

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمار ثليجي الأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



## *Mémoire de MASTER*

**Domaine:** Mathématiques et Informatique  
**Filière:** Mathématiques  
**Option:** Analyse Mathématique

**Par:**  
**Dechache Ikram**

### THEME

---

# *Existence et comportement asymptotique des solutions pour des équations de visqueux $p$ -Laplacienne.*

---

*Soutenu publiquement devant le jury composé de:*

<b>Mr. OUCHENANE Djamel</b>	<b>M.C.A</b>	<b>Président</b>
<b>Mme. BOUKHATEM Yamna</b>	<b>M.C.B</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. Fares Yazid</b>	<b>M.A.A</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr. ABITA RAHMOUNE</b>	<b>M.C.B</b>	<b>Encadreur</b>

## Dédicace

**J**E dédie ce mémoire à ma mère, mon père mes frères et sœurs  
A tous mes enseignants dès ma première année primaire jusqu'à maintenant

A TOUTE MA FAMILLE

A tous mes amis et mes collègues

## Remerciement

**A**vant tout chose, je tiens à remercier monsieur Rahmoune Abita enseignant à l'université de Laghouat qui m'a fait l'honneur d'accepter de poursuivre ma sujet de ma mémoire sous sa direction, et il n'a pas hésité de me fleurir par ses idées durant la préparation de ce mémoire.

**J**E remercie Mr. Ouchenan Djamel, enseignant à l'université de Laghouat, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.

**J**E remercie sincèrement à Boukhatem Yamna et Fares Yazid, enseignants à l'université de Laghouat, d'avoir accepté de lire mon travail et de faire partie du jury de ce mémoire. Leur présences constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

**J**E voudrais également remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques à l'université de Laghouat.

**E**Nfin, j'adresse mes plus sincères remerciements et grande gratitude à ma mère, mes soeurs, à mes proches pour leur soutien constant et encouragement. Et surtout de m'avoir supporté toutes ces années, et à qui je dédie ce travail.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI-LAGHOUAT

# MEMOIRE



Présentée à la Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Pour l'obtention du diplôme de

**MASTER**

Option: Mathématiques appliquées

Présentée par

**Dechach Ikram**

THÈME

---

---

**Existence et comportement asymptotique des solutions  
pour des équations de visqueux p-Laplacienne**

---

---

Soutenue le :18/06/2019, devant le Jury composé de:

<u>MEMBRE</u>	<u>Grade &amp; Etablissement</u>	<u>Qualité</u>
DR. OUCHENANE DJAMEL	MC A. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Président du Jury
DR. ABITA RAHMOUNE	MC B. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Encadreur
DR. BOUKHATEM YEMNA	MC B. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Examineur
DR. FARES YAZID	MAA. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Examineur

+

## ملخص

في هاته المذكرة، نعتبر و ندرس مسألة حدودية مكافئة شبه خطية لمعادلات اللزوجة  $p$  - لابلاسية و مشكلة حدود مكافئة غير خطية بمصطلح مصدر معمم في النموذج  $f(u)$  تحت شروط ابتدائية و مع بعض الفرضيات المناسبة على المعطيات، بالإستناد إلى تقنيات التحليل الرياضي، نتأبج مهمة على نظرية وجود الحل الشامل، ألوحداية، أسلوك المتقارب، ألانفجار في الوقت المحدد، تم الحصول عليها في الحالتين اين تكون الطاقة موجبة او سالبة على الترتيب.

## Résumé

Dans ce mémoire, on considère un problème aux limites semi linéaires paraboliques pour les équations visqueux  $p$ -Laplacienne et un problème aux limites parabolique non linéaires avec terme source généralisée sous forme  $f(u)$ .

Sous certaines conditions sur les données initiales, en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, théorème de compacité et celle de monotonie ainsi que quelques techniques récentes d'analyse mathématique, des résultats importants sont obtenus à savoir :

1. L'existence locale, le comportement asymptotique, la dépendance continue de la solution par rapport aux données et l'explosion en temps fini des solutions ont été obtenus
2. Résultat d'explosion en temps fini est prouvé si le données initial possède une énergie positive appropriée et, dans ce cas, nous estimons exactement avec précision la durée de vie de la solution  $T^*$ .
3. L'explosion en temps fini des solutions avec une énergie initiale négative est également établi.

\*



\*\*

## Dédicaces

J<sup>E</sup> dédie ce mémoire à ma mère, mon père mes frères et sœurs :

...,

.....

A tous mes enseignants dès ma première année primaire jusqu'à maintenant...

A TOUTE MA FAMILLE....

A tous mes amis et mes collègues...

\*\*\*

## Remerciements

**A** vant tout chose, je tiens à remercier monsieur Rahmoune Abita enseignant à l'université de Laghouat qui m'a fait l'honneur d'accepter de poursuivre ma sujet de ma mémoire sous sa direction, et il n'a pas hésité de me fleurir par ses idées durant la préparation de ce mémoire.

**J** E remercie Mr. Ouchenan Djamel, enseignant à l'université de Laghouat, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.

**J** E remercie sincèrement à les monsieurs, Rahmoune Abedelaziz et Faress Yazid, enseignants à l'université de Laghouat, d'avoir accepté de lire mon travail et de faire partie du jury de ce mémoire. Leur présences constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

**J** E voudrais également remercier tous les membres du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat.

**E** nfin, j'adresse mes plus sincères remerciements et grande gratitude à ma mère, mes soeurs, à mes proches pour leur soutien constant et encouragement. Et surtout de m'avoir supporté toutes ces années, et à qui je dédie ce travail.

Dechach Ikram

<b>Introduction Générale</b>		<b>ii</b>
<b>1 Rappelles sur les outils mathématique</b>		<b>2</b>
1.1 Topologie faible . . . . .		2
1.1.1 Définition et proprités élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$ . . . . .		2
1.1.2 Topologie faible ,ensembles convexes et opérateurs linéaires . . . . .		3
1.2 La topologie faible* $\sigma(E, E')$ . . . . .		4
1.3 Eespace réflexifs . . . . .		5
1.4 Espace séparables . . . . .		6
1.5 lemme de Gronwalle . . . . .		7
1.6 Théorème de formule de Green . . . . .		8
1.7 Espace $L^p(\Omega)$ . . . . .		9
1.7.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces $L^p$ . . . . .		9
1.8 Inégalité de Young et de Hölder . . . . .		10
1.9 Inégalité de Poincaré . . . . .		13
<b>2 Existence et comportement asymptotique des solutions pour une équation vis-queux <math>p</math>-laplacienne</b>		<b>15</b>
2.1 Notations et formulation variationnelle . . . . .		15
2.1.1 Hypothèses . . . . .		16
2.2 Formulation variationnelle . . . . .		16
2.3 Existence et Unicité . . . . .		20
2.3.1 Existence . . . . .		20
2.3.2 Existence locale . . . . .		20
2.3.3 Unicité . . . . .		27
2.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données . . . . .		28

2.4.1	Comportement asymptotique des solutions faibles . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Non-existence globale et résultats d'explosion en temps fini pour une équation d'évolution quasi-linéaire</b>	<b>34</b>
3.0.2	Préliminaires . . . . .	35
3.0.3	Hypothèses mathématiques . . . . .	36
3.1	Résultat principal . . . . .	36
3.2	Explosion en temps fini où l'énergie initiale est positive . . . . .	37
3.3	Blows up où l'énergie initiale est négative . . . . .	45
	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE-RAPPEL DE CERTAINS RÉSULTATS

Dans ce travail, en se basant sur les techniques utilisées par [9, 10, 13, 7, 6, 12, 27, 26, 1], pour démontrer quelques résultats d'existence locale et locale, comportement asymptotique et comportement à l'infini de la solution de quelques problèmes semi linéaires paraboliques à savoir :

1. Problèmes aux limites semi linéaires paraboliques pour les équations visqueux  $p$ -Laplacienne
2. Problèmes aux limites paraboliques non linéaires avec terme source généralisée de la forme  $f(u)$ .

Plus précisément, on s'intéresse à l'étude de l'existence locale, le comportement asymptotique et l'explosion en temps fini de la solution d'une équation de la chaleur pour l'opérateur fortement elliptique semi linéaire.

- Ce mémoire se décompose de trois chapitres :
- Dans le premier chapitre, il se compose du rappel et des outils mathématiques qu'on a utilisé dans ce mémoire
- Dans le second chapitre sous certaines hypothèses sur les données on se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité, ainsi que le théorème monotonie, nous allons démontrer l'existence locale et l'unicité d'une solution faible. Ensuite, sous certaines conditions nous allons démontrer la dépendance continue de la solution par rapport aux données ainsi que le comportement asymptotiques de la solution.
- Dans le troisième chapitre, on se basant sur les techniques introduites et développées par plusieurs auteurs par exemple [33, 16, 30] pour démontrée l'explosion dans le temps fini de la solution pour un problème visqueux  $p$ -Laplacienne avec un terme d'amortissement fort et un terme source de type  $f(u)$ .

La première est consacrée à l'étude théorique d'un problème aux limites gouverné

par des équations décrivant l'évolution des matériaux ayant une loi de comportement visqueux  $p$ -Laplacienne.

Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites non linéaire avec un terme d'amortissement fort :

$$\begin{aligned} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f(t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) &= 0 \text{ sur } \Gamma, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

associées aux conditions limites initiales et aux limites de Dirichlet-Neumann.

