

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

جامعة عمارة تليدجي بالأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOuat



كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématique informatique (MI)

Filière : Mathématique

Option : Analyse mathématique

Présenté par :

DJELOUD khalil

**THEME**

---

**Sur la composition dans l'espace de Besov: un cas critique**

---

Soutenu publiquement le : 17/06/2014 devant le jury composé de :

Encadreur : ALLAOUI Salaheddine	M.C.A	Université de Laghouat
Président : NOUIRI Brahim	M.C.B	Université de Laghouat
Examinatrice : BENDAOUD Zohra	M.C.A	Université de Laghouat
Examineur : OUCHENANE Djamel	M.A.A	Université de Laghouat
Examineur : BELHAOUES Razik	M.A.A	Université de Laghouat

Année universitaire 2013-2014

# *Remerciements*

*Avant toute chose, je remercie mon Dieu*

*De nous donnée la force*

*Et le courage d'aboutir à ce travail.*

*Je remercie notre encadreur «Salah Eddine Allaoui.*

*Je remercie tous les membres de jury d'avoir accepter  
présider et examiner Notre Travail*

*Merci pour toutes les personnes*

*Qui nous on aidée*

## Résumé

Dans ce mémoire, on étudiera premièrement, le cas critique dans l'espace de Besov. Deuxièmement, on s'intéresse aux opérateurs de composition  $T_f(g) = f \circ g$  sur certains espaces de Besov et de Besov homogène à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Dans le but de caractériser les fonctions qui opèrent, on établit que la condition de lipschitz, locale ou globale suivant que l'espace  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  se plonge ou non dans  $L_\infty(\mathbb{R})$ , est nécessaire pour  $s > 0$ .

Mots-clés : Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Opérateurs de composition.

## Abstract

In this dissertation, we shall study first of all the critical case in the space of Besov. Secondly, we are interested in the operators of the composition  $T_f(g) = f \circ g$  on certain spaces of Besov and of homogeneous Besov of a value of on  $\mathbb{R}$ . In order to distinguish the operating functions, we hypothesize that the condition of Lipschitz, local in general, the space  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  lengthens or not in  $L_\infty(\mathbb{R})$ , and whether it is necessary for  $s > 0$  or not.

Keywords : Lizorkin-Triebel spaces, Besov spaces, Composition operators.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	4
0.2	Notations . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Quelques résultats préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1	Série de Littlewood-Paley . . . . .	6
1.1.1	La décomposition de Littlewood-Paley . . . . .	6
1.2	Opérateur de différences finis . . . . .	8
1.3	Définitions des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel . . . . .	8
1.3.1	Espace de Besov . . . . .	8
1.3.2	Espace de Lizorkin-Triebel . . . . .	9
1.4	La multiplication dans une algèbre . . . . .	10
1.5	Espaces de Besov généralisé et Lizorkin-Triebel généralisé . . . . .	11
1.5.1	Espace de Besov généralisé . . . . .	11
1.5.2	Espace de Lizorkin-Triebel généralisé . . . . .	11
1.6	L'interpolation . . . . .	11
1.6.1	L'interpolation dans L'espace de Besov . . . . .	13
1.6.2	L'interpolation dans L'espace de Lizorkin-Tripel . . . . .	13
1.7	Inégalités de Base . . . . .	13
1.7.1	Inégalité de Hölder . . . . .	13
1.7.2	Inégalité de Young . . . . .	13
1.7.3	Inégalité de Bernstein . . . . .	14
1.8	Exemples des fonctions dans L'espace de Besov . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Le cas critique dans l'espace de Besov</b>	<b>17</b>
2.1	Rappel . . . . .	17
2.1.1	Espace de Banach de distributions . . . . .	17
2.1.2	Espace de multiplicateur $M(E)$ . . . . .	17
2.2	Localisation d'un espace de distribution . . . . .	19
2.2.1	Localisation des espaces Besov . . . . .	25
<b>3</b>	<b>La composition dans certains espaces de Besov</b>	<b>34</b>
3.1	Définitions . . . . .	34
3.2	Conditions nécessaires pour le calcul symbolique . . . . .	35
3.2.1	Quelques résultats préliminaires . . . . .	35
3.2.2	Énoncés des théorèmes . . . . .	37

<b>4</b>	<b>La composition dans certains espaces de Besov homogènes</b>	<b>41</b>
4.1	Rappel et définitions . . . . .	41
4.1.1	Espace de Besov Homogène . . . . .	42
4.1.2	Espace de Besov non Homogène . . . . .	44
4.1.3	Réalisations des espaces de Besov . . . . .	44
4.1.4	Fonctions à variation bornée . . . . .	50
4.2	Le calcul fonctionnel . . . . .	51
4.2.1	Énoncé et démonstration du théorème principal . . . . .	51
	<b>bibliographie</b>	<b>52</b>

## 0.1 Introduction

Dans ce mémoire sont liés aux quatre chapitres suivants :

Dans le premier chapitre on rappelle quelques propriétés sur les séries de Littlewood-paley, les espaces de Besov, de Triebel-lizorkin et on termine par quelques inégalités qui seront utilisés dans la suite.

Le deuxième chapitre est consacré à une préparation sur la localisation d'un espace de distribution, et démontrons le théorème suivant :

**Théorème 0.1.1.** [2] Soient  $s = \frac{1}{p} > 1$  et  $q > 1$ ,  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Si  $T_f$  envoie  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , alors  $f' \in B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$  localement uniformément.

Dans le troisième chapitre, nous considérons le calcul symbolique pour les espaces de Besov, et on cherche à caractériser les fonctions qui opèrent, par composition à gauche sur  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ . On montrera que les conditions de Lipschitz sont nécessaires pour  $s > 0$ , autrement dit :

**Théorème 0.1.2.** [1] Soit  $s > 0$  et  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Si  $T_f$  envoie  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  est localement lipschitzienne.

**Théorème 0.1.3.** [1] Soit  $s > 0$ , on suppose que  $s < \frac{1}{p}$  ou  $s = \frac{1}{p}$  et  $q > 1$ . Si  $T_f$  envoie  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  est globalement lipschitzienne.

Dans le quatrième chapitre, on rappelle quelques propriétés sur les espace de Besov homogène, et démontrons le théorème suivant :

**Théorème 0.1.4.** [6] Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $q \in [1, +\infty]$ ,  $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$ . et  $f \in U_p^1(\mathbb{R})$ .

i) Pour tout  $g \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})$ , on a  $[f \circ g] \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})$ ,  $(f \circ g)' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R})$ ,

$$\text{et } \|f \circ g\|_{B_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{U_p^1} \|g\|_{B_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})}.$$

ii) Pour tout  $g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , on a  $f \circ g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , et  $\|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{U_p^1} \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}$ .

## 0.2 Notations

- Si  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  est une fonction, le support de  $f$  est  $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$ .
- $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est le dual de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , est appelé espace des distributions sur  $\mathbb{R}$ .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}$ .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est le dual de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , est appelé espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  sa transformée de fourier est :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix.\xi} f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix.\xi} f(x) dx.$$

- $C_0(\mathbb{R})$  est un espaces de fonctions continue et à support compact.
- $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy$  est le produit de convolution des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Le symbole  $\hookrightarrow$  désigne l'inclusion avec continuité de l'injection canonique.
- Pour une distribution  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , on définit l'opérateur de translation par
$$\tau_a f(x) = f(x - a), \forall x \in \mathbb{R}.$$
- Nous notons  $T_f$  l'opérateur de composition, défini par  $T_f(g) = f \circ g$ .
- $Q = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\}$  est l'intervale de centre  $a$  et de rayon  $r > 0$ .
- $Q^+ = [0, \frac{1}{2}]$ .

# Chapitre 1

## Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on va rappeler les notions essentielles qu'on va utiliser dans la suite à savoir l'espace de Besov, l'espace de Lizorkin-Teirbel, Besov généralisé, Lizorkin-Teirbel généralisé et quelques propriétés principales.

### 1.1 Série de Littlewood-Paley

#### 1.1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telles que

- i)  $\text{supp}\phi \subset \{x \in \mathbb{R} : 2^{-1} \leq |x| \leq 2^1\}$ ,
- ii)  $\phi(x) > 0$  pour  $2^{-1} < |x| < 2^1$ ,
- iii)  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^{-j}x) = 1$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

On pose

$$\psi(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}x),$$

on obtient une fonction  $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp}\psi \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$

alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}x) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1, 1) converge dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est appelée la partition de l'unité.

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolution

$$\begin{aligned}\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\mapsto \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto (\Delta_k f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-k}x)) * f)(x), \quad (k \geq 1), \\ \Phi_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) &\mapsto \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto (\Phi_j f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-j}x)) * f)(x), \quad (j \geq 0),\end{aligned}$$

avec  $\Delta_0 = \Phi_0$ .

Ecrivons la relation (1, 1) au point  $2^{-k}x$ , alors

$$\psi(2^{-k}x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi(2^{-j}x) = 1.$$

En multipliant par  $\widehat{f}$  donc

$$\psi(2^{-k}x)\widehat{f} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi(2^{-j}x)\widehat{f} = \widehat{f}. \quad (1.2)$$

En appliquant l'application  $\mathcal{F}^{-1}$  sur (1, 2), on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}x)\widehat{f}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-j}x)\widehat{f}) = f,$$

$$\Phi_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} \Delta_j f = f. \quad (1.3)$$

Pour  $k = 0$

$$\Delta_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_j f = f,$$

alors

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f.$$

On remplace  $f$  dans (1, 3), on trouve

$$\Phi_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} \Delta_j f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f,$$

$$\Phi_k f = \sum_{j=0}^k \Delta_j f.$$

**Remarque 1.1.1.** *On peut construire la série de Littlewood -Paley de la manière suivante*

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , telle que

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

et

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On pose  $\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(2x)$ , nous avons alors

$$i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(2^{-k}x) = 1, \quad x \neq 0.$$

$$ii) \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(2^{-k}x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

et

$$\text{supp} \Psi \subset \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}.$$

## 1.2 Opérateur de différences finis

**Définition 1.2.1.** *Soient  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et  $x, h \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$ , l'opérateur de différences finis est noté par  $\Delta_h^m$  telle que*

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k (-1)^k f(x + (m-k)h),$$

où

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

## 1.3 Définitions des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

Nous donnons dans ce paragraphe les définitions de l'espace de Besov, l'espace de Lizorkin-Triebel et quelques propriétés sur ces espaces.

### 1.3.1 Espace de Besov

**Définition 1.3.1.** *Soit  $s \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in ]0, \infty]$ , l'espace de Besov noté  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  telle que  $\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \infty$ , où*

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} (\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \|\Delta_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} 2^{sk} \|\Delta_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.3.1.** [2]

Soient  $\ell$  un entier, et  $p, q \in ]0, \infty]$ , si  $0 < s < \ell$ , alors l'espace de Besov

$B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des distributions tempérées  $f$  vérifiant

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \left( \int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Proposition 1.3.2.** [10]

i)  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est un espace quasi-Banach (espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ ).

ii) Soient  $p_0 < p$  et  $s_0 - \frac{1}{p_0} = s - \frac{1}{p}$  alors

$$B_{p_0}^{s_0,q} \hookrightarrow B_p^{s,q}.$$

### 1.3.2 Espace de Lizorkin-Triebel

**Définition 1.3.2.** Soit  $s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$ , l'espace de Lizorkin-

Triebel, noté  $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  telle que :

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |\Delta_k f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \left\| \sup_{k \geq 0} 2^{sk} |\Delta_k f| \right\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.3.3.** [4]

Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, \infty[$ ,  $q \in ]0, \infty]$ , si  $\frac{1}{\min(p,q)} < s < m$ , l'espace

de Lizorkin-Triebel admet une quasi-norme équivalente

$$\|f\|_{F_p^{s,q}} = \begin{cases} \|f\|_p + \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^m f(\cdot)|^q \frac{dh}{|h|^{1+sq}} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \|f\|_p + \sup_{h \in \mathbb{R}} (|\Delta_h^m f| |h|^{-s}), & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

**Proposition 1.3.4.** [10]

- i)  $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est espace quasi-banach.
- ii)  $F_p^{0,2}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$  si  $1 < p < \infty$ .

