

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVESITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT**



**FACULTE DES SCIENCES ST SCIENCE DE L'INGENIEURIE  
DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE**

**Mémoire en vus de l'obtention d'un diplôme de licence en  
Mathématiques**

**Option : Mathématiques appliqué**

**Thème**

**Compacité dans les espaces métriques  
Théorème d'Arzelà et théorème de Peano**

**Proposé et Encadré par :  
prof A. Mokhtari.**

**Présenté par :**  
- Madni Rachid.  
- Baflah Aissa.  
- Belabbasse khaled.

**N° d'ordre:...../2012-PFE/DGI**

# ***Remerciement***

**Avant tout, on remercie le bon Dieu pour tout puissant qui nous a aidés à Terminer ce travail.**

**Nous remercions l'ensemble de tous nos enseignants de la License en Maths LMD.**

**Et plus particulièrement monsieur A. Mokhtari qui nous a lancé à faire ce travail.**

## Table des matières

Table des matières. ....	02
Chapitre premier. Espaces topologiques et métriques. ....	04
1. Notions topologiques. ....	04
2. Espaces métriques. ....	05
Deuxième Chapitre. Compacité. ....	09
1. Notion de compacité. ....	09
2. Applications continues des espaces métriques. ....	12
3. fonctions continues et semi-continue sur un espace compact. ....	13
4. Compacité dénombrable. ....	16
5. Ensembles précompacts. ....	19
Troisième Chapitre. Compacité dans les espaces métriques. ....	21
1. Ensembles totalement bornés.....	21
2. Espaces totalement borné et compacité. ....	22
3. Ensembles précompacts dans un espace métrique ....	23
4. Théorème d'Arzelà. ....	24
5. Théorème de Péano.....	26
6. applications continues des compacts métriques.....	29
7. Théorème généralisé d'Arzelà.....	30
Bibliographie.....	32

## Résumé.

Ce travail est consacré en premier temps à donner une idée générale sur les espaces métriques, puis l'étude de la notion de compacité dans les trois cas : le cas générale, le cas des espaces métriques et en fin le cas d'espace des fonctions continues sur un compact, dans se dernier cas nous allons énoncer le théorème d'**ARZELA** et comme application de ce théorème le théorème de **PEANO sur les** équations différentielles ordinaires du premier ordre.

# Chapitre premier

## Espaces topologiques et métriques

### I. 1: Notions topologiques

Soit  $E$  un ensemble quelconque non vide.  $\tau \subset \mathcal{P}(E)$  : ensemble des parties de  $E$ .

#### Définition1

On dit que  $\tau$  est une topologie sur  $E$  si elle vérifie les trois assertions suivantes :

1.  $\emptyset, E \in \tau$ .
2. Si une réunion quelconque de partie de  $\tau$  appartient a  $\tau$  (stabilité par réunion quelconque).
3.  $\forall O_1, O_2 \in \tau : (O_1 \cap O_2) \in \tau$  (stabilité par intersection finie).

#### Définition2

Si  $\tau$  est une topologie sur  $E$ , les éléments de  $\tau$  sont appelés les  $\tau$ -ouverts. Et on note  $(E, \tau)$  un espace topologique.

#### Exemples

- $(E, \mathcal{P}(E))$  est appelé espace topologique discret.
- $(E, \{\emptyset, E\})$  est appelé espace topologique grossier.

#### Définition3

Soit  $F \subset E$ , on dit que  $F$  est un fermé si  $C_E F$  est un ouvert.

#### Remarques

- $E$  et  $\emptyset$  sont ouverts et fermés à la fois (pour toute topologie).
- Tout élément de l'espace topologique discret  $(E, \mathcal{P}(E))$  est ouvert et fermé à la fois.

#### Définition4

Soient  $\tau$  une topologie sur  $E$ ,  $B \subset \tau$ , on dit que  $B$  est une base pour la topologie  $\tau$  si:

$$\forall O \in \tau, \exists (b)_{i \in I} \in B \text{ tel que } O = \bigcup (b)_i \text{ pour } i \in I.$$

## Exemples

- Les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  forment une base de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .
- les pavés ouverts de  $\mathbb{R}^2$  forment une base de la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^2$ .
- Les singletons forment une base de la topologie discrète.

## **I. 2: espaces métriques**

### Définition 1

Soit E ensemble non vide, on appelle distance sur E toute application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}_+$  tel que :

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (condition de séparabilité).
- $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in E$  (condition de symétrie).
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in E$  (l'inégalité triangulaire).

(E, d) est appelé espace métrique.

Si la première condition est remplacé par :  $x = y$  donne  $d(x, y) = 0$  on dit que d est une semi distance.

### Exemples

- $E = \mathbb{R}$       $d(x, y) = |x - y|$

$$d : \mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = |x - y| \quad (\mathbb{R}, d) \text{ est un espace métrique.}$$

- $E = \mathbb{R}^2$       $d(x, y) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ . Avec  $x = (x, x')$  et  $y = (y, y')$ .

$$d : \mathbb{R}^2 * \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

(E, d) est un espace métrique, d(x, y) est appelée distance Euclidienne.

- $E = C[a, b]$  l'ensemble des fonctions continues sur [a, b]

$$d : E * E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(f, g) \rightarrow d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

d: est une distance sur E.

Pour la suite considérons (E, d) un espace métrique,  $A \subset E, A \neq \emptyset, x \in E$

## Définition 2

- On appelle la distance entre  $x$  et  $A$  la quantité  $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \text{ tel que } y \in A\}$ .

On aura par conséquence, si  $x \in A$ ,  $d(x, A) = 0$ .

Soit  $B \subset E$  et  $B \neq \emptyset$ .

- La distance entre  $A$  et  $B$  est défini par :  $d(A, B) = \inf \{d(x, y) / x \in A, y \in B\}$
- Le diamètre de  $A$  est défini par :  $d(A) = \sup \{d(x, y) / x, y \in A\}$ .
- On dit que  $A$  est borné si  $d(A) < +\infty$ .

## Définition 3

- On appelle boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble.

$B(x_0, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) < r\}$ .

- On appelle boule fermée de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble.

$B_f(x_0, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) \leq r\}$ .

- On appelle sphère de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble.

$S(x_0, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x, x_0) = r\}$ .

## Exemples

- $E = \mathbb{R}^2$  muni de la distance Euclidienne

$B\{(0,0), 1\} = \{x, y \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 < 1\}$  est la boule ouverte de centre  $(0,0)$  et de rayon 1.

$B_f\{(0,0), 1\} = \{x, y \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 \leq 1\}$  est la boule fermée de centre  $(0,0)$  et de rayon 1.

$S\{(0,0), 1\} = \{x, y \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 = 1\}$  est la sphère de centre  $(0,0)$  et de rayon 1.

## Définition 4 (Topologie induite par une distance)

La famille des boules ouvertes dans  $(E, d)$  est une base d'une topologie  $\tau$  sur  $E$ .

Cette topologie est appelé topologie induite par distance  $d$ .