Dans des conditions appropriées sur  $f(t)$  et l'exposant  $p$  de l'opérateur  $p$ -laplacien, il est prouvé que toute solution faible à énergie initiale négative explose en un temps infini, en supposant que un terme d'amortissement forte agissant dans le domaine. Cette équation correspond à une version viscoélastique apparaissant dans la dynamique des écoulements élastoplastiques et des vibrations des plaques.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\Gamma$  régulière, dans ce mémoire, nous étudions le problème parabolique non linéaire suivant : où  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $T$  désigne la borne latérale du cylindre  $Q_T$  et  $k(t)$  est le coefficient de viscosité qui dépend de  $t$ .

On s'intéresse à l'existence et comportement asymptotique de solutions pour une équation visqueux  $p$ -laplacienne autrement dit, l'existence locale, comportement asymptotique et stabilité de la solution pour un problème parabolique semi linéaire avec un amortissement fort :

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \Delta_p(u) + f(t) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (0.0.1)$$

où

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

Appelé l'opérateur  $p$ -laplacien, juste pour simplifier l'étude en prenant le cas où  $k(t) \approx 0$ .

Cet opérateur peut être prolongée à un opérateur monotone entre l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et son dual  $W^{-1,p'}(\Omega)$  comme suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_p u : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega), \\ \langle -\Delta_p u, \phi \rangle_p = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi dx, \quad 2 < p < \infty, \end{array} \right.$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  désigne le produit de dualité entre  $W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $u$  et  $f$  désignent le vecteur du déplacement, fonction donnée, où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

La fonction  $u$  cherchée doit vérifier en outre les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (0.0.2)$$

---


$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \quad (0.0.3)$$

avec  $u_0(x)$  sont des fonctions données.

Ici,  $\Omega$  est un domaine bornée dans  $\mathbb{R}^n$  et  $k(t) > 0$  est le coefficient de viscosité. Le terme  $k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t}$  dans (0.0.1) est interprété comme étant dû aux effets de relaxation visqueuse ou à la viscosité ; par conséquent, l'équation (0.0.1) est appelée «équations visqueuses de laplaciennes». L'équation bien connue de La-laplacien est obtenue en fixant  $k = 0$ .

Dans le cas où  $k(t) = k = \text{const}$ , l'équation (0.0.1) est survenir comme un régularisation de l'équation pseudo-parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \Delta u \quad (0.0.4)$$

qui survient dans divers phénomènes physiques. (0.0.4) peut être supposé comme modèle de diffusion de fluides dans des milieux poreux fracturés [12, 6, 9], ou comme un modèle de thermo-conduction impliquant une température thermodynamique  $\theta = u - k\Delta u$  et une conductrice conducteur température  $u$  see [23, 27].

L'équation (0.0.4) a été largement étudiée et il existe de nombreux résultats remarquables concernant l'existence, l'unicité, la régularité et les propriétés spéciales des solutions, voir par exemple [6, 9, 10, 2, 29, 25, 26].

Pour déduire (0.0.4), B.D. Coleman, R.J. Duffin et V.J. Mizel ont examiné une situation cinématique particulière, à savoir un écoulement à cisaillement simple non stable [6]. En fait, quand on considère l'influence de nombreux facteurs, tels que les effets moléculaires et ioniques, on a la relation non linéaire  $\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  au lieu de  $\Delta u$  in du côté droit de (0.0.4). On obtient donc (0.0.1).

L'équation (0.0.1) ressemble à l'équation-Laplacienne, mais de nombreuses méthodes utiles pour l'équation-Laplacienne ne sont plus valides pour cette équation.

Un exemple important est l'équation de la filtration multi-tropicale newtonienne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(|u|^{m-1} u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad m > 1. \quad (0.0.5)$$

Cette équation est parabolique pour  $u \neq 0$  et dégénère pour  $u = 0$ . L'équation (0.0.5) avec  $m > 1$  décrit l'écoulement non stationnaire d'un fluide newtonien compressible dans un milieu poreux (filtration) dans des conditions polytropiques (voir, par exemple). exemple, [13]); la valeur de  $u(x, t) > 0$  est proportionnelle à la densité du fluide. Si le flux n'est pas polytropique, (0.0.5) est remplacé par l'équation plus générale de la filtration newtonienne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \varphi(u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (0.0.6)$$

où

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C^1(\mathbb{R}), \quad \varphi'(s) > 0 \text{ for } s \neq 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \quad (0.0.7)$$

---

L'écoulement non stationnaire dans un milieu poreux de fluides avec une dépendance électrique de la contrainte tangentielle à la vitesse du déplacement dans des conditions élastiques est décrit par l'équation de la filtration élastique non-newtonienne.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{m+1}(u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad m = \text{const} > 0. \quad (0.0.8)$$

Donnons quelques exemples d'autres branches de la physique mathématique. Équations de la forme (0.0.6), où

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \varphi'(s) > 0 \text{ for } s \neq 0, \quad \varphi'(\pm 0) = +\infty. \quad (0.0.9)$$

survenir en physique des plasmas (voir, par exemple, [18] et les références de cet article). Un cas particulier typique est (0.0.5) avec  $m \in (0, 1)$ . L'équation (0.0.6) avec les hypothèses (0.0.9) s'appelle l'équation de diffusion rapide (dans ce cas, le "coefficient de diffusion"  $\varphi'(u)$  a une croissance non bornée en tant que  $u \rightarrow 0$ ).

L'équation (0.0.6) avec les hypothèses (0.0.7) décrit, en plus de les processus de filtration, la diffusion d'un gaz dont le coefficient dépend de la concentration, ainsi que la propagation de la chaleur dans un milieu présentant de grandes surchauffes thermiques (voir par exemple, [3]). Dans le dernier cas,  $u(x, t)$  a la signification physique de la température. Si le fluide contient des sources de chaleur ou des éviers dont la puissance dépend de la température, alors (0.0.6) est remplacé par une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\varphi(u) + \psi(u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (0.0.10)$$

où

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \psi(0) = 0. \quad (0.0.11)$$

Si, de plus

$$\psi'(s) < 0 \text{ for } s > 0. \quad (0.0.12)$$

nous appellerons alors (0.0.10) l'équation non linéaire de la chaleur avec absorption. Si  $\psi'(s) > 0$  au moins sur un intervalle  $(0, s_0)$ , nous appellerons (0.0.10) l'équation de chaleur non linéaire avec sources. Un modèle du processus de propagation de la chaleur dans un milieu en mouvement non linéaire est donné par l'équation thermique non linéaire avec transfert

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\varphi(u) + \nabla B \nabla \psi(u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (0.0.13)$$

Si le support est inhomogène ou si ses propriétés changent avec le temps, il existe une dépendance explicite dans l'équation correspondante sur  $x$  et  $t$ .

---

La troisième chapitre est consacrée à l'étude de l'existence locale, explosion en temps fini de quelques problèmes aux limites paraboliques semi linéaires avec un terme source plus générale de la forme  $f(u)$  et un terme d'amortissement fort, à savoir :

$$\begin{aligned} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f(u), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) &= 0 \text{ sur } \Gamma, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), x \in \Omega, \end{aligned} \quad (0.0.14)$$

où  $Q_T = \Omega \times (0, T]$ ,  $T$  désigne la borne latérale du cylindre  $Q_T$  et  $k(t)$  est le coefficient de viscosité qui dépend de  $t$ .

On s'intéresse à l'explosion de temps fini pour l'énergie initiale positive et pour l'énergie initiale négative du problème (0.0.14) des solutions pour un problème parabolique semi linéaire avec un terme source non linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \Delta_p(u) + f(u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (0.0.15)$$

où

$$\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

appelé l'opérateur  $p$ -laplacien.

Un effort considérable a été consacré à l'étude du problème (0.0.14) dans le cas où  $k(t) = 0$ .

Le problème (0.0.14) avec  $k(t) = 0$ , a fait l'objet de nombreuses études sur l'existence, la non-existence et la dynamique à long terme. Pour les résultats de la nature et dans le cas où  $p = \text{const} \geq 2$ , nous renvoyons le lecteur à [33, 16, 30] en relation à l'équation

$$a(x) u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (0.0.16)$$

avec des cas spéciales pour la fonction  $f$ .

Lorsque  $p = 2$ ,  $a(x, t) = 1$  et  $f(u) = u^p$ , problème (0.0.14) devient le suivant

$$u_t - \Delta u = u^p, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (0.0.17)$$

Le problème (0.0.17) provient de nombreux modèles mathématiques importants en ingénierie et en sciences physiques. Par exemple, la science nucléaire, les réactions chimiques, le transfert de chaleur, la dynamique des populations, les sciences biologiques, etc., ont suscité beaucoup d'attention dans la recherche, voir [8, 11] et leurs références. Pour le problème (0.0.17), Hua Wang et al. [17] a établi un résultat de explosion en temps fini avec une énergie initiale positive sous certaines hypothèses appropriées sur les paramètres  $p$  et  $u_0$ .

Dans [11], les auteurs ont prouvé qu'il existait des solutions non négatives avec un explosion en temps fini si et seulement si  $p > 1$ . Les auteurs de [31] ont obtenu la solution du problème (0.0.14) qui explose en un temps fini lorsque l'énergie initiale est positive.

---

Dans [5], les auteurs, basés exactement sur l'idée de [4], ont déduit les limites inférieures du temps d'explosion si les solutions explosaient.

Ce travail consiste à étendre les résultats établis dans les domaines liés au problème général comme dans (0.0.14) dans le cas où les coefficients de viscosité  $k$  dépend de temps et non négligeable avec un terme de dissipation  $f(u)$  est un terme source plus généralisé.

