12} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 = 0 \quad (H')$$

$$\text{alors } \|w'\|^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

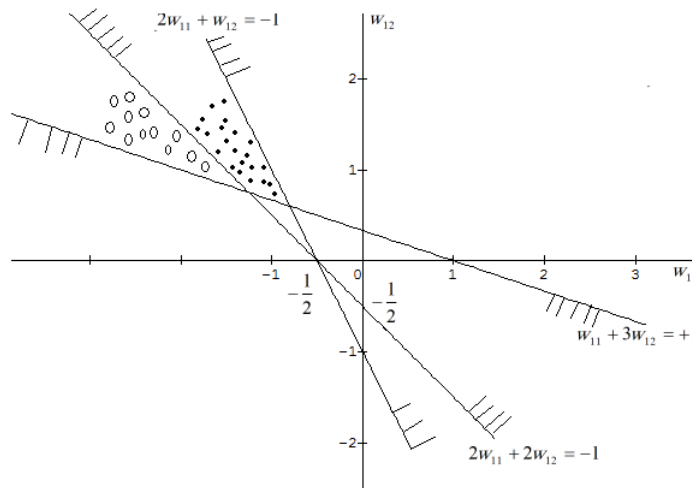
$$-\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 = 1 \quad (H'_+) \quad \text{et} \quad -\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 = -1 \quad (H'_-)$$

alors on a $\|w\|^2 > \|w'\|^2 \Rightarrow \frac{1}{\|w\|^2} < \frac{1}{\|w'\|^2}$ donc le séparateur est (H')



$$X_+ = \{(1, 3)\} ; X_- = \{(2, 2), (2, 1)\}$$

$$\begin{cases} w_{11} + 3w_{12} \geq +1 \\ 2w_{11} + 2w_{12} \leq -1 \\ 2w_{11} + w_{12} \leq -1 \end{cases}$$



$$\inf_{\substack{w_{11}+3w_{12} \geq 1 \\ 2w_{11}+2w_{12} \leq -1 \\ 2w_{11}+w_{12} \leq -1}} \|w\|^2 = \inf_{\substack{2w_{11}+2w_{12} = -1 \\ w_{11}+3w_{12} = 1}} \|w\|^2$$

L'hyperplan séparateur est $(H) : -\frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 = 0$ mais il n'est pas maximal $\|w\|^2 = 2.125$. Il est préférable de choisir le cône par (H) et (H') comme marge. Contient les éléments mal classés.

Exemple 4.3.2

Supposons que l'hyperplan séparateur à vaste marge (SVM) passe par le point \bar{x}_+ . Les inégalités $wx_+ + b \geq 1$, $wx_- + b \leq -1$ peuvent s'écrire sur la forme $\frac{w}{2}x_+ + \frac{b}{2} \geq \frac{1}{2}$, $\frac{w}{2}x_- + \frac{b}{2} \leq -\frac{1}{2}$ donc l'hyperplan séparateur $wx + b = 0$ est $\frac{w}{2}x + \frac{b}{2} = 0$. Le problème devient alors

$$\inf_{\substack{\|w\|^2 \\ wx_+ + b \geq \frac{1}{2} \\ wx_- + b \leq -\frac{1}{2}}} \|w\|^2$$

Comme $w\bar{x}_+ + b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} - w\bar{x}_+$.

D'où

$$\begin{aligned} wx_+ + b \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow wx_+ + (\frac{1}{2} - w\bar{x}_+) \geq \frac{1}{2}. \\ &\Leftrightarrow w(x_+ - \bar{x}_+) \geq 0 \end{aligned}$$

et $wx_- + b \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1$.

$$\text{D'où } \inf_{\substack{\|w\|^2 \\ w(x_+ - \bar{x}_+) \geq 0 \\ w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1}} \|w\|^2 = - \text{Max} \left\{ -\|w\|^2 \right\}_{\substack{w(x_+ - \bar{x}_+) \geq 0 \\ w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1}}$$