## 1.4 La multiplication dans une algèbre

Dans ce paragraphe, on donne quelques propriétés sur les espace  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  et  $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , admettant une construction d'algèbre.

**Définition 1.4.1.** On dit qu'un espace vectoriel  $E$  est une algèbre si il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\|fg\|_E \leq c\|f\|_E\|g\|_E,$$

pour toutes  $f$  et  $g$  appartiennent à  $E$ .

**Proposition 1.4.1.** [4]

Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in ]0, \infty[$ , alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- i)  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est une algèbre,
- ii)  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ,
- iii)  $s > \frac{1}{p}$  où  $s = \frac{1}{p}$  et  $0 < q < 1$ .

**Proposition 1.4.2.** [4]

Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in ]0, \infty[$ , alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- i)  $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est une algèbre,
- ii)  $F_p^{s,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ,
- iii)  $s > \frac{1}{p}$  où  $s = \frac{1}{p}$  et  $0 < q < 1$ .

**Lemme 1.4.1.** Soit  $0 < p < 1$  et  $s > \frac{1}{p} - 1$ .

i) Il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}).$$

ii) Il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall f \in F_p^{s,q}(\mathbb{R}).$$

## 1.5 Espaces de Besov généralisé et Lizorkin-Triebel généralisé

Nous allons rappeler les définitions des espaces de Besov généralisé  $B_p^{v,q}(\mathbb{R})$  et de Lizorkin-Triebel généralisé  $F_p^{v,q}(\mathbb{R})$ .

### 1.5.1 Espace de Besov généralisé

**Définition 1.5.1.** Soit  $v : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive et  $0 < p, q \leq \infty$ .

L'espace de Besov généralisé noté  $B_p^{v,q}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  telle que  $\|f\|_{B_p^{v,q}(\mathbb{R})} < \infty$ , où

$$\|f\|_{B_p^{v,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} (\sum_{k=0}^{\infty} (v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

### 1.5.2 Espace de Lizorkin-Triebel généralisé

**Définition 1.5.2.** Soit  $v : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive et  $0 < p, q \leq \infty$ .

L'espace de Besov généralisé noté  $F_p^{v,q}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  telle que  $\|f\|_{F_p^{v,q}(\mathbb{R})} < \infty$ , où

$$\|f\|_{F_p^{v,q}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \|(\sum_{k=0}^{\infty} (v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|)^q)^{\frac{1}{q}}\|_p, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \|\sup_{k \geq 0} v(2^{-k}) \|\Delta_k f\|\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

## 1.6 L'interpolation

**Définition 1.6.1.** Soient  $A_0, A_1$  deux espaces de Banach,  $0 < \theta < 1$ . On dit que

$a \in A_{[\theta]} = (A_0, A_1)_\theta$  si et seulement s'il existe  $f = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  telle que

- i)  $f(x)$  est analytique sur la bonde  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$  et à valeur dans  $A_0 + A_1$ , continue et bornée sur la bonde  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ .
- ii)  $f(k+it)$  (où  $k = 0, 1$ ) continue sur  $A_k$  tel que  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(k+it) = 0$ .
- iii)  $a = f(\theta)$ .

On muni  $A_{[\theta]}$  par la norme

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf_f \max(\sup\|f(iy)\|_{A_0}, \sup\|f(1+iy)\|_{A_1}).$$

**Remarque 1.6.1.**  $A_{[\theta]}$  est un espace d'interpolation.

**Proposition 1.6.1.** [4]

$A_{[\theta]}$  est un espace de Banach.

**Proposition 1.6.2.** [4]

Soient  $A_j, B_j (j = 0, 2)$  quatre espaces de Banach et  $T$  un opérateur envoie  $A_0$  dans  $B_0$  et de  $A_1$  dans  $B_1$ . Alors  $T$  envoie  $A_{[\theta]}$  dans  $B_{[\theta]}$  et

$$\|T\|_{A_{[\theta]}, B_{[\theta]}} \leq \|T\|_{A_0, B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1, B_1}^{\theta},$$

où

$$\|T\|_{A_j, B_j} = \sup_{\|f\|_{A_j}} \|T(f)\|_{B_j}.$$

**Proposition 1.6.3.** (Riesz-Thorin)[9]

Soient  $(X, \mu), (Y, \nu)$  deux espaces mesurés et  $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$  avec  $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ . On suppose que  $T$  est un opérateur qui envoie  $L^{p_0}(X, \mu)$  dans  $L^{q_0}(Y, \nu)$  et  $L^{p_1}(X, \mu)$  dans  $L^{q_1}(Y, \nu)$  tel que, pour toute fonction simple  $f$  :

$$\|Tf\|_{q_i} \leq C_i \|f\|_{p_i}, \quad (i = 0, 1).$$

Alors  $T$  renvoie  $(L^{p_0}, L^{p_1})_{[\theta]} = L^p$  dans  $(L^{q_0}, L^{q_1}) = L^q$  tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

de plus

$$\|Tf\|_q \leq C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \|f\|_p.$$

### 1.6.1 L'interpolation dans L'espace de Besov

Soient  $1 \leq p_0, p_1, q_0 \leq \infty$  et  $1 \leq q_1 \leq \infty$  alors

$$[B_{p_0}^{s_0, q_0}, B_{p_1}^{s_1, q_1}]_\theta = B_p^{s, q},$$

avec

$$\begin{aligned} s &= (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, & (0 < \theta < 1) \\ \frac{1}{p} &= \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \end{aligned}$$

### 1.6.2 L'interpolation dans L'espace de Lizorkin-Tripel

Soient  $1 \leq p_0, q_0 \leq \infty$  et  $1 \leq p_1, q_1 \leq \infty$  alors

$$[F_{p_0}^{s_0, q_0}, F_{p_1}^{s_1, q_1}]_\theta = F_p^{s, q},$$

avec

$$\begin{aligned} s &= (1 - \theta)s_0 + \theta s_1, \\ \frac{1}{q} &= \frac{1 - \theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, & (0 < \theta < 1) \\ \frac{1}{p} &= \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \end{aligned}$$

## 1.7 Inégalités de Base

### 1.7.1 Inégalité de Hölder

Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$  avec  $1 \leq p, q \leq +\infty$ , alors :

$$f, g \in L^r,$$

et

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ .

### 1.7.2 Inégalité de Young

Soient  $1 \leq p, q, r \leq +\infty$  tel que  $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , alors pour toute fonction

$f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , On a :

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}),$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

### 1.7.3 Inégalité de Bernstein

Soient  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$  et  $\alpha \in \mathbb{N}$ , il existe  $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$  telle que pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , avec  $\text{supp} \hat{f} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq R\}$ , on a :

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha| + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

## 1.8 Exemples des fonctions dans L'espace de Besov

**Exemple 1.8.1.** la valeur principale de  $\frac{1}{x}$  :

$$f(x) = vp \frac{1}{x}$$

Soient  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , et  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  on a

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi),$$

et

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(xf), \varphi \rangle &= \langle f, x\mathcal{F}\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} e^{ix0} \mathcal{F}\varphi(x) dx \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}\varphi(0) \\ &= 2\pi \varphi(0) \\ &= 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = 2\pi \delta.$$

Ce qui donne  $\mathcal{F}f(\xi) = -2\pi i H(\xi) + a$ , ( $a$  constante), où  $H$  est fonction de

Hévisiede puisque  $\delta = H'$

$f$  est impaire donc  $\hat{f}$  est impaire

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2\pi i H(\xi) + a,$$

$$\mathcal{F}f(-\xi) = -2\pi i H(-\xi) + a,$$

$$a = i\pi(H(\xi) + H(-\xi)) = i\pi,$$

donc

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2\pi i H(\xi) + i\pi = \begin{cases} -i\pi & \xi \geq 0 \\ i\pi & \xi < 0 \end{cases} = -i\pi \operatorname{sgn}\xi$$

et

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}(\Delta_j f) \subset \{\xi \in \mathbb{R} / |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

D'après l'inégalité de Bernstein on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\Delta_j f\|_2, \quad (p \geq 2). \quad (1.4)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{F}(\Delta_j f)\|_2 \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\phi(2^{-j})\mathcal{F}f\|_2 \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\phi(2^{-j} \cdot)\|_2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{j}{2}} \|\phi\|_2 \\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}}. \end{aligned}$$

Car  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

En remplaçant dans (1,4), on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(1 - \frac{1}{p})}, \quad p \geq 2 \quad \text{et} \quad c = c_1 c_2 \quad \text{constante}$$

d'où

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(s + \frac{1}{p})}, \quad (p \geq 2)$$

la serie  $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s + \frac{1}{p})q}$ ,  $1 \leq q \leq +\infty$ , converge si  $s < \frac{-1}{p'}$ . Ce qui donne

$vp \frac{1}{x} \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans les deux cas suivants

$$i) \quad s = \frac{-1}{p'}, \quad 2 \leq p \leq +\infty, \quad q = +\infty,$$

$$ii) \quad s < \frac{-1}{p'}, \quad 2 \leq p \leq +\infty \quad \text{et} \quad 1 \leq q \leq +\infty.$$

**Exemple 1.8.2.** *mesure de Dirac :*

$$f(x) = \delta(x).$$

Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta}, \phi \rangle &= \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \\ &= \langle 1, \phi \rangle. \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{F}(\Delta_j \delta) = \phi(2^{-j}).$$

Comme dans l'exemple (1.10.1), on obtient  $2^{sj} \|\Delta_j \delta\|_p \leq c 2^{j(s+\frac{1}{p})}$ ,  $p \geq 2$ .

La série  $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s+\frac{1}{p})q}$  converge si  $s < \frac{-1}{p}$ ,  $1 \leq q \leq +\infty$ .

Ce qui donne  $\delta \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans les cas suivants

$$i) \quad s = \frac{-1}{p'}, \quad 2 \leq p \leq +\infty, \quad q = \infty,$$

$$ii) \quad s < \frac{-1}{p'}, \quad 2 \leq p \leq +\infty, \quad 1 \leq q \leq +\infty.$$

## Chapitre 2

# Le cas critique dans l'espace de Besov

### 2.1 Rappel

#### 2.1.1 Espace de Banach de distributions

**Définition 2.1.1.** Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Si  $E$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|_E$  telle que :

- i) L'injection canonique  $E \hookrightarrow \mathcal{D}'$  soit continue,
- ii)  $(E, \|\cdot\|_E)$  soit un espace de Banach.

On dit que  $(E, \|\cdot\|_E)$  est espace de Banach de distributions, (E.B.D).