Nous notons que la présence des coefficients  $a(x, t)$  et  $k(t)$  dans ce problème rend l'analyse dans le document un peu plus difficile que celle dans les problèmes connexes. L'objectif du projet actuel est d'étudier le phénomène d'explosion des solutions au problème (0.0.14) dans le cadre des espaces de Lebesgue et de Sobolev, nous allons établir un résultat d'explosion et donnons une estimation précise de la durée de vie  $T^*$  de la solution dans ce cas. La méthode utilisée ici est la méthode de la concavité. Cependant, en raison de la présence des coefficients  $a(x, t)$  et  $k(t)$  dans notre problème, notre argument est considérablement différent et il est plus abrégé.

**Remarque.**

1. Dans ce mémoire et pour simplicité nous faisons notre étude dans le cas où n'avons pas  $k(t)$  le coefficient de viscosité qui dépend de  $t$ , autrement dit le coefficient de viscosité qui dépend de  $t$  et négligeable.
2. Aussi dans ce chapitre nous n'avons pas besoin de montrer l'existence locale de problème (0.0.16), et nous ne mentionnons que la référence qui permet la preuve de l'existence locale d'une solution faible.

## Notations

Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  on a

$\overline{\Omega}$	L'adhérence de $\Omega$
$\Gamma$	La frontière de $\Omega$ supposée souvent régulière
$\Gamma_i$ ( $i = \overline{1, 2}$ )	Une partition de la frontière $\Gamma$
$\eta$	La normale extérieure unitaire à $\Gamma$
$v_\eta, v_\tau$	Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $v$
$C^1(\overline{\Omega})$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$
$D(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans $\Omega$ .
$D'(\Omega)$	L'espace des distributions sur $\Omega$ .
$D'(0, T; X)$	L'espace des distributions des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$
$(\cdot, \cdot)_X$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert $X$
$x_n \rightharpoonup x, (x_n \rightarrow x)$	La convergence faible (fort) de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$
$\ \cdot\ _X$	La norme de $X$
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; X)}$	La norme de l'espace de Sobolev $L^p(0, T; X)$
$\mathcal{L}(X)$	L'espace des applications linéaires et continues de $X$ dans $X$
$W^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega), D_i v \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n\}, 1 \leq p < +\infty$	
$W^{1,\infty}(\Omega) = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega), D_i v \in L^\infty(\Omega), i = 1, \dots, n\}$	
$\ v\ _{W^{1,p}(\Omega)} = \ v\ _{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \ D_i v\ _{L^p(\Omega)}$	
$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans $H$
$f', f''$	Les dérivées premières et secondes de $f$ par rapport aux temps
$\partial_i f$	La dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i$ éme composante $x_i$
$\nabla f = \text{grad} f$	Le gradient de $f$
$\mathcal{L}(X, Y)$	L'espace des applications linéaires et continues de $X$ dans $Y$

Principales normes et semi-normes utilisées

$$\begin{aligned}
 |f| &= \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} && \text{Norme sur } L^2(\Omega) \\
 |f|_1 &= \left( \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{Semi norme sur } H^1(\Omega) \\
 \|f\| &= \left( |f|^2 + |f|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{Norme sur } H^1(\Omega) \\
 \|f\|_{L^p(0, T; X)} &= \left( \int_0^T \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} && \text{Norme sur } L^p(0, T; X) \\
 |v| &= (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} && \text{Norme sur } \mathbb{R}^n
 \end{aligned}$$

# CHAPITRE 1

## RAPPELLES SUR LES OUTILS MATHÉMATIQUE

### 1.1 Topologie faible

#### 1.1.1 Définition et propriétés élémentaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $f \in E'$ . On désigne que l'application :

$$\begin{aligned}\varphi_f : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle\end{aligned}$$

Lorsque  $f$  décrit  $E'$  on obtient une famille  $(\varphi_f) \in E'$ .

**Definition 1.1.1 (Topologie faible  $\sigma(E, E')$ )** La topologie faible  $\sigma(E, E')$  sur  $E$  est la topologie la plus faible sur  $E$  rendant continue toutes les applications  $(\varphi_f) \in E'$

**Proposition 1.1.2** La topologie faible  $\sigma(E, E')$  est séparée.

- i  $(x_n \rightarrow x \text{ pour } \sigma(E, E')) \Leftrightarrow (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E')$
- ii Si  $x_n \rightarrow x$  fortement alors  $x_n \rightarrow x$  faiblement pour quand  $\sigma(E, E')$
- iii Si  $x_n \rightarrow x$  fortement pour  $\sigma(E, E)$ , alors  $\|x_n\|$  est bornée et  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
- iv Si  $x_n \rightarrow x$  fortement pour  $\sigma(E, E')$  et si  $f_n \rightarrow f$  fortement dans  $E'$  alors  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$  puisque  $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$

**Démonstration.**

- (i) Soit  $x_n$  une suite de  $E$  alors  $x_n \rightarrow x$  ssi  $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$  pour tout  $i \in I$  et d'après (1.1.1) alors :

$$x_n \rightarrow x \text{ pour } \sigma(E, E'), \langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$$

(ii) D'après 1.1.2 et puisque :

$$|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq \|f\| \|x_n - x\|$$

alors  $x_n \rightarrow x$  faiblement pour  $\sigma(E, E')$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il suffit donc vérifier que chaque  $f \in E'$  l'ensemble  $(\langle f, x_n \rangle)_n$  est bornée, et la suite  $\langle f, x_n \rangle$  converge vers  $\langle f, x \rangle$  (en particulier elle est bornée), soit  $f \in E'$ , on a :

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \|x_n\|$$

et a la limite :

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$$

et on a :

$$\|x\| = \sup |\langle f, x \rangle| \leq \liminf \|x_n\|$$

(iii) On a d'après (i) et (iii) :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \\ &\leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle| \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.1.3** Lorsque  $E$  est de dimension finie, la topologie faible  $\sigma(E, E')$  et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite  $(x_n)$  converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

**Remarque 1.1.4** – Les ouverts (resp les fermés) de la topologie faible  $\sigma(E, E')$  soit aussi ouvert (resp fermés) pour la topologie forte

– Lorsque  $E$  est de dimension infinie la topologie faible  $\sigma(E, E')$  est **strictement moins finie** que la topologie forte (i.e) il existe des ouverts (resp des fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp fermés) pour la topologie faibles par exemple :

l'ensemble  $\{s = x \in E : \|x\| = 1\}$  n'est jamais fermés pour la topologie faible  $\sigma(E, E')$

### 1.1.2 Topologie faible ,ensembles convexes et opérateurs linéaires

Tout ensemble fermé pour la topologie faible  $\sigma(E, E')$  est fermé pour la topologie forte d'après la remarque que la réciproque est faux en dimension infinie tout fois on va montrer que les ensembles convexes ces deux notions

**Théorème 1.1.5** Soit  $c \subset E$  convexe, alors  $c$  est faiblement fermé pour  $\sigma(E, E')$  si et seulement s'il est fortement fermé

**Théorème 1.1.6** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, soit  $T$  un opérateur linéaire et continue de  $E$  dans  $F$ , alors  $T$  est continue  $\sigma(E, E')$  dans  $F$  faible  $\sigma(F, F')$  et réciproquement.

**Démonstration.**

1. Il suffit de vérifier que pour tout  $f \in F'$ , l'application  $x \mapsto \langle f, Tx \rangle$  est continue de  $E$  faible  $\sigma(E, E')$  dans  $\mathbb{R}$  est une forme linéaire et continue sur  $E$  conséquemment elle est aussi continue par la topologie faible  $\sigma(E, E')$
2. supposons que  $T$  est linéaire et continue de  $E$  faible dans  $F$  faible. Alors  $G(t)$  est fermé dans  $E \times F$  pour la topologie  $\sigma(E \times F, E' \times F')$  et fortiori  $G(t)$  est fermé dans  $E \times F$  pour la topologie forte

■

## 1.2 La topologie faible\* $\sigma(E, E')$

Soit  $E$  un espace de Banach, soit  $E'$  son dual (muni de la norme duale :  $\|f\| = \sup |\langle f, x \rangle|$ )

Et soit  $E''$  son bidual, i.e le duale de  $E'$  muni de la norme :

$$\|\xi\| = \sup |\langle \xi, f \rangle|$$

On a une **injection canonique**  $J : E \rightarrow E''$  définie comme suit, et soit  $x \in E$  fixé, l'application on obtient :

$$\begin{aligned} J : E &\rightarrow E'' \subset \mathbb{R} \\ f &\mapsto \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

constitué une forme linéaire continue sur  $E'$  i.e un élément de  $E''$  noté  $Jx$ . On a donc

$$\langle Jx, f \rangle_{E'', E'} = \langle f, x \rangle_{E', E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

Il est clair pour  $J$  est linéaire et que  $J$  est une isométrie i.e  $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$  pour tout  $x \in E$ . En effet,

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle Jx, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|.$$

On va définir maintenant une autre topologie sur  $E'$  : la topologie faible\* que l'on note  $\sigma(E', E)$ . Pour chaque  $x \in E$  on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E' &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

On obtient une famille d'application  $(\varphi_x)_{x \in E}$  de  $E'$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Definition 1.2.1** La topologie faible \*

La topologie faible \* désignée aussi par  $\sigma(E', E)$  est la topologie la moins fine sur  $E'$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_x)_{x \in E}$ .

Comme  $E \subset E''$ , il est clair pour la topologie  $\sigma(E', E)$  est moins fine que la topologie  $\sigma(E', E'')$ , Autrement dit la topologie  $\sigma(E', E)$  possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie  $\sigma(E', E'')$ .

