الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique.
Filière : Mathématique.
Option : Analyse Mathématique.

Par :

ZAKHROUF Maria kaima

THEME

Opérateurs de composition sur les espaces Modèles.

Devant le jury composé de :

ISMAIL Ibrahim	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
BELABBACI Chafika	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Examinateur
YAGOUB Ameur	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2019-2020

Remerciements.

Tout d'abord je remercie ***Allah*** *le tout puissant, qui nous a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.*

Je tiens à remercier mon encadreur ***Dr. Ameur YAGOUB*** *pour son soutien et son aide considérables, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes qui mont guidé durant la réalisation de ce mémoire.*

Je remercie vivement monsieur ***Dr.ISMAIL Ibrahim*** *, ait accepté de présider et d'honorer de sa présence le jury de soutenance du présent mémoire de Master.*

Je tiens également à remercier ***Dr.BELABBACI Chafika*** *pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

Zakhrouf
Maria Kaima

Dédicace .

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :

A mes très chers parents, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant soufré et sacrifiés pour que je sois heureuse, pour leurs conseils et leurs encouragements.

Je vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie :

A tous les membres de ma famille, mes soeurs "Saadia","Belgis" mes frères «Mousaab » ,« Saad » et « Mohamed ».

A tous mes amies et mes collègues avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années surtout "Rabeb"et "Warda","Kheira"et "Amel" , "Djahida"et"Habiba" ,"Youssra" et "Ikram" .

Zakhrouf
Maria Kaima.

ملخّص.

لتكن K_u, H^2 ، $(K_u \subset H^2)$ ، فضاء هاردي للدّوال التحليلية على $\mathbb{D}$ حيث مربع معاملات متّتالية تايلور قابلة للتكامل و فضاء النموذج، مع u دالة داخلية غير ثابتة. يعطى موءثر التركيب للدليل $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D},$ من H^2 او K_u نحو H^2 بـ

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

الغرض من هذا العمل هو اجراء دراسة عن تراص موءثر التركيب على فضاءات هاردي و النموذجية.

كلمات المفتاحية.

فضاءات هاردي، فضاءات نموذجية، موءثرات التركيب، التراص.

Résumé :

Soient H^2, K_u, ($K_u \subset H^2$), l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles la suite de coefficients de Taylor est carré-sommable et l'espace modèle, avec u est une fonction intérieure non constante. L'opérateur de composition de symbole $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, sur H^2 (ou K_u) dans H^2 est défini par :

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

Le but de ce travail est de faire une étude sur la compacité d'un opérateur de composition sur les espaces de Hardy et modèles.

Mots clés : Espace de Hardy, Espace modèle, Opérateur de composition, compacité.

Abstract :

Let H^2, K_u, $(K_u \subset H^2)$, the Hardy space be holomorphic functions on $\mathbb{D}$ for which the sequence of Taylor coefficients is square-summable and model space, with u is a non-constant inner function. The symbol composition operator of symbol $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on H^2 (or K_u) in H^2 is defined by :

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

In this work, we shall study the compactness of a composition operator on Hardy spaces and models.

Key words : Hardy spaces ,models spaces, composition operators, compactness.

Table des matières

Notations

H	Espace de Hilbert .
H^2	Espace de Hardy .
f^*	Limite radiale de f .
u	Fonction intérieur.
K_u	Espace de Hardy .
C_φ	Opérateur de composition.
N_φ	fonction de comptage de Nevanlinna.
$\mathcal{K}(E, F)$	L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.
$S[f]$	L'opérateur de décalage à droite .
$S^*[f]$	L'opérateur de décalage à gauche .
k_λ	Noyau de reproduisant de H^2 .
$L(E, F)$	L'ensemble des opérateurs linéaires bornés .

Introduction.

Cette mémoire a pour but d'étudier le concepts de compacité des opérateurs sur les espaces de Hilbert et d'une façon particulière les opérateurs dit de composition. Les opérateurs compacts constituent une classe importante d'opérateurs linéaires continues. D'une part, ils sont presque des opérateurs de rang fini (i.e. approchés par des opérateurs dont l'image est de dimension finie). On note par $\mathbb{D}$ le disque unité et $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe. Soient dA la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$ et dm la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. L'espace de Hardy usuel H^2 est des fonctions $f \in L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$ tel le coefficient de Fourier négatives sont nulles, $H^2 = \{f \in L^2, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$ où $\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, n \in \mathbb{Z}$ (voir [2, 9, 15, 18]). Soit u une fonction intérieure, c'est une fonction holomorphe et bornée par 1 dont les limites radiales, ($f^*(\zeta) = \lim_{r\longrightarrow 1^-} f(r\zeta), m-p.p, \zeta \in \mathbb{T}$) sur le cercle sont de module 1 presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue. A cette fonction u, on associe l'espace modèle K_u, défini comme l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ qui sont orthogonales au sous-espace $uH^2 = \{uf, f \in H^2\}$ (voir par exemple [1, 4, 5, 10]),

$$K_u = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug\rangle, \forall g \in H^2\}.$$

Soient H est un espace de Hilbert, et φ est une application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, l'opérateur de composition de symbole φ est donné par

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \ \textbf{pour tout} \ f \in H.$$

Les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy ont été largement étudiés (voir par exemple [13, 14, 16, 17, 19]). La fonction de comptage de Nevanlinna classique N_φ de H^2 suivante :

$$N_\varphi(z) = \sum_{z=\varphi(w)} \log(1/|w|), \qquad z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\},$$

joue un rôle essentiel dans l'étude de l'opérateur de composition.

Dans ce travail on s'intéresse a la compacité d'un opérateur de composition $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ sur les espaces de Hardy et modèles.

Le mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre : est consacré aux rappels des différentes notions mathématiques dont on a besoin : les espaces de Hilbert, l'espace L^2 et l'espace de Hardy et modèle.

Deuxième chapitre : est réservé aux opérateurs linéaires sur les espaces de Hilbert. Nous présentons quelques définitions d'opérateurs linéaires bornés et compacts, ensuite on introduit les opérateurs de composition.

Dans le troisième chapitre : on donne le résultat principal de notre travail qui consiste à la compacité d'opérateurs de composition sur les espaces Hardy et Modèle, en utilisons la fonction de comptage de Nevanlinna classique N_φ de H^2, ce chapitre divise en trois parties.

-Partie sur la compacité d'opérateur de composition sur l'espace de Hardy.

-Partie sur la compacité d'opérateur de composition sur l'espace Modèle pour les symboles quelconques.

-Partie sur la compacité d'opérateur de composition sur l'espace Modèle pour les symboles univalents.

Chapitre 1

Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle qui contient quelques notions essentielles qui concernent les différents espaces (Hilbert, L^2, Hardy, modèle) et la convergence faible, qu'ils sont nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire. Les résultats dans ce chapitre et ses preuves sont tirés de [6, 11] et d'autres références.

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}(\mathbb{R} ou \mathbb{C})$, un produit scalaire sur E est une application, notée $\langle .,. \rangle$ de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait :*

1. *$\langle x, x \rangle \geqslant 0$ et, si $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;*
2. *$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$; $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ et $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$;*
3. *$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$*

Dans la deuxième point $\overline{\langle y, x \rangle}$ et $\overline{\alpha}$ sont les conjugués dans $\mathbb{C}$ de $\langle y, x \rangle$ et α, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ces barres du conjugaison sont inutiles.

Définition 1.1.2. *On appelle espace préhilbertien (hermitien)un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ nous verrons que cette quantité est une norme sur un espace préhilbertien H lorsque nous aurons énoncé les propriétés :*

Théorème 1.1.1. *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Pour tout $x, y \in H$,on a :*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Démonstration. Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\| > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leqslant \| tx + y \| = \| x \|^2 t^2 + 2\mathcal{R}e\langle x, y\rangle t + \| y \|^2 .$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être ≤ 0 :

$$0 \geq (2\mathcal{R}e\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$$

d'où

$$\|x\|\|y\| \geq |\mathcal{R}e\langle x, y\rangle| \geq \mathcal{R}e\langle x, y\rangle.$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\langle x, y\rangle = \alpha|\langle x, y\rangle|$, d'où $\overline{\alpha}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ et

$$\begin{aligned} \|x\|\|y\| &= \|x\|\|\alpha y\| \\ &\geq \mathcal{R}e\langle x, \alpha y\rangle \\ &= \mathcal{R}e(\overline{\alpha}\langle x, y\rangle) \\ &= \mathcal{R}e|\langle x, y\rangle| \\ &= |\langle x, y\rangle|. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.1. *Un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé avec la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ induite par le produit scalaire.*

Démonstration. La seul axiome non évident a obtenir est l'inégalité triangulaire, on a :

$$(\|x + y\|)^2 = (\|x\|)^2 + (\|y\|)^2 + 2|\langle x, y\rangle|$$

de l'inégalité de Schwarz, on déduit que

$$2|\langle x, y\rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

d'où

$$(\|x + y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

□

Théorème 1.1.2. *Soit H espace préhilbertien muni d'un produit scalaire, les identités suivantes sont satisfaites.*

1. *Développement d'un carré :*
$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 . \tag{1.1}$$
2. *Identité de polarisation sur $\mathbb{R}$:*
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2).$$
3. *Identité de polarisation sur $\mathbb{C}$:*
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x+iy \|^2 - i \| x-iy \|^2 .$$
4. *Identité du parallélogramme :*
$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$
5. *Identité de Pythagor : Si x et y sont orthogonaux, alors $\langle x,y\rangle = 0$ et on obtient*
$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 .$$

Démonstration. 1. Développement d'un carré :
$$\begin{aligned} \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 . \end{aligned}$$

2. Identité de polarisation sur $\mathbb{R}$:
D'après(1.1) en a :
$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 .$$
Et
$$\| x-y \|^2 = \| x \|^2 - 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 .$$
Alors
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2)$$

3. Identité de polarisation sur $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{I}m\langle x,y\rangle = \mathcal{R}e(-i\langle x,y\rangle) = \mathcal{R}e\langle x,iy\rangle = \frac{1}{4}(\| x+iy \|^2 - \| x-iy \|^2)$$

4. Identité du parallélogramme :
D'après (1.1) en a :

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 .$$

Et

$$\| x-y \|^2 = \| x \|^2 - 2\mathcal{R}e\langle x,y\rangle + \| y \|^2 .$$

Donc

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \| + 2 \| y \| .$$

5. Identité de Pythagor :
Si x et y sont orthogonaux on obtient :

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \| x \|^2 + 2\mathcal{R}e(0) + \| y \|^2 . \\ &= \| x \|^2 + \| y \|^2 . \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.3. *Lorsqu'un espace préhilbertien H muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que H est un espace de Hilbert.*

Exemple 1.1.1. 1. *l'espace euclidien* $C^k = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k); x_i \in \mathbb{C} \ , \ i = 1, ..., k\}$ *muni du produit scalaire :*

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i\overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert.