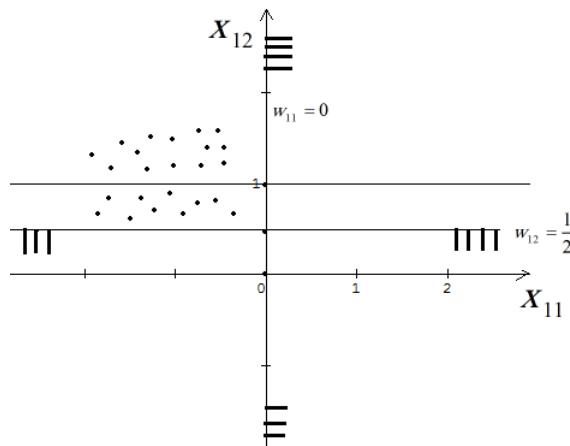
Le problème devient à chercher :
$$\begin{cases} \text{Max} \left\{ -\|w\|^2 \right\} \\ w(-x_+ + \bar{x}_+) \leq 0 \\ w(+x_- - \bar{x}_+) \leq -1. \end{cases}$$

$\Omega = \{w \in R^2 / w(-x_+ + \bar{x}_+) \leq 0 \text{ et } w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1\}$ est un polyèdre convexe et $(0, 0) \notin \Omega$. Donc

$$\begin{cases} \text{Max} \left\{ -\|w\|^2 \right\} = p_\Omega(0). \\ w(-x_+ + \bar{x}_+) \leq 0 \\ w(x_- - \bar{x}_+) \leq -1 \end{cases}$$

$x_+ = (2, 3)$

$$\begin{aligned} w(-(2, 3) + (2, 3)) &= 0 \\ w(-1, 3) + (2, 3) &\leq 0 \Rightarrow w_{11} \leq 0 \\ w((2, 2) - (2, 3)) &\leq -1 \Rightarrow 0 - w_{12} \leq -1 \Rightarrow w_{12} \geq 1 \\ w((2, 1) - (2, 3)) &\leq -1 \Rightarrow -2w_{12} \leq -1 \Rightarrow w_{12} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

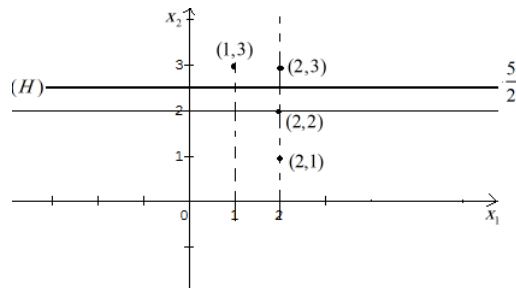


Donc $P_{\Omega}(0) = (0, 1)$
 $\|w\|^2 = 1 \Rightarrow \|w\| = 1$

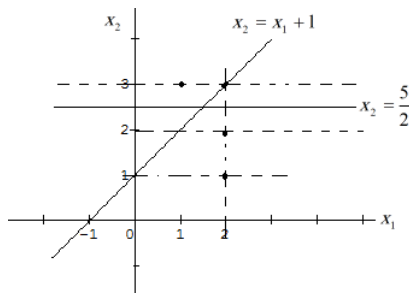
$$b = \frac{1}{2} - (0, 1)(2, 3) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$(0, 1)(x_1, x_2) - \frac{5}{2} = 0$$

$$x_2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$$



(H) passe par plus de deux points

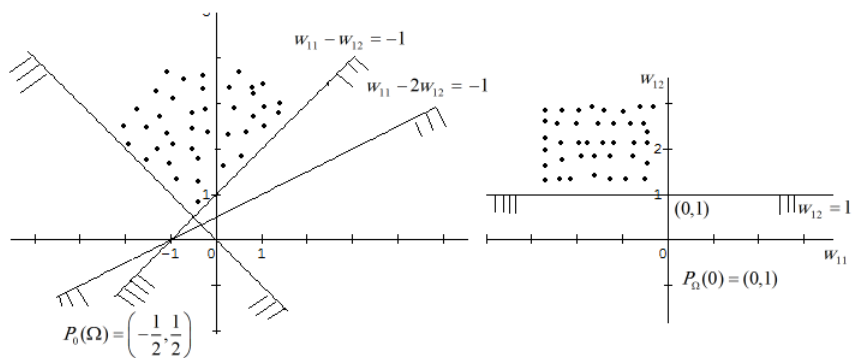


$$\inf \|x_+ - x_-\| = \|(2, 3) - (2, 2)\| = 1$$

$$x_+ \in X_+$$

$$x_- \in X_-$$

Domaine :