## Exemples

- La métrique usuelle dans  $\mathbb{R}$  induite la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$ .
- Dans  $\mathbb{R}^2$ , la distance euclidienne induite La topologie usuelle de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 5** (Parties ouvertes et fermées d'un espace métrique)

Soient  $(E, d)$  un espace métrique,  $A \subset E$ .  $A$  est une partie ouverte de  $E$  ssi:  $\forall x \in A$ ,

$$\exists B(x, r) \text{ tel que: } B(x, r) \subset A.$$

$F \subset E$ , on dit que  $F$  est une partie fermée ssi  $C_E F$  est une partie ouverte.

**Propriétés**

- $\emptyset, E$  sont des parties ouvertes de  $E$ .
- Une réunion quelconque des parties ouvertes est une partie ouverte.
- L'intersection de deux parties ouvertes est une partie ouverte.

**Propriété de (Hausdorff)**

Soit  $(E, d)$  un espace métrique, alors  $\forall x, y \in E$ , tel que  $x \neq y$ ,  $\exists r_1 > 0$ ,  $\exists r_2 > 0$ ,  $B(x, r_1) \cap B(y, r_2) = \emptyset$

On dit que  $(E, d)$  est séparé au sens de Hausdorff.

**Définition 6**

Soient  $V \subset E$  et  $x \in E$ , on dit que  $V$  est un voisinage de  $x$  s'il existe une partie ouverte  $O$  tel que:

$$x \in O \subset V.$$

**Définition 7** (intérieur, extérieur, frontière)

Soient  $(E, d)$  un espace métrique et  $A \subset E$  tel que  $A \neq \emptyset$ .

- $x(x \in A)$  est un point intérieur à  $A$  s'il existe une boule ouverte de centre  $x$  incluse dans  $A$ .

L'intérieur de  $A$  est noté  $\overset{\circ}{A}$ .

- on dit que  $x(x \in A)$  est un point extérieur à  $A$  si  $x$  est intérieur à  $C_E A$ .

L'ensemble des points extérieurs à  $A$  est noté par  $\text{ext}(A)$ , et on a  $e(A) = \overset{\circ}{C_E A}$ .

- On dit que  $x(x \in A)$  est un point frontière à  $A$  s'il n'est pas intérieur ni extérieur à  $A$ .

L'ensemble des points frontières de  $A$  noté  $\text{Fr}A$ , et la frontière de  $A$   $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_E A)$ .

Prenant par exemple  $\text{Fr}(]a, b[) = \{a, b\}$ .

### **Définition 8** (adhérence)

Soient  $(E, d)$  un espace métrique,  $A \subset E$ ,  $A \neq \emptyset$ .

- On dit qu'un point  $x \in E$  est un point adhérent de  $A$  si  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

L'adhérence de  $A$  noté par  $\bar{A}$  est l'ensemble des points adhérents c.-à-d:

$$\bar{A} = \{x \in E / \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

### **Remarques**

- $A \subset \bar{A}$ .
- L'adhérence de  $A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .
- $\bar{A}$  est appelé fermeture de  $A$ .

### **Définition 9** (ensemble dense)

- On dit que  $A$  est dense dans  $B$  si  $B \subset \bar{A}$ .
- On dit que  $A$  est dense dans  $E$  si  $\bar{A} = E$ .

Par exemple  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### **Définition 10** (point d'accumulation)

On dit que  $x(x \in A)$  est un point d'accumulation de  $A$  si :

$$\forall r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble des points d'accumulations de  $A$  noté par  $A'$ , et on appelle ensemble dérivé de  $A$ .

# Deuxième Chapitre

## Compacité

### II. 1: Notion de compacité

Un rôle fondamental en analyse est joué par la proposition suivante connue sous le nom du lemme de Heine-Borel:

De tout recouvrement d'un segment  $[a, b]$  de la droite numérique par des intervalles on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Cette proposition reste vrai si l'on remplace des intervalles par des ensembles ouverts arbitraires : de tout recouvrement ouvert du segment  $[a, b]$  on peut extraire un sous recouvrement fini.

En partant de cette propriété des segments de la droite numérique, on introduit la notion importante suivante:

#### ***Définition 1*** (compacité)

Un espace topologique  $T$  est appelé espace compacte si tout recouvrement ouvert de  $T$  contient un sous recouvrement fini.

Un compacte est un espace topologique qui satisfait à l'action de séparation de Hausdorff, nous verrons plus tard que la compacité est une propriété dont jouissent non seulement les segments mais aussi tous les sous-ensembles fermés et bornés de tous espace euclidien de dimension finie. Par contre la droite, le plan, l'espace à trois dimensions représentent les plus simple exemples d'espaces non compactes.

Nous dirons qu'une famille de parties  $\{A_i\}_{i \in I}$  d'un ensemble  $T$  est centrée, si aucune intersection finie  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  d'ensembles de cette famille n'est vide. De la définition des espaces compacts, à l'aide des relations de dualités on déduits le théorème suivant :

#### **Théorème 1**

Pour qu'un espace topologique  $T$  soit compact il faut et il suffit qu'il vérifie la condition :

(R) toutes famille centrée de sous-ensemble fermé de  $T$  admet une intersection non vide.

## En effet

### **La condition est nécessaire.**

Soit  $\{F_\alpha\}$  une famille centrée de sous-ensembles fermés de  $T$  et soit  $T$  un espace compact, les ensembles  $G_\alpha = T \setminus F_\alpha$  sont ouverts et comme aucune intersection finie  $\bigcap_{i=1}^n F_i$  n'est vide, on en déduit qu'aucune famille d'ensemble  $G_i = T \setminus F_i$  ne recouvre  $T$  entièrement. Mais alors (en vertu de la compacité de  $T$ ) l'ensemble de tous les  $G_\alpha$  ne peut pas constituer un recouvrement de  $T$ , ce qui signifie que  $\bigcap F_\alpha \neq \emptyset$  ainsi donc, si  $T$  est un espace compact il remplit la condition R.

### **La condition est suffisante.**

Supposons que  $T$  vérifie la condition (R), et soit  $\{G_\alpha\}$  un recouvrement ouvert de  $T$ . On posant  $F_\alpha = T \setminus G_\alpha$ , on obtient  $\bigcap F_\alpha = \emptyset$ , d'où l'on déduit (en vertu de la condition (R)) que la famille  $\{F_\alpha\}$  ne peut pas être centrée. Il existe donc des ensembles  $F_1, \dots, F_n$  tel que  $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$ . Mais alors les ouverts correspondants  $G_i = T \setminus F_i$  forment un sous-recouvrement fini du recouvrement  $\{G_\alpha\}$ . Donc la condition (R) est équivalente à la compacité. ■

Nous allons établir maintenant quelques propriétés importantes des espaces compacts.

## Théorème 2

Si  $T$  est espace compact, tout sous-ensemble infini de  $T$  possède au moins un point d'accumulation.

## En effet

Si  $T$  contient un ensemble infini  $X$  ne possédant aucun point d'accumulation, alors de  $X$  on peut extraire un sous ensemble dénombrable

$$X_1 = (x_1, x_2, \dots)$$

Ne possédant non plus aucun point d'accumulation. Mais alors les ensembles

$$X_n = (x_n, x_{n+1}, \dots)$$

forment une famille centrée de sous-ensembles fermés de  $T$  dont l'intersection est vide, ce qui signifie que  $T$  n'est pas compact. ■

## Théorème 3

Tout sous-ensemble fermé d'un espace compact est un espace compact.