2. *l'espace* $l^2 = \{x = (x_j)_{j>0}, x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$,
muni du produit scalaire

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\overline{y_j},$$

est un espace de Hilbert.

3. *l'espace* $L^2(\Omega, A, P)$ *de toutes les variables aléatoires complexe* X *définies sur un espace probabilisé* (Ω, A, P) *telles que :*

$$E(|X|^2) < \infty$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = E(X\overline{Y}) = \int_{\Omega} X(\mu)\overline{Y(\mu)}dP(\mu),$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : Tout espace vectoriel sur ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) de dimension finie sont des espaces Hilbertiens.

1.1.2 Orthogonalité

Définition 1.1.4. *Deux vecteurs* x, y *d'un espace hilbertien* H *sont orthogonaux, on écrit* $x \perp y$ *si :* $< x, y >= 0$.

Définition 1.1.5. *Deux sous espaces* F_1, F_2 *d'un hilbertien* H *sont dits orthogonaux si :* $\forall x \in F_1, \forall y \in F_2$ *;* $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposition 1.1.2. *Soit* F *un sous espace d'un hilbertien* H*, l'ensemble des vecteurs de* H *orthogonaux a* F *forme un sous espace vectoriel de* H*, noté* $F^{\perp}$ *:*

$$F^{\perp} = \{x \in H / \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in F\}.$$

Proposition 1.1.3. *(Théorème de Pythagore) Soit* $x_1, x_2, ..., x_n$*,* n *vecteurs d'un espace Hilbertien* H *orthogonaux deux à deux , alors :*

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n, x_1, x_2, ..., x_n\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle + ... + \langle x_n, x_n\rangle$$

1.1.3 Projection orthogonale

Théorème 1.1.3. *(Théorème de Riesz de la projection orthogonale) soit* H *un espace de Hilbert et* F *un sous espace fermé, soit* y *un point de* H *n'appartenant pas à* F *alors le* *problème* $\inf_{x\in F} \|y-x\|$ *possède une et une seule solution notée* $y^{\perp} \in F$ *et telle que* $(y-y^{\perp}) \in F^{\perp}$, *cet élément* $y^{\perp}$ *est appellé projection orthogonale de* y *sur* F *et l'application associée notée* $(p_F(y))$.

Le résultat qui permet de manipuler l'application de projection orthogonale est le suivant :

Proposition 1.1.4. *L'application qui à un point de* H *fait correspondre sa projection orthogonale sur un sous espace fermé* F, *possèdes les propriétés suivant :*

1. $p_F(\alpha x+\beta y) = \alpha p_F(x) + \beta p_F(y)$.

2. $p_F + p_{(F)^{\perp}} = id_H$.

3. $(\|x\|)^2 = (\|p_F(x)\|)^2 + (\|(id-p_F)(x)\|)^2$.

4. $p_F(x_n) \longrightarrow p_F(x), si\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

5. $x \in F \Leftrightarrow p_F(x) = x$.

6. $x \in F^{\perp} \Leftrightarrow p_F(x) = 0$.

7. $p_F(p_F)(x) = p_F(x)$.

8. $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow p_{F_1}(p_{F_2})(x) = p_{F_1}(x)$.

Théorème 1.1.4. $H = F \oplus F^{\perp}$ *et la décomposition de* $x \in H$ *dans cette somme directe est :*

$$x = p(x) + (id-p)(x)$$

Démonstration. pour tout $x \in H$, $x = p(x) + (x - p(x))$ appartient à $H = F + F^{\perp}$ et $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, la somme est donc directe, $H = F \oplus F^{\perp}$ .Ceci veut dire que p est la projection sur F parallélement à $F^{\perp}$. On appelle donc cette application la projection orthogonale de H sur F. □

Corollaire 1.1.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors, F est dense dans Hsi et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.*
Autrement dit, pour vérifier qu'un sous-espace F est dense de H, il suffit de vérifier que $\forall a \in \mathbb{H}, \langle x, a\rangle = 0$.

Démonstration. Si F est dense, alors $\overline{F} = H$ et $F^{\perp} = \overline{F}^{\perp} = \{0\}$. Inversement, si F n'est pas dense, il existe $u \in H', u \neq 0$ telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Il existe $x \in H', x \neq 0$ tel que $u = \Lambda_a$. Alors $\langle x, a\rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et $a \neq 0$, donc $F^{\perp} = \{0\}$

□

1.1.4 Bases orthonormales

Définition 1.1.6. *Soit H un espace de Hilbert ;$(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs est dite :*

1. *orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0, i \neq j$*
2. *orthonormale si de plus $|e_i| = 1$, $\forall i \in I$*

Exemple 1.1.2. *Soit $L^2[-\pi, +\pi]$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, la famille $(e_p(t))_{p\in\mathbb{Z}} = (e^{ipt})_{p\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.*

Définition 1.1.7. *Un espace de Hilbert H est spárable s'il possède une suite de points qui est dense dans H.*

Théorème 1.1.5. *Soit H un espace de Hilbert séparable, il possède une base et même une infinité de bases orthonormales. Toute ses bases possèdent le même nombre d'élément appelé la dimension de l'espace de Hilbert H.*

1.2 Convergence faible dans les espaces de Hilbert.

On rappelle qu'une suite d'éléments $(x_n)_{n\geq 0}$ d'un espace de Hilbert H converge vers $x \in H$ (convergence forte), si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

et on not $x_n \to x$. On introduit ici une notion de convergence plus faible, la convergence faible.

Définition 1.2.1. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et x un élément de H. On dit que la $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si*

$$\forall h \in H, \lim_{n\to\infty} < h, x_n >=< h, x > .$$

On utilise alors la notation $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque 1.2.1. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement, alors sa limite unique.*
en-effet : soient x et x' deux limites faibles de $(x_n)_{n\geq 0}$. Alors par définition de la convergence faible, on a

$$\lim_{n\to\infty} < h, x_n > = < h, x > = < h, x' > \Rightarrow < h, x - x' > = 0,$$

pour tout $y \in H$. Donc $x = x'$.

Théorème 1.2.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et x, y deux éléments de H. On a alors :*

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \ est \ \ borne \ \ et \|x\| \leq lim\ inf \|x_n\|;$$

$$x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x;$$

$$x_n \rightharpoonup x \ \ et \ \ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\| \Rightarrow lim \|x_n - x\| = 0;$$

$$(x_n \to x \ \ et \ \ y_n \rightharpoonup y) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} < x_n, y_n > = < x, y > .$$

Démonstration. La preuve du premier point du théorème découle du théorème de Banach-Steinhaus. En effet, notons T_n l'application définie sur H par $T_n(h) = < h, x_n >$. Il s'agit clairement d'une forme linéaire continue sur H. Par ailleurs, pour h fixé, la suite de terme général $T_n(h)$ est convergente. En conséquence, le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que l'application linéaire limite $T : h \longrightarrow < h, x >$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{H'} \leq \liminf \|T\|_{H'}.$$

Mais, d'après le théorème de Riesz-Fréchet, on a $\|T\|_{H'} = \|x\|_H$ et $\|T_n\| = \|x_n\|_H$, ce qui achève la démonstration de la première propriété.
Le deuxième point résulte simplement du fait que

$$| < h, x_n > - < h, x > | \leq \|h\| \|x_n - x\|.$$

Pour le troisième point, il suffit d'écrire que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathcal{R}e < x, x_n > + \|x\|^2$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2 \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}e < x, x_n > = -2\|x\|^2.$$

La démonstration de la dernière propriété est très simple. Il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} | < x_n, y_n > - < x, y > | &\leq | < x_n - x, y_n > | + | < x, y_n - y > | \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + < x, y_n - y > . \end{aligned}$$

Le théorème précédent affirme que la $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, on a

$$| < x_n, y_n > - < x, y > | \leq \mathcal{C}\|x_n - x\| + < x, y_n - y >$$

$\square$

Proposition 1.2.1. *En dimension finie, la convergence faible est équivalente à la convergence forte.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, la convergence forte entraîne toujours la convergence faible. Réciproquement, supposons que l'espace hilbertien H soit de dimension finie et donnons nous une base orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ de H , et une suite faiblement convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit x sa limite faible. On a

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} | < e_i, x_n - x > |^2$$

Par convergence faible, on a $\lim\limits_{n\to\infty} | < e_i, x_n - x > | = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., p\}$.
Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

$\square$

1.3 Espace $L^2(\mathbb{T})$.

Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, | z |< 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, | z |= 1\}$ le cercle unité, $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité. On note par $L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'ensemble des fonctions carrée intégrable sur $\mathbb{T}$ par rapport à la mesure dm. Il est bien connu que L^2 est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm.$$

Chaque fonction $f \in L^2$ peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f} z^n \qquad ;$$

$$\widehat{f}(z^n) := \langle f, z^n \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \qquad , n \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 1.3.1. *Sur le cercle unité $\mathbb{T}$, l'espace des fonctions de carré intégrable :*

$$L^2 = \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \ \ mesurables \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty \right\};$$

s'identifie à l'espace :

$$l_2(\mathbb{Z}) := \left\{ z = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |z_k|^2 < \infty \right\};$$

via l'application " prise de coefficients de Fourier " :

$$L^2 \longrightarrow l_2(\mathbb{C});$$

$$f \longmapsto (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{ik\theta}\frac{d\theta}{2\pi} \right)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

de telle sorte qu'on peut écrire, seulement au sens L^2 :

$$f(.) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ik(.)}.$$

1.4 Espace de Hardy.

Dans cette section on va rappeler quelques définitions et résultats classiques concernant l'espace de Hardy H^2. Nous rappelons aussi certaines propriétés des éléments de cet espace, qu'on va utiliser.