#### 2.1.2 Espace de multiplicateur $M(E)$

**Définition 2.1.2.** Soit  $E$  un espace de Banach de distributions  $(E, B, D)$ , contenant  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  comme sous espace dense. On dit que  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est un multiplicateur ponctuel de  $E$  (ou multiplicateur), s'il existe une constante  $C > 0$ , telle que pour toute  $\phi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$ , on a

$$f\phi \in E \quad \text{et} \quad \|f\phi\|_E \leq C\|\phi\|_E.$$

L'espace linéaire de multiplicateurs sera noté  $M(E)$  définie par la norme

$$\|f\|_{M(E)} = \sup_{\|\phi\|_E=1} \|f\phi\|_E, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}^\infty \cap E.$$

et on a

$$M(B_p^{s,q}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), fg \in B_p^{s,q}, \forall g \in B_p^{s,q}\}.$$

**Proposition 2.1.1.** [4]

i)  $(M(E), \|\cdot\|_E)$  est un espace de Banach.

ii) Si  $\mathcal{D} \subset M(E)$  alors  $M(E)$  est une algèbre,

(au sens si  $A_1, A_2 \in M(E) \implies A_1 A_2 \in M(E)$ ).

*Démonstration.* i) Montrons que  $\|\cdot\|_{M(E)}$  définit une norme sur  $M(E)$  :

Si  $\|A\|_{M(E)} = 0$ , alors  $\|A\varphi\|_E = 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$ , ce qui donne  $A\varphi = 0$

(E est un espace normé).

soit  $\psi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$  telle que  $\varphi\psi = \varphi$  (i.e,  $\psi(x) = 1$  si  $x \in \text{supp}\varphi$ ),

alors  $\langle A, \varphi \rangle = \langle A, \psi\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$ ,

d'où  $A = 0$ .

Il est évident de montrer que  $\|\alpha A\|_{M(E)} = |\alpha| \|A\|_{M(E)} \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ ,

ainsi l'inégalité du triangle. Soit  $(A_n)$  une suite de Cauchy dans  $M(E)$ ,

i.e :

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|(A_n - A_m)\varphi\|_E = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty \cap E.$$

donc  $A_n\varphi$  est de suite de Cauchy dans l'espace complet  $E$ , elle converge

alors choisissons  $\varphi$  et  $\psi \in \mathcal{C}^\infty \cap E$  telle que  $\psi\varphi = \varphi$ , on a

$$\langle A_n, \varphi \rangle = \langle A_n\varphi, \psi \rangle \longrightarrow \langle T_\varphi, \psi \rangle$$

$(A_n)$  converge donc vers une certaine distribution  $A$  de plus

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n\varphi, \psi \rangle = \langle T_\varphi, \psi \rangle$$

d'où

$$T_\varphi = A\varphi.$$

ii) Soit  $\psi \in \mathcal{D}$  (fixé) qui vaut 1 pour  $|x| \leq 1$ , on pose  $\psi_k(x) = \psi(\frac{x}{k}), \quad k \in \mathbb{N}^*$ ,

nous avons la suite  $(B_k)$  définie par  $B_k = A_1(\psi_k A_2)$  a une limite  $B$  dans

$\mathcal{D}'$ , en effet :

Soient  $\theta, \varphi \in \mathcal{D}$  tel que  $\theta\varphi = \varphi$  alors

$$\langle B_k, \varphi \rangle = \langle A_1(\psi_k A_2), \theta\varphi \rangle = \langle A_1(\psi_k A_2\theta), \varphi \rangle$$

mais pour  $k$  assez grand

$$\psi_k\theta = \theta,$$

donc à partir d'un certain rang (i.e,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq n_0$ )  $\langle B_k, \varphi \rangle$  est constante, d'où l'existence de  $B$  tel que  $\langle B, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle B_k, \varphi \rangle$ .

Donnons  $\phi \in \mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle B\phi, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A_1(\psi_k A_2 \phi), \theta \varphi \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A_1(\psi_k A_2 \phi \theta), \varphi \rangle, \quad (\psi_k \phi \varphi = \phi \varphi \quad k \gg 1) \\ &= \langle A_1(A_2 \phi \theta), \varphi \rangle \\ &= \langle A_1(A_2 \phi), \theta \varphi \rangle \\ &= \langle A_1 A_2 \phi, \varphi \rangle \end{aligned}$$

i.e  $B = A_1 A_2$ . □

**Définition 2.1.3.** *l'espace de Sobolev  $W^m(E)$  d'ordre  $m$  de base  $E$ , où  $E$  est espace de Banach de distribution, définie par*

$$W^m(E) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f^{(\alpha)} \in E, |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(E)$  est un  $E, B, D$ , pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E.$$

**Lemme 2.1.1.** [1] *Soient  $s > 0$ ,  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , une fonction s'annulant à l'origine telle que  $T_f = (f \circ g)$  envoie  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ . Alors il existe des nombres  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que l'implication*

$$\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M,$$

soit vérifiée par toute fonction  $g$  portée par  $Q$ .

**Proposition 2.1.2.** [2] *Soient  $s > 0$ ,  $p > 0$  tel que  $s = \frac{1}{p}$ , et  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Si  $T_f$  envoie  $B_p^{s,q}$  dans  $B_p^{s,\infty}$ , alors  $f$  est lipshitzienne.*

## 2.2 Localisation d'un espace de distribution

**Définition 2.2.1.** *Soit  $E$  un espace de Banach de distribution dans  $\mathbb{R}$ . On dit que*

*l'espace  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module si  $\varphi f \in E$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et tout  $f \in E$ .*

**Définition 2.2.2.** Si  $E$  est un espace de Banach de distribution dans  $\mathbb{R}$ .

$E_{loc}$  est l'ensemble des distributions  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi f \in E$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 2.2.1.** [8] Soit  $E$  un  $E, B, D$ . Si  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module, alors l'opérateur linéaire  $f \mapsto \varphi f$  est bornné sur  $E$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

$$\begin{cases} \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty & \text{donc } \varphi \text{ est continue.} \\ f \in E \Rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) & \text{donc } f \text{ est continue.} \end{cases} \implies \varphi f \text{ est continue.}$$

On a  $\varphi f \in E$  ( $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module), donc

$$\begin{aligned} H : E &\mapsto E \\ f &\mapsto H(f) = \varphi f \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire et continue sur  $E \implies H$  bornné sur  $E$ . □

**Définition 2.2.3.**  $E$  un espace de Banach de distribution dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $E$  est isométriquement invariant par translation si  $\tau_a f \in E$  et  $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ , pour tout  $f \in E$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 2.2.2.** [7] Soit  $E$  isométriquement invariant par translation. Si  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module, alors

$$\|\tau_a \varphi\|_{M(E)} = \|\varphi\|_{M(E)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \|\tau_a \varphi\|_{M(E)} &= \sup_{\|f\|_E=1} \|\tau_a \varphi f\|_E \quad \forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R} \\ &= \sup_{\|f\|_E=1} \|\varphi \tau_{-a} f\|_E \quad \forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R} \\ &= \sup_{\|\tau_{-a} f\|_E=1} \|\varphi \tau_{-a} f\|_E, \quad \text{car } \tau_{-a} f \in E \\ &= \|\varphi\|_{M(E)}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.2.3.** [2] Soit  $E$  un  $E, B, D$ . Si  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module et si  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , alors les trois propriétés sont équivalentes

(i)  $f \in E_{loc}$ .

(ii) Il existe une fonction positive non nulle  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $(\tau_a \varphi_0)f \in E$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

(iii) pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , il existe un intervalle ouvert  $I$  dans  $\mathbb{R}$  contenant  $a$  et

$$g \in E \text{ tels que } g | I = f | I.$$

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii)

Si  $f \in E_{loc} \Rightarrow \varphi f \in E, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

On a  $\tau_a \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}$ , donc  $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  positive tel que

$$(\tau_a \varphi_0)f \in E.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 & \text{sur } \frac{1}{2}I \\ \text{supp}\varphi \subset I \end{cases}$$

(où  $I$  ouvert dans  $\mathbb{R}$  de centre 0).

On a  $\tau_a \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , par (ii)  $(\tau_a \varphi)f \in E$ . et on a  $\tau_a \varphi(x) = 1$  sur  $\frac{1}{2}I + a$ , donc

$$(\tau_a \varphi)f = f \text{ sur } \frac{1}{2}I + a.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Supposons que  $f$  a la propriété (iii), il existe les intervalles  $I_j = ]x_j, r_j[$  et distributions  $g_j \in E$ , pour  $j \in J = \{1, \dots, n\}$  telles que  $g_j | I_j = f | I_j$ .

On considérons  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp}\varphi \subset \cup_{j \in J} I_j$ .

Soit  $(\chi_j)_{j \in J}$  une partition de l'unité relative recouvrement  $(I_j)_{j \in J}$  de  $\text{supp}\varphi$ ,

i.e  $\chi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $\sum_{j \in J} \chi_j(x) = 1$  pour  $x \in \cup_{j \in J} I_j$ , donc

$$\varphi = \varphi \sum_{j \in J} \chi_j,$$

$$\begin{aligned} f\varphi &= \sum_{j \in J} \varphi \chi_j f, \\ &= \sum_{j \in J} \varphi \chi_j g_j \in E. \end{aligned}$$

Donc  $f \in E_{loc}$ . □

**Définition 2.2.4.** Soit  $E$  un  $E, B, D$ . Si  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation, on dit qu'une distribution  $f$  appartient ( $E_{lu}$ ) localement uniformément à  $E$  si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) Il existe une fonction positive non nulle  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $(\tau_a \varphi_0)f \in E$

pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et  $\|f\|_{E_{lu}} = \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0)f\|_E < +\infty$ .

(ii) pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on a  $(\tau_a \varphi)f \in E$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi)f\|_E < +\infty.$$

**Proposition 2.2.4.** [2]

$$(i) \iff (ii).$$

*Démonstration.* (i)  $\implies$  (ii)

Soient  $\varphi, \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $I$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ , tel que  $\varphi_0$  ne s'annule pas sur  $I$ .

On a  $\text{supp} \varphi$  compacte  $\implies \exists x_1, \dots, x_n$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $\text{supp} \varphi \subset \cup_{j=1}^{j=n} (I + x_j)$ .

Il existe une fonction  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{j=n} \chi(\tau_{x_j} \varphi_0).$$

Donc pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
\|(\tau_a \varphi) f\|_E &\leq \sum_{j=0}^{j=n} \|(\tau_a \chi)(\tau_{a+x_j} \varphi_0) f\|_E \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \sum_{j=1}^{j=n} \|\tau_a \chi\|_E \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \sum_{j=1}^{j=n} \sup_{\|f\|_E=1} \|(\tau_a \chi) f\|_E = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \sum_{j=1}^{j=n} \|\tau_a \chi\|_{M(E)} \\
&\leq n \|\chi\|_{M(E)} \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(\tau_x \varphi_0) f\|_E \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (i) évidente. □

**Remarque 2.2.1.**  $E_{lu}$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation pour la norme  $\| - \|_{E_{lu}}$ .

**Proposition 2.2.5.** [2] Soit  $p \in ]0, +\infty[$ . Alors une fonction mesurable  $f$  sur  $\mathbb{R}$  appartient à  $L_p(\mathbb{R})_{lu}$  si et seulement si

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

où  $I$  est une ouverte donnée dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* 1) Soit  $f$  fonction tel que  $\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ .

On considère la fonction  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que

$$\text{supp} \varphi_0 \subset I \quad \text{et} \quad (\tau_a \varphi_0) f \in L_p(\mathbb{R}).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\|(\tau_a \varphi_0) f\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}} |(\tau_a \varphi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{I+a} |(\tau_a \varphi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sup_{x \in (I+a)} |\tau_a \varphi_0(x)|) \left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sup_{x \in I} |\varphi_0(x)|) \left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\varphi_0\|_{\infty} \left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc  $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$ .