## En effet

Soit  $F$  un sous-ensemble fermé de l'espace compact  $T$ , et soit  $\{F_\alpha\}$  une famille centrée quelconque de sous-ensembles fermés du sous espace  $F \subset T$ . Comme tout ensemble  $F_\alpha$  fermé dans  $F$ , et aussi fermé dans  $T$ ,  $\{F_\alpha\}$  est une famille centrée de sous-ensembles fermés de  $T$ . Par conséquent

$\bigcap F_\alpha \neq \emptyset$ . en vertu du théorème 1 on en déduit la compacité de  $F$ . ■

Etant donné que tout sous-espace d'un espace de Hausdorff est lui-même un espace de Hausdorff, on obtient:

## Corollaire 1

Tout sous-ensemble fermé d'un compact est un compact.

## Théorème 4

Un compact est fermé dans tout espace de Hausdorff qui le contient.

## En effet

Soit  $K$  sous-ensemble compact d'un espace de Hausdorff  $T$ , et soit  $y \notin K$ . Alors quel que soit  $x \in K$ , il existe un voisinage  $U_x$  du point  $x$  est un voisinage  $V_x$  du point  $y$  tels que:

$$U_x \cap V_x = \emptyset.$$

Les voisinages  $U_x$  forment un recouvrement ouvert de  $K$ . En vertu de la compacité de  $K$  on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}. \text{ posons } V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \dots \cap V_{x_n}.$$

Alors  $V$  est un voisinage du point  $y$  qui rencontre pas  $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \supset K$ , par conséquent  $y \notin K$  qui signifie que  $K$  est fermé. ■

## Remarque

Les théorèmes 3 et 4 montrent que dans la classe des espaces de Hausdorff la compacité est une propriété intrinsèque c.-à-d. que tout compact reste un compact quel que soit l'espace de Hausdorff plus large qui le contient.

## Théorème 5

Tout compact est un espace normal.

## En effet

Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles fermés disjoints d'un compact  $K$ , en appliquant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème précédant, il est aisé d'avoir que pour tout point  $y \in Y$ , il existe un voisinage  $U_y$  de  $y$ , et un ensemble ouvert  $O_y \supset X$  tels que  $U_y \cap O_y = \emptyset$ . On en déduit que tout compact est un espace régulier. Supposons maintenant que  $\gamma$  parcourt tout l'ensemble  $Y$ , considérons un sous-recouvrement fini  $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$  du recouvrement  $\{U_y\}$  de l'ensemble ouverts

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cap \dots \cap O_{y_n}, \text{ et } O^{(2)} = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$$

Vérifient que les conditions

$$O^{(1)} \supset X, O^{(2)} \supset Y, O^{(1)} \cap O^{(2)} = \emptyset.$$

D'où la normalité de  $K$ . ■

## **II. 2: Applications continues des espaces compacts**

Les applications continues des espaces compacts, en particulier des compacts, possèdent des propriétés aussi intéressantes qu'importantes.

### Théorème 6

L'image d'un espace compact dans une application continue est un espace compact.

## En effet

Soit  $X$  un espace compact, et  $f$  une application continue de  $X$  dans un espace topologique  $Y$ . Considérons un recouvrement quelconque  $\{V_\alpha\}$  de son image ( $f(X)$ ) par des ensembles ouverts dans  $f(X)$ . Posons  $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ . Les ensembles  $U_\alpha$  sont ouverts (comme image réciproque d'ensemble ouverts dans une application continue) et constituent un recouvrement de l'espace  $X$ . en vertu de la compacité de  $X$ , de ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini.  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , alors les ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , o  $V_i = f(U_i)$  recouvrent l'image  $f(X)$  de l'espace  $X$ . ■

### Théorème 7

Toute application biunivoque et continue  $\varphi$  d'un compact  $X$  sur un espace de Hausdorff  $Y$  est un homéomorphisme.

## En effet

Il suffit de montrer que les conditions du théorème entraînent la continuité de l'application réciproque  $\varphi^{-1}$ . Soient  $F$  un ensemble fermé dans  $X$ , et  $P=\varphi(F)$  son image dans  $Y$ . D'après le théorème précédent  $P$  est un compacte par conséquent,  $P$  est fermé dans  $Y$ . Donc l'image réciproque de tout ensemble fermé  $F \subset X$  dans l'application  $\varphi^{-1}$  est fermée. D'où la continuité de l'application  $\varphi^{-1}$ . ■

## **II. 3:Fonctions continues et semi-continues définies sur un espace compact.**

Au numéro précédent il a été question des applications continues d'un compact dans un espace de Hausdorff. Un cas particulier des applications de ce type est constitué par les applications d'un compact dans la droite numérique, c.-à-d. par les fonctions numériques définies sur un compact. Ces fonctions possèdent les propriétés principales des fonctions définies sur un segment, connues du cours d'analyse.

### Théorème 8

Soient  $T$  un espace compact et  $f$  une fonction continue sur  $T$ . Alors  $f$  est bornée sur  $T$ , et y atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure

## En effet

Une fonction continue est une application continue de  $T$  dans la droite numérique  $\mathbb{R}$ . En vertu du théorème général 6, l'image de  $T$  dans  $\mathbb{R}$  est un ensemble compact. Or, du cours d'analyse on sait que tout sous-ensemble compact de la droite numérique est fermé et borné. Un tel ensemble non seulement admet une borne supérieure et une borne inférieure finies, mais aussi il les contient. ■

L'affirmation du dernier théorème admet une extension à une classe plus large de fonctions, c'est les fonctions semi-continues.

### Définition 2 (semi-continue)

Une fonction  $f(x)$  est dite semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en un point  $x_0$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$ , tel que si  $x \in U$  on a:

$$f(x) > f(y) - \varepsilon \text{ (respectivement } f(x) > f(y) + \varepsilon).$$

Par exemple la fonction "partie entière de  $x$ ",  $f(x)=E(x)$  est semi-continue supérieurement lorsqu'on augmente (ou diminue) la valeur ( $x_0$ ) d'une fonction

continue en un point quelconque  $x_0$  on obtient une fonction semi-continue supérieurement (inférieurement).

Si la fonction  $f(x)$  est semi-continue supérieurement la fonction  $-f(x)$  est semi-continue inférieurement, ces deux remarques donnent la possibilité de construire un grand nombre d'exemples des fonctions semi-continues.

Pour étudier les propriétés de la semi-continuité des fonctions réelles, il est commode de convenir qu'elles peuvent prendre des valeurs infinies.

Si  $(x_0) = -\infty$ , la fonction  $f$  sera considérée comme semi-continue inférieurement au point  $x_0$ , si en outre, pour tout  $h > 0$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tels que  $f(x) < (-h)$  pour tout  $x \in U$ , on dira aussi que  $f$  est semi-continue supérieurement au point  $x_0$ .

Si  $(x_0) = +\infty$  la fonction  $f$  sera considérée comme semi-continue supérieurement en point  $x_0$ , si on outre, pour tout  $h > 0$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tels que  $f(x) > h$ , pour tout  $x \in U$ , on dira aussi que  $f$  est semi-continue inférieurement au point  $x_0$ .