D'aprés le théorème de Fatou, la limite radiale de toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, qui est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ par :

$$f^*(\zeta) := \lim_{r\longrightarrow 1^-} f(r\zeta) \qquad \zeta \in \mathbb{T},$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$.
L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel que les coefficients de Fourier négatives sont nulle.

$$H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \quad n < 0\},$$

et

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \{f \in L^\infty, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

avec $\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta}^n dm(\zeta)$ les coefficients de Fourier d'ordre n.

On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$, l'espace des fonctions holomorphes $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tel que

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 |d\zeta| < +\infty,$$

car l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longrightarrow & f^* \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique, où f^* est la limite radiale de f. On défini l'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ par :

$$H^\infty(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} f(z) < \infty\}.$$

Remarque 1.4.1. *Compte tenu de l'existence d'un isomorphisme isométrique entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$, dans la plupart dans la suit on trouvera la notation H^2, laquelle d désignera indifféremment $H^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{T})$) suivant le contexte.*

Puisque $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ défini par :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} |d\zeta|,$$

et muni de la norme

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

Soit X un ensemble non vide et H un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur X. Un noyau reproduisant en $\lambda \in X$ d'un espace de Hilbert H est une fonction k_λ telle que $\langle f, k_\lambda\rangle = f(z), \quad f \in H$.

Pour chaque point $\lambda \in X$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\lambda : & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longrightarrow & \Phi_\lambda(f) = f(\lambda) \end{array}$$

est linéaire continue. Donc, et d'aprés le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction unique $k_\lambda \in H$ telle que $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda\rangle$ pour tout $f \in H$.

$H^2(\mathbb{D})$ contient une telle fonction en chaque point $\lambda \in \mathbb{D}$, car
pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$, $f(\lambda)$ est linéaire continue.

La projection orthogonale P de L^2 sur H^2 peut être exprimée en terme d'un opérateur noyau

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}} |d\zeta| \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

L'espace de Hardy H^2 admet le noyau reproduisant donné par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}, \quad \lambda, z \in \mathbb{D},$$

et

$$\langle f, k_\lambda \rangle = \langle f^*, k_\lambda^* \rangle, \quad f \in H^2,$$

1.5 Espace modèle.

Définition 1.5.1. *soit $u \in H^\infty$ est une fonction intérieur ,si $\mid u^*(z) \mid = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.*

Définition 1.5.2. *L'opérateur de décalage à droite (ou shift) sur H^2 est défini par :*

$$S[f](z) = zf(z) \ \ pour \ \ f \in H^2 \ et \ z \in \mathbb{T}.$$

Et son adjoint (voir définition (2.1.3)) l'opérateur de décalage à gauche $S^*H^2 :\to H^2$ est défini par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \ pour \ f \in H^2 \ et \ z \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.5.3. *Un sous-espace M de H^2 est dit invariant par S s'il est fermé et tel que $SM \subseteq M$.*

Le théorème de Beurling ([5]) suivant donne une caractérisation complète des sous espaces invariant par le shift :

Théorème 1.5.1. *[5]*

1. *Un sous-espace fermé M de H^2 tels que $M \subsetneqq H^2$ est invariant par le shift S si et seulement si M est de la forme :*

$$M := uH^2 = \{uf, f \in H^2\}.$$

   où u est une fonction intérieure.

2. *Les sous-espaces fermés Y de H^2 tels que $Y \subsetneqq H2$ invariants par S^* sont de la forme*

$$Y = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug \rangle, \forall g \in H^2\} \tag{1.2}$$

où u est une fonction intérieure. Réciproquement tous les espaces de la forme (1.2) sont S^*-invariants.

Dans la suite on désignera par K_u le sous espace modèle $H^2 \ominus uH^2$.

Proposition 1.5.1. *Pour chaque fonction intérieur u , l'espace modèle K_u c'est l'ensemble des fonctions $f \in h^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$ pour quelque $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u = H^2 \cap u\overline{zH^2}$$

où le côté droit est considéré comme un ensemble de fonctions sur $\mathbb{T}$.

Démonstration. Soit $f \in H^2$, alors

$$f \in H^2 \ominus uH^2 \Leftrightarrow f \perp uH^2$$

$$\Leftrightarrow uf \perp H^2 \text{ car } | u |= 1 \text{ , p.p sur } \mathbb{T}$$

$$\Leftrightarrow zuf \perp zH^2 \text{ [1]}$$

$$\Leftrightarrow zuf \in \overline{H^2}$$

$$\Leftrightarrow f \in u\overline{zH^2}$$

donc, il existe une fonction $g \in H^2$ tel que $f = u\overline{zg}$.

□

Noyau reproduisant de K_u.

L'espace modèle est un sous-espace fermé de H^2, donc pour chaque fonction intérieure u non constante, l'espace modèle K_u possède un noyau reproduisant. Rappelons que les noyaux $k_\lambda = (1 - \overline{\lambda}z)^{-1}$ sont les noyaux reproduisant de l'espace de Hardy.
Si $f = uh$ dans uH^2 , alors

$$f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) = u(\lambda) < h, k_\lambda >= u(\lambda) < f\overline{u}, k_\lambda >=< f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda >$$

d'où il résulte que le noyau reproduisant pour uH^2 donné par

$$\overline{u(\lambda)}uk_\lambda(z) = \frac{\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1 - \overline{\lambda}z)}, \lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{T}.$$

1. $= uH^2 \oplus (uH^2)^\perp$.

Si$f \in K_u$, alors nous avons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= < f, k_\lambda > \\ &= < f, k_\lambda > - u(\lambda) < f, uk_\lambda > \\ &= < f, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda > . \end{aligned}$$

De plus, la fonction $(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda$ dans K_u , puisque

$$\begin{aligned} < uh, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda > &= u(\lambda)h(\lambda) - < uh, uk_\lambda > \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda) < h, k_\lambda > \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) \\ &= 0; \end{aligned}$$

pour toute $h \in H^2$, donc il existe dans K_u une unique fonction, notée k_λ^u telle que

$$f(\lambda) \quad = \quad < f, k_\lambda^u > \quad ; \quad f \in K_u$$

où

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)}, \qquad \lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{T}.$$

La fonction k_λ^u est appelée le noyau reproduisant pour K_u.

Et on note h_λ^u le noyau reproduisant normalisé,

$$h_\lambda^u(z) = \sqrt{\frac{1-|\lambda|^2}{1-|u(\lambda)|^2}} k_\lambda^u(z). \tag{1.3}$$

En-effet : soit $\lambda \in \mathbb{D}$, on a

$$\|h_\lambda^u\|^2 = \langle h_\lambda^u, h_\lambda^u \rangle = \frac{1-|\lambda|^2}{1-|u(\lambda)|^2} \langle k_\lambda^u, k_\lambda^u \rangle = \frac{1-|\lambda|^2}{1-|u(\lambda)|^2} k_\lambda^u(\lambda) = 1.$$

Exemple 1.5.1. *Si $u(z) = z^n$, alors*

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{\lambda}^n z^n}{1-\overline{\lambda}z} = 1 + \overline{\lambda}z + \overline{\lambda}^2 z^2 + ... + \overline{\lambda}^{n-1} z^{n-1}.$$

Chapitre 2

Opérateurs.

Dans ce chapitre on va rappeler quelques définitions et résultats classiques concernant les opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert, nous rappelons aussi des définitions et propriétés élémentaires sur les opérateurs compacts et de compositions.

2.1 Opérateurs bornés.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K. On appelle opérateur de E dans F, toute application T défini de E dans F par :

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto Tx. \end{aligned}$$

Définition 2.1.1. *L'opérateur T est dite linéaire si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E; \lambda, \mu \in K, T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Théorème 2.1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit T un opérateur linéaire de E dans F, alors : T est borné (continu) $\Leftrightarrow$*

$$\exists M > 0, \forall x \in E : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E.$$

Le plus petit des nombres M vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur T et se note $\|T\|$.

$$\|T\| = inf\{M \geqslant 0 : \|Tx\|_F \leqslant M\|x\|_E\}$$

Remarque 2.1.1. *L'ensemble $L(E, F)$ de tous les opérateurs linéiares bornés.*
Si E et F sont des espaces véctoriels normés, alors $L(E, F)$ est aussi un espace véctoriel normé. On note $L(E)$ si $E = F$.