2) On suppose que  $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$  i.e pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , On a  $(\tau_a \varphi) f \in L_p(\mathbb{R})$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et  $\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi) f\|_p < \infty$ .

On considère  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  tel que  $\psi(x) = 1$  sur  $I$ , On obtient

$$\begin{aligned}
\left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{I+a} |(\tau_a \psi)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \psi)(x) f(x)\|_p \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

□

**Proposition 2.2.6.** [2] Soit  $E$  un  $E, B, D$ . Si  $E$  est un  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour  $W^m(E)$  et on a :

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}).$$

*Démonstration.* On a :

$W^m(E)$  est un  $E, B, D$ , pour la norme  $\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E$ .

$\varphi f \in W^m(E)$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  car  $\varphi f \in E$ , donc  $W^m(E)$  est un

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module.

$\tau_a f \in W^m(E)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et  $\|\tau_a f\|_{W^m(E)} = \|f\|_{W^m(E)}$  car  $\varphi f \in E$ , donc  $W^m(E)$  est un isométriquement invariant par translation.

$f \in (W^m(E))_{lu} \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), (\tau_a \varphi) f \in (W^m(E))$  pour  $a \in \mathbb{R}$ , et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi) f\|_{W^m(E)} < +\infty$$

$\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), ((\tau_a \varphi) f)^{(\alpha)} \in E$  pour  $a \in \mathbb{R}$ , et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|((\tau_a \varphi) f)^{(\alpha)}\|_E < +\infty, |\alpha| < m$$

$\Leftrightarrow f \in (W^m(E)_{lu})$ .

Donc

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E)_{lu}.$$

□

## 2.2.1 Localisation des espaces Besov

Soit  $f, g$  deux fonctions quelconques

On a :  $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ ,  $h \in \mathbb{R}$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta_h(fg)(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) \\ &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)) \\ &= (\Delta_h f(x))\tau_{-h}g(x) + f(x)(\Delta_h g(x)) \end{aligned}$$

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h}g) + f(\Delta_h g), \quad h \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

$$\Delta_h^2(fg)(x) = \Delta_h(\Delta_h(fg)(x))$$

$$= (\Delta_h^2 f(x))(\tau_{-2h}g(x)) + (\Delta_h^2 g(x))(\tau_{-h}f(x)) + (\Delta_h f(x))(\Delta_{2h}g(x))$$

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h}g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h}f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h}g), \quad h \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\Delta_h = 2^{-k} \Delta_{2^k h} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

pour tout sous ensemble borélien  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , on pose :

$$\omega_{p,I}(f, t) = \sup_{|u| \leq t} \left( \int_I |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.4)$$

$$\eta_{p,I}(f, t) = \sup_{|u| \leq t} \left( \int_I |\Delta_u^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.5)$$

Dans les cas  $I = \mathbb{R}$ , on pose

$$\omega_{p,\mathbb{R}} = \omega_p,$$

$$\eta_{p,\mathbb{R}} = \eta_p.$$

**Lemme 2.2.1.** [2] Pour tout  $p \in [1, \infty]$ , et  $0 < t < \frac{1}{2}$ , il existe  $c > 0$  tel que

$$\omega_{p,Q+a}(f, t) \leq ct \left\{ \left( \int_{3Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\log t| \sup_{0 < v < \frac{1}{2}} (v^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, v)) \right\}.$$

*Démonstration.* D'après la formule (2, 3), on déduit, pour  $|u| \leq t$

$$\begin{aligned} \Delta_u f(x) &= 2^{-k} \Delta_{2^k u} f(x) - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l u}^2 f(x), \\ \left( \int_{Q+a} |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{Q+a} |2^{-k} \Delta_{2^k u} f(x) - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l u}^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{-k} \left( \int_{Q+a} |\Delta_{2^k u} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \left( \int_{Q+a} |\Delta_{2^l u}^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{-k} \left( \int_{Q+a} |\Delta_{2^k u} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} t \cdot t^{-1} \sup_{|u| \leq t} \left( \int_{Q+a} |\Delta_{2^l u}^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{-k} \left( \int_{Q+a} |\Delta_{2^k u} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^k \right) t \cdot \sup_{0 < v < \frac{1}{2}} (v^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, v)). \end{aligned}$$

□

**Lemme 2.2.2.** [2] Soit  $0 < s \leq 1$ , si  $f' \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu}$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})_{lu}$ , alors

$$f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu}.$$

*Démonstration.* i) Le cas  $0 < s < 1$ .

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad \|(\tau_a \varphi)f\|_p &\leq \|(\tau_a \varphi)f\|_p + \left( \int_{\mathbb{R}} \|\Delta_h(\tau_a \varphi)f\|_p^q \frac{dh}{|h|^{1+sq}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|(\tau_a \varphi)f\|_{B_p^{s,q}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{(L_p(\mathbb{R}))_{lu}} \leq c \|f\|_{(B_p^{s,q}(\mathbb{R}))_{lu}}, \quad c > 0.$$

et

$$\begin{aligned} f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu} &\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), (\tau_a \varphi)f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \text{ pour } a \in \mathbb{R}, \text{ et} \\ &\quad \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi)f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), (\tau_a \varphi)f \in L_p(\mathbb{R}) \text{ pour } a \in \mathbb{R}, \text{ et} \\ &\quad \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi)f\|_{L_p(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}.$$

Donc

$$B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu} \hookrightarrow L_p(\mathbb{R})_{lu}.$$

D'après le lemme

$$\begin{cases} f' \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu} \\ f \in L_p(\mathbb{R})_{lu} \end{cases} \implies \begin{cases} f' \in L_p(\mathbb{R})_{lu} \\ f \in L_p(\mathbb{R})_{lu} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f^{(\alpha)} \in L_p(\mathbb{R})_{lu}, \quad |\alpha| \leq 1 \implies f \in W^1(L_p(\mathbb{R})_{lu}) \implies f \in (W^1(L_p(\mathbb{R})))_{lu},$$

$$\text{Puisqu'on a } W^1(L_p(\mathbb{R})) \hookrightarrow B_p^{s,q}(\mathbb{R}), \text{ On conclut que } f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu}.$$

ii) Le cas  $s = 1$ .

On a

$$B_p^{1,q}(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_p^{\frac{1}{2},q}(\mathbb{R}).$$

Donc par hypothèse sur  $f$ , on a

$$\begin{cases} f' \in B_p^{\frac{1}{2},q}(\mathbb{R})_{lu} \\ f \in L_p(\mathbb{R})_{lu} \end{cases}$$

$$\text{Impliqué par (i)} \quad f \in B_p^{\frac{1}{2},q}(\mathbb{R})_{lu}, \text{ et on conclut que } f \in B_p^{\frac{3}{2},q}(\mathbb{R})_{lu}. \text{ Donc}$$

$$f \in B_p^{1,q}(\mathbb{R})_{lu}.$$

□

**Proposition 2.2.7.** [2]

Si  $s > 0$  et  $p, q \in [1, \infty]$ , alors  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})_{lu}$  est l'ensemble des fonctions  $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$  vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement :

(i) Dans le cas  $0 < s < 1$ .

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty;$$

(ii) dans le cas  $s = 1$ .

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty;$$

(iii) dans le cas  $m < s < m + 1$  avec  $m = 1, 2, \dots$ ,

$$f^{(\alpha)} \in B_p^{s-m,q}(\mathbb{R})_{lu}, \quad \text{pour } |\alpha| = m.$$

*Démonstration.* On fixe les fonctions  $\varphi_0, \varphi_1$  dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , telles que

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 0 \text{ hors de } \frac{1}{4}Q \\ \varphi_1(x) = 1 \text{ sur } Q \end{cases}$$

Le cas  $0 < s < 1$ .

On suppose que  $f \in L^p(\mathbb{R})_{lu}$  et  $\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$ .

par la formule (2,1) et pour  $|h| \leq t \leq \frac{1}{2}$  nous avons

$$\Delta_h(\tau_a \varphi_0 f)(x) = (\Delta_h f(x))(\tau_{-h+a} \varphi_0)(x) + f(x)(\Delta_h \tau_a \varphi_0)(x), \quad h \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0 f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |(\Delta_h f(x))(\tau_{-h+a} \varphi_0)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)(\Delta_h \tau_a \varphi_0)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M \left( \int_{Q+a} |(\Delta_h f(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + M' |h| \left( \int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left( \left( \int_{Q+a} |(\Delta_h f(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + t \left( \int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right), \\ &\quad c = \sup(M, M') \\ &\leq c(\omega_{p,Q+a}(f,t) + \|f\|_{(L^p(\mathbb{R}))_{lu}}). \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{|h| \leq t} \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0 f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c(\omega_{p, Q+a}(f, t) + \|f\|_{(L^p(\mathbb{R}))_{lu}}),$$

$$\omega_p((\tau_a \varphi_0) f, t) \leq c(\omega_{p, Q+a}(f, t) + \|f\|_{(L^p(\mathbb{R}))_{lu}}).$$

Par la condition  $0 < s < 1$ , on voit que

$$\left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_0) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left( \left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, Q+a}(f, t))^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_0^1 (t^{-s} \|f\|_{(L^p(\mathbb{R}))_{lu}})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

$$\|(\tau_a \varphi_0) f\|_p + \left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_0) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, Q+a}(f, t))^q \right)^{\frac{1}{q}} + c \|f\|_{(L^p(\mathbb{R}))_{lu}} + \|(\tau_a \varphi_0) f\|_p$$

$$\|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_p^{s, q}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Donc  $f \in (B_p^{s, q}(\mathbb{R}))_{lu}$ .

Dans l'autre sens, on suppose que  $f \in (B_p^{s, q}(\mathbb{R}))_{lu}$ . Donc on obtient  $f \in$

$(L^p(\mathbb{R}))_{lu}$ . Pour tout  $x \in Q + a$

$$\Delta_h(\tau_a \varphi_1 f)(x) = \Delta_h f(x),$$

et pour  $|h| \leq 1$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h(\tau_a \varphi_1 f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \int_{Q+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_{p, Q+a}(f, t) \leq \omega_p((\tau_a \varphi_1) f, t),$$

$$\left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_0^1 (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_1) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_1) f\|_{B_p^{s, q}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Le cas  $s = 1$ .

On suppose que  $f \in (L^p(\mathbb{R}))_{lu}$  et  $\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^1 (t^{-1} \eta_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$ . Par

la formule (2, 2) et pour  $|h| \leq t \leq \frac{1}{4}$  nous avons

$$\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x) = (\Delta_h^2 f(x))(\tau_{-2h}(\tau_a \varphi_0)(x)) + (\Delta_h^2(\tau_a \varphi_0)(x))(\tau_{-h} f(x)) +$$

$$\begin{aligned}
& (\Delta_h f(x))(\Delta_{2h}(\tau_a \varphi_0)(x)), \quad h \in \mathbb{R}. \\
& \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0)f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |(\Delta_h^2 f(x))(\tau_{-2h}(\tau_a \varphi_0)(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\
& \left( \int_{\mathbb{R}} |(\Delta_h^2(\tau_a \varphi_0)(x))(\tau_h f(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\mathbb{R}} |(\Delta_h f(x))(\Delta_{2h}(\tau_a \varphi_0)(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq & M \left( \int_{Q+a} |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + M' t^2 \left( \int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + t M'' \left( \int_{Q+a} |(\Delta_h f(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq c(\eta_{p,Q+a}(f,t) + t^2 \|f\|_{(L_p(\mathbb{R}))_{lu}} + t \omega_{p,Q+a}(f,t)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\eta_p(f,t) \leq c(\eta_{p,Q+a}(f,t) + t^2 \|f\|_{(L_p(\mathbb{R}))_{lu}} + t \omega_{p,Q+a}(f,t)),$$

et par lemme (2.2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_p((\tau_a \varphi_0)f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left( \left( \int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{(L_p(\mathbb{R}))_{lu}} + \right. \\
& \left. \left( \int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0)f\|_{B_p^{1,q}(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc  $f \in (B_p^{1,q}(\mathbb{R}))_{lu}$ .