Soit  $f(x)$  une fonction réelle définie sur un espace métrique  $\mathbf{R}$ . On appelle limite supérieure  $\bar{f}(x_0)$  de la fonction  $f(x)$  en point  $x_0$ , la quantité suivante (finie ou infinie)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sup_{x \in B(x_0, \varepsilon)} f(x)].$$

On définit la limite inférieure  $\underline{f}(x_0)$  d'une manière analogue en remplaçant la borne supérieure par la borne inférieure. La différence  $\omega f(x_0) = \bar{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$  lorsqu'elle a un sens, c.-à-d. . lorsque  $\bar{f}(x_0)$  et  $\underline{f}(x_0)$  ne sont pas infinies et de même signe) est appelée oscillation de la fonction  $f(x)$  en  $x_0$ .

Il est aisé de voir que pour la continuité de la fonction  $f(x)$  en  $x_0$ , il faut et il suffit que  $\omega f(x_0) = 0$ . c.-à-d. que

$$-\infty < \underline{f}(x_0) = \bar{f}(x_0) < +\infty .$$

Quelle que soit la fonction  $f(x)$  définie sur un espace métrique la fonction  $\bar{f}(x)$  est semi-continue supérieurement et la fonction  $\underline{f}(x)$  est semi-continue inférieurement.

Ceci résulte immédiatement de la définition de limite supérieure et inférieure.

Considérons l'espace métrique  $M$ , ayant pour élément  $x$  toutes les fonctions réelles bornées  $\varphi(t)$ , définies sur le segment  $[a, b]$ , la métrique étant définie par l'égalité

$$\rho(x, y) = \rho(\varphi, \psi) = \sup_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Les fonctions définies sur  $M$  seront appelées c'est l'usage fonctionnelles, pour les distinguer des fonctions  $\varphi(t)$ , élément de  $M$ .

Considérons un exemple important de fonctionnelle semi-continues.

Appelons longueur de la courbe  $y=f(x)$  pour  $(a \leq x \leq b)$ , la fonctionnelle:

$$L_a^b(f) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

où la borne supérieure (qui peut être égale  $a(+\infty)$ ) est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions possibles du segment  $[a, b]$ . Cette fonctionnelle est définie sur tout l'espace  $M$ . Pour des fonctions continues elle coïncide avec la valeur de la limite suivante:

$$\lim_{\max |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Enfin, pour des fonctions continument dérivables, elle peut s'écrire sous la forme

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

La fonctionnelle  $L_a^b(f)$  est semi-continue inférieurement dans  $M$ , ce qui résulte immédiatement de sa définition.

Le théorème 9, démontré plus haut, s'étend aux fonctions semi-continues.

### **Théorème 8a**

Toute fonction finie est semi continue inférieurement (resp. supérieurement) sur  $t_1$ -espace compact  $T$ , est borné inférieurement (resp. supérieurement) sur  $T$ .

#### **En effet**

Supposons que  $\inf f(x) = -\infty$ , il existe alors une suite  $\{x_n\}$  telle que  $f(x_n) < -n$ . Comme l'espace  $T$  est compact son sous-ensemble infinie  $\{x_n\}$  possède (d'après le théorème 2) au moins un point d'accumulation  $x_0$ . La fonction  $f(x)$  étant par hypothèse finie et semi-continue inférieurement, il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tels que  $f(x) > f(x_0) - 1$  si  $x \in U$ . Mais alors le voisinage  $U$  ne peut contenir qu'un nombre fini de points de l'ensemble  $\{x_n\}$  ce qui contredit le fait que  $x_0$  est in point d'accumulation de cet ensemble. ■

Pour le cas d'une fonction semi-continue supérieurement la démonstration est analogue.

## Théorème 8b

Toute fonction finie est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur un  $T_1$ -espace compact  $T$  atteint sur  $T$  sa borne inférieure (resp. supérieure).

### En effet

Soit  $f(x)$  une fonction semi-continue inférieurement. D'après le théorème 8a, elle admet une borne inférieure finie, et il existe dans  $T$  une suite  $\{x_n\}$  tels que:

$$f(x_n) < \inf f(x) + 1/n.$$

Comme l'espace  $T$  est compact, l'ensemble  $\{x_n\}$  possède un point d'accumulation  $x_0$ . On ne peut pas avoir  $f(x_0) > \inf f(x)$ , car alors, étant donné que la fonction  $f(x)$  est semi-continue inférieurement, il existerait un voisinage  $U$  du point  $x_0$  et un nombre  $\delta > 0$ , tels que  $f(x) > \inf f(x) + \delta$  pour tout  $x \in U$ . Mais un tel voisinage  $U$  ne pourra pas contenir un sous-ensemble infini de  $\{x_n\}$ . Donc  $f(x_0) = \inf f(x)$ . ■

## **II. 4: Compacité dénombrable.**

Introduisons la notion suivante:

### Définition 3 (compacité dénombrable)

On dit qu'un espace  $T$  est dénombrablement compact, si tout sous-ensemble infini de  $T$  admet au moins un point d'accumulation.

Du théorème 2, démontré au numéro 1, il résulte que tout espace compact est dénombrablement compact. Mais la réciproque n'est pas en générale vrai.

Voici un exemple d'espace dénombrablement compact qui n'est pas compact.

Considérons l'ensemble  $X$  de tout les nombre ordinaux  $\alpha$  inférieurs au premier nombre ordinal non dénombrable  $\omega_1$ . Appelons un intervalle  $(\alpha, \beta)$  dans  $X$ , l'ensemble de tous les nombre ordinaux  $\gamma$  tels que  $\alpha < \gamma < \beta$ .

Appelons ensemble ouvert dans  $X$ , toute réunion d'intervalles. Il est aisé de vérifier que l'espace ainsi construit est dénombrablement compact, mais non compact.

Le rapport entre la notion de compacité est celle de compacité dénombrable sera éclairci par le théorème suivant:

## Théorème 9

Pour qu'un espace topologique  $T$  soit dénombrablement compact, il faut et il suffit que l'une quelconque des conditions suivantes soit remplie:

1. Tout recouvrement ouvert dénombrable de l'espace  $T$  contient un sous recouvrement fini.
2. Toute famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dans  $T$ , possède une intersection non vide.

### En effet

L'équivalence des conditions est une conséquence immédiate des relations de dualité. Si l'espace  $T$  n'est pas dénombrablement compact, alors en reprenant le raisonnement utilisé à la démonstration du théorème 2, il est aisé de voir que dans  $T$  il existe une famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dont l'intersection est vide. Ceci prouve que la condition 2 (et donc, la condition 1 également) est suffisante. Montrons maintenant que la condition 2 est nécessaire. Supposons que l'espace  $T$  est dénombrablement compact, et soit  $\{F_n\}$  une famille centrée dénombrable d'ensembles fermés dans  $T$ . Il s'agit de montrer que  $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ .  
Posons

$$\varphi_n = \bigcap_{k=1, \dots, n} F_k$$

Il est clair que tous les ensembles  $\varphi_n$ , sont fermés, non vides (puisque la famille  $\{F_n\}$  est centrée) qu'ils forment une suite non croissante

$$\varphi_1 \supset \varphi_2 \supset \dots$$

Et que

$$\bigcap_n \varphi_n = \bigcap_n F_n$$

Deux cas sont possibles:

- A partir d'un certain numéro  $n_0$ , on a:

$$\varphi_{n_0} = \varphi_{n_0+1} = \dots$$

Dans ce cas il est évident que

$$\bigcap_n \varphi_n = \varphi_{n_0} \neq \emptyset$$

- Parmi les  $\varphi_n$ , il y a une infinité d'ensembles deux à deux distincts. Il suffit de considérer le cas, où tous les  $\varphi_n$  diffèrent l'un de l'autre. Soit

$$x_n \in \varphi_n \setminus \varphi_{n+1}$$

La suite  $\{x_n\}$  constitue un ensemble infini de points distincts de  $T$ , en vertu de la compacité dénombrable de  $T$ , elle possède au moins un point d'accumulation, soit  $x_0$ . Or, comme  $\varphi_n$  contient tous les points  $x_n, x_{n+1}, \dots$ , alors  $x_0$  est également un point d'accumulation de  $\varphi_n$ , et comme  $\varphi_n$  est fermé,  $x_0 \in \varphi_n$ . Par conséquent  $x_0 \in \bigcap_n \varphi_n$ . - à-d.  $\bigcap_n \varphi_n \neq \emptyset$ . ■

Ainsi donc, les espaces compacts comme les espaces dénombrablement compacts sont caractérisés par le comportement de leurs recouvrements ouverts. Et dans un cas et dans l'autre d'un recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini, mais dans le premier cas il s'agit des recouvrements arbitraires, tandis que dans le deuxième cas il ne s'agit que des recouvrements dénombrables.

Bien qu'en général la compacité dénombrable n'implique pas la compacité, on a le théorème suivant:

### Théorème 10

Dans le cas des espaces à base dénombrable, il y a identité entre la notion de compacité et celle de compacité dénombrable.

### En effet

Quel que soit le recouvrement ouvert d'un espace  $T$  à base dénombrable, on peut en extraire un sous recouvrement dénombrable. Si, en outre,  $T$  est dénombrablement compact, de ce dernier on peut extraire, d'après le théorème précédent, un sous recouvrement fini. On en déduit que l'espace  $T$  est alors compact. ■

### Remarques

La notion de compacité dénombrable d'un espace topologique s'est avérée en réalité peu naturelle et moins réussie que celle de compacité. Elle est apparue, pour ainsi dire "par inertie".

Cela tient à ce que pour les espaces métriques (comme pour les espaces à base dénombrable) ces deux notions coïncident (ce fait sera démontré au paragraphe

suivant). D'autre part, pour les espaces métriques la notion de compacité fut primitivement introduite justement pour exprimer la propriété que tout sous-ensemble infini d'un tel espace possède un point d'accumulation, c.-à-d. Comme la notion de compacité dénombrable. C'est l'extension "automatique" de cette définition du cas d'un espace métrique à celui d'un espace topologique qui conduisit à la notion d'espace topologique dénombrablement compact.

Dans les ouvrages mathématiques, surtout dans les livres plus ou moins vieux, le terme "compacité" est souvent utilisé au sens de "compacité dénombrable", tandis que les espaces topologiques, compacts conformément à notre terminologie, c.-à-d. les espaces dont tout recouvrement ouvert contient un recouvrement fini, sont appelés espaces b compacts. De même les espaces compacts de Hausdorff (c.-à-d. les compacts) sont appelés b compacts, le terme "compact" étant réservé pour désigner un espace métrique compact.

Nous allons nous servir des termes introduits plus haut (compacité, compacité dénombrable), en outre nous appellerons les espaces métriques compacts aussi compacts ou, lorsqu'il est nécessaire de souligner spécialement la présence de la métrique, "compacts métriques".

## **II. 5:Ensembles précompacts.**

Si un ensemble  $M$ , inclus dans un espace de Hausdorff  $T$ , n'est pas fermée dans  $T$ , il ne peut pas être compact. Par exemple, aucun sous-ensemble non fermée de la droite numérique n'est compact. Pourtant, il est possible que la fermeture  $[M]$  d'un tel ensemble  $M$  dans  $T$  possède la propriété de compacité.

Il en est ainsi, par exemple, de tout sous-ensemble borné de la droite numérique ou d'un espace à  $n$  dimensions. On est conduit à la définition suivante:

### ***Définition 4*** (précompacité)

- Un ensemble  $M$ , inclus dans un espace topologique  $T$  est dit précompact (ou compact par rapport à  $T$ ) si sa fermeture dans  $T$  est compact.
- De manière analogue, Un ensemble  $M$ , inclus dans un espace topologique  $T$  est dit dénombrablement précompact dans  $T$ , si tout sous-ensemble infini  $A \subset M$  admet au moins un point d'accumulation (qui peut appartenir ou non à l'ensemble  $M$ ).

La notion de précompacité (contrairement à celle de compacité) est évidemment liée à l'espace  $T$ , dans lequel nous prolongeons l'ensemble borné. Par exemple, l'ensemble des points rationnels de l'intervalle  $[0,1]$  est précompact, s'il est

considéré comme sous-ensemble de la droite numérique, mais il n'est pas précompact si on le considère comme sous-ensemble de l'espace des nombres rationnels.

La notion de précompacité a le plus d'importance dans le cadre des espaces métriques, dont il sera question au paragraphe suivant.

# Troisième Chapitre

## Compacité dans les espaces métriques

La notion de compacité introduite pour les sous-ensembles d'un espace topologique arbitraire est valable en particulier pour les sous-ensembles d'un espace métrique, et tous autres résultats, théorèmes, définitions, ... .

### III. 1: ensembles totalement bornés

#### définition1 ( $\varepsilon$ -réseau)

Soit  $M$  un ensemble quelconque d'un espace métrique  $R$ , soit  $\varepsilon$  un nombre positif quelconque. On dit que l'ensemble  $A \subset R$  est un  $\varepsilon$ -réseau de  $M$ , si pour tous points  $x \in M$  il existe au moins un point  $a \in A$  tel que:

$$\rho(x, a) \leq \varepsilon.$$

#### Remarques

- L'ensemble  $A$  n'est pas forcément inclus dans  $M$ , et peut même n'avoir aucun point commun avec  $M$ .
- S'il existe un  $\varepsilon$ -réseau  $A$  de  $M$ , on peut toujours construire un  $2\varepsilon$ -réseau  $B$  de  $M$ . ( $B \subset M$ ).

#### Exemple

Les points du plan ayant des coordonnées entières forment un  $(1/\sqrt{2})$ -réseau de se plan.

#### définition2

Un ensemble  $M$  est dit totalement borné, si pour tous  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\varepsilon$ -réseau fini de  $M$ .

#### Remarque

Si un ensemble est totalement borné alors son adhérent (sa fermeture)  $[M]$  l'est aussi.

#### Résultats

- Tout ensemble totalement borné est borné.

- Si l'espace métrique  $R$  est lui-même totalement borné alors il est séparable.
- Tout espace métrique totalement borné possède une base dénombrable.

## Exemples

- Dans un espace Euclidien à  $n$  dimensions dire qu'un ensemble est totalement borné équivaut à dire qu'il est borné.
- La sphère  $S$  de rayon 1 dans l'espace  $Z_2$ , nous fournit un exemple d'ensemble borné, mais non totalement borné.

### **III. 2:espaces totalement borne et compacité**

#### Théorème 1

Si l'espace métrique  $R$  est dénombrablement compact, alors il est totalement borné.