Théorème 2.1.2. *Pour tout opérateur borné T, on a :*

$$\begin{aligned} \|T\| &= sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|_F \\ &= sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \end{aligned}$$

Définition 2.1.2. *Soient T et T_0 deux opérateurs linéaires, T de E dans F et T_0 de F dans G, on appelle produit T_0T de ces opérateurs l'opérateur T_1 qui à un élément $x \in E$ fait correspondre l'elément*

$$z = T_0(Tx) \in G.$$

1. *Le domaine de définition de $D(T_1)$ de l'opérateur T_1 est constitué par les $x \in D(T)$ tels que $Tx \in D(T_0)$.*

2. *Si T et T_0 sont des opérateurs bornés dans des espaces véctoriels normés, l'opérateur T_0T est aussi borné et :*

$$\|T_0T\| \leqslant \|T_0\|.\|T\|$$

.

Définition 2.1.3. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $T \in L(E,F)$, l'unique application linéaire $T^* \in L(F,E)$ telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$, on ait :*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

S'appellé l'adjoint de T. On a de plus $\|T^*\| = \|T\|$

Proposition 2.1.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert, l'application $T \to T^*$ est isométrie de $L(E,F)$ dans $L(F,E)$, elle est linéaire. De plus $\forall T, S \in L(E,F)$*

1. *$(T^*)^* = T$*
2. *$\|T^*T\| = \|T\|^2$*
3. *$(TS)^* = S^*T^*$.*

Démonstration. Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tout $x \in E$, $y \in F$, $T_1, T_2 \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle x, (T_1+\lambda T_2)^*(y)\rangle &= \langle (T_1+\lambda T_2)(x), y\rangle \\ &= \langle T_1(x), y\rangle + \lambda\langle T_2(x), y\rangle \\ &= \langle x, (T_1)^*(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda}(T_2)^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (T_1)^* + \overline{\lambda}(T_2)^*)(y)\rangle \end{aligned}$$

Ainsi $T \to T^*$ est linéaire, elle est isométrie d'après la proposition de l'unicité.

1. Montrons que $(T^*)^* = T$, c-à-d on montrons $\langle T(x), y\rangle = \langle (T^*)^*(x), y\rangle$. On a :

$$\begin{aligned} \langle T(x), y\rangle &= \langle x, T^*(y)\rangle \\ &= \overline{\langle T^*(y), x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, (T^*)^*(x)\rangle} \\ &= \langle (T^*)^*(x), y\rangle \end{aligned}$$

2. Montrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on rappelle que la norme opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|.\|T\| = \|T\|^2$, d'autre part :

$$\begin{aligned} \|T^*T\| &= sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T^*T(x)\| \\ &= sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1}|\langle T^*T(x), y\rangle| \\ &\geqslant sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle T^*T(x), x\rangle| \\ &= sup_{\|x\|\leqslant 1}|\langle T(x), T(x)\rangle| \\ &= \|T\|^2 \end{aligned}$$

   on a donc l'égalité $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

3. Enfin pour vérifier $(TS)^* = S^*T^*$, il suffit de montrer pour tout $x \in E$ et $y \in F$, $\langle (TS)^*(x), y\rangle = \langle S^*T^*(x), y\rangle$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (TS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (TS)(y)\rangle \\ &= \langle T^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*T^*(x), y\rangle \end{aligned}$$

   donc on a l'égalité $(TS)^* = S^*T^*$.

$\square$

2.2 Opérateur compact.

Ensemble relativement compacts

Un ensemble $B \subset E$ est relativement compacts si pour tout suite $\{x_n\}$ de B, il existe une sous suite $\{x_{n(k)}\}$ qui converge dans F.

Définition 2.2.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire de E dans F. On dit que l'opérateur T est compact si, pour tout $B \subset E$,*

$$B \text{ borné dans } E \Rightarrow \quad T(B) \text{ relativement compact dans } \ F.$$

On note $\mathcal{K}(E,F)$l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.
Ainsi, un opérateur compact transforme une suite bornée en une suite convergente.

Proposition 2.2.1. *Tout opérateur linéaire compact est continu, i.e.$\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Soit E et F deux espaces de Hilbert et T un opérateur linéaire compact de E dans F. Soit $\overline{B}_1 = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E. L'ensemble $\overline{B}_1$ étant bornée, son image par T est relativement compacte donc bornée : il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \overline{B}_1, \|Tx\|_F \leq C.$$

On en déduit que

$$\forall x \in E/\{0\}\ ,\ \|Tx\|_F = \|x\|_E \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq C\|x\|_E.$$

L'opérateur linéaire T est donc continu.

□

Théorème 2.2.1. *Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact alors pour tout suite $(x_n)_n$ tel que $\ x_n \to x$ on a $Tx_n \longrightarrow Tx$.*

Démonstration. Soit $x_n \longrightarrow x$ la suite$(x_n)_n$ est bornée. La suite $y_n = Tx_n$ converge aussi faiblement vers Tx . Supposons que Tx_n ne converge pas fortement vers Tx , il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous suite $(y_{\varphi(n)})_n$ tel que $\| \ y_{\varphi(n)} - y \ \| > \varepsilon$.
En utilisant la compacité de T, il existe alors une sous suite de $(x_{\varphi(n)})_n$ qu'on note par $(x_{\varphi_1(n)})_n$tel que $Tx_{\varphi_1(n)}$ converge vers un $\tilde{y} \neq y$. Mais d'un autre cotée, on a $(y_{\varphi_1(n)})$ converge faiblement vers y. D'où une contradiction. □

Nous avons une autre caractérisation équivalente suivante des opérateurs compacts dans les espaces E et F sont des espaces de Hilbert.

Proposition 2.2.2. *Soit E et F deux espaces de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $T \in \mathcal{K}(E,F)$;

(ii) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers u dans E, on peut extraire une sous-suite de la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers Tu dans F.

Démonstration. On démontre l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers un élément $u \in E$. Comme T est un opérateur continu, la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Tu dans F. Par ailleurs, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et T est compact, donc on peut extraire une sous-suite de $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers un élément $w \in F$.
Comme la convergence forte implique la convergence faible, par unicité de la limite, on a nécessairement $w = Tu$.
On prouve maintenant l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$ qui vérifie la propriété (ii), montrons que T est compact. Soit B un sous-ensemble bornée de E. Montrons que $T(B)$ est un ensemble relativement compact dans F. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B. Comme B est bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, et on peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans E vers un élément $u \in E$. D'après la caractérisation (ii), il existe une extraction φ telle que la suite $(Tu_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans F vers Tu.
Ceci montre qu'il existe une sous-suite de $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans F. L'ensemble T(B) est donc relativement compact. □

Théorème 2.2.2. *Soient E et F deux espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermée de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Il est facile de montrer que $\mathcal{K}(E,F)$ est un espace vectoriel.
Grace à la Proposition 2.2.1, on sait qu'il est inclus dans $\mathcal{L}(E,F)$.
Il reste à prouver que c'est un sous-espace fermée de $\mathcal{L}(E,F)$. Considérons pour cela une suite d'opérateurs compacts $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge dans $\mathcal{L}(E,F)$ vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et montrons que T est compact.
Soit B un bornée de E, soit $R > 0$ un réel tel que $B \subset \{x \in E, \|x\| \leq R\}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $T(B)$. Il faut montrer que on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente (ceci prouvera que $T(B)$ est relativement compact et donc que T est compact).
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite d'éléments de B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(w_n) = u_n$. On va extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente en utilisant un procédé diagonal.

On pose $\{w_n^0\}_n = \{w_n\}_n$ et on construit, par récurrence sur k, la suite $\{w_n^k\}_n$, qui est une sous-suite de $\{w_n^{k-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(T_k(w_n^k))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. On utilise pour cela le fait que T_k est un opérateur compact, et que $\{w_n^{k-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, suite extraite de $(w_n)_n$, est bornée. On définit maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = w_n^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(v_n)_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(w_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$: la suite $(T_k(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. On pose $\tilde{u}_n = T(v_n)$. La suite $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On va montrer quelle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\|T - T_k\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{3R}.$$

Soit ensuite $N \geq 0$ tel que $\forall q > p \geq N$,

$$\|T_k(v_p) - T_k(v_q)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient que, pour tout $q > p \geq N$,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}_p - \tilde{u}_q\| &= \|T(v_p) - T(v_q)\|_F \\
&\leq \|T(v_p) + T_k(v_p)\|_F + \|T_k(v_p) - T_k(v_q)\|_F + \|T_k(v_q) - T(v_q)\|_F \\
&\leq \|T - T_k\|_{\mathcal{L}(E,F)}(\|v_p\|_E + \|v_p\|_E) + \|T_k(v_p) - T_k(v_q)\|_F \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

La suite $(\tilde{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Ceci conclut la preuve.

□

Définition 2.2.2. *On dit que $T \in L(E,F)$ est un opérateur de rang fini si* $\dim ImT < \infty$.