Dans l'autre sens, on suppose que  $f \in (B_p^{1,q}(\mathbb{R}))_{lu}$ . Donc on obtient  $f \in$

$(L_p(\mathbb{R}))_{lu}$ . Pour tout  $x \in Q+a$

$$\Delta_h^2(\tau_a \varphi_1 f)(x) = \Delta_h^2 f(x),$$

et pour  $|h| \leq 1$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^2(\tau_a \varphi_1 f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \int_{Q+a} |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\eta_{p,Q+a}(f,t) \leq \eta_p((\tau_a \varphi_1)f, t),$$

$$\left( \int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \int_0^1 (t^{-1} \eta_p((\tau_a \varphi_1)f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_1)f\|_{B_p^{1,q}(\mathbb{R})} < \infty.$$

Le cas  $m < s < m+1$ .

On a

$$B_p^{s,q}(\mathbb{R}) = W^m(B_p^{s-m,q}(\mathbb{R})). \quad (2.6)$$

par la proposition (2.2.6), et le lemme (2.2.2), on voit que  $f \in (B_p^{s,q}(\mathbb{R}))_{lu}$  si

seulement si  $f^{(\alpha)} \in (B_p^{s,q}(\mathbb{R}))_{lu}$  pour  $|\alpha| = m$  et  $f \in (L_p(\mathbb{R}))_{lu}$ .  $\square$

**Lemme 2.2.3.** [2] Soient  $p, q \in [1, +\infty]$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , il existe  $c > 0$  tel que

$$\begin{aligned} \left\| \left( \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |f(\cdot+h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} &\leq \left\| \left( \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} + \\ &c \|f\|_{L_p(Q+a)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On a

$$|\Delta_h f(\cdot)| = |f(\cdot+h) - f(\cdot)| \geq |f(\cdot+h)| - |f(\cdot)|,$$

$$\int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \geq \int_{|h| \leq t} |f(\cdot+h)| dh - \int_{|h| \leq t} |f(\cdot)| dh,$$

$$\int_{|h| \leq t} |f(\cdot+h)| dh \leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh + 2t|f(\cdot)|,$$

$$\int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |f(\cdot+h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \leq \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh + 2t|f(\cdot)| \right)^q \frac{dt}{t},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |f(\cdot+h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} &\leq \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} + \\ &\int_0^{\frac{1}{16}} (2t|f(\cdot)|)^q \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |f(\cdot+h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right\|_{L_p(Q+a)}^{\frac{1}{q}} &\leq \left\| \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right\|_{L_p(Q+a)}^{\frac{1}{q}} + \\ &c \|f(\cdot)\|_{L_p(Q+a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \int_0^{\frac{1}{16}} \left( \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right\|_{L_p(Q+a)}^{\frac{1}{q}} + \\ &c \|f(\cdot)\|_{L_p(Q+a)}. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 2.2.4.** [1] Soient  $s = \frac{1}{p}$  et  $q > 1$ , alors il existe une suite  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  des fonctions de classe  $C^\infty$ , portées par  $4Q$ , telles que  $\theta_n(x) = 1$  sur le cube  $2^{2-n}Q$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\theta_n\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = 0$ .

**Théorème 2.2.1.** [2] Soient  $s = \frac{1}{p} > 1$  et  $p > 1$ ,  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , Si  $T_f$  envoie  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , alors  $f' \in B_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$  localement uniformément.

*Démonstration.* On suppose que  $T_f$  envoie  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , tels que

$$s = \frac{1}{p}, \quad m < s < m + 1 \text{ avec } m \in \mathbb{N}, \quad q > 1.$$

Donc il existe une suite  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  des fonctions de classe  $C^\infty$ , portées par  $4Q$

telles que  $\theta_v(x) = 1$  sur le cube  $2^{2-v}Q$  et  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \|\theta_v\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = 0$ .

par le lemme (2.1.1), il existe des nombres  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour

toute fonction  $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dont le support est inclus dans  $4Q$ ,

$$\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M. \quad (2.7)$$

-Soit  $\varphi$  une fonction dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  à support dans  $4Q$ , tel que  $\varphi(x) = x$  sur  $2Q$ .

-pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  et  $n \geq 1$ , nous définissons la fonction  $g$  par

$$g(x) = a\theta_v(x) + b\varphi(2^v x). \quad (2.8)$$

-On choisit  $v = v(a) \geq 1$  tel que  $\|\theta_v\|_{B_p^{s,q}} \leq \frac{\delta}{2a}$ . et on a

$$\|\varphi(\lambda(\cdot))\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c\lambda^{s-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \quad \forall \lambda \geq 1. \quad (2.9)$$

On défini  $b$  par l'égalité

$$b = \frac{\delta}{2\|\varphi\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}}.$$

Donc

$$\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq |a|\|\theta_v\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} + b\|\varphi(2^v(\cdot))\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

Par la construction de  $g$ , on voit que

$$\Delta_h(f \circ g)'(x) = c\Delta_h f'(2^v bx + a). \quad (2.10)$$

Par proposition(2.1.2),  $f$  est lipshitzienne, donc on obtient

$$f' \in L_p(\mathbb{R})_{lu}. \quad (2.11)$$

Étape1. Le cas  $m < s < m + 1$ .

Par l'implication (2.7) et la propriété (2.6), On obtient

$$\|(f \circ g)'\|_{B_p^{s-m,q}(\mathbb{R})} \leq M. \quad (2.12)$$

En appliquant (2.12) et (2.10), on voit aussitôt que

$$\left( \int_0^1 (t^{m-s} \left( \int_{2^{-v}Q_n} |\Delta_{2^{-v}t}(f')(2^vbx+a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_1,$$

et donc

$$\left( \int_0^b (t^{m-s} \left( \int_{bQ_k+a} |\Delta_t(f')(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2, \quad (2.13)$$

pour  $a \in \mathbb{R}$ , On obtient :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^b (t^{m-s} \omega_{p,bQ_k+a}(f',t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2.$$

Par la propriété (2.11), et la proposition (2.2.7), on conclut que

$$f' \in (B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}))_{lu}.$$

Étape2. Le cas  $s = m + 1$ .

En utilisant l'implication (2.7) et la propriété (2.6), on obtient

$$\|(f \circ g)'\|_{B_p^{s-m,q}(\mathbb{R})} \leq M. \quad (2.14)$$

Par l'estimation (2.14) et l'égalité (2.10), nous obtenons :

pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on obtient :

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \int_0^b (t^{-1} \eta_{p,bQ_k+a}(f',t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2$$

compte tenu la propriété (2.11), et la proposition(2.2.7), on conclut que

$$f' \in (B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}))_{lu}.$$

□

## Chapitre 3

# La composition dans certains espaces de Besov

### 3.1 Définitions

**Définition 3.1.1.** Pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in [1, +\infty]$ . On définit l'espace  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $f$  telles que

$$\|f\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \infty.$$

**Définition 3.1.2.** Soit  $0 < s < \ell$  avec  $\ell$  entier. une distribution  $f$  appartient à  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $f \in L_p(\mathbb{R})$  et

$$N_{p,\ell}(f) = \sup_{0 < h < 1} t^{-1} w_{p,\ell}(f, t) < \infty,$$

où

$$w_{p,\ell}(f, t) = \sup_{|h| < t} \left( \int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus  $\|f\|_p + N_{p,\ell}(f)$  est une norme équivalente dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 3.1.1.** [2] Soit  $s > 0$ . Pour toute  $f$  appartenant à  $C^\infty(\mathbb{R})$  et s'annulant en 0, l'opérateur  $T_f$  est bornné sur  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ .

**Lemme 3.1.1.** [1] Soient  $s > 0$ ,  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , une fonction s'annulant à l'origine telle que  $T_f = (f \circ g)$  envoie  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ . Alors il existe des nombres  $M > 0$  et  $\delta > 0$  tels que l'implication

$$\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M,$$

soit vérifiée par toute fonction  $g$  portée par  $Q$ .

*Démonstration.* Supposons, au contraire, que , pour tout intervalle  $I$  et tous nombres  $M, \delta > 0$ , on puisse trouver une fonction  $g$ , portée par  $I$ , telle que

$$\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta \implies \|f \circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} > M.$$

Donnons-nous une suite  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$  des intervalles disjoints et des fonctions

$\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ( $j \geq 0$ ) telles que

$$\begin{cases} \varphi_j(x) = 1 & \text{sur } \frac{1}{2}I_j, \\ \varphi_j(x) = 0 & \text{hors } I_j. \end{cases}$$

On note  $M_j$  la norme de l'opérateur  $g \mapsto \varphi_j g$ , agissant sur  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ , et on choisit

des fonctions  $g_j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , telles que

$$\text{supp} g_j \subset \frac{1}{2}I_j, \quad \|g_j\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq 2^{-j}, \quad \|f \circ g_j\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} > jM_j.$$

Alors la fonction  $g = \sum_{j \geq 0} g_j$  appartient à  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  et on a  $\varphi_j(f \circ g) = f \circ g_j$ .

Donc

$$jM_j \leq \|\varphi_j(f \circ g)\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M_j \|(f \circ g)\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})}$$

pour tout  $j$ , ce qui est absurde.  $\square$

## 3.2 Conditions nécessaires pour le calcul symbolique

### 3.2.1 Quelques résultats préliminaires

**Lemme 3.2.1.** [1] Soit  $s > 0$ . Si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , il existe une constante

$c = c(\varphi, s, p, q) > 0$  telle que

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{jk} 2^{j(\frac{1}{p}-s)} \varphi(2^j(\cdot) - k) \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{jk}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Lemme 3.2.2.** Pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , il existe une constante

$c = c(\varphi, s, p, q) > 0$  telle que

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \tau_k \varphi \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Démonstration.* d'après le lemme (3.1.2), il existe une constante

$c = c(\varphi, s, p, q) > 0$  telle que

$$\left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{jk} 2^{j(\frac{1}{p}-s)} \varphi(2^j(\cdot) - k) \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \left( \sum_{j \geq 0} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{jk}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On pose  $\alpha_{0k} = \alpha_k$ , pour  $j = 0$ , on obtient

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \tau_k \varphi \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

**Lemme 3.2.3.** [1] *On suppose que  $B_p^{s,q}(\mathbb{R}) \not\subseteq L_\infty(\mathbb{R})$ , alors il existe une suite  $(\phi_v)_{v \geq 1}$  de fonctions de classe  $C^\infty$ , portées par  $Q$ , telles que  $\phi_v(x) = 1$  sur l'intervalle  $2^{-v}Q$  et  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \|\phi_v\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = 0$ .*

*Démonstration.* Dans le cas  $s < \frac{1}{p}$ , on pose  $\phi_v(x) = \varphi(2^v x)$ , l'estimation

$$\begin{aligned} \|\phi_v\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \|\Delta_k \varphi(2^v x)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2^{-v(\frac{1}{q}-s)} \|\varphi\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

permet de conclure.