**Proposition 1.2.2** La topologie faible \*  $\sigma(E', E)$  est séparée.

**Théorème 1.2.3** Soit  $(f_n)$  une suite de  $E'$ . On a

- i)  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall x \in E$ .
- ii) Si  $f_n \rightarrow f$  fortement, alors  $f_n \rightarrow f$  pour  $\sigma(E', E'')$ ,  
si  $f_n \rightarrow f$  pour  $\sigma(E', E'')$ , alors  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E', E)$ .
- iii) Si  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E', E)$ , alors  $\|f_n\|$  est bornée et  $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$ .
- iv) Si  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E', E)$ , et si  $x_n \rightarrow x$  fortement dans  $E$ , alors  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

**Remarque 1.2.4**

2. Si  $f_n \xrightarrow{*} f$  pour  $\sigma(E', E)$  (ou même si  $f_n \rightarrow f$  pour  $\sigma(E', E'')$ ) et si  $x_n \rightarrow x$  pour  $\sigma(E, E')$  on ne peut pas conclure que  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .
3. Lorsque  $E$  est de dimension finie les trois topologie forte,  $\sigma(E', E'')$  et  $\sigma(E', E)$  coïncident, en effet  $J$  est alors surjective de  $E$  sur  $E''$  puisque  $\dim E = \dim E' = \dim E''$  et par conséquent  $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$
4. On verra dans la suite que la boule unité fermé d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compact pour la topologie forte. On comprend alors l'importance fondamentale de la topologie  $\sigma(E', E)$

**Théorème 1.2.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)** L'ensemble  $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$  est compact pour la topologie faible \*  $\sigma(E', E)$ .

## 1.3 Espace réflexifs

**Definition 1.3.1** Soit  $E$  un espace de Banach, et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E''$ .

On dit que  $E$  est **réflexif** si  $J(E) = E''$

(Lorsque  $E$  est réflexif on identifier implicitement  $E$  et  $E''$ , i.e :  $E = E''$ ).

**Théorème 1.3.2 (Kakutani)** Soit  $E$  un espace de Banach. Alors  $E$  est réflexif si et seulement si :

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\},$$

est compact pour la topologie  $\sigma(E, E')$ .

**Corollaire 1.3B** Soit  $E$  un espace de Banach. Alors  $E$  est réflexif si et seulement si  $E'$  est réflexif.

2. Soit  $E$  un espace de Banach réflexif. Soit  $K \subset E$  un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors  $K$  est compact pour la topologie  $\sigma(E, E')$ .

**Théorème 1.3.4** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach réflexifs, soit  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  un opérateur linéaire non-bornée fermé avec  $\overline{D(A)} = E$  Alors  $D(A^*)$  est dense dans  $F'$ .

## 1.4 Espace séparables

**Definition 1.4.1** On dit qu'un espace métrique est séparable, s'il existe un sous-ensemble  $D \subset E$  dénombrable et dense.

**Proposition 1.4.2** Soit  $E$  un espace métrique séparable, et soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors  $F$  est séparable.

**Théorème 1.4.3** Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $E'$  soit séparable. Alors  $E$  est séparable.

**Corollaire 1.4.4** Soit  $E$  un espace de Banach.  
Alors  $(E \text{ réflexif et séparable}) \Leftrightarrow (E' \text{ réflexif et séparable})$ .

**Théorème 1.4.5** Soit  $E$  un espace de Banach séparable. Alors  $B_{E'}$  est métrisable pour la topologie  $\sigma(E', E)$ .  
Réciproquement, si  $B_{E'}$  est métrisable pour  $\sigma(E', E)$ , alors  $E$  est séparable.

**Théorème 1.4.6** Soit  $E$  un espace de Banach tel que  $E'$  soit séparable. Alors  $B_E$  est métrisable pour la topologie  $\sigma(E, E')$ .  
Et réciproquement.

**Corollaire 1.4.7** Soit  $E$  un espace de Banach séparable, et soit  $(f_n)$  une suite bornée dans  $E'$ . Alors il existe une sous-suite extraite  $(f_{n_k})$  qui converge pour la topologie  $\sigma(E', E)$ .

**Théorème 1.4.8** Soit  $E$  un espace de Banach réflexif, et soit  $(x_n)$  une suite bornée dans  $E$ . Alors il existe une sous-suite extraite  $(x_{n_k})$  qui converge pour la topologie  $\sigma(E, E')$ .

**Théorème 1.4.9 (Eberlein-Šmulian)**

Soit  $E$  un espace de Banach tel que toute suite bornée  $(x_n)$  possède une sous-suite extraite  $(x_{n_k})$  convergente pour la topologie  $\sigma(E, E')$ . Alors  $E$  est réflexif.

## 1.5 lemme de Gronwalle

**Lemme 1.5.1** Soit  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $y$  trois fonctions continue sur un segment  $[a, b]$  à valeur positive et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b] : y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds$$

alors

$$\forall t \in [a, b] : y(t) \leq \varphi(t) + \left( \int_a^t \psi(s) y(s) ds \right) \exp \left( \int_s^t \psi(\lambda) y(\lambda) d\lambda \right)$$

**Démonstration.** On suppose que :  $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$  en multipliant les deux membres de l'inégalité donné par hypothèse par  $\psi(t)$  on obtient :

$$F'(t) - \psi(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) \exp \left( - \int_a^t \psi(s)ds \right)$$

On a par hypothèses,

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp \left( \int_a^t \psi(s)ds \right)$$

■

**Corollaire 1.5.2** Soient  $\psi$  et  $y$  deux fonctions continues définies de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$\exists c \geq 0 \quad / \quad \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c + \exp \left( \int_a^t \psi(s)ds \right)$$

**Corollaire 1.5.3** Soit  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$  vérifiant :

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists \beta \geq 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha \|y(t)\|$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b], \quad \|y(t)\| \leq \|y(a)\| \exp^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha} (\exp^{\alpha(t-a)} - 1)$$

Pour application :

Soit  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$  telle que :

$$\|x'(t)\| \leq \alpha \|x(t)\| + \beta \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Alors :

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \beta(t_1 - t_0)$$

puisque,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|x'(s)\| ds \\ &\leq \|x(t_0)\| + \beta(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^t \alpha \|x(s)\| ds \end{aligned}$$

## 1.6 Théorème de formule de Green

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$ , Soit  $w$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$  a support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$  alors, vérifie la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) \eta_i(x) dx$$

Ou,  $\eta_i$  la  $i$  eme composante de la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

**Corollaire 1.6.1** (Formule d'intégration par parties)

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $C^1$  et soit  $u$  et  $v$  deux fonction de classe  $C^1(\overline{\Omega})$  a support bornée dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elle vérifiant la formule d'intégration par partie :

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \eta_i(x) ds$$

**Corollaire 1.6.2** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de class  $C^1$  et soit  $u$  une fonction de  $C^2(\overline{\Omega})$  et  $v$  une fonction de  $C^1(\overline{\Omega})$ . Tout deux a support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$  alors elle est vérifiant la formule d'intégration par partie :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) ds.$$

où :  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i < N}$  est le vecteur gradient et  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ .

## 1.7 Espace $L^p(\Omega)$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue de :

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ intégrable}\} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f \mapsto \|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

Cette application est une semi-norme .

On va définir une relation d'équivalence sur  $\mathcal{F}$

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad f \sim g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \quad f(x) = g(x) \quad p.p.$$

**Definition 1.7.1** L'ensemble quotient  $\mathcal{F} / \sim$  muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

S'appelle l'espace de Lebesgue est sera noté par  $L^1(\Omega)$ .

### 1.7.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces $L^p$

**Definition 1.7.2** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 < p < \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On vérifiera ultérieurement que  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  est une norme

**Definition 1.7.3** On appelle espace de Lebesgue de puissance d'ordre  $\infty$  l'espace, noté  $L^\infty(\Omega)$ , des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  vérifiant :

$$\text{ess. sup } |f(x)| < +\infty$$

**Definition 1.7.4** On pose :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et il existe une constante : } \\ c > 0 \text{ tq : } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On note :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c : |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On vérifiera ultérieurement que  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  est une norme.

**Proposition 1.7.5**  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx,$$

(Avec :  $\int_{\Omega} u(x)v(x)dx$  pour les fonctions réelles).

**Notation 1.7.6** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  i.e :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

## 1.8 Inégalité de Young et de Hölder

– Soit  $a, b$  et soit  $p, q \in (1, +\infty)$  tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

on dit que  $p$  et  $q$  sont conjugué au sens de Young alors :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

**Démonstration.** On pourra considérer la fonction  $\Theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\Theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$$

est dérivable par :

$$\Theta'(a) = a^{p-1} - b$$

cette dérivée s'annule lorsque  $a = b^{\frac{1}{p-1}}$  est négative pour  $a < b^{\frac{1}{p-1}}$  et positive pour  $a > b^{\frac{1}{p-1}}$  on a :

$$\Theta(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}b^{\frac{1}{p-1}p} + \frac{1}{q}b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = 0$$

Ainsi  $\Theta(a) \geq 0$  i.e :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

■

– Soit de nouveau  $p, q \in (1, +\infty)$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $f \in L^p(\mu)$ ,  $g \in L^q(\mu)$ . En utilisant la question précédente montrer que pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\int_{\Omega} |fg|d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu$$

Optimiser cette inégalité par rapport a  $\lambda$  est alors :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Cette inégalité est elle vraie pour  $p = 1$  et  $q = +\infty$

**Démonstration.** Soit  $f \in L^p(\mu)$ ,  $g \in L^q(\mu)$  d'après l'inégalité de Young pour  $\lambda > 0$ , pour  $u$  presque tout  $x$  :

$$|fg|(x) = |\lambda f(x) \frac{g(x)}{\lambda}| \leq \frac{\lambda^p}{p} |f|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q} |g|^q$$

Ainsi :

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu$$

on supposons :

$$\Theta(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu$$

la fonction  $\Theta$  est dérivable :

$$\Theta'(\lambda) = \lambda^{p-1} \|f\|_p^p - \lambda^{-q-1} \|g\|_q^q$$

cette dérivée s'annule pour  $\lambda_1 = \left( \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p+q}}$  est négative pour  $\lambda \leq \lambda_1$  et positive pour  $\lambda \geq \lambda_1$ . Ainsi le minimum de  $\Theta$  on a :

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda_1) &= \frac{1}{p} \left( \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{p}{p+q}} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \left( \frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{-q}{p+q}} \|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} \|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \frac{1}{q} \|g\|_q^{\frac{pq}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{pq}{p+q}} \\ &= \|f\|_p \|g\|_q \end{aligned}$$

On déduit l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Si  $f \in L^1(\mu)$ ,  $g \in L^\infty(\mu)$  Alors :

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty$$

Pour presque tout  $x \in \Omega$  et

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_{\Omega} |f| d\mu$$

ie :

$$\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$$

■

**Notation 1.8.1** Soient  $p, p'$  dans  $[1, +\infty[$  (pas nécessairement conjugués)

Si  $f$  appartient à  $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$  alors,  $f$  appartient  $L^r(\mu)$  pour tout  $r$  compris entre  $p$  et  $p'$ .