Propriétés 2.2.1. *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si T est de rang fini alors $T(\overline{B}_E)$ est un borné de l'espace vectoriel de dimension finie ImT , donc est relativement compact. □

Théorème 2.2.3. *Un opérateur linéaire entre espace de Hilbert est compact si et seulement s'il est la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Démonstration. La partie directe : un opérateur de rang fini étant compact et l'ensemble des opérateurs compacts étant un fermé de $L(E,F)$, une limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est bien un opérateur compact.
Montrons la réciproque, soit donc $T \in K(E,F)$, soit $n \in \mathbb{N}$ fixé , il existe un nombre fini N_n de points x_i^n de E tels que

$$T(\overline{B}_E) \subset \cup_{i=1}^{N_n} B_E(T(x_i^n), 2^{-n}).$$

Notons G_n le s,e,v (fermé car de dimension finie) engendré par $(T(x_1^n), ..., T(x_{N_n}^n))$, p_n le projecteur orthogonal sur G_n et $T_n = p_n \circ T$: Par construction, T_n est continu et de rang fini. De plus,compte tenu de $p_n(T(x_i^n)) = T(x_i^n)$,

$$\forall x \in E, \forall i \in \{1, ..., N_n\}, \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \|p_n(T(x)) - T(x_i^n)\|_F + \|T(x_i^n) - T(x)\|_F,$$

si x est dans $\overline{B}_E$, on peut choisir $i \in \{1, ..., N_n\}$ de telle sorte que $T(x)$ soit dans $B_E(T(x_i^n), 2^{-n})$. Alors, comme un projecteur orthogonal est toujours de norme inférieure ou égale à 1 (i.e en effet , si p est un projecteur orthogonal de l'espace de Hilbert H alors le théorème de Pythagore assure que pour tout $x \in H$, on a $\|x\|^2 = \|p(x)\| + \|x - p(x)\|^2$ et donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$), on obtient finalement,

$$\forall x \in \overline{B}_E, \|T_n(x) - T(x)\|_F \leq 2^{1-n},$$

En conséquence,la suite d'opérateurs de rang fini $(T_n)_{n\in N}$ tend vers T. □

On va donner des propriétés fondamentales des opérateurs compacts,

Théorème 2.2.4. *Soient $T, T_n \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E; F et G des espaces de Banach. Si $(T_n)_n$ converge en norme vers T et si les T_n sont compact alors T l'est aussi.*

Démonstration. Soit $(x_m)_m$ une suite dans $B(0, 1)$.
Pour chaque n il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})_n$ telle que $(T_n x_{\varphi_1(n)})_n$ est convergente, puisque $T_n$est compact.
Par le procédé d'extraction diagonale la sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})_n$ vérifie que $(T_n x_{\varphi_1(n)})_n$ est convergente.
On a alors

$$\| Tx_{\varphi_{(n)}(n)} - Tx_{\varphi_{(m)}(m)} \| \leqslant \| T - T_n \| + \| T_m - T \| + \| T_n x_{\varphi_{(n)}(n)} - T_m x_{\varphi_{(m)}(m)} \| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Théorème 2.2.5. *Si T un opérateur compact et S un opérateur borné , les opérateurs TS et ST sont compact.*

Démonstration. Si l'ensemble $M \subset E$ est bornée l'ensemble BM l'est aussi. Par conséquent , l'ensemble TSM est précompact ce qui signifier que l'opérateur TS est compact.
De même si M est bornée TM est précompact, d'où en raison la continuité de B, l'ensemble SAM est aussi précompact ce qui signifier que l'opérateur ST. □

Proposition 2.2.3. *Soient E, F et G trois espaces de Banach, et soient $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$.*
Si T_1 est compact, ou bien si T_2 est compact, alors l'application $T_2 \circ T_1$ est compacte : $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{K}(E, G)$

Démonstration. On suppose que $T_1 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T_2 \in \mathcal{K}(E,G)$. Comme T_1 est continue, l'image par T_1 de la boule unité de E, qu'on note $T_1(B_E)$, est bornée.
Comme T_2 est linéaire compacte, l'image par T_2 d'un ensemble bornée est relati -vement compacte dans G.
Donc $T_2 \circ T_1(B_E)$ est relativement compacte dans G, et $T_2 \circ T_1$ est une application compacte.

Supposons maintenant que $T_1 \in \mathcal{K}(E,F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(E,G)$. Soit $w_n = T_2 \circ T_1(u_n)$ une suite d'éléments de $T_2 \circ T_1(B_E)$, avec $u_n \in B_E$. On pose $v_n = T_1(u_n) \in F$. Comme T_1 est compacte, on peut extraire de v_n une sous-suite convergente dans F, qu'on note $v_{\varphi(n)}$, avec $\lim\limits_{n\to\infty} v_{\varphi(n)} = v$. Par conséquent, comme T_2 est continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} w_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} T_2(v_{\varphi(n)}) = T_2(v).$$

On peut donc extraire de toute suite de $T_2 \circ T_1(B_E)$ une sous-suite convergente :
donc $T_2 \circ T_1$ est une application compacte. □

2.3 Opérateurs de composition.

Dans cette section, nous allons présenter quelques propriétés de base sur la théorie des opérateurs de composition. Pour une fonction holomorphe φ du disque unité à lui-même, généralement appelé le symbole, on peut définir l'opérateur de composition

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi,$$

L'opérateur de composition peut être défini sur de nombreux espaces de fonctions analytiques différents. Nous commençons par l'opérateur de composition sur les espaces Hardy.

Définition 2.3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On définit l'opérateur de composition C_φ de symbole φ par :*

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \quad f \in H^2,$$

Un tel opérateur est clairement linéaire et à valeurs dans l'ensemble des fonctions analytiques. La composée de deux opérateurs de composition est un opérateur de composition avec la relation $C_\varphi \circ C_\psi = C_{\varphi\circ\psi}$ De plus, si k_w est un noyau reproduisant de H^2, on a $C_\varphi^* k_w = k_{\varphi(w)}$. En effet, pour $f \in H^2$,

$$< f, C_\varphi^* k_w >=< C_\varphi^* f, k_w >= f(\varphi(w)) =< f, k_{(\varphi(w))} > .$$

Sur l'espace de Hardy H^2, l'opérateur de composition C'est toujours borné, cela d'après le principe de subordination de Littlewood (1925) [12], donné dans la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Si $\varphi(0) = 0$ alors $\| C_\varphi \| \leqslant 1$.*

Démonstration. On note S^* le shift inverse : si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors

$$S^* f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}.$$

Cette application translate les coefficients d'une série analytique vers la gauche. On remarque que pour toute fonction analytique $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$$f(z) = f(0) + zS^* f(z)$$

et

$$S^{*n} f(0) = a_n.$$

On suppose dans un premier temps que f est polynomiale. Il est clair, dans ce cas, que f est bornée sur $\mathbb{D}$, alors $f \circ \varphi$ est aussi borné, on déduit que $f \circ \varphi \in H^2$. On a

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi (S^* f),$$

où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ ($M_\varphi f = \varphi f$). Puisque $\varphi(0) = 0$, le coefficient constant de $M_\varphi C_\varphi (S^* f)$ est nul et la quantité $M_\varphi C_\varphi (S^* f)$ est donc orthogonale aux constantes. Ainsi,

$$\|C_\varphi f\|^2 = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi (S^* f)^2\| \leqslant |f(0)|^2 + \|C_\varphi (S^* f)\|^2.$$

la dernière inégalité résulte de la propriété de contraction des opérateurs de multiplication puisque $\|\varphi\| \leq 1$. On en déduit, en appliquant cette inégalité aux fonctions $S^{*k} f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, que

$$\|C_\varphi S^{*k} f\|^2 \leqslant |S^{*k} f(0)|^2 + \|C_\varphi (S^{*(k+1)} f)\|^2.$$

On obtient

$$\|C_\varphi f\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{degf} |S^{*k} f(0)|^2 + 0 = \sum_{k=0}^{degf} |a_n|^2 = \|f\|^2.$$

Ceci conclut la proposition dans le cas des fonctions polynomiales.

On achève le raisonnement par un résultat de densité : soit $f \in H^2$, on note f_n le polynôme de Taylor d'ordre n associée à f. La suite $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge vers$f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, dans ce cas $f_n \circ \varphi$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$ sur tout compact de $\mathbb{D}$, et ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f \circ \varphi(re^{it})|^2 dt &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n \circ \varphi(re^{it})|^2 dt \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \|C_\varphi f_n\|^2 \\ &\leq \lim\sup_{n\to\infty} \|f_n\|^2 \leq \|f\|^2.\end{aligned}$$

Ceci étant vérifié pour tout $0 \leq r \leq 1$, on a montré le résultat voulu. □

Lemme 2.3.1. *Pour tout $a \in \mathbb{D}$, soit*

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}, \text{ avec } \varphi_a^{-1} = \varphi_a$$

L'opérateur C_{φ_a} est borné dans H^2, de plus on a :

$$\|C_{\varphi_a}\|^2 \leq \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$$

Démonstration. On commence par montrer le résultat dans le cas où f est polynomiale, Puisque f est polynomiale, f est bornée sur $\overline{\mathbb{D}}$ et donc $f \circ \varphi_a$ l'est aussi. On calcule alors

$$\| f \circ \varphi_a\|^2 = \frac{1}{2}\int_\pi^{-\pi} |f(\varphi_a(e^{it}))|^2 dt$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{-\pi} |f(e^{it})\ |^2|\ (\varphi_a^{'}(e^{it}))|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{-\pi} |f(e^{it})\ |^2\ \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}e^{it}|^2}dt \\ &\leq \frac{1-|a|^2}{(|1-a|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{-\pi} |f(e^{it})\ |^2\ dt\right) \\ &= \frac{1+|a|}{1-|a|}\|f\|^2\end{aligned}$$

$$\| f \circ \varphi_a\| = \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}\|f\|.$$

Ceci montre le résultat dans le cas d'un automorphisme quand f est polynomiale. On peut déduire le résultat pour $f \in H^2$ quelconque à l'aide d'un argument de densité semblable à celui de la proposition précédente. □

Il reste à montrer le résultat dans le cas où $\varphi(0) \neq 0$, Le théorème suivant de Littlewood nous donne l'estimation de la norme de l'opérateur de composition

Théorème 2.3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors C_φ est un opérateur borné dans H^2, et*

$$\|C\varphi_a\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

Démonstration. On note $a = \varphi(0)$ et on considère l'automorphisme $\psi(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$. On a alors

$$C_\varphi = C_{\psi \circ \psi \circ \varphi} = C_\psi C_{\psi \circ \varphi}$$

et $\psi \circ \varphi(0) = 0$, d'après les deux lemme et proposition précédents, les opérateurs C_ψ et $C_{\psi \circ \varphi}$ sont bornés dans H^2, d'où C_φ est aussi borné. De plus

$$\|C_\varphi\| \leq \|C_\psi C_{\psi \circ \varphi}\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

□

Chapitre 3

Compacités d'opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et Modèle.