Exemple 4.3.3

Si la bande contient x'_- , alors $(\bar{x}_+ - x_-)$ et $(\bar{x}_+ - x'_-)$ sont indépendants.

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_+^1 - x_-^1 & \bar{x}_+^1 - x_-^{1'} \\ \bar{x}_+^2 - x_-^2 & \bar{x}_+^2 - x_-^{2'} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Posons $A_1 = (\bar{x}_+^1 - x_-^1)_{x_- \in X_-}$ et $A_2 = (\bar{x}_+^2 - x_-^2)_{x_- \in X_-}$.

$$\begin{aligned} \text{Si } A_1 = \lambda A_2 \text{ donc } & \begin{cases} \bar{x}_+^1 - x_-^1 = \lambda(\bar{x}_+^2 - x_-^2) \\ \bar{x}_+^1 - x_-^{1'} = \lambda(\bar{x}_+^2 - x_-^{2'}) \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{vmatrix} \bar{x}_+^1 - x_-^1 & \bar{x}_+^2 - x_-^2 \\ \bar{x}_+^1 - x_-^{1'} & \bar{x}_+^2 - x_-^{2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_+^1 - x_-^1 & \bar{x}_+^1 - x_-^{1'} \\ \bar{x}_+^2 - x_-^2 & \bar{x}_+^2 - x_-^{2'} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

contradiction. Donc on a :

$$\begin{aligned} w(\bar{x}_+ - x_+) &\leq 0, \quad x_+ \in \widetilde{X}_+ \\ w(x_- - \bar{x}_+) &\leq -1, \quad x_- \in \widetilde{X}_- \end{aligned}$$

$$\begin{cases} w_{11}(\bar{x}_+^1 - x_{+1}^1) + w_{12}(\bar{x}_+^2 - x_{+1}^2) + w_3 = 0 \\ \cdot \\ w_{11}(\bar{x}_+^1 - x_{+p}^1) + w_{12}(\bar{x}_+^2 - x_{+p}^2) + w_{p+2} = 0 \\ w_{11}(\bar{x}_{-1}^1 - \bar{x}_+^1) + w_{12}(\bar{x}_{-1}^2 - \bar{x}_+^2) + w_{p+3} = -1 \\ \cdot \\ w_{11}(\bar{x}_{-k}^1 - \bar{x}_+^1) + w_{12}(\bar{x}_{-k}^2 - \bar{x}_+^2) + w_{p+(k-1)} = -1 \end{cases}$$

posons $\tilde{A}_1 = (\bar{x}_+^1 - x_{+1}^1, \dots, \bar{x}_+^1 - x_{-k}^1)$ et $\tilde{A}_2 = (\bar{x}_+^2 - x_{+1}^2, \dots, \bar{x}_+^2 - x_{-k}^2)$; \tilde{A}_1 et \tilde{A}_2 est lines

Exemples

$$\begin{aligned} i) \quad X_+ &= \{(1, 3)\} \\ X_- &= \{(2, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_+ = (1, 3) ; \quad A_1 = (1, 1) \text{ et } A_2 = (-1, -2) \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{aligned} ii) \quad X_+ &= \{(1, 3), (2, 3)\} \\ X_- &= \{(2, 2), (2, 1)\} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_+ = (2, 3) ; \quad A_1 = (0, 0, 1) \text{ et } A_2 = (-1, -2, 0) .$$