**Démonstration.** Soient  $p, p' \in [1, +\infty[$  on suppose  $p < p'$  et soit  $p < r < p'$  on a :

$$|f(x)|^r = |f(x)|_{|f|>1}^r + |f(x)|_{|f|<1}^r \leq |f|^{p'} + |f|^p$$

On en déduit que :

$$\int_{\Omega} |f(x)|^r \leq \int_{\Omega} |f|^{p'} d\mu + \int_{\Omega} |f|^p < +\infty$$

Donc :  $f \in L^r(\mu)$ . ■

Théorème de complétude de Riesz

**Théorème 1.8.2 (Fischer-Riesz)**  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$  Alors  $L^p$  est complet.

**Théorème 1.8.3** Soit  $p$  telle que  $1 \leq p \leq \infty$  et soit  $f_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $L^p(\mu)$  convergeant vers une fonction  $f \in L^p(\mu)$ . Alors il existe une sous-suite de  $f_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge ponctuellement  $p$  vers  $f$

**Démonstration.**

1. Cas de  $L^\infty(\mu)$

– Soit  $f_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $L^\infty(\mu)$ , pour  $k, m, n > 1$  Soient les ensembles

$$A_k = \{x \in \Omega : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$$

$$B_{m,n} = \{x \in \Omega : |f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$$

$E = \cup_k A_k \cup_{m,n} B_{m,n}$  par définition de la norme infinie les ensembles  $A_k$  et  $B_{m,n}$  sont des mesures nulles, par  $\sigma$  sous additivité de  $\mu$

–  $f_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy uniforme sur  $\Omega/E$  alors elle est convergente uniformément vers  $f$  sur  $\Omega/E$

– À tendons la fonction  $f$  à  $\Omega$  en posant  $f = 0$  sur  $E$ , on montre que  $f \in L^\infty(\mu)$  alors  $L^\infty(\mu)$  est complet.

2. Cas de  $L^p(\mu)$

– Soit  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $f_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $L^p(\mu)$

■

**Théorème 1.8.4 (Théorème de Riesz)** Soit  $T$  une forme linéaire et continue sur  $L^p(\Omega)$ , Alors il existe une unique fonction  $g \in L^{p'}(\Omega)$  telle que :

$$T(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad \forall f \in L^p(\Omega)$$

## 1.9 Inégalité de Poincaré

**Théorème 1.9.1** *Inégalité de Poincaré-Friedrichs* Soit  $v \in H_0^1(a, b)$  alors il existe une constante  $C$  (en fonction de  $(b - a)$ ) tel que :

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(a,b)}$$

**Démonstration.** ( $\nabla v$  existe est carré sommable)

On peut écrire :

$$v(x) = \int_a^x \nabla v(y) dy$$

Alors, pour  $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} v^2(x) &= \left( \int_a^x \nabla v(y) dy \right)^2 \leq \int_a^x \nabla v(y); \\ \int_a^b v^2(x) dx &\leq \int_a^b \left[ \int_a^x (\nabla v(y))^2 dy x(x-a) \right] dx \leq \|\nabla v\|_{L^2(a,b)}^2 \int_a^b dx; \\ \|v\|_{L^2(a,b)}^2 &\leq \frac{(b-a)^2}{2} \|\nabla v\|_{L^2(a,b)}^2 \|v\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \|\nabla v\|_{L^2(a,b)}. \end{aligned}$$

Dans plus qu'a une dimension on a :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

■

**Remarque 1.9.2** *Pour une fonction  $v$  dont les dérivées n'existent qu'au sens de distribution on observe que puisque  $C^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^m$  (ou  $\Omega = (a, b)^d$ ) il existe une suite  $\varphi_k$  des fonctions  $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$  qui converge a  $v$  donc, on peut démontrer l'inégalité de poincaré pour un  $v \in H^1(\Omega)$  en la démontrons pour  $\varphi_n$  et en prenant la limite lorsque  $k \rightarrow \infty$*

On peut utiliser l'inégalité de poincaré-Friedrichs pour démontré le lemme suivant :

**Lemme 1.9.3** *L'expression :*

$$|u|_\Omega = \left( \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

*est une norme sur l'espace  $H_0^1(\Omega)$  qui est équivalent a la norme sur  $H_0^1(\Omega)$  dans le sens qu'il existe des constants  $C_1$  et  $C_2$  tels que :*

$$C_1 |u|_\Omega \leq \|u\|_\Omega \leq C_2 |u|_\Omega$$

**Démonstration.** Par l'inégalité de (P.F) il existe une constant  $C$  telle que :

$$\begin{aligned} \|v\|_{(a,b)} &\leq C\|\nabla v\|_{(a,b)} \Leftrightarrow \|v\|^2 \leq C^2\|\nabla v\|_2^2 \Leftrightarrow \int_a^b (v^2 + \nabla v^2)dx \\ &\leq (C^2 + 1) \int_a^b \nabla v^2 dx \Leftrightarrow \int_a^b \nabla v^2 dx \leq \int_a^b (v^2 + \nabla v^2)dx \end{aligned}$$

On conclut que :

$$|v|_1 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{(C^2 + 1)}|v| \quad \forall v \in H_0^1(a, b).$$

■

Inégalité de Cauchy-Schwartz

**Théorème 1.9.4** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $b_1, b_2, \dots, b_n$  des réels alors :

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)^2$$

avec égalité si et seulement si  $b_i = \lambda a_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$

**Démonstration.** On peut facilement montrer que la différence entre le membre de gauche et celui de droite est :

$$\sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$$

Et donc l'égalité a lieu si et seulement si  $a_i b_j = a_j b_i$  pour tous  $i, j$  c'est-à-dire  $\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$  pour tout  $i, j$ .

■

Espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$

Soit  $\Omega = [a, b]$  un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ , On considère l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  définie comme suit :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \exists g \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^\infty(\Omega) : \int_\Omega u \varphi' = - \int_\Omega g \varphi\}$$

La fonction  $g \in L^2(\Omega)$  est alors unique on la note  $u'$  On munit  $H^1(\Omega)$  de la topologie associée au produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &= H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \nabla v \end{aligned}$$

La norme induite par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est noté  $\|\cdot\|_{H^1}$  est vérifié :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

**Proposition 1.9.5** On a les résultats suivant :

1.  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert
2.  $H^1(\Omega)$  s'injecte de façon compact dans  $C^0(\overline{\Omega})$
3.  $H^1(\Omega)$  s'injecte de façon continue dans  $L^2(\Omega)$ .

## CHAPITRE 2

# EXISTENCE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS POUR UNE ÉQUATION VISQUEUX $P$ -LAPLACIENNE

Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites non linéaire avec un terme d'amortissement fort.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f(t) \text{ dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ dans } \Omega. \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

$f$  et  $k$  deux fonctions continues des données.

On démontre que ce problème, sous certaines hypothèses sur les données est équivalent au problème variationnel qu'on déterminera explicitement. Les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité assurent que ce problème possède au moins une solution faible dans un intervalle  $[0, T]$ . L'unicité de la solution est obtenue pour tout  $p \geq 2$ . A la fin de ce chapitre on s'intéresse à la dépendance continue de la solution par rapport aux données ainsi que le comportement asymptotique des solutions faibles.

En raison de la dégénération, le problème (2.0.1) n'admet pas de solutions classiques en général. Donc, nous étudions des solutions faibles.

### 2.1 Notations et formulation variationnelle

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , à frontière régulière  $\Gamma$ , on désigne par  $u$  un vecteur  $u : Q = \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  et on pose  $\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$  où  $T$  est un réel fini quelconque. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions

$u$  par rapport à  $x \in \Omega$  et  $t \in [0, T]$ . L'objet de ce chapitre est de chercher le déplacement  $u \in \mathbb{R}$  solution du problème (2.1.1)-(2.1.3) suivant :

**Problème 2.1.1** Trouver un champ des déplacements  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f(t) \text{ dans } Q, \quad (2.1.1)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (2.1.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega. \quad (2.1.3)$$

Où  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction décroissante telle que

$$k(t) \geq k_0 > 0 \text{ et } k'(t) < 0 \text{ p.p dans } [0, +\infty). \quad (2.1.4)$$

Les relations (2.1.2) et (2.1.3) sont les conditions aux limites homogène de Dirichlet et les conditions initiales, respectivement.