3.1 Compacités d'opérateurs de composition sur les espaces de Hardy.

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats sur les opérateurs de composition sur l'espace de Hardy H^2. Le résultat suivant est de Littlewood (1925 [12]).

Théorème 3.1.1. *Soit φ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, alors C_φ est un opérateur borné dans H^2, et*

$$\|C_\varphi f\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}\|f\|$$

pour tout $f \in H^2$.

On définit la fonction de comptage de Nevanlinna classique N_φ de H^2 de la manière suivante :

$$N_\varphi(z) = \sum_{z=\varphi(w)} \log(1/|w|), \qquad z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *([17]) Soit*

$$\Upsilon_s(z) = \frac{s-z}{1-\overline{s}z}$$

transforme de Möbius de $\mathbb{D}$, pour tout $s \in \mathbb{D}$, on a

$$N_\varphi(\Upsilon_s(w)) = N_{\Upsilon_s \circ \varphi}(w)$$

pour tout $w \in \mathbb{D}$.

La fonction de comptage classique N_φ vérifie l'inégalité de la moyenne (voir [17]), plus précisément, nous avons :

Lemme 3.1.2. *Soit $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorphe avec $\psi(0) \neq 0$, si $0 < R < |\psi(0)|$ alors*

$$N_\psi(0) \leq \frac{1}{R^2} \int_{r\mathbb{D}} N_\psi(z) dA(z)$$

Démonstration. Supposons f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ avec $f(0) \neq 0$. Soit (a_n) la suite des zéros de f, la formule de Jensen est

$$\sum_{n=1}^{n(r)} \log \frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Les termes de la somme du premier membre du l'équation sont tous positifs, alors

$$\log |f(0)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

D'où si $w \in \mathbb{D}$, alors pour $f(z) = z - w$ l'inégalité précédente devient

$$\log |w| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |re^{i\theta} - w| d\theta,$$

pour tout $0 \leq r < 1$. Par intégration sur l'intervalle $[0, R]$ par rapport à la mesure $2R^{-2}rdr$, on obtient

$$\log |z| \leq \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} \log |z - w| dA(w). \tag{3.1}$$

Soit

$$N_{\psi,r}(w) := \sum \log \frac{r}{|z_j(w)|},$$

pour tout $0 \leq r < 1$, avec $\{z_j\}$ est l'ensemble des zéros de ψ. Ensuite, la formule de Jensen pour $f = \psi - w$ est

$$N_{\psi,r}(w) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta - \log |\psi(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Intégrons les deux membres de cette identité par rapport à la mesure de probabilité $R^{-2}dA(w)$ on obtient

$$\frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r}(w) dA(w) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} \log |\psi(re^{i\theta}) - w| dA(w) \right) d\theta - \log |\psi(0)|,$$

Utilisons l'équation 3.1 avec $z = \psi(re^{i\theta})$, on trouve pour tout $0 \leq r < 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r}(w)dA(w) &\geq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta - \log|\psi(0)| \\ &= N_{\psi,r}(0)\end{aligned}$$

La preuve est terminée en remarquant que, pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$N_{\psi,r}(w) \to N_\psi(w) \quad \text{quand} \quad r \to 1.$$

□

Lemme 3.1.3. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorphe avec $\varphi(0) = 0$, alors*

$$N_\varphi(z) \leq \frac{1}{R^2}\int_{D(z,R)} N_\varphi(w)dA(w)$$

pour tout disque $D(z,R)$ de centre z et de rayon R et telle que $D(z,R) \subset \mathbb{D} \setminus D(0,\frac{1}{2})$.

Démonstration. D'après le lemme 3.18 et le lemme 3.1.1 on a

$$\begin{aligned}N_\varphi(z) = N_{\Upsilon_z\circ\varphi}(0) &\leq \frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\Upsilon_z\circ\varphi}(w)dA(w) \\ &= \frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_\varphi(\Upsilon_z(w))dA(w)\end{aligned}$$

avec

$$\Upsilon_z(\varphi(0)) = \frac{z - \varphi(0)}{1 - \overline{z}\varphi(0)} = z$$

et $0 < R < |\Upsilon_z(\varphi(0))| = |z| < 1$.
On pose $\zeta = \Upsilon_z(w)$, alors $w = \Upsilon_z(\zeta)$,

$$\begin{aligned}dA(w) &= |\Upsilon_z'(\zeta)|^2 dA(\zeta) \\ &= \left[\frac{(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}\zeta|^2}\right]^2 dA(\zeta).\end{aligned}$$

Notons aussi que si $w \in D(0,R)$ alors $\zeta \in \Upsilon_z\big(D(0,R)\big) \subset D(z,R)$. Donc

$$N_\varphi(z) \leq \frac{1}{R^2}\int_{D(z,R)} N_\varphi(\zeta)\left[\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}\zeta|^4}\right] dA(\zeta)$$

Si $|z| > 1/2 > R$ d'après Lemme 4.3.3 dans [18] on a

$$N_\varphi(z) \leq \frac{2}{R^2}\int_{D(z,R)} N_\varphi(\zeta)dA(\zeta).$$

□

Ce qui suit est une version de l'identité Littlewood-Paley qui donne la norme H^2 d'une fonction analytique en termes d'intégrale pondérée (voir [8]).

$$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)| \log \frac{1}{|\ z\ |^2} dA(z), \tag{3.2}$$

Nous avons besoins des résultats suivants, l'égalité donne la formule de changement de variable en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna

$$\|C_\varphi f\|^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_\varphi(z) dA(z), \tag{3.3}$$

On va donner le théorème de Shapiro ([17]) qui donne la condition nécessaire et suffisante sur la compacité de l'opérateur de composition sur H^2.

Théorème 3.1.2. *Soit φ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, alors C_φ est compact si et seulement si*

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \dfrac{1}{|w|}} = 0.$$

Démonstration. 1) On suppose que

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

Soit (f_n) une suite des fonctions dans H^2 qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{D}$. Il suffit de montrer que $\|C_\varphi f_n\| \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{|w|\to 1^-} \dfrac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0$ alors il existe $0 < r < 1$ tel que

$$N_\varphi(w) < \varepsilon log \frac{1}{|w|}, \qquad r \leq |w| < 1.$$

Comme $f_n \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, on peut choisir n_ε tel que $|f_n| < \sqrt{\varepsilon}$ sur $r\mathbb{D} \cup \{\varphi(0)\}$, chaque fois que $\forall n > n_\varepsilon$. Ainsi, pour chaque n, par la formule de changement de variable sur H^2 suivante :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2_{H^2} &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z))|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w))|^2 N_\varphi(w) dA(w). \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_n\|^2 &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w) \\
&< \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w)dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 log\frac{1}{|w|}dA(w) \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w)dA(w) + \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 log\frac{1}{|w|}dA(w) \\
&= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\|z\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}(\|f_n\|^2 - |f_n(\varphi(0))|^2) \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\|C_\varphi f_n\| \to 0$ qui montrent la compacité de C_φ sur H^2.

2) On suppose que C_φ est compact sur H^2, et on montre que $N_\varphi(w) = o(\log 1/|w|)$ quand $|w| \to 1^-$ qu'est équivalent à :

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{1-|w|} = 0.$$

Pour $s \in \mathbb{D}$, soit

$$f_s(z) = \frac{\sqrt{1-|s|^2}}{1-\overline{s}z}$$

le noyau reproduisant normalisé de H^2, comme $\|f_s\| = 1, \quad \forall s$, et $f_s \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ quand $|s| \to 1^-$, on a :

$$\lim_{|s|\to 1^-} \|C_\varphi f_s\| = 0.$$

Appliquant la formule de changement de variable sur l'espace H^2 et l'inégalité de la moyenne (Lemme 3.1.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_s\|^2 &\geq 2\int_{\mathbb{D}} |f_s'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w) \\
&= 2\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|s|^2)|s|^2}{|1-\overline{s}w|^4} N_\varphi(w)dA(w) \\
&= \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\mathbb{D}} |\Upsilon_s'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w).
\end{aligned}$$

Par le changement $W = \Upsilon_s(w)$ de variable et le lemme 3.1.1 :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_s\|^2 &\geq \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\mathbb{D}} N_\varphi(\Upsilon_s(W))dA(W) \\
&= \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\mathbb{D}} N_{\Upsilon_s\circ\varphi}(W))dA(W) \\
&\geq \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} N_{\Upsilon_p\circ\varphi}(W))dA(W).
\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de la moyenne, avec $\psi = \Upsilon_s \circ \varphi$ et on utilise le lemme 3.1.1 pour terminer l'éstimation :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_s\|^2 &\geq 4\frac{2|s|^2}{1-|s|^2} N_{\Upsilon_p \circ \varphi}(0) \\ &= \frac{8|s|^2}{1+|s|}.\frac{N_\varphi(s)}{1-|s|}. \end{aligned}$$

On notera que dans la première ligne de l'équation précédente, l'application de l'inégalité de la moyenne le disque nécessite que $|\Upsilon_s(\varphi(0))| > \frac{1}{2}$. Mais $|\Upsilon_s(\varphi(0)| \to 1$ qaund $|s| \to 1^-$,alors cela reste vrai pour tout s Par conséquent, pour toutes ces s,

$$\|C_\varphi f_s\|^2 \geq const.\frac{N_\varphi(s)}{1-|s|}.$$

Comme la compacité de C_φ implique que $\|C_\varphi f_s\| \to 0$ quand $|s| \to 1^-$, alors la dernière inégalité donne l'estimation souhaitée de la fonction N_φ.