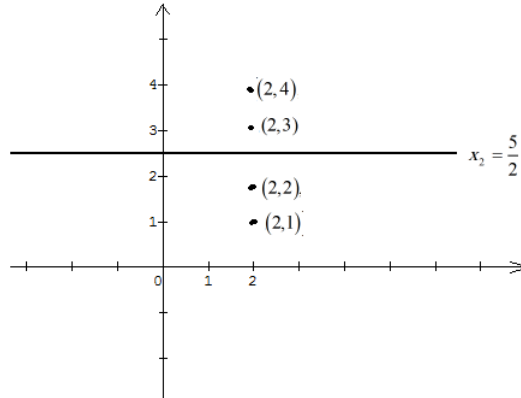
$$\bar{x}_+ = (2, 3) ; \quad A_1 = (0, 0, 0) \text{ et } A_2 = (-1, -2, -1) .$$

$$(-1, -2, -1)^t w_{12} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} w_{12} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_{12} \geq 1 \\ w_{12} \geq \frac{1}{2} \\ w_{12} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow w_{12} \geq 1 \Rightarrow w_{12} = 1 \text{ et } w_{11} = 0$$

$$w_{12} = 1, w_{11} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} - (0, 1)(2, 3) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

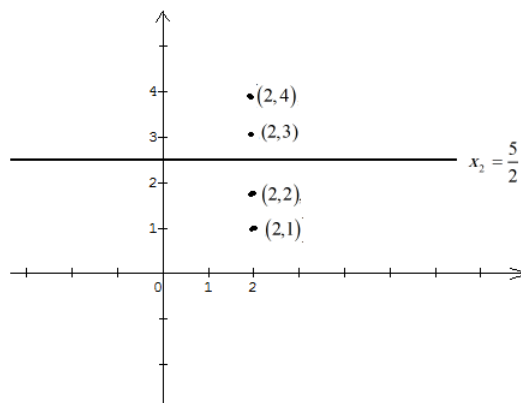
$$(0, 1)(x_1, x_2) - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$$



Si A_1 et A_2 sont non nuls, alors

$$\begin{aligned} w((2, 3) - (2, 4)) &\leq 0 \Rightarrow -w_{12} \leq 0 \\ w((2, 2) - (2, 3)) &\leq -1 \Rightarrow -w_{12} \leq -1 \\ w((2, 1) - (2, 3)) &\leq -1 \Rightarrow -2w_{12} \leq -1 \end{aligned}$$

donc $w_{12} \geq 1$



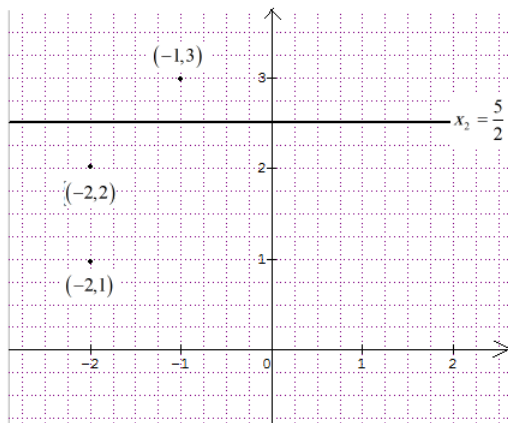
$$\begin{aligned} iv) X_+ &= \{(-1, 3)\} \\ X_- &= \{(-2, 2), (-2, 1)\} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_+ = (-1, 3); A_1 = (-1, -1) \text{ et } A_2 = (-1, -2) \text{ et } \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w_{11} + w_{12} = 1 \\ w_{11} + 2w_{12} = 1 \end{cases}$$

Donc $w_{11} = 1$ et $w_{12} = 0$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} - (0, 1) \cdot (-1, 3) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \\ (0, 1)(x_1, x_2) - \frac{5}{2} &= 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$



Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons tenté de présenter de manière simple le concept de système d'apprentissage introduit par Vladimir Vapnik, les « Support Vector Machine ». Nous avons donné une vision générale et une vision purement mathématique des SVM. Cette méthode de classification est basée sur la recherche d'un hyperplan qui permet de séparer au mieux des ensembles de données.

Nous avons exposé les cas linéairement séparable et les cas non linéairement séparables qui nécessitent l'utilisation de fonction noyau (kernel) pour changer d'espace. Cette méthode est applicable pour des tâches de classification à deux classes, mais il existe des extensions pour la classification multi classe.