Pour l'étude de ce problème on aura besoin des hypothèses suivantes :

### 2.1.1 Hypothèses

Nous supposons aussi que les données initiales aient la régularité suivante :

$$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (2.1.5)$$

$$f \in L^2(Q), \quad (2.1.6)$$

où

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\} = H_0^1(\Omega).$$

## 2.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe on démontre que sous les hypothèses précédentes le problème (2.1.1)-(2.1.3) est équivalent à un problème variationnel, noté (P.V).

Pour donner la formulation variationnelle du problème considéré, nous définissons l'espace

$$W^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega), D_i v \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n\}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_{L^p(\Omega)}.$$

On désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  et qui est défini comme suit :

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in W^{1,p}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

et son dual est défini par  $W^{-1,p'}(\Omega)$ .

**Lemme 2.2.1** *Sous les hypothèses (2.1.5)-(2.1.6), le problème (2.1.1)-(2.1.3) est, formellement, équivalent au problème variationnel suivant :*

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ tel que} \\ (u', v) + k(t) a(u', v) + (|\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

**Démonstration.**

1. Soit  $u$  une solution du problème (2.1.1)-(2.1.3), en multipliant l'équation (2.1.1) par  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  il vient

$$(u', v) - k(t) (\Delta u', v) - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u, v) = (f, v),$$

ou encore

$$(u', v) - k(t) \int_{\Omega} \Delta u' v dx - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout  $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} (u', v) + k(t) \int_{\Omega} \nabla u' \nabla v dx - k(t) \int_{\Gamma} (\nabla u') \eta v d\Gamma + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \\ - \int_{\Gamma} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \eta v d\Gamma = (f, v) \end{aligned}$$

En posant  $v = 0$  sur  $\Gamma$ , il en résulte le problème variationnel suivant :

$$(u', v) + k(t) a(u', v) + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = (f, v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Finalement tenant compte des conditions (2.1.2), on conclut que  $u$  est une solution du problème (P.V).

2. Montrons l'implication inverse.

Soit  $u$  une solution variationnelle du problème (P.V), on a

$$(u', v) + k(t) a(u', v) + \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = (f, v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} (u', v) - k(t) \int_{\Omega} \Delta u' \cdot v dx + \int_{\Gamma} (\nabla u') \cdot \eta v d\Gamma - (\operatorname{div} |\nabla u|^{p-2} \nabla u, v) \\ + \int_{\Gamma} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \eta v d\Gamma = (f, v), \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Pour  $v = \psi \in D(\Omega)$  il vient

$$\begin{aligned} (u', \psi) - k(t) \int_{\Omega} \Delta u' \cdot \psi dx + \int_{\Gamma} (\nabla u') \cdot \eta \psi d\Gamma - (\operatorname{div} |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \psi) \\ + \int_{\Gamma} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \eta \psi d\Gamma = (f, \psi), \quad \forall \psi \in D(\Omega) \end{aligned}$$

d'où l'équation

$$u' - k(t) \Delta u' - \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f, \text{ p.p. dans } Q.$$

■

Si on pose

$$\|u\|_1 = (a(u, u))^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right)^{1/2}.$$

Il est clair que  $\|u\|_1$  définit une semi norme sur  $V$

**Démonstration.** Démontrons que  $\|u\|_1$  définit une semi norme sur  $V$ .

on pose

$$\|u\|_1 = (a(u, u))^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

$\|u\|_1$  est une semi norme si :

$$1- \|\lambda u\|_1 = |\lambda| \|u\|_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in V$$

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_1 &= \left( \int_{\Omega} (\nabla \lambda u) (\nabla \lambda u) dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \lambda^2 \nabla u \nabla u dx \right)^{1/2} \\ &= |\lambda| \left( \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right)^{1/2} = |\lambda| \|u\|_1 \end{aligned}$$

$$2- \|u + v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1 \quad \forall u \text{ et } v \in V, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \|u + v\|_1^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v| |\nabla u + \nabla v| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v| (|\nabla u| + |\nabla v|) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v| |\nabla u| dx + \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v| |\nabla v| dx \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \left( \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \text{ par l'inégalité de Hölder} \\ &= \left( \int_{\Omega} |\nabla u + \nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left( \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \right) \\ &= \|u + v\|_1 \left( \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

donc

$$\|u + v\|_1 \leq \left( \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \right) \|u + v\|_1.$$

■

De plus on a :

**Lemme 2.2.2**  $\|u\|_1$  est une semi norme équivalente à la norme  $\|u\|$  sur  $H_0^1(\Omega)$ .

**Démonstration.** Par continuité nous avons

$$|a(u, u)| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right| \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C_1 \|u\|^2$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré

$$a(u, u) \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq C_1' \|u\|^2$$

Donc

$$C_1'^{\frac{1}{2}} \|u\| \leq (a(u, u))^{\frac{1}{2}} \leq C_1'^{\frac{1}{2}} \|u\|.$$

■

## 2.3 Existence et Unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence globale et l'unicité d'une solution faible seront obtenues on se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, méthode de compacité. L'unicité de la solution pour tout  $p > \frac{2n}{n+2}$ .

Nous commençons par démontrer l'existence d'une solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.3).

### 2.3.1 Existence

Dans cette section, nous établissons le résultat d'existence locale et d'unicité pour le problème (2.1.1)-(2.1.3).

### 2.3.2 Existence locale

**Théorème 2.3.1** *Supposons que  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  et  $p > \frac{2n}{n+2}$ . Alors pour tout  $T > 0$ , problème (2.1.1)-(2.1.3) possède au moins une solution  $u$  satisfaisant :*

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)), \quad (2.3.1)$$

$$u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.2)$$

$$\nabla u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.3)$$

$$\nabla u \in L^2(0, T; L^p(\Omega)). \quad (2.3.4)$$

Avant de donner la démonstration explicite de ce théorème nous commençons par justifier que le problème variationnel (P.V) a un sens.

**Lemme 2.3.2** *Sous les hypothèses (2.1.5)-(2.1.6), le problème (P.V) a un sens.*

**Démonstration.** Notons que si  $u : t \rightarrow u(t)$  est une fonction de  $L^2(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  et si  $v$  est un élément de  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , la fonction  $t \rightarrow (u(t), v)_V$  appartient à  $L^2(0, T)$ . Tout d'abord puisque  $u$  est une fonction de  $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  et pour  $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , les fonctions  $t \mapsto (u(t), v)$ ,  $t \mapsto a(u(t), v)$  appartiennent à  $L^2(0, T)$ . Aussi la fonction  $t \mapsto (|\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), v)$  appartient à  $L^1(0, T)$  pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , car en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u(t) v(t) dx \leq \| |\nabla u|^{p-2} \nabla u(t) \|_{L^{p'}(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ & = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)p'} dx \right) \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \right) \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq C \|\nabla u(t)\|_{L^p(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C. \end{aligned}$$

Il en résulte que le problème variationnel (P.V) a un sens dans  $D'([0, T])$ . ■

**Lemme 2.3.3** *Sous les hypothèses (2.1.5), (2.1.6), les conditions (2.1.3) ont un sens.*

**Démonstration.** Tenant compte de (2.3.1) et (2.3.2) on a :

$$u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

En particulier, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,  $u$  est continue de  $[0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ , donc ((2.1.3),a) a un sens.

Reste à vérifier que ((2.1.3),b) a un sens, pour cela on revient à l'équation (2.1.1) qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(t) \Delta u' + \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f.$$

En utilisant (2.3.1) on déduit

$$\Delta u' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \right|^{p'} dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)p'} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \end{aligned}$$

par conséquent

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \in L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

De (2.3.2) on a

$$f(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Donc, il en résulte que

$$u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) + L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)).$$

D'où, en particulier

$$u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)).$$

Ceci joint à (2.3.2), en particulier,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est continue de  $[0, T] \rightarrow H^{-1}(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ , de sorte que ((2.1.3), b) a un sens. ■

**Démonstration du Théorème 2.3.1.** La démonstration de ce théorème est organisée comme suit

- On construit des solutions "approchées" par la méthode de Faedo-Galerkin ;
- On établit, pour ces solutions approchées, des estimations à priori ;
- On passe à la limite (dans les termes non linéaires) en se basant sur la méthode de compacité et celle de monotonie.

a) Etape 1 :

*Solution approchée.*

On introduit une suite  $(w_n)$  de fonctions ayant les propriétés suivantes :

- \*  $\forall j; w_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ;
- \* La famille  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  est linéairement indépendante ;
- \* L'espace  $V_m = \operatorname{span} \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  engendré par la famille  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  est dense dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

Soit  $u_m = u_m(t)$  une solution approchée du problème (2.1.1) sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m K_{jm}(t) w_j,$$

où  $K_{jm}$  sont déterminés par le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_m}{\partial t}, w_j \right) + k(t) (\nabla u_m', \nabla w_j) + (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla w_j) \\ = (f, w_j), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

avec les conditions initiale qui satisfait

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_j \rightarrow u_0 \text{ quand } m \rightarrow \infty \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.3.6)$$

Comme la famille  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  est linéairement indépendante, le problème (2.3.5)-(2.3.6) possède au moins une solution  $u_m$  dans l'intervalle  $[0, t_m]$  ayant la régularité suivante :

$$u_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m), u'_m(t) \in L^2(0, t_m; V_m).$$

Les estimations à priori sur  $(u_m(t))_m$  qui suivent montreront que  $t_m$  est indépendant de  $m$ . (i.e.  $t_m = T$ .)

b) Etape 2 :