□

3.2 Compacités d'opérateurs de composition sur les espaces Modèle.

3.2.1 Cas les symboles quelconques.

D'après le théorème 3.1.2, l'opérateur de composition sur H^2 dans H^2, (à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna), est compact si et seulement si

$$\lim_{|u| \to -1} \frac{N_\varphi(u)}{-\log \mid z \mid} = 0. \tag{3.4}$$

Dans cette partie, nous donnons une condition nécessaire et suffisante analogue de la condition (3.4), pour la compacité de pour l'opérateur

$$C_\varphi : K_u \to H^2.$$

Les nouveaux données principaux, sont des estimations pour la noyaux reproduisant et ses dérivés, donnés dans le lemme ci-dessous.
Soit k_λ le noyau reproduisant de K_u,

$$k_\lambda(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)}, \quad \|k_\lambda\|^2 = \frac{1-|u(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2}.$$

et soit $\tilde{k_\lambda}$ le noyau reproduisant normalisé,

$$\tilde{k_\lambda} = \sqrt{\frac{1- \mid \lambda \mid^2}{1 - u(\mid \lambda \mid)^2}} k_\lambda(z).$$

Lemme 3.2.1. *Soit* $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$*,* $|\lambda_n| \to 1$ *tel que :*

$$|u(\lambda_n)| < a, \tag{3.5}$$

pour certains $a \in (0,1)$*. Alors*

(i) $\tilde{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\lambda *} 0$ *quand* $n \to \infty$*,*

(ii) il existe $\epsilon > 0$*,* $c > 0$ *et* n_0 *tel que*

$$|k'_{\lambda_n}(z)| = \frac{c}{(1- \mid \lambda_n \mid^2)^2}, \quad z \in D_\epsilon(\lambda_n) \tag{3.6}$$

pour tout $n > n_0$ *où* $\mathbb{D}_\epsilon(\lambda) = \{z; |z-\lambda| < \epsilon|1-\overline{z}\lambda|\}$ *est un disque hyperbolique de centre* λ*.*

Démonstration. (i) Il suffit de montrer que

$$\frac{(1-|\lambda_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\overline{\lambda_n} z}(1-\overline{u(\lambda_n)}u(z)) \xrightarrow{\lambda *} 0 \;\; dans \;\; L^2(\mathbb{T}) \;\; quand \quad |\lambda_n| \to 1.$$

Sachant que le noyaux reproduisant normalisé $\tilde{k_{\lambda_n}}$, pour l'espace Hardy $H^2(\mathbb{D})$ tende faiblement à 0 quand $|\lambda_n| \to 1$ (voir [16]).

(ii) Nous commençons avec l'estimation bien connue suivante :

$$|u'(z)| \leq \frac{1-|u(\lambda)|^2}{1-|\lambda|^2} \quad z \in \mathbb{D}\ , \tag{3.7}$$

avec (3.5), il donne facilement

$$|\lambda(z)| < b, \quad z \in \cup_n D_\epsilon(\lambda_n), \tag{3.8}$$

pour certains $b < 1$ et $\epsilon > 0$.

Pour n_0 suffisamment grand, on a

$$|k'_z(z)| > \frac{cnst}{(1-|z|^2)^2} \quad z \in \cup_{n>n_0} D_\epsilon(\lambda_n), \tag{3.9}$$

En effet,

$$k'_z(z) = -\frac{u'(z)\overline{u(z)}}{1-|z|^2} + \overline{z}\frac{1-|u(z)|^2}{(1-|z|^2)^2} = A_1 + A_2.$$

Il résulte de (3.8) que $|A_2| > c(1-|z|^2)^{-2}$ pour certains $c > 0$, et pour que prouve (3.9) il suffit de montrer que

$$|A_1| < q|A_2| \ \ pour \ \ certains \ \ q \in (0,1),$$

lorsque $z \in \cup_{n>n_0} D_\epsilon(\lambda_n)$. La relation (3.7) donne

$$|A_1| \leq |u(z)| \frac{1-|u(z)|^2}{(1-|z|^2)^2} < \frac{b}{|z|}|A_2| \ , \quad z \in \cup_n D_\epsilon(\lambda_n).$$

Puisque $b < 1$ et $inf\{|z| : z \in \cup_{n>m} D_\epsilon(\lambda_n)\} \longrightarrow 1$ quand $m \longrightarrow \infty$, d'où l'estimation. L'inégalité (3.9) prouve (3.6) pour le cas particulier $z = \lambda_n$. Afin de compléter la preuve considérons la fonction

$$g(\lambda, z) = \overline{k'_\lambda(z)} = -\frac{\overline{u'(z)}u(\lambda)}{1-\overline{z}\lambda} + \lambda \frac{1-\overline{u(z)}u(\lambda)}{(1-\overline{z}\lambda)^2}.$$

Nous avons $|g(\lambda_n, z)| = |k'_{\lambda_n}(z)|$, Par contre

$$|g(\lambda_n, z) - |g(z,z)| \leq |g'(\tilde{\lambda}, z)||z-\lambda_n|, \tag{3.10}$$

pour un certain point $\tilde{\lambda} \in [z, \lambda_n]$ où le dérivé est pris par rapport à la première variable. Une estimation simple montre

$$|g'(\tilde{\lambda}, z)| < \frac{cnst}{(1-|\lambda_n|)^3} \qquad \tilde{\lambda}, z \in D_\epsilon(\lambda_n),$$

La constante étant indépendante de n. Maintenant, étant donné pour tout $\eta > 0$, nous pouvons choisir $\epsilon' < \epsilon$ de sorte que le côté droit dans (3.10) ne dépasse pas $\eta(1-|z|^2)^{-2}$ où $z \in D_{\epsilon'}(\lambda_n)$. En prenant η suffisamment petit, nous obtenons (3.6). □

Remarque 3.2.1. *La notation $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante C absolue que $A \leqslant CB$. Nous écrivons $A \asymp B$ si $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.*

Dans ce qui suit, nous supposons par simplicité que $\varphi(0) = 0$.

Théorème 3.2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, une fonction holomorphe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $C_\varphi : K_u \longrightarrow H^2$ est un opérateur compact.

(2) La fonction de comptage de Nevanlinna de φ satisfait :

$$N_\varphi(\lambda) \frac{1-|\,u(\lambda)\,|^2}{1-|\,\lambda\,|^2} \longrightarrow \ 0 \quad quand \quad |\lambda| \nearrow 1. \tag{3.11}$$

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (1), Puisque $N_\varphi(\lambda)(1-\mid\lambda\mid^2)^{-1}$ et $1-\mid u(\lambda)\mid^2$ sont bornés, la condition (2) signifie que pour tout $a<1$

$$\lim_{|u(\lambda)|<a, |\lambda|\to 1^-} N_\varphi(\lambda)(1-\mid\lambda\mid^2)^{-1} = 0.$$

En particulier, pour tout $p>0$

$$N_\varphi(\lambda)\frac{1-\mid u(\lambda)\mid^p}{1-\mid\lambda\mid^p} \longrightarrow 0 \quad quand \quad |\lambda| \nearrow 1.$$

Nous utilisons l'inégalité suivante, (voir [7], page 187, et [3]),

$$\|f\|^2 \geq |f(0)|^2 + C_p \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{1-|z|}{(1-|u(z)|)^p} dA(z), \quad f\in K_u \tag{3.12}$$

pour certains $p\in(0,1)$. Soit

$$K_u^{(n)} = \{f\in K_u, f \;\; a\; zéro\; d'ordre\; n\; à\; l'origine\},$$

et soit $\prod^n : K_u \to K_u^{(n)}$ la projection orthogonale correspondante. Nous prouverons que

$$\|C_\varphi \textstyle\prod^n\|_{K_u\longrightarrow H^2} \to 0, \qquad n\to\infty.$$

Donc C_φ est compact car il peut être approximé par opérateur de rang fini $C_\varphi(I-\prod^n)$. En effet, soit $f\in K_u, \|f\|=1$, notons $g_n = \prod^{(n)} f$. Nous avons $\|g_n\|\leq 1$, et pour chaque $R<1$ et $\epsilon>0$. on peut choisir $n(\epsilon, R)$ indépendant de f et tel que

$$\mid g_n(\lambda)\mid \leq \epsilon \;, \mid g_n'(\lambda)\mid\leq\epsilon \;\; pour \;\; tout \quad n>n(\epsilon,R) \quad et \quad \mid\lambda\mid < R.$$

Il résulte de (3.12) que

$$\int_{\mathbb{D}} |g_n'(z)|^2 \frac{1-|z|}{(1-|u(z)|)^p} dA(z) < C \;,$$

avec C indépendant de f, n. Ensuite, par (3.3) nous avons

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi \Pi^n f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} \mid g_n'(z)\mid^2 N_\varphi(z) dA(z) &\leq \int_{|z|<R} + \int_{R<|z|<1} \\
&\leq \max_{|z|<R}\{\mid g_n'(z)\mid^2\} \int_{|z|<R} N_\varphi(z) dA(z) \\
+ \max_{R<|z|<1}\left\{N_\varphi(z)\frac{1-|u(z)|^p}{(1-|z|)}\right\} &\underbrace{\int_{R<|z|<1} |g_n'(z)|^2 \frac{1-|z|}{(1-|u(z)|)^p} dA(z)}_{inferier\;\; a\;\; C}.
\end{aligned}$$