Supposons maintenant  $s = \frac{1}{p}$  et posons

$$\phi_v(x) = v^{-1} \sum_{1 \leq j \leq v} \varphi(2^j x).$$

On a donc  $\phi_v(x) = 1$  sur  $2^{-v}Q$  et  $\phi_v(x) = 0$  hors de  $Q$ . Le lemme (3.1.2) donne les inégalités

$$\|\phi_v\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq cv^{\frac{1}{q}-1}.$$

□

**Lemme 3.2.4.** [1] *Soient  $s > 0$ ,  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Supposons que  $T_f$  envoie  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ , alors quel que soit  $a \in \mathbb{R}$ , il existe un opérateur non linéaire*

$$U_a : \mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R}) \mapsto B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}),$$

*et des nombres,  $\delta, M > 0$  tels que*

$$U_a g(x) = f(a + g(x)) - f(a), \quad \forall x \in Q,$$

*et*

$$\|U_a g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M.$$

*Pour toute fonction  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , à support dans  $Q$  satisfaisant*

$$\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

*Démonstration.* Considérons l'opérateur non linéaire

$$V_a g(x) = \varphi(x)(f(a + g(x)) - f(a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$V_a g(x) = \varphi(x)(f(\varphi(\frac{x}{2})(a + g(x)) - f(\varphi(\frac{x}{2})a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$V_a$  envoie donc  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$  et, en raisonnant comme dans la preuve

du lemme (3.1.1), on voit qu'il existe un intervalle  $Q' \subset Q$  et des nombres

$M, \delta > 0$  tels que

$$\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta \implies \|V_a g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M,$$

pour toute fonction  $g \in D(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp} g \subset Q'$ .

Posons  $Q' = rQ + b$ , avec  $r > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ , et

$$U_a g(x) = V_a(g(r^{-1}(\cdot - b)))(rx + b), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$V_a g(x) = \varphi(rx + b)(f(a + g(x)) - f(a)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par l'inclusion  $Q' \subset Q$ , nous avons  $\varphi(rx + b) = 1$  sur  $Q$ , ce qui termine la

preuve. □

### 3.2.2 Énoncés des théorèmes

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $A_\alpha = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |k| \leq \alpha\}$ .

Soient  $b, b'$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $r, v$  qui seront choisis en fonction de  $b$  et  $b'$ .

Pour un entier fixé  $\ell$  tel que  $\ell > s$ , on définit

$$\varkappa = \frac{1}{2\ell + 1}.$$

$$g(x) = \sum_{k \in A_\alpha} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right)(b' - b) + \phi_v(x)b. \quad (3.1)$$

le lemme (3.1.3) donne l'inégalité

$$\left\| \sum_{k \in A_\alpha} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{B_p^{s,1}(\mathbb{R})} \leq cr^{\frac{1}{p}-s} \alpha^{\frac{1}{p}}. \quad (3.2)$$

#### Théorème 3.2.1. [1]

Soit  $s > 0$  et  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Si  $T_f$  envoie  $\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  est

localement lipschitzienne.

*Démonstration.* Soit un nombre réel  $a$  qui reste fixé dans la suite de la preuve.

Alors nous obtenons un opérateur  $U_a$  et des constantes  $\delta, M$  selon le lemme

(3.2.1). On prend  $v = 1$  et  $r = \frac{1}{6\alpha}$ .

Puisque  $\varkappa < \frac{1}{2}$ , les intervalles  $r(2\varkappa Q + k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sont deux à deux disjoints.

Par définition de  $r$ , nous avons  $r(Q + k) \subset \frac{1}{2}Q$ , pour tout  $k \in A_\alpha$ . Alors

$$U_a g(x) = f(a + b') - f(a), \text{ si } x \in r(\varkappa Q + k) \text{ pour } k \in A_\alpha, \quad (3.3)$$

$$U_a g(x) = f(a + b) - f(a) \text{ si } x \in \left(\frac{1}{2}Q\right) \setminus \bigcup_{k \in A_\alpha} r(2\varkappa Q + k). \quad (3.4)$$

Grâce au choix de  $r$ , on a

$$c^{-1} r^{s-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{k \in A_\alpha} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa} \left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_\infty = c^{-1} 6^{\frac{1}{p}-s} \alpha^{-s} \|\varphi\|_\infty \leq c'.$$

On obtient

$$\left\| \sum_{k \in A_\alpha} \varphi\left(\frac{1}{\varkappa} \left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \right\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c_1 r^{\frac{1}{p}-s} \alpha^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant la relation entre  $r$  et  $\alpha$ , nous obtenons

$$\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c_2 (\alpha^s |b - b'| + |b|). \quad (3.5)$$

Maintenant, on suppose

$$\max(|b|, |b - b'|) \leq \frac{\delta}{2c_2}. \quad (3.6)$$

et on définit  $\alpha$  par la propriété :

$$\alpha^s \leq \frac{\delta}{2c_2 |b - b'|} < (\alpha + 1)^s.$$

Remarquons que la définition de  $\alpha$  implique

$$\alpha^s \geq \frac{\delta}{2^{s+1} c_2 |b - b'|}. \quad (3.7)$$

Par la condition (3.6) et par définition de  $\alpha$ , nous avons  $\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta$ . Puisque

le support de  $g$  est inclus dans  $Q$ , on en déduit

$$\|U_a g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M. \quad (3.8)$$

pour tout  $x \in r(\varkappa Q^+ + k)$ , nous avons

$$x + jr\varkappa \in r(Q + k), \quad \forall j = 0, 1, \dots, \ell,$$

$$x + jr\varkappa \notin r(2\varkappa Q + k), \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

(3.3) et (3.4) donne aussitôt

$$|(\Delta_{r\mathcal{X}}^\ell(U_a g)x)| = |f(a+b') - f(a+b)|$$

Par la définition (3.2.1) , nous obtenons

$$\begin{aligned} \|U_a g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} &\geq (r\mathcal{X})^{-s} \left( \sum_{k \in A_\alpha} \int_{r(\mathcal{X}Q^+ + k)} |(\Delta_{r\mathcal{X}}^\ell(U_a g)x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\geq c_3 |f(a+b') - f(a+b)| r^{-s} r^{\frac{1}{p}} \alpha^{\frac{1}{p}}, \\ &= c_4 \alpha^s |f(a+b') - f(a+b)|. \end{aligned}$$

En prenant en compte les inégalités (3.8) et (3.7), nous voyons que la condition

(3.6) implique

$$|f(a+b') - f(a+b)| \leq \frac{2^{s+1} M c_2}{c_4 \delta} |b' - b|,$$

qui signifie que  $f$  est lipschitzienne dans un voisinage de  $a$ .

□

**Théorème 3.2.2.** [2]

Soit  $s > 0$ , on suppose que  $s < \frac{1}{p}$  ou  $s = \frac{1}{p}$  et  $q > 1$ . Si  $T_f$  envoie  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})$ , alors  $f$  est globalement lipschitzienne.

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction satisfaisant l'hypothèse du théorème (3.2.2),

on se propose de mettre en évidence des constantes  $\sigma > 0$  et  $K > 0$

telles que  $|b' - b| \leq \sigma$  entraîne

$$|f(b') - f(b)| \leq K |b' - b|,$$

quels que soient  $b$  et  $b'$  dans  $\mathbb{R}$ .

Nous définissons la fonction  $g$  suivante (3.1). Les entiers positifs  $v$  et  $\alpha$ , ainsi

que le nombre  $r \in ]0, 1]$ , seront précisés dans un instant. Le lemme (3.1.4) nous

autorisons à choisir  $v$  tel que

$$|b| \| \phi_v \|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \frac{\delta}{2},$$

de sorte que  $\alpha$  et  $r$  devront satisfaire les relations :

$$\delta(3|b' - b|)^{-1} < c_1 r^{\frac{1}{p}-s} \alpha^{\frac{1}{p}} \leq \delta(2|b' - b|)^{-1}, \quad (3.9)$$

$$r\alpha < 2^{-v-2}. \quad (3.10)$$

L'estimation (3.2) et la relation (3.9) entraîneront  $\|g\|_{\mathcal{E}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \delta$ .

L'inégalité (3.10) nous garantissons l'inclusion

$$r(Q+k) \subset 2^{-v}Q \text{ pour } k \in A_\alpha, \quad (3.11)$$

et par conséquent

$$g(x) = b', \text{ si } x \in r(\varkappa Q + k), \quad (3.12)$$

$$g(x) = b, \text{ si } x \in 2^{-v}Q \setminus \bigcup_{k \in A_\alpha} r(2\varkappa Q + k). \quad (3.13)$$

Pour  $s < \frac{1}{p}$ , il suffit de poser

$$r = (\delta(2c_1|b' - b|)^{-1} \alpha^{\frac{-1}{p}})^{\frac{1}{\frac{1}{p}-s}},$$

alors  $r\alpha = c|b' - b|^{\frac{1}{s-\frac{1}{p}}} \alpha^{\frac{s}{s-\frac{1}{p}}}$  est de l'ordre de grandeur de  $\alpha^{\frac{s}{s-\frac{1}{p}}}$ ; l'hypothèse

$0 < s < \frac{1}{p}$ , un choix convenable  $\alpha = \alpha(\delta, |b' - b|)$  permet d'avoir (3.10).

Supposons maintenant  $s = \frac{1}{p}$ .

si  $|b' - b| \leq \frac{\delta}{3}$ , il est possible de trouver un entier  $\alpha \geq 1$  tel qu'on ait (3.9),

on choisit alors  $r$  assez petit pour avoir (3.6). Il vient alors

$$\|f \circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} \leq M.$$

Pour tout  $x \in r(\varkappa Q^+ + k)$ , nous avons

$$x + jr\varkappa \in r(Q+k) \setminus \bigcup_{k' \in A_\alpha} r(2\varkappa Q + k'), \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Alors (3.11), (3.12) et (3.13) nous donnent

$$|\Delta_{r\varkappa}^\ell(f \circ g)(x)| = |f(b') - f(b)|$$

Par la définition (3.1.2) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{B_p^{s,\infty}(\mathbb{R})} &\geq (r\varkappa)^{-s} \left( \sum_{k \in A_\alpha} \int_{r(\varkappa Q^+ + k)} |\Delta_{r\varkappa}^\ell(f \circ g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= |f(a+b') - f(a+b)| (2\alpha+1)^{\frac{1}{p}} (r\varkappa)^{-s} |r\varkappa Q^+|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

L'encadrement (3.9) implique

$$\begin{aligned} |f(a+b') - f(a+b)| &\leq c_1 M r^{s-\frac{1}{p}} \alpha^{\frac{-1}{p}}, \\ &\leq c_2 M \delta^{-1} |b' - b|. \end{aligned}$$

qui signifie que  $f$  est globalement lipschitzienne.  $\square$

## Chapitre 4

# La composition dans certains espaces de Besov homogènes

### 4.1 Rappel et définitions

Soit  $\psi$  une fonction indéfiniment différentiable, paire et positive, dont le support soit un compact de  $\mathbb{R} - \{0\}$ , et telle que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi(2^j x) = 1, \text{ pour } x \neq 0.$$

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , l'opérateur  $\Phi_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  est défini par l'identité

$$\widehat{\Phi_j f}(x) = \psi(2^{-j} x) \widehat{f}(x).$$

**Définition 4.1.1.** Pour  $p \in ]1, \infty[$ . On désigne par  $U_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions boréliennes  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  telles que

$$\|f\|_{U_p} = (\sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \sup_{|h| \leq t} |f(x+h) - f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

On dit qu'une fonction continue  $f$  appartient à  $U_p^1(\mathbb{R})$  s'il existe une fonction borélienne bornée  $h \in U_p(\mathbb{R})$  telle que

$$f(x) = \int_0^x h(t) dt + f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On munit  $U_p^1(\mathbb{R})$  de la semi-norme

$$\|f\|_{U_p^1(\mathbb{R})} = \inf \{ \sup_{\mathbb{R}} |h| + \|h\|_{U_p(\mathbb{R})} \}.$$

**Définition 4.1.2.** On appelle  $BH(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues sur la droite réelle dont la dérivée seconde, au sens des distributions, est une mesure bornée.