La notion de marge a renouvelé la vision des méthodes inductives en général, et a stimulé tout un courant de recherche dont on peut espérer qu'il débouchera sur de nouvelles classes de méthodes, encore mieux comprises et encore plus adaptables à nos problèmes. Finalement, on espère que ce modeste travail a donné un aperçu sur ce domaine de recherche très actif, intéressant, et défiant.

Bibliographie

- [1] N. Ayat, *Sélection de modèle automatique des machines à vecteurs de support , application à la reconnaissance d'images de chiffres manuscrits*. Thèse présentée à l'école de technologie supérieure, Montréal, Canada, 2004.
- [2] N. E. Ayat, M. Cheriet, and C. Y. Suen, "Kmod-a two parameter svm kernel for pattern recognition," International Conference on Pattern Recognition, vol. 3, pp. 331-334, 2002.
- [3] C. M. Bishop, *Neural Networks for Pattern Recognition* : Oxford University Press, Oxford, Great Britain, 1995.
- [4] M. Bouillon : « Apprentissage incrémental et décrémental » , Classification avec un système d'inférence floue évolutif appliquée à la reconnaissance de gestes manuscrits. Mémoire de Master2 , université INSA DE RENNE, 2012.
- [5] G. Cauwenbergh , T. Poggio , *Incremental and decremental Support Vector machine Learning*, In Adv neural information processing , volume 13. MIT press, 2001.
- [6] O. Chapelle and V. Vapnik, "Mode! selection for support vector machines," Advances in Neural Information Processing Systems, 1999.
- [7] A. Cornuéjols, *Une nouvelle méthode d'apprentissage : Les SVM. Séparateurs à Vaste marge*, bulletin de l'AFIA ,N 51, Université de Paris-Sud , Orsay, France, Juin 2002.
- [8] A. Djeflal , « Utilisation des méthodes Support Vector Machine (SVM) dans l'analyse Des bases de données » , thèse de doctorat en science université de Biskra, 2010
- [9] C. Guéret , N. Monmarché, M. Slimane, H. Cardot. Introduction aux Machines à Vecteurs Support , rapport de stage : Laboratoire d'informatique de l'université de Tours (EA 2011)
- [10] B. E. Boser, I. M. Guyon, and V. N. Vapnik. A training algorithm for optimal margin classifiers. In Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory, pages 144–152. ACM, 1992.
- [11] S. Khellat Kihel . *Les séparateurs à vaste marge Bi- classe*, Université des sciences et de technologie d'Oran, exposé de Master2, 2012.
- [12] G. Loosli, S. Canu, L. Bottou. *Svm et apprentissage des très grandes bases de données*, Conférence sur l'apprentissage, Tregastel, France, 22-24 May 2006.
- [13] B. A. Murtagh and M. A. Saunders, "Large-scale linearly constrained optimization. Mathematical Programming", 14(1) :41–72, 1978
- [14] M. Opper and O. Winther, " Gaussian processes and svm : Mean field and leaveone-out," in Advances in Large Margin Classifiers, A. J. Smala, P. L. Bartlett, B. Schölkopf, and D. Schuurmans, Eds. Cambridge : MIT Press, 2000, pp. 311-326.

- [15] E. Osuna, R. Freund, and F. Girosi. *A Improved Training Algorithm For Support Vector Machines*, Proc. 1997 IEEE Workshop on neural network for signal Proceesing , pp 276-285, 1997.
 - [16] J. Platts, " Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization," in *Advances in Kernel Methods : Support Vector Machines*, Scholkopf, Burges, and Smola, Eds. : MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
 - [17] J. Shawe-Taylor, N. Cristianini. *Kernel methods for pattern analysis*, Cambridge University Press, 2004.
 - [18] A. Shigeo. *Support Vector Machines for Pattern Classification*, Springer-Verlag London Limited, 2005.
 - [19] P. Vincent, *Modèles à noyaux à structure locale*, Thèse de doctorat en informatique, Université de Montréal, 2003.
-