#### En effet

Supposons que l'espace  $R$  n'est pas totalement borné. Cela signifie que pour un certain  $\varepsilon_0$  dans  $R$  il n'existe pas de  $\varepsilon_0$ -réseau fini. Soit  $a_1$  un point quelconque de  $R$ , il existe au moins un point de  $R$  soit  $a_2$  tel que  $\rho(a_1, a_2) > \varepsilon_0$ . Si non le point  $a_1$  formerait un  $\varepsilon_0$ -réseau de  $R$ . De la même façon dans  $R$  on peut trouver un point  $a_3$  tel que  $\rho(a_1, a_3) > \varepsilon_0$  et  $\rho(a_2, a_3) > \varepsilon_0$

Autrement le couple de points  $a_1, a_2$  serait un  $\varepsilon_0$ -réseau de  $R$ . Si les points  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sont déjà fixés choisissons un point  $a_{k+1}$  tel que  $\rho(a_i, a_{k+1}) > \varepsilon_0$  pour  $i=1, \dots, k$ .

A l'aide de ce procédé on obtient une suite infini  $a_1, a_2, \dots$  qui n'a aucun point d'accumulation, étant donné que  $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon_0$  pour  $i \neq j$ . Mais alors  $R$  n'est pas dénombrablement compact. ■

#### Corollaire 1

Tout espace métrique dénombrablement compact est un espace compact.

#### Théorème 2

Pour qu'un espace métrique  $R$  soit compact, il faut et il suffit qu'il soit à la fois:

1. totalement borné.
2. complet.

#### En effet

**La condition est nécessaire.**

La nécessité de la condition 1 a été déjà établie, quand à la nécessité de la condition 2, elle est évidente en effet:

Si  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy non convergente dans  $R$ , elle ne peut avoir dans  $R$  aucun point d'accumulation.

En vertu du corollaire 1, il suffit juste de montrer que  $R$  est dénombrablement compact, c.-à-d. que toute suite de  $R$  a au moins un point d'accumulation.

### **La condition est suffisante.**

Montrons maintenant que si  $R$  est un espace totalement borné et complet alors il est compact.

En vertu du corollaire du théorème 1, il suffit pour cela de démontrer que  $R$  est dénombrablement compact, c.-à-d. que toute suite  $\{x_n\}$  de points de  $R$  a au moins un point d'accumulation.

Entourons d'une boule fermée de rayon 1 chaque point qui fait partie d'un 1-réseau de  $R$ , Comme ses boules sont en nombre fini et recouvrent tout l'espace  $R$ , au moins l'une d'elle, soit  $B_1$  contient une sous suite infini  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots$  de la suite  $\{x_n\}$ .

Choisissons ensuite dans  $B_1$  un 1/2-réseau et entourons chacun de ses points d'une boule fermée de rayon 1/2. Au moins l'une de ses boules désignons-la par  $B_2$ , contient une sous suite infini  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$  de la suite  $\{x_n^{(1)}\}$ . De la même façon on trouvera une boule fermée  $B_3$  de rayon 1/4 ayant la centre  $B_2$  et contenant une sous suite infini  $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}, \dots$  de la suite  $\{x_n^{(2)}\}$ . ... etc.

Considérons maintenant avec chaque boule  $B_n$  une boule fermée  $A_n$ , ayant le même centre et de rayon deux fois plus grand. Il est aisé de voir que les boules  $A_n$  sont emboîtées. Comme l'espace  $R$  est complet, l'intersection  $\bigcap A_n$  n'est pas vide et contient un seul point  $x_0$ .

Ce point est un point d'accumulation de la suite initiale  $\{x_n\}$ , car tout voisinage de  $x_0$  contient une boule  $B_k$  donc une sous suite  $\{x_n^{(k)}\}$  de la suite  $\{x_n\}$ . ■

### **III. 3:ensembles précompacts dans un espace métrique**

La notion de précompacité introduite pour les sous-ensembles d'un espace topologique arbitraire est valable en particulier pour les sous-ensembles d'un espace métrique.

### Théorème 3

Pour qu'un ensemble  $M$ , inclus dans un espace métrique complet  $R$  soit précompact, il faut et il suffit que cet ensemble soit totalement borné.

#### En effet

Découle immédiatement du théorème 2 et du fait que tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet est lui-même complet. ■

L'importance de ce théorème réside dans le fait que dans la plupart des cas il est plus facile de démontrer qu'un ensemble est totalement borné que d'établir directement sa précompacité.

### **III. 4:Théorème d'Arzelà**

Le problème consistant à déterminer, si tel ou tel ensemble est compact dans un espace métrique, est assez fréquent en analyse. Par ailleurs si on essaie d'appliquer directement le théorème 2, on se heurte à des difficultés.

Dans un espace Euclidien de dimension  $n$ , pour qu'un ensemble soit précompact, il faut et il suffit qu'il soit borné. Mais pour des espaces métriques plus généraux ceci n'est plus vrai.

L'un des espaces les plus importants de l'analyse des espaces métriques est l'espace  $C[a, b]$ . Pour ses sous-ensembles un critère de précompacité important et fréquemment utilisé est fourni par le théorème d'Arzelà.

Pour formuler ce théorème il est indispensable d'introduire les notions suivantes:

Une famille  $\Phi$  de fonctions  $\phi$  définies sur un segment  $[a, b]$  est dite uniformément bornée s'il existe un nombre  $K$  tel que  $|\phi(x)| < K, \forall x \in [a, b], \forall \phi \in \Phi$

Une famille  $\Phi = \{\phi\}$  est dite équicontinue, si à tout  $\varepsilon > 0$  on peut faire correspondre un nombre  $\delta > 0$  tel que

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon,$$

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  tel que

$$\rho(x_1, x_2) < \delta,$$

$\forall \phi \in \Phi.$

## Théorème 4 (d'Arzelà)

Pour qu'une famille  $\Phi$  de fonctions continues définies sur le segment  $[a, b]$  soit précompact dans  $C[a, b]$  il faut et il suffit que cette famille soit uniformément bornée et équicontinue.

### Démonstration

**La condition est nécessaire.**

Supposons que la famille  $\Phi$  est précompact dans  $C[a, b]$ , alors selon le théorème précédent, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\varepsilon/3$ -réseau fini  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$  de la famille  $\Phi$ .

Chacune des fonctions  $\phi_i$  est bornée comme fonction continue sur  $[a, b]$ :  $|\phi_i(x)| \leq k$ , posons

$$K = \max((k_i) + \varepsilon/3).$$

D'après la définition d'un  $\varepsilon/3$ -réseau, pour chaque fonction  $\phi \in \Phi$  il existe au moins une fonction  $\phi_i$  telle que:

$$\rho(\phi, \phi_i) = \max |\phi(x) - \phi_i(x)| \leq \varepsilon/3.$$

Par conséquent,

$$|\phi(x)| \leq |\phi_i(x)| + \varepsilon/3 \leq k_i + \varepsilon/3 \leq k.$$

Donc la famille  $\Phi$  est uniformément bornée.

D'autre part, chacune des fonctions  $\phi_i(x)$  du  $\varepsilon/3$ -réseau étant continue sur le segment  $[a, b]$  est aussi uniformément continue sur le même segment. Donc pour tout  $\varepsilon$ , on peut faire correspondre  $\delta_i$  tel que

$$|\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| < \varepsilon/3, \text{ si } |x_1 - x_2| < \delta_i.$$

Posons  $\delta = \min \delta_i$ . Soit  $\phi$  une fonction arbitraire de la famille  $\Phi$  faisons lui correspondre une fonction  $\phi_i$  telle que  $\rho(\phi, \phi_i) < \varepsilon/3$ . Alors pour  $|x_1 - x_2| < \delta$  on a:

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < |\phi(x_1) - \phi_i(x_1)| + |\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| + |\phi_i(x_2) - \phi(x_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

D'où l'équicontinuité de la famille  $\Phi$ .

**La condition est suffisante.**

soit  $\Phi$  une famille de fonctions uniformément bornée et équicontinue. D'après le théorème 3 pour établir la précompactité de cette famille dans  $C[a, b]$ , il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il lui correspond dans  $C[a, b]$  un  $\varepsilon$ -réseau fini.

Soit  $|\phi_i(x)| \leq k$ . Pour chaque fonction  $\phi \in \Phi$ , et soit  $\delta > 0$  tel que si  $|x_1 - x_2| < \delta$  on a :  
 $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon/5$ . Partageons le segment  $[a, b]$ , par les points  $x_0 = a, < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , en intervalles de longueur inférieure à  $\delta$  et traçons par ses points des droites verticales. Partageons ensuite le segment  $[-k, k]$  de la droite (o y) par les points  $y_0 = -k < y_1 < y_2 < \dots < y_m = k$ , en intervalles de longueur inférieure à  $\varepsilon/5$ , et traçons par les points de subdivision des droites horizontales. Le rectangle  $a \leq x \leq b, -k \leq y \leq k$  se trouvera alors partager en petits rectangles ayant le côté horizontales inférieure à  $\delta$  et le côté vertical inférieure à  $\varepsilon/5$ .

A chaque fonction  $\phi(x) \in \Phi$  faisons correspondre une ligne brisée  $\psi(x)$  ayant pour sommets les points  $(x_k, y_l)$  c.-à-d., les nœuds du réseau construit, tels que pour  $x = x_k$ , l'écart de  $\phi(x)$  à  $\psi(x)$  soit inférieure à  $\varepsilon/5$ .

Puisque par construction:

$$|\phi(x_k) - \psi(x_k)| < \varepsilon/5. \text{ Et } |\phi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \varepsilon/5.$$

Et on a  $|\phi(x_k) - \phi(x_{k+1})| < \varepsilon/5$ . Ainsi que  $|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < 3\varepsilon/5$ .

La fonction  $\psi(x)$  étant linéaire entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$  on a  $|\psi(x_k) - \psi(x)| < 3\varepsilon/5$ . Pour tout  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ .

Soit maintenant  $x$  un point quelconque du segment  $[a, b]$  et  $x_k$  celui des points de subdivision choisis qui est le plus proche de  $x$  à sa gauche. alors on a :

$$|\phi(x) - \psi(x)| \leq |\phi(x) - \phi(x_k)| + |\phi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, les lignes brisées  $\psi(x)$  forment un  $\varepsilon$ -réseau de  $\Phi$ . il est évident qu'elles sont en nombre fini. On en conclut que la famille  $\Phi$  est totalement bornée. ■

### III. 5: Théorème de Péano

Montrons comment s'applique le théorème d'Arzelà en prenant pour exemple, le théorème d'existence suivant pour les équations différentielles ordinaires à second membre continues.

#### Définition 3 (Courbe intégrale)

Si  $y(x)$  est solution d'une certaine équation différentielle, la courbe  $y = y(x)$  est dite courbe intégrale de cette équation différentielle.

## Théorème 5 (de Péano):

Soit donnée une équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Si la fonction  $f$  est continue dans un domaine borné et fermé  $G$ , alors quel que soit le point  $(x_0, y_0)$ , intérieur à ce domaine, il existe au moins une courbe intégrale de l'équation donnée, passant par ce point.

### Démonstration

Comme la fonction  $f$  est continue dans un domaine fermé et borné, elle est aussi bornée:

$$|f(x)| < M = \text{const.}$$

Traçons par le point  $(x_0, y_0)$  deux droites à coefficients angulaires  $(M)$  et  $(-M)$ .

Traçons ensuite deux droites verticales  $x=a$  et  $x=b$  de façon que les deux triangles à sommets commun  $(x_0, y_0)$ , qu'elles déterminent avec les deux précédentes, soient situés entièrement à l'intérieur du domaine  $G$ . Ce couple de triangle forme un ensemble fermé  $\Delta$ .

Construisons pour l'équation donnée une ligne brisée dite d'Euler de la manière suivante: par le point  $(x_0, y_0)$  traçons une droite de coefficients angulaire  $f(x_0, y_0)$ ; par un point quelconque  $(x_1, y_1)$  de cette droite traçons une droite de coefficient angulaire  $f(x_1, y_1)$ ; par un point quelconque  $(x_2, y_2)$  de la dernière droite traçons une droite de coefficient angulaire  $f(x_2, y_2)$ ; ... etc.

Considérons maintenant une suite de lignes brisées d'Euler  $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ . Passant par le point  $(x_0, y_0)$  et telles que la longueur du plus grand maillon de la ligne  $L_k$  tende vers 0 quand  $k$  tende vers  $\infty$ . Désignons par  $\varphi_k$  la fonction ayant pour graphe la ligne brisée  $L_k$ . Les fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$  jouissent les propriétés suivantes:

1. Elles sont définies sur le même segment  $[a, b]$ .
2. Elles sont uniformément bornées.
3. Elles sont équicontinue.

En vertu du théorème d'Arzelà, de la suite  $\{\varphi_k\}$  on peut extraire une suite uniformément convergente, soit  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, \dots$ . Posons  $\varphi(x) = \text{Lim} \varphi^{(k)}(x)$ , quand  $k \rightarrow \infty$ . Il est clair que  $\varphi(x_0) = y_0$ . Il reste à vérifier si la fonction  $\varphi$  satisfait sur  $[a, b]$  à l'équation différentielle donnée. Pour cela il faut montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a.

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon$$

A condition que  $|x'' - x'|$  soit suffisamment petite. Pour la démonstration de ce fait il faut montrer d'abord que pour  $k$  assez grand on a

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi^{(k)}(x')) \right| < \epsilon$$

à condition que  $|x'' - x'|$  soit suffisamment petite.

Comme la fonction  $f$  est continue dans le domaine  $G$  à tout  $\epsilon > 0$ , on peut faire correspondre  $\delta > 0$  tel que

$$f(x', y') - \epsilon < f(x, y) < f(x', y') + \epsilon$$

Si  $|x - x'| < 2\delta$  et  $|y - y'| < 4M\delta$ .

L'ensemble des points  $(x, y)$  vérifiant ces deux inéquations représente un rectangle  $Q$ . soit maintenant  $k$  tellement grand que pour tout  $k > K$  on ait:

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < 4\delta$$

Et tous les maillons de la ligne  $L_k$  aient la longueur inférieure à  $\delta$ . Alors pour  $|x - x'| < 2\delta$  toutes les lignes brisées d'Euler  $\varphi^{(k)}$  avec  $k > K$  seront situées entièrement dans  $Q$ .

Soient d'autre parts  $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{n+1}, b_{n+1})$  les sommets de la ligne brisée  $L_k$  et soit  $a_0 \leq x' < a_1 < a_2 < \dots < a_n < x'' \leq a_{n+1}$  pour fixé les idées on suppose ( $x'' > x'$ ), alors pour les fonctions  $\varphi^{(k)}$  correspondantes on a:

$$\varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x').$$

$$\varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i).$$

$$\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).$$

Pour  $|x'' - x'| < \delta$  de ces égalités on obtient:

$$(f(x', y') - \epsilon)(x'' - a_n) < \varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') < (f(x', y') + \epsilon)(x'' - a_n).$$

$$(f(x', y') - \epsilon)(a_{i+1} - a_i) < \varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) < (f(x', y') + \epsilon)(a_{i+1} - a_i). \quad i=1, 2, \dots, n.$$

$$(f(x', y') - \epsilon)(x'' - a_n) < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) < (f(x', y') + \epsilon)(x'' - a_n).$$

En additionnant ces inégalités membre à membre on obtient:

$$(F(x', y') - \epsilon)(x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < (F(x', y') + \epsilon)(x'' - x'). \quad \blacksquare$$

Des sous suites différentes de lignes brisées d'Euler peuvent converger vers des solutions différentes de l'équation  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . On en conclut que la solution de l'équation  $y'=f(x, y)$  passant par le point  $(x_0, y_0)$  n'est pas en générale unique.

### III. 6: continuité uniforme. Applications continues des compacts métriques

Considérons pour la suite de ce paragraphe  $\rho_1$  la distance sur l'ensemble de départ,  $\rho_2$  la distance sur l'ensemble d'arrivée.

Pour les applications d'un espace métrique dans un autre, en particulier, pour les fonctions numériques définies sur un espace métrique il y a en plus de la notion de continuité une autre notion qui a un sens et présente de l'importance pour l'analyse. C'est la notion de continuité uniforme. Une application  $f$  d'un espace métrique  $X$  dans un autre  $Y$  est dite uniformément continue, si pour tous  $x_1, x_2$  de  $X$  on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \rho_1(x_1, x_2) < \delta \text{ on a } \rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

$\delta$  ne dépend que de  $\varepsilon$ .

Pour les applications continues des espaces métriques on a le théorème suivant:

#### Théorème 6

Toute application continue d'un compact métrique dans un espace métrique est uniformément continue.

#### Démonstration

Soit  $f$  une application continue mais non uniformément continue d'un compact métrique  $K$  dans un espace métrique  $M$ . Cela signifie que pour un certain  $\varepsilon > 0$  et pour tout entier naturel  $n$  on peut trouver dans  $K$  deux points  $x_n, x'_n$  tels que  $\rho_1(x_n, x'_n) < 1/n$ , et pourtant  $\rho_2(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$ .

En vertu de la compacité de  $K$ , de la suite  $\{x_n\}$  on peut extraire une sous suite  $\{x_{nk}\}$  converge vers le point  $x \in K$ . Alors la suite  $\{x'_{nk}\}$  converge aussi vers  $x$ . D'autre part, pour chaque valeur de  $k$  au moins l'une des inégalités  $\rho_2(f(x), f(x_{nk})) \geq \varepsilon/2$ ,  $\rho_2(f(x), f(x'_{nk})) \geq \varepsilon/2$ . Est vérifiée, ce qui contredit l'hypothèse que l'application  $f$  est continue au point  $x$ .

### III. 7: Théorème généralisé d'Arzelà

Soient  $X, Y$  deux compacts métriques et  $C_{XY}$  l'ensemble des applications continues  $f$  de  $X$  dans  $Y$ . Introduisons dans  $C_{XY}$  une distance à l'aide de la formule :

$$\rho(f, g) = \sup [\rho(f(x), g(x))] \text{ Pour } x \in X.$$

On vérifie facilement que  $C_{XY}$  devient alors un espace métrique.

#### Théorème 7 (théorème généralisé d'Arzelà)

Pour qu'un ensemble  $D \subset C_{XY}$  soit précompact, il faut et il suffit que les fonctions appartenant à  $D$  soient équicontinue.

Cela signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$  il doit exister un  $\delta > 0$  tel que  $\rho(x, x') < \delta$  entraîne

$$\rho[f(x), f(x')] < \varepsilon . \forall (x, x') \in X^2. \forall f \in D$$

#### Démonstration

**La condition est nécessaire.**

Comme le théorème 4.

**La condition est suffisante.**

Prolongeons  $C_{xy}$  dans  $M_{xy}$  de toutes les applications du compact  $X$  dans le compact  $Y$ , muni de la même métrique que  $C_{xy}$ :

$$\rho(f, g) = \sup [\rho(f(x), g(x))] \text{ Pour } x \in X.$$

Et démontrons que l'ensemble  $D$  est précompact dans  $M_{xy}$ .

Comme  $C_{xy}$  est fermé dans  $M_{xy}$  (car la limite d'une suite uniformément convergente d'applications continues est une application continue). La précompacité de l'ensemble  $D$  dans  $M_{xy}$  implique sa précompacité dans  $C_{xy}$ .

Donnons-nous un  $\varepsilon > 0$  arbitraire et choisissons  $\delta$  tel que  $\rho(x, x') < \delta$  entraîne

$\rho[f(x), f(x')] < \varepsilon . \forall (x, x') \in X^2. \forall f \in D$ . il est aisé de voir que  $X$  peut être mis sous la forme d'une réunion finie d'ensembles disjoints  $E_i$  tels que si  $x, x' \in E_i$ , on a  $\rho(x, x') < \delta$ . En effet, pour cela il suffit de choisir les points  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  de façon qu'ils forment un  $\delta/2$ -réseau de  $X$  et de poser par exemple

$$E_i = B(x_i, \delta/2) \setminus \bigcup_{j < i} B(x_j, \delta/2)$$

Considérons maintenant dans le compact  $Y$  un  $\varepsilon$ -réseau fini quelconque  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  et soit  $L$  l'ensemble des fonctions  $g(x)$  prenant sur les ensembles  $E_i$  les valeurs  $y_j$ .

Il est clair que ses fonctions sont en nombre fini. Montrons qu'elles forment un  $2\varepsilon$ -réseau de  $D$  dans  $M_{XY}$ . En effet soit  $f \in D$ , à tout point  $x_i$  de  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  on peut faire correspondre un point  $y_j$  de  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  tel que  $\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon$ .

Soit la fonction  $g \in L$  choisie de façon que  $g(x_i) = y_j$ . Alors si  $i$  est choisit de façon que  $x \in E_i$ , on a

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon.$$

On en déduit que  $L$  est bien un  $2\varepsilon$ -réseau de l'ensemble  $D$ . de sorte que  $D$  est précompact dans  $M_{XY}$  et par suite dans  $C_{XY}$ . ■

# Bibliographie

**I.** A. Kolmogorov et S. Fomine.

Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.

Pages 92-110.

Editions Mir-Moscou, 2<sup>ème</sup> édition.

**II.** Seymour Lipschutz.

Topologie cours et problèmes. (Série Schaum).

**III.** Claude DESCHAMPS et André WARUSFEL.

Mathématiques 2<sup>ème</sup> année, cours et exercices corrigés (MP, PC, PSI).

Editions Dunod.