### 4.1.1 Espace de Besov Homogène

On note que :

i)  $P_\infty(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ telle que } P \text{ polynôme}\}$ .

ii) Pour tout  $m \geq -1$

$P_m(\mathbb{R}) = \{P \in P_\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } P \text{ polynôme de degré au plus } m\}$ ,

$P_{-1}(\mathbb{R}) = \{0\}$ .

iii)  $[f] = \{f + P \mid P \in P_\infty(\mathbb{R}), f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}$ .

iv)  $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{S}'(\mathbb{R})/P_\infty(\mathbb{R}) = \{[f], \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\}$ .

**Définition 4.1.3.** Soient  $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty]$ , L'espace de Besov homogène

$\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des  $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{sk} \|\Phi_k f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

**Proposition 4.1.1.** [7] ou [6]

1.  $\Phi_k f = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow f \in P_\infty \quad \text{et} \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_k f$ .

2.  $\dot{B}_p^{s,q}$  est espace de Banach .

3.  $\|\tau_a f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ .

4.  $c_1 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq \lambda^{(\frac{1}{p})-s} \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c_2 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

5. soient  $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty]$ . Si  $(f_k)_k$  est une suite bornée dans  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$

et si  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$  au sens des distributions tempérées, alors

$$f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}),$$

et

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq C \sup_{k \geq 0} \|f_k\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}.$$

*Démonstration.* 1.

$$\begin{aligned}
\Phi_j(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x) &= \psi(2^{-j} x)(a_n \widehat{x^n} + a_{n-1} \widehat{x^{n-1}} + \dots + \widehat{a_1 x}) \\
&= \psi(2^{-j} x)(a_n D^n \widehat{1} + a_{n-1} D^{n-1} \widehat{1} + \dots + a_1 D \widehat{1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\Phi_k f}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(2^{-k} x) \widehat{f}(x) \\
\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\Phi_k f}(x) &= \widehat{f}(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_k f = f.$$

2. On a  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est un espace norme, et on va monter que  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  complet.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , implique  $(f_n)_n \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$ ,

et  $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$  complet, donc  $(f_n)_n$  converge.

3.

$$\begin{aligned}
\|\tau_a f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} &= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{sk} \|\Phi_k \tau_a f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{sk} \|\psi(2^{-j} x) \widehat{\tau_a f}\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{sk} \|\psi(2^{-j} x) e^{-ia\rho} \widehat{f}\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{sk} \|\psi(2^{-j} x) \widehat{f}\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 4.1.2.** [7] Soient  $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty]$ . L'espace de Besov homogène est l'ensemble de  $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$  telle que  $f' \in \dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R})$ .

De plus l'expression suivante est un norme équivalente sur  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  :

$$\|f'\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R})}.$$

*Démonstration.* On a  $\widehat{f}' = i\rho\widehat{f}$ , donc

$$\begin{aligned}
\|f'\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R})} &= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{(s-1)k} \|\Phi_k f'\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \\
&= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{(s-1)k} \|\psi(2^{-k}x) i\rho\widehat{f}\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \\
&= \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{-k}\rho)^q (2^{sk} \|\Phi_k f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty \\
&= c \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} < +\infty.
\end{aligned}$$

□

### 4.1.2 Espace de Besov non Homogène

**Définition 4.1.4.** Pour  $s > 0$ , l'espace de Besov non homogène  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions  $f \in L^p(\mathbb{R})$  telle que  $[f] \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.1.3.** soient  $s > 0$ ,  $p, q \in [1, +\infty]$ .  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est espace de Banach de distribution tempérées pour la norme

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} + \|f\|_p.$$

*Démonstration.*  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est un espace norme. Soit  $(f_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \varepsilon,$$

implique

$$\|f_n - f_m\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \varepsilon, \quad \|f_n - f_m\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Donc  $(f_n)_n$  suite de Cauchy dans  $L^p(\mathbb{R})$  et dans  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ .

finalemt  $(f_n)_n$  converge dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ . □

### 4.1.3 Réalisations des espaces de Besov

**Définition 4.1.5.** une réalisation modulo  $P_m(\mathbb{R})$  de  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est une application linéaire continue

$$\sigma : \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R})/P_m(\mathbb{R})$$

telle que

$$[\sigma(f)] = f, \text{ pour tout } f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}).$$

Si  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})/P_\infty(\mathbb{R})$  et si la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_k f$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})/P_m(\mathbb{R})$ ,

on pose

$$\sigma_m(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi_k f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})/P_m(\mathbb{R}).$$

**Proposition 4.1.4.** i)  $\sigma$  est un isomorphisme linéaire de  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  sur son image.

ii)  $\sigma(\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}))$  est un espace de Banach si on le munit de la norme

$$\|\sigma(f)\| = \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}.$$

*Démonstration.* i)

$$\forall f, g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}) : \sigma(f.g) = f.g = \sigma(f).\sigma(g),$$

$$\forall f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}^* : \sigma(\lambda f) = \lambda f = \lambda \sigma(f),$$

$$\forall f, g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}) : \sigma(f + g) = f + g = \sigma(f) + \sigma(g).$$

ii) Soit  $(f_n)_n$  suite de Cauchy dans  $\sigma(\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}))$ , et l'application

$$\sigma : \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}) \mapsto \sigma(\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}))$$

bijective, donc il existe une suite  $(g_n)_n$  de  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  tel que  $\sigma(g_n) = f_n$ .

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\sigma(\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}))} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|\sigma(g_n) - \sigma(g_m)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|g_n - g_m\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Donc  $(g_n)_n$  suite de Cauchy dans  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , implique  $(g_n)_n$  converge dans

$\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , donc  $(f_n)_n$  converge dans  $\sigma(\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}))$ . □

**Définition 4.1.6.** On dit qu'une distribution tempérée  $f$  tend vers 0 à l'infini

si on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

L'ensemble des telles distributions est noté  $\tilde{C}_0(\mathbb{R})$ .

On définit  $\mathbb{E}(\mathbb{R})$  comme l'ensemble des fonctions continues  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\frac{f(x)}{|x|} = 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty.$$

**Lemme 4.1.1.** *Pour toute fonction  $f \in \mathbb{E}(\mathbb{R})$ ,  $f'$  appartient à  $\tilde{C}_0(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , on a

$$|\langle f'(\frac{\cdot}{\lambda}), \varphi \rangle| \leq |\lambda| \int_{\mathbb{R}} |f(\frac{x}{\lambda})| |\varphi'(x)| dx.$$

et

$\forall \varepsilon > 0, \exists R \gg 0$  tel que

$$\sup_{|x| > R} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \varepsilon.$$

On pose  $M(R) = \max_{|x| \leq R} |f(x)|$ . On obtient

$$|\langle f'(\frac{\cdot}{\lambda}), \varphi \rangle| \leq |\lambda| M(R) \int_{|x| \leq R} |\varphi'(x)| dx + \varepsilon \int_{|x| > R} |x| |\varphi'(x)| dx.$$

Donc

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |\langle f'(\frac{\cdot}{\lambda}), \varphi \rangle| = 0.$$

□

**Proposition 4.1.5.** [6] *Si  $s < \frac{1}{p}$ , ou si  $s = \frac{1}{p}$  et  $q = 1$ , alors, pour tout élément  $f$  de  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , la distribution tempérée  $\sigma_{-1}$  est l'unique représentant de  $f$  tendant vers zéro à l'infini.*

**Proposition 4.1.6.** [6] *On suppose que les paramètres  $s, p, q$  satisfont les conditions suivantes :*

$$* 1 \leq p < \infty,$$

$$* 0 < s < 1 + \frac{1}{p} \text{ et } 1 \leq q \leq \infty, \text{ ou } s = 1 + \frac{1}{p} \text{ et } q = 1.$$

Soit  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  l'ensemble des distributions tempérées  $f$  telles que

$$[f] \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}) \text{ et } f' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}).$$

Tout élément de  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  admet un représentant dans  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , unique à l'addition près d'une constante. L'espace  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$  sera muni de la semi-norme  $\| - \|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des propositions (4.1.2), (4.1.5). Cependant,

il nous sera utile de connaître explicitement la réalisation

$$\sigma : \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}) \longmapsto \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}).$$

Soit donc  $g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ .

Grâce à la condition  $s > 0$ , on a

$$\sum_{j \geq 0} \|\phi_j g\|_p = \sum_{j \geq 0} 2^{-js} (2^{js} \|\phi_j g\|_p) \leq c \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})},$$

de sorte que la série  $\sum_{j \geq 0} \phi_j g$  converge normalement dans  $L_p(\mathbb{R})$ .

L'étude de la série  $\sum_{j < 0} \phi_j g$  nécessite une discussion suivant la position de  $s$  par rapport à  $\frac{1}{p}$ .

**1er cas.** Supposons  $s < \frac{1}{p}$  (ou  $s = \frac{1}{p}$  et  $q = 1$ ).

Considérons une fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  telle que  $\widehat{\varphi} \psi = \psi$  et posons  $\varphi_j = 2^{jn} \varphi(2^j x)$

pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . On a alors

$$\phi_j f = \varphi_j * \phi_j f, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (4.1)$$

À l'aide de l'identité (4.1), on obtient

$$\sum_{j < 0} \|\phi_j g\|_\infty \leq c \sum_{j < 0} 2^{j(\frac{1}{p})} \|\phi_j g\|_p \leq c \sum_{j < 0} 2^{j((\frac{1}{p})-s)} (2^{js} \|\phi_j g\|_p).$$

De plus, par la condition  $p < \infty$ , on a  $\phi_j g \in C_0(\mathbb{R})$ . Par hypothèse sur  $s$ , on en déduit la convergence normale de la série  $\sum_{j < 0} \phi_j g$  dans  $C_0(\mathbb{R})$ . La série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j g$  est convergente dans l'espace normé  $C_0(\mathbb{R}) + L_p(\mathbb{R})$  et sa somme est une distribution tendant vers zéro à l'infini. C'est donc un représentant de  $g$  appartenant à  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ .

**2ieme cas.** Supposons  $\frac{1}{p} \leq s < 1 + \frac{1}{p}$ .

À l'aide de l'identité (4.1), on obtient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout entier  $j < 0$ ,

$$|\phi_j g(x) - \phi_j g(0)| \leq |x| \|\nabla \phi_j g\|_\infty \leq c|x| 2^{j(1+\frac{1}{p}-s)} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}.$$

Il en découle que la série de fonctions  $\sum_{j < 0} |\phi_j g(x) - \phi_j g(0)|$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{R}$ . Sa somme est donc une fonction continue  $h$ .