Choisir d'abord R de telle sorte que la deuxième somme soit petite, et ensuite n assez grande pour fournir la petitesse de la première somme nous pouvons rendre toute l'expression arbitraire petite pour tout $f \in K_u$, $\|f\| = 1$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que C_φ est compact, et que 3.11 n'est pas vrai, alors il existe $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{D}$ et $|\lambda_n| \to 1$, satisfaisant

$$N_\varphi(\lambda_n)\frac{1-|u(\lambda_n)|^2}{1-|\lambda_n|^2} > c > 0. \tag{3.13}$$

Par le principe de subordination de Littlewood,ce qui implique que $N_\varphi(\lambda) \leq \log\frac{1}{|\lambda|}$, il existe $a < 1$ tel que l'équation 3.5 est vrai. En appliquant le Lemme 3.2.1 (i) et la compacité de C_φ, nous obtenons $\|C_\varphi\widetilde{k_{\lambda_n}}\|^2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Par contre dans le Lemme 3.2.1 (ii) et l'inégalité de sous-harmonique pour N_φ, impliquent

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi\widetilde{k_{\lambda_n}}\|^2 &\geq \int_{\mathbb{D}} |\widetilde{k'_{\lambda_n}}(z)|^2 N_\varphi(z)dA(z)\\
&\geq c_1\int_{\mathbb{D}} |k'_{\lambda_n}(z)|^2(1-|\lambda_n|^2)N_\varphi(z)dA(z)\\
&\geq \frac{c_2}{(1-|\lambda_n|^2)^3}\int_{D_\epsilon(\lambda_n)} N_\varphi(z)dA(z)\\
&\geq \frac{c_\epsilon N_\varphi(\lambda_n)}{1-|\lambda_n|^2}.
\end{aligned}$$

Nous combinons la dernière estimation avec (3.13) pour obtenir une contradiction.

□

3.2.2 Cas les symboles univalents.

Dans cette partie on va présenter la compacité de l'opérateur de composition sur K_u, dans le cas le symbol φ est univalent.

Théorème 3.2.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, une fonction holomorphe univalente, si pour quelque $0 \leq p < 1$,*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{(1-|z|)(1-|u(\varphi(z))|)^p} = \infty, \tag{3.14}$$

alors l'opérateur de composition $C_\varphi : K_u \to H^2$ est compact.

Nous avons besoin des résultats suivants, pour prouver le théorème.

Lemme 3.2.2. *Si f est analytique sur le disque unité $\mathbb{D}$ alors*

$$\|f\|^2 \approx |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z). \tag{3.15}$$

Démonstration. Voir [17].

□

Lemme 3.2.3. *Si* $f \in K_u$, $0 < p < 1$, *alors*

$$\|f\|^2 \gtrsim |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{(1-|u(\varphi(z))|)^p} dA(z).$$

Démonstration. Voir [7] page 187. □

Démonstration du théorème 3.2.2. Supposons que φ est univalente et satisfait 3.14. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $0 < r < 1$ tel que

$$\frac{1-|\varphi(z)|}{(1-|z|)(1-|u(\varphi(z))|)^p} > \frac{1}{\epsilon}, \qquad r < |z| < 1 \quad , \tag{3.16}$$

ce qui équivalent

$$(1-|z|) \leq \epsilon \frac{1-|\varphi(z)|}{(1-|u(\varphi(z))|)^p}, \qquad r < |z| < 1. \tag{3.17}$$

Supposons que f_n est une suite dans la boule d'unité fermée de K_u, et converge uniformément vers 0 sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Par conséquent, pour $0 < r < 1$, le lemme 3.2.2 implique.

$$\begin{aligned}
\|c_\varphi f_n\|^2 &\lesssim |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 (1-|z|^2) dA(z) \\
&= \underbrace{|f_n(\varphi(0))|^2}_{I_1} + \underbrace{\int_{r\mathbb{D}} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2 (1-|z|^2) dA(z)}_{I_2} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |(f_n \circ \varphi)'(z)|^2 (1-|z|^2) dA(z)}_{I_3}
\end{aligned}$$

Il est clair que $I_1 \to 0$ quand $n \to \infty$ (f_n converge uniformément vers 0). Pour I_2, puisque $f_n \circ \varphi$ converge uniformément vers 0 sur sous-ensembles compacts, alors $(f_n \circ \varphi)'$ converge uniformément vers 0 sur sous-ensembles compacts. Cela signifie, $I_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour I_3, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2) dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))\varphi'(z)|^2 \epsilon \frac{1-|\varphi(z)|}{(1-|u(\varphi(z))|)^p} dA(z), \quad \textit{par} \quad 3.17 \\
&\leq \epsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \frac{1-|w|}{(1-|u(w)|)^p} dA(w) \qquad , (\textit{ changement de variables}) \\
&\leq \epsilon(\|f_n\|^2 - |f(0)|^2), \quad \textit{par } 3.15 \\
&\leq \epsilon(1-|f(0)|^2).
\end{aligned}$$

Puisque ϵ est arbitraire, I_3 tend vers 0 quand $n \to \infty$. D'où $\|C_\varphi f_n\| \to 0$. D'où C_φ est donc compact. □

Théorème 3.2.3. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, une fonction holomorphe univalente, si l'opérateur de composition $C_\varphi : K_u \to H^2$ est compact, alors*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{(1-|z|)(1-|u(\varphi(z))|)} = \infty. \tag{3.18}$$

Nous avons besoin le lemme suivant, pour démontrer cet théorème.

Lemme 3.2.4. *Si $C_\varphi : K_u \to H^2$ alors $C_\varphi^* k_\lambda = k^u_{\varphi(\lambda)}$.*

Démonstration. Soit $f \in K_u$, alors

$$\begin{aligned} < f, C_\varphi^* k_\lambda > &=< C_\varphi f, k_\lambda > \\ &= f(\varphi(\lambda)) \\ &=< f, k^u_{\varphi(\lambda)} > . \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 3.2.3. Supposons que $C_\varphi : K_u \to H^2$ est compact, on a donc $C_\varphi^* : H^2 \to K_u$ est compact (voir [17] section 3.4). Le noyau reproduisant normalisé de H^2 est

$$\widetilde{k}_\lambda(z) = \frac{k_\lambda(z)}{\|k_\lambda\|} = \frac{\sqrt{1-|\lambda|^2}}{1-\overline{\lambda}z} \text{ où } \lambda \in \mathbb{D}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{C_\varphi^* \widetilde{k}_\lambda, \lambda \in \mathbb{D}\}$, puisque C_φ^* est compact, $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble relativement compact dans K_u. Par conséquent, chaque suit dans $\mathcal{A}$ a une sous-suit convergente. Soit $\lambda_n \in \mathbb{D}$ tel que $|\lambda_n| \to 1$ et $C_\varphi^* \widetilde{k_{\lambda_n}}$ est convergent vers $g \in K_u$. Par conséquent, pour h dans $K_u^\infty := K_u \cap H^\infty$, nous avons,

$$\begin{aligned} < h, g > &= \lim_{n\to\infty} < h, C_\varphi^* \widetilde{k_{\lambda_n}} > \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|\lambda_n|^2} < h, C_\varphi^* k_{\lambda_n} > \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|\lambda_n|^2} < h, k^u_{\varphi(\lambda_n)} > (lemme 3.2.4) \\ &= \lim_{n\to\infty} h(\varphi(\lambda_n))\sqrt{1-|\lambda_n|^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque K_u^∞ est dense dans K_u, g doit être nul. Par conséquent,

$$C_\varphi^* \widetilde{k_{\lambda_n}} \to 0.$$

quand $n \to 0$. Cela signifie

$$\|C_\varphi^* \widetilde{k_{\lambda_n}}\| \to 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}\|C_\varphi^* \widetilde{k_{\lambda_n}}\|^2 &= (1- \mid \lambda_n \mid^2) k^u_{\varphi(\lambda_n)} \\ &= (1- \mid \lambda_n \mid^2) \frac{1 - |u\varphi(\lambda_n)|^2}{1 - |\varphi(\lambda_n)|^2}.\end{aligned}$$

Ce qui implique (3.18).

$\square$

Bibliographie

[1] P.R. Ahern, , D.N. Clark, : Radial limits and invariant subspaces. Amer. J. Math. 92, 332-342 (1970).

[2] R.A. M. Avendano, P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math., vol. 237, Springer, New York, 2007.

[3] S. Axler, S. Y. Chang, D. Sarason, Products of Toeplitz operators, Intergal Equations Operator Theory, 1(1978), 285 ?309.

[4] A. Beurling. Étude sur un problème de majoration. Thèse de Doctorat. Uppsala University, 1933.

[5] A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[6] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).

[7] W. S. Cohn. Carleson measures and operators on star-invariant subspaces, J. Operator Theory, 15(1)(1986),181-202.

[8] C. C. Cowen and B. D. MacCluer. Composition operators on spaces of analytic functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[9] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[10] S.R. Garcia, W.T. Ross, , Model spaces : a survey, Contemp. Math. 638 (2015), 197-245.

[11] J. Ph. Labrousse, Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. Dept. De Math. Univ. de Nice(1970)

[12] J .E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. 23 (1925),481-519.

[13] K. Kellay and P. Lefèvre, Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions, J. Math. Anal. Appl.386 (2012), 718-727.

[14] H. O. Kim, Averages of Nevanlinna counting functions of holomorphic self-maps of the unit disk, Hokkaido Math. J. 33 (2004), no. 3, 697-706.

[15] D. Sarason, Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk, John Wiley, Sons Inc., New York, 1994.

[16] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator. Annals of Math. 125 (1987) 375–404.

[17] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Springer Verlag, New York 1993.

[18] K. Zhu, Operator theory in function spaces, volume 139 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1990.

[19] N. Zorboska, Composition operators on weighted Dirichlet spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), no. 7, 2013 2023.