Premier estimation

Remplaçant  $w_j$  dans (2.3.5) par  $u_m(t)$ , obtient

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u_m}{\partial t}, u_m(t) \right) + k(t) (\nabla u'_m, \nabla u_m(t)) + (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla u_m(t)) \\ = (f, u_m(t)), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Donc par les hypothèses imposées on a :

$$\begin{aligned} (u'_m(t), u_m(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 ; \\ (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla u_m(t)) &= \|\nabla u_m\|_p^p ; \\ k(t) (\nabla u'_m, \nabla u_m(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} k(t) |\nabla u_m(t)|^2 - \frac{1}{2} k'(t) |\nabla u_m(t)|^2. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Utilisons les inégalités de Hölder et de Young de (2.3.8) et (2.3.7) il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} k(t) |\nabla u_m(t)|^2 - \frac{1}{2} k'(t) |\nabla u_m(t)|^2 \\ + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_p^p \leq |(f(t), u_m(t))| \leq \frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |f(t)|^2. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ , par intégration par partie sur  $(0, t)$  il découle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \frac{1}{2} k(t) |\nabla u_m(t)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t k'(s) |\nabla u_m(s)|^2 ds \\ & + \int_0^t \|\nabla u_m\|_p^p ds \leq \int_0^t |(f(s), u_m(t))| ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t |u_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2} |u_{0m}|^2 + \frac{1}{2} k(0) |\nabla u_{1m}|^2. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

De (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6), on conclut qu'il existe une constante  $C_2 > 0$  telle que :

$$\frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2} |u_{0m}|^2 + \frac{1}{2} k(0) |\nabla u_{1m}|^2 \leq C_2. \quad (2.3.11)$$

Par conséquent, en utilisant le lemme de Gronwall, on en déduit l'existence d'une constante positive  $C$  indépendante de  $m$  et de  $[0, t_m]$  telle que

$$|u_m(t)| \leq C \text{ (indépendante de } m). \quad (2.3.12)$$

De (2.3.10) on en déduit

$$|\nabla u_m(t)| + \int_0^t \|\nabla u_m\|_p^p ds \leq C \text{ (indépendante de } m). \quad (2.3.13)$$

De cette dernière estimation (2.3.13), on conclut que  $t$  est indépendant de  $m$ , et par conséquent  $\forall m, t_m = T$ .

Deuxième estimation

Remplaçant  $w_j$  dans (2.3.5) par  $u'_m(t)$ , obtient

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u_m}{\partial t}, u'_m(t) \right) + k(t) (\nabla u'_m, \nabla u'_m(t)) + (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla u'_m(t)) \\ & = (f, u'_m(t)), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Donc par hypothèses :

$$\begin{aligned} & (u'_m(t), u'_m(t)) = |u'_m(t)|^2 ; \\ & (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla u'_m(t)) = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_p^p ; \\ & k(t) (\nabla u'_m, \nabla u'_m(t)) = \frac{1}{2} k(t) |\nabla u'_m(t)|^2 . \end{aligned}$$

Utilisons les inégalités de Hölder et de Young on conclure que

$$|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}k(t) |\nabla u'_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_p^p \leq |(f(t), u'_m(t))| \leq \frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |f(t)|^2.$$

Pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ , par intégration par partie sur  $(0, t)$  il découle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}k_0 \int_0^t |\nabla u'_m(s)|^2 ds + \frac{1}{p} \|\nabla u_m\|_p^p \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{1}{p} \|\nabla u_{0m}\|_p^p \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Par conséquent, en utilisant (2.3.11), on en déduit l'existence d'une constante positive  $C$  telle que

$$\|\nabla u_m\|_p \leq C \text{ (indépendante de } m).$$

De (2.3.10) on en déduit

$$\int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + \int_0^t |\nabla u'_m(s)|^2 ds \leq C \text{ (indépendante de } m).$$

Les termes non linéaires dans (2.3.10) et (2.3.15) sont uniformément bornés sur  $[0, T]$ . La solution  $u_m(t)$  du problème (2.1.1)-(2.1.3) existe sur  $[0, T]$  pour chaque  $m$ . D'autre part

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)), \quad (2.3.16)$$

$$u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.17)$$

$$\nabla u'_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.18)$$

$$\nabla u_m \text{ demeure dans un borné de } L^2(0, T; L^p(\Omega)) \quad (2.3.19)$$

donc on déduit qu'on peut extraire une sous suite de  $(u_m(t))$ , encore notée  $(u_m(t))$ , tel que pour tout  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u \text{ faible étoile } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)), \\ u'_m &\longrightarrow u' \text{ faible } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

et pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} u_m(t) &\longrightarrow u(t) \text{ faible étoile } W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \\ u'_m(t) &\longrightarrow u'(t) \text{ faible étoile } L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Corollaire 2.3.4** L'ensemble  $\{u_m(x, t)\}$  est relativement compact dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ .

**Démonstration.** D'après la condition  $p > \frac{2n}{n+2} \Rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , nous pouvons obtenir les relations suivantes

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W_0^{-1,p'}(\Omega)$$

De plus, par (2.3.16), (2.3.17), l'injection  $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\text{Compact}} L^2(\Omega) \hookrightarrow W_0^{-1,p'}(\Omega)$  et le Théorème 5 dans [20], nous savons que l'ensemble  $\{u_m\}$  est relativement compact dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ .

■

c) Etape 3 :

Passage à la limite.

Puisque  $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , il résulte en particulier de (2.3.21) que les suites  $(u_m)$ ,  $(u'_m)$  sont bornées dans  $L^2(0, T; W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q)$ ,  $L^2(Q)$ , respectivement, en particulier  $(u_m)$  demeure dans un borné de  $H^1(Q)$ .

En utilisant le corollaire (2.3.4) et le fait que l'injection de  $H^1(Q)$  dans  $L^2(Q)$  est compact, voir [22, 19], on déduit que :

$$u_\mu(t) \longrightarrow u(t) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p. dans } Q; \quad (2.3.22)$$

Intégrons (2.3.5) sur  $(0, t)$  trouvons

$$\begin{aligned} (u'_m(t), w_j) + \int_0^t k(s) (\nabla u'_m, \nabla w_j) ds + \int_0^t (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla w_j) ds \\ = (u_{1m}, w_j) + \int_0^t (f, w_j) ds, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Puisque

$$\left| \int_0^t k(s) (\nabla u_m, \nabla w_j) ds \right| \leq k(0) \int_0^t |\nabla u_m| |\nabla w_j| ds \leq C, \quad t > 0; \quad (2.3.24)$$

$$\left| \int_0^t (f, w_j) ds \right| \leq \int_0^t |f(s)| |w_j| ds \leq C, \quad t > 0; \quad (2.3.25)$$

$$\left| \int_0^t (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m, \nabla w_j) ds \right| \leq \int_0^t \|\nabla u_m\|_p^{p-1} \|\nabla w_j\|_p ds \leq C, \quad t > 0; \quad (2.3.26)$$

prenant  $m \rightarrow \infty$  dans (2.3.23) et en faisant l'usage de (2.3.21), (2.3.22), (2.3.24)-(2.3.26), (2.3.5) et théorème de la convergence dominé de Lebesgue il vient

$$\begin{aligned} (u'(t), w_j) + \int_0^t k(s) (\nabla u', \nabla w_j) ds + \int_0^t (|\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla w_j) ds \\ = (u_1, w_j) + \int_0^t (f, w_j) ds, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Par l'argument de densité, différencier (2.3.27) on obtient, pour tout  $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k(t) \Delta u' - \operatorname{div} |\nabla u|^{p-2} \nabla u - f, v \right) = 0, \quad t > 0. \quad (2.3.28)$$

De (2.3.21)

$$(u_m(t), w_j) \rightarrow (u(t), w_j) \text{ faible étoile } L^\infty [0, T] \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Par la continuité, nous obtenons

$$(u_m(0), w_j) \rightarrow (u(0), w_j) \text{ faible étoile } L^\infty [0, T] \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.3.29)$$

Prenant  $t \rightarrow 0^+$  dans (2.3.27) il découle

$$(u'(0), w_j) \rightarrow (u_1, w_j) \text{ faible étoile } L^\infty [0, T] \text{ quand } m \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3.30)$$

par conséquent (2.3.29), (2.3.30) et (2.3.6) donne

$$u(0) = u_0 \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.3.31)$$

D'où il résulte que  $u \in L^\infty([0, T]; W_0^{1,p}(\Omega))$  est une solution faible locale du problème (2.1.1)-(2.1.3). ■

### 2.3.3 Unicité

**Théorème 2.3.5** *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1. Alors pour tout  $p > \frac{2n}{n+2}$  et  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ , la solution  $u$  obtenue dans le Théorème 2.3.1 est unique.*

**Démonstration.** Soient  $u, v$  deux solutions du problème (2.1.1)-(2.1.3), au sens du Théorème 2.3.1.

En posant  $\Psi = (u - v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors  $\Psi$  doit vérifier le système suivant :

$$\Psi' - k(t) \Delta \Psi' = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \quad (2.3.32)$$

dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $T > 0$ , avec les conditions au bord  $\Psi = 0$  sur  $\Gamma$  et les conditions initiales en multiplions les deux membres de (2.3.32) par  $\Psi(t)$  on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Psi'(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} k(t) |\nabla \Psi(t)|^2 - \frac{1}{2} k'(t) |\nabla \Psi(t)|^2 + (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \Psi) = 0. \quad (2.3.33)$$

En utilisant le fait que  $(|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \Psi) \geq 0$  nous arrivons à

$$|\Psi'(t)|^2 + \frac{1}{2} k(t) |\nabla \Psi(t)|^2 \leq 0$$

Combinant l'inégalité ci-dessus on obtient  $\Psi(t) = \Psi(0) = 0$  dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  d'où  $u = v$ . ■

## 2.4 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Dans ce paragraphe, on analyse la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Pour cela, on définit l'espace de Banach suivant :

$$W(Q) = \left\{ \varphi / \varphi \in L^\infty(0, T; V), \varphi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \right\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{W(Q)} = \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; V)} + \|\varphi'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}.$$

On considère l'application  $\pi$  définie par :

$$\begin{cases} \pi : L^2(Q) \times V \rightarrow W(Q) \\ \{f, u_0\} \mapsto u, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où  $u$  est une solution du problème (2.1.1). Relativement à cette notation, on a le Théorème 2.4.1 suivant :

**Théorème 2.4.1** *Sous les hypothèses des Théorème 2.3.1 et Théorème 2.3.5. Alors, l'application  $\pi$  définie par (2.4.1) est continue, autrement dit pour tout  $u, v \in W(Q)$ , on a*

$$\|u' - v'\|^2 + \|u - v\|^2 \leq C(u, v) \left[ \|u_1 - v_1\|^2 + \|u_0 - v_0\|^2 \right],$$

où  $\pi(\{f, u_0\}) = u$  et  $\pi(\{g, v_0\}) = v$ .

**Démonstration.** soit  $\pi(\{f, u_0\}) = u$  et  $\pi(\{g, v_0\}) = v$   
et on suppose que :

$$\{f, u_0\} \rightarrow \{g, v_0\} \text{ dans } L^2(Q) \times W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W(Q).$$

Alors  $v$  demeure dans un borné de  $W(Q)$ . On peut alors choisir  $v$  dans un borné de  $W(Q)$ .  
On a :

$$\begin{cases} u' - k(t) \Delta u' = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f, \\ v' - k(t) \Delta v' = \operatorname{div} (|\nabla v|^{p-2} \nabla v) + g. \end{cases}$$

Soit  $\Psi = u - v$  on a :

$$\Psi' - k(t) \Delta \Psi' - \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) = f - g$$

on multiplie les deux membre par  $\Psi$  et lorsque les intégrales ci-après ont un sens, on obtient après utilisations de la formule de Green et les conditions initiales du problème  $(P)$ ,

$$(\Psi'(t), \Psi(t)) - k(t) (\Delta \Psi(t), \Psi(t)) - \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \Psi) = (f - g, \Psi(t)) \quad (2.4.2)$$

on a :

$$\begin{aligned} (\Psi'(t), \Psi(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Psi(t), \Psi(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Psi(t)|^2, \\ -k(t) (\Delta \Psi(t), \Psi(t)) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} k(t) |\nabla \Psi(t)|^2 - \frac{1}{2} k'(t) |\nabla \Psi(t)|^2, \\ -\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \Psi) &= (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \Psi) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Utilisant les inégalités de Hölder et de Young alors par intégration sur  $(0, t)$  de (2.4.2)-(2.4.3) il vient

$$\begin{aligned} |\Psi(t)|^2 + k(t) |\nabla \Psi(t)|^2 &\leq |u_0 - v_0|^2 + k(0) \|\nabla u_0 - \nabla v_0\|^2 \\ + \int_0^t k'(s) |\nabla \Psi(s)|^2 ds &+ \frac{1}{2} \int_0^t |f(s) - g(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\Psi(s)|^2 ds \end{aligned}$$

or

$$|\Psi(t)|^2 + k_0 |\nabla \Psi(t)|^2 \leq |u_0 - v_0|^2 + k(0) \|\nabla u_0 - \nabla v_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |f(s) - g(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |\Psi(s)|^2 ds$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$|u - v|^2 + \|\nabla u - \nabla v\|^2 \leq C(u, v) \left( |u_0 - v_0|^2 + k(0) \|\nabla u_0 - \nabla v_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t |f(s) - g(s)|^2 ds \right)$$

d'où  $c(u, v)$  est fonction de  $u$  et  $v$ , bornée sur les bornées  $W(Q)$ . Donc la fonction  $\pi$  est continue. ■

### 2.4.1 Comportement asymptotique des solutions faibles

Dans cette section, nous étudions les propriétés asymptotiques de la solution faible au problème (2.1.1)-(2.1.3) avec  $f = 0$ . Notamment, nous étudions le comportement asymptotique à long terme de la solution et le comportement asymptotique par rapport à l'exposant  $p$  quand  $p \rightarrow \infty$ .

Pour démontrer le comportement de la solution locale  $u$  du problème (2.1.1)-(2.1.3) donnée par le ??, par la relation (2.3.9) on définit la fonction d'énergie comme suit :

$$E(t) = \frac{1}{2}|u|^2 + \frac{1}{2}k(t)|\nabla u|^2, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4.4)$$

$E$  est une fonction positive.

**Lemme 2.4.2** *L'énergie  $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est décroissante et absolument continue et on a*

$$E'(t) = \frac{1}{2}k'(t)|\nabla u|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4.5)$$

**Démonstration.** Pour tout  $0 \leq S < T < \infty$ , d'après (2.1.1), (2.1.2) et (??) on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_{\Omega} u \left( \frac{\partial u}{\partial t} - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \right) dx dt = \\ &= \int_S^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} u - k(t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) u dx dt = \\ &= \int_S^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} k(t) |\nabla u(t)|^2 - \int_S^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} k'(t) |\nabla u(t)|^2 + \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx dt \\ &= \int_S^T E'(t) dt - \int_S^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} k'(t) |\nabla u(t)|^2 + \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx dt \\ &= E(T) - E(S) - \int_S^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} k'(t) |\nabla u(t)|^2 + \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx dt, \end{aligned}$$

donc

$$E(T) - E(S) = \int_S^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} k'(t) |\nabla u(t)|^2 dx dt - \int_S^T \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx dt, \quad 0 \leq S < T < \infty. \quad (2.4.6)$$

Donc  $E$  est décroissante.

D'autre part, de (2.4.6) on conclut que  $E$  est localement absolument continue alors (2.4.5) est satisfaite. ■

**Théorème 2.4.3** Soit  $u(x, t) \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$  une solution faible du problème (2.1.1)–(2.1.2). Si  $u' \in W_0^{1,2}(Q)$  et  $2 < p$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t)\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

**Démonstration.** Soit

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u|^2 + k(t) |\nabla u|^2) dx,$$

En notant que  $u(x, t), u'(x, t) \in C(0, T; H_0^1(\Omega))$  en particulier,  $u : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$  et  $\nabla u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$  d'après [19, Lemme 1.2] sont continue sur  $(0, T)$ , et on a

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_{\Omega} (uu' + k(t) \nabla u \nabla u') dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} k'(t) |\nabla u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} k'(t) |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx \leq - \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx = - \|\nabla u\|_p^p \leq 0. \end{aligned}$$

Par l'injection

$$W_0^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$$

et comme  $\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^p dx \leq C$ , on a

$$\int_{\Omega} (|u|^2 + k(t) |\nabla u|^2) dx \leq C \int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C \|u\|_p^2 \leq C \|\nabla u\|_p^2,$$

par conséquent

$$F(t) \leq C |F'(t)|^{\frac{2}{p}}.$$

En notant que

$$F(t) \geq 0, F'(t) \leq 0,$$

on a

$$F'(t) \leq -C (F(t))^{\frac{p}{2}}$$

et donc par intégration

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u|^2 + k(t) |\nabla u|^2) dx \leq \frac{1}{(C_1 t + C_2)^{\frac{2}{p-2}}}, \quad C_1, C_2 > 0.$$

et on particulier

$$\int_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx \leq \frac{2}{\min(1, k_0) (C_1 t + C_2)^{\frac{2}{p-2}}} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.4.3. ■

Le dernier théorème de ce chapitre est consacré à un autre type de comportement asymptotique de solutions au problème (2.1.1)-(2.1.3) quand  $p \rightarrow \infty$ .

**Théorème 2.4.4** Soit  $u$  une solution faible du problème (2.1.1)-(2.1.3) avec  $n = 1$ ,  $\Omega = (0, 1)$ ,  $u' \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(Q))$ ,  $\|\nabla u_0\|_p^2 \leq C$  où la constante positive  $C$  est indépendante de  $p$ , alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - u_0(x)\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} = 0.$$

**Démonstration.** Multipliant (2.1.1) par  $u'$  et puis intégrer sur  $Q_T$  on obtient

$$\begin{aligned} \min(1, k_0) \int_0^T \int_{\Omega} (|u'|^2 + |\nabla u'|^2) dx dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} (|u'|^2 + k(t) |\nabla u'|^2) dx dt \\ &= -\frac{1}{p} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^p dx dt \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \\ &\leq \frac{1}{p} \max\left(\int_{\Omega} |\nabla u_0|^p dx, 1\right) = \frac{1+C}{p} \end{aligned}$$

par conséquent

$$\int_0^T \int_{\Omega} (|u'|^2 + |\nabla u'|^2) dx dt \leq \frac{1+C}{p \min(1, k_0)} \quad (2.4.7)$$

Par conséquent, par (2.4.7) et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (|u - u_0|^2 + |\nabla u - \nabla u_0|^2) dx dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \left( \left| \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s} ds \right|^2 + \left| \int_0^t \frac{\partial \nabla u}{\partial s} ds \right|^2 \right) dx dt \\ &\leq T^2 \int_0^T \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial s} \right|^2 \right) dx dt \\ &\leq \frac{(1+C) T^2}{p \min(1, k_0)} \rightarrow 0 \text{ quand } p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.4.4. ■

**Definition 2.4.5** Nous définissons les notions suivantes :

$$T_{\max} = \sup \{T > 0, u = u(t) \text{ existe sur } [0, T]\}$$

où  $u(t)$  est la solution du système (2.1.1)-(2.1.3) désiré, rappelons que si  $T_{\max} < \infty$ , alors

$$\lim_{\substack{t \rightarrow T_{\max} \\ t < T_{\