De plus en choisissant l'entier  $k \geq 1$  de sorte que  $2^k \leq |x| < 2^{k+1}$ , on voit

que

$$\begin{aligned} \sum_{j < 0} |\phi_j g(x) - \phi_j g(0)| &\leq \sum_{j < -k} |x| \|\nabla \phi_j g\|_\infty + 2 \sum_{j=-k}^{j=-1} \|\phi_j g\|_\infty \\ &\leq c(|x| \sum_{j < -k} 2^{j(1+\frac{1}{p}-s)} + 2 \sum_{j=-k}^{j=-1} 2^{j(\frac{1}{p}-s)}) \|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$h(x) = O(|x|^{s-\frac{1}{p}}) \text{ si } s > \frac{1}{p}, \text{ et } h(x) = O(\log|x|) \text{ si } s = \frac{1}{p},$$

quant  $|x|$  tend vers l'infini. La fonction

$$h + \sum_{j \geq 0} \phi_j g$$

est élément de  $\mathbb{E}(\mathbb{R}) + L_p(\mathbb{R})$ ; d'après le lemme (4.1.1), c'est un représentant de  $g$  appartenant à  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ .

**3ieme cas.** Supposons  $s = 1 + \frac{1}{p}$ .

Compte tenu des hypothèses sur  $s$ , on a alors  $q = 1$ . L'identité (4.1) nous

donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $j \in \mathbb{Z}$

$$|\phi_j g(x) - \phi_j g(0)| \leq c|x|2^{js} \|\phi_j g\|_p,$$

alors que

$$\|(\phi_j g)'\|_\infty \leq c|x|2^{js} \|\phi_j g\|_p.$$

Il en découle que la série de fonctions  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\phi_j g(x) - \phi_j g(0)|$  converge normale-

ment sur tout compact de  $\mathbb{R}$ , et que sa somme est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$

dont la dérivée appartient à  $C_0(\mathbb{R})$ .

Cette fonction est donc un représentant de  $g$  appartenant à  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ . □

**Proposition 4.1.7.** [6] *Sous les hypothèses de la proposition (4.1.6), on considère une fonction  $g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ . Il existe alors une suite  $(g_k)_{k \geq 1}$  dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  et une suite numérique  $(a_k)_{k \geq 1}$  telles que*

$$(i) \quad \|g_k\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})},$$

(ii)  $g_k + a_k \rightarrow L_{loc}^1(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* On définit la suite  $(g_k)_{k \geq 1}$  par

$$g_k = \sum_{j \geq -k} \Phi_j g.$$

On sait déjà que  $g_k \in L^p(\mathbb{R})$ , et on voit facilement que

$$\begin{aligned} \|g_k\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} &\leq c \left( \sum_{j \geq -k} (2^{js} \|\Phi_j g\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Pour établir la propriété (ii), on discute suivant la position de  $s$  par rapport à  $\frac{1}{p}$ .

**1er cas.** Supposons  $s < \frac{1}{p}$  (ou  $s = \frac{1}{p}$  et  $q = 1$ ).

On sait que la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Phi_j g$  est convergente dans l'espace normé  $C_0(\mathbb{R}) + L^p(\mathbb{R})$ . La suite  $(g_k)_{k \geq 1}$  a donc une limite  $h$  dans  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , telle que  $h - g$  soit une constante.

**2ieme cas.** Supposons  $\frac{1}{p} \leq s < \frac{1}{p} + 1$ .

On pose

$$a_k = \sum_{j=-k}^{j=-1} \Phi_j g(0).$$

Puisque

$$\sum_{j=-k}^{j=-1} |\Phi_j g(x) - \Phi_j g(0)| \leq c \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} |x| 2^{k(s-1-\frac{1}{p})},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout entier  $k \geq 1$ , on conclut que la suite  $(g_k + a_k)_{k \geq 1}$  admet une limite  $h$  dans  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , telle que  $h - g$  soit une constante.

**3ieme cas.** Supposons  $s = \frac{1}{p} + 1$  et donc  $q = 1$ .

On a

$$\|\Phi_j g\|_\infty \leq c 2^{-j} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})},$$

et de sorte que les constantes

$$a_k = - \sum_{j \geq -k} \Phi_j g(0).$$

sont bien définies. La fonction

$$\sum_{j \in \mathbb{R}} |\Phi_j g(x) - \Phi_j g(0)|$$

est la limite de la suite  $(g_k + a_k)_{k \geq 1}$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et la fonction  $h - g$  est une constante.  $\square$

#### 4.1.4 Fonctions à variation bornée

**Définition 4.1.7.** On dit que  $f \in BV(\mathbb{R})$  si et seulement si

$$\|f\|_{BV} = \sup_{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{1}{|h|} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| dx < \infty.$$

**Proposition 4.1.8.** On a

$$\dot{\mathcal{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R}) \subset BV(\mathbb{R}) \subset \dot{\mathcal{B}}_1^{1,\infty}(\mathbb{R})$$

et les deux injections canoniques sont continues.

*Démonstration.* 1. Soit  $g \in \dot{\mathcal{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$g' = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j g' \quad \text{dans } S'(\mathbb{R}).$$

Grâce à (4.1), il vient

$$\|\phi_j g'\|_1 = \|\phi'_j * \phi_j g\|_1 \leq c 2^j \|\phi_j g\|_1,$$

ce qui montre que la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j g'$  converge normalement dans  $L_1(\mathbb{R})$ .

On en déduit que  $g' \in L_1(\mathbb{R})$  et que

$$\|f\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}} |g'(x)| dx \leq c \|g\|_{\dot{\mathcal{B}}_1^{1,1}(\mathbb{R})}.$$

2. Soit  $g \in BV(\mathbb{R})$ . Puisque  $\phi_j g'$  n'est autre que la convolution de la mesure  $g'$  avec la fonction  $x \mapsto 2^j (\mathcal{F}^{-1} \psi)(2^j x)$ , on a

$$\|\phi_j g'\|_1 \leq \|\mathcal{F}^{-1} \psi\|_1 \|g'\|_{BH},$$

soit encore

$$\|g'\|_{\dot{B}_1^{0,\infty}(\mathbb{R})} \leq c \|g'\|_{BH}.$$

Grâce à la proposition (4.1.2), on obtient  $\|g\|_{\dot{\mathcal{B}}_1^{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{BH}$ . Puisque  $g'$  est une mesure bornée, on a  $g' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R})$ , ce qui achève de prouver que  $g \in \dot{\mathcal{B}}_1^{1,\infty}(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Proposition 4.1.9.** [6]

i) Pour tout  $f \in \dot{B}_1^{2,1}(\mathbb{R})$ , on a  $f \in BH(\mathbb{R})$  et  $\|f\|_{BH} \leq c\|f\|_{\dot{B}_1^{2,1}(\mathbb{R})}$ .

ii) Pour tout  $f \in BH(\mathbb{R})$ , on a  $[f] \in B_1^{2,\infty}$  et  $\|f\|_{B_1^{2,\infty}(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{BH(\mathbb{R})}$ .

**Théorème 4.1.1.** [6]

Si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $BH(\mathbb{R})$ , il en est de même pour  $f \circ g$  et l'on a

$$\|f \circ g\|_{BH(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{BH(\mathbb{R})}\|g\|_{BH(\mathbb{R})}.$$

## 4.2 Le calcul fonctionnel

Le calcul fonctionnel sous- linéaire dans les espaces  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  est l'objet du théorème suivant de Lanza, Sickel.

**Théorème 4.2.1.** [6]

Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $q \in [1, +\infty]$  et  $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$ . Si  $f \in U_p^1(\mathbb{R})$  et  $f(0) = 0$ , alors  $T_f$  envoie  $B_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})$  dans  $B_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})$  et  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  dans lui-même. De plus il existe des constantes  $c > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{B_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})} &\leq c\|f\|_{U_p^1}\|g\|_{B_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})}, \quad g \in B_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R}), \\ \|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} &\leq c\|f\|_{U_p^1}\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

### 4.2.1 Énoncé et démonstration du théorème principal

**Théorème 4.2.2.** [6]

Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $q \in [1, +\infty]$ ,  $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$ . et  $f \in U_p^1(\mathbb{R})$ .

i) Pour tout  $g \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})$ , on a  $[f \circ g] \in \dot{B}_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})$ ,  $(f \circ g)' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R})$ ,

et

$$\|f \circ g\|_{B_p^{1+\frac{1}{p},\infty}(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{U_p^1}\|g\|_{B_p^{1+\frac{1}{p},1}(\mathbb{R})}. \quad (4.2)$$

ii) Pour tout  $g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , on a  $f \circ g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , et

$$\|f \circ g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c\|f\|_{U_p^1}\|g\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})}. \quad (4.3)$$

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction de classe  $U_p^1(\mathbb{R})$ . En retranchant à  $f$  une constante, on peut supposer, sans perte de généralité, que  $f(0) = 0$ .

Supposons d'abord que  $g \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ . Posons  $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$ , pour tous  $\lambda > 0$  et

$x \in \mathbb{R}$ . En renormant au besoin  $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ , on a

$$\|g\lambda\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \lambda^{s-\frac{1}{p}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} + \lambda^{\frac{-1}{p}} \|g\|_p. \quad (4.4)$$

En appliquant le théorème (4.2.1), et en écrivant l'identité (4.4) pour la fonction

$f \circ g\lambda = (f \circ g)_\lambda$ , on obtient

$$\lambda^{s-\frac{1}{p}} \|f \circ g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} + \lambda^{\frac{-1}{p}} \|f \circ g\|_p \leq c \|f\|_{U_p^1} (\lambda^{s-\frac{1}{p}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} + \lambda^{\frac{-1}{p}} \|g\|_p).$$

En divisant alors par  $\lambda^{s-\frac{1}{p}}$  et en faisant tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$ , on obtient précisé-

ment l'estimation (4.3). Le même argument d'échelle conduit à l'estimation

(4.2). Venons-en au cas général où  $g \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ . D'après la proposition (4.1.7), on

dispose d'une suite  $(g_k)_{k \geq 1}$  dans  $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$  telle que

$$\|g_k\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}, \quad \forall k \geq 1.$$

et d'une suite numérique  $(a_k)_{k \geq 1}$  telle que  $g_k + a_k$  tende vers  $g$  dans  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ .

En appliquant le résultat de la première étape aux fonctions  $\tau_{-a_k} f$  et en notant

que  $U_p^1(\mathbb{R})$  est isométriquement invariant par translation, on voit que

$$\|f \circ (g_k + a_k)\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})} \leq c \|f\|_{U_p^1} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})}.$$

Sachant que  $f$  est lipschitzienne, on vérifie aussitôt que la suite

$$(f \circ (g_k + a_k))_{k \geq 1}$$

tend vers  $f \circ g$  dans  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ . Dès lors on peut appliquer la proposition (4.1.1)–5)

et conclure que les estimations (4.2) et (4.3) sont vérifiées en toute général-

ité. Nous terminerons la preuve du théorème en établissant que

$$(f \circ g)' \in \tilde{C}_0(\mathbb{R}).$$

□

# Bibliographie

- [1] S.E. Allaoui. *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles*. Annales mathématiques Blaise pascal. 16 ,2 (2009), 399-429.
- [2] S.E. Allaoui. *Intégrales singulières*. Thèse de Doctorat Université Batna, 2011, pp 63-76.
- [3] S.E. Allaoui. *Sur la composition dans les espaces de Besov à valeurs vectorielles : un cas critique*. 2013.
- [4] A. Djeriou. *Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels*. Thèse de Doctorat Université Batna, 2012, pp 15-24.
- [5] M. Moussai. *Cours d'analyse harmonique*. universite de M'sila, 2012.
- [6] G. Bourdaud et Yves. Meyer. *Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes*. Mat.Iberoamericana 22(2006), no. 2, 725-746.
- [7] G. Bourdaud. *Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov*. 2005.
- [8] G. Bourdaud. *localisations des espaces de Besov*. 1988.
- [9] G. Bourdaud. *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*. Uni. Paris 7. 1987.
- [10] H. Triebel. *Theory of function spaces*. Birkhauser, Basel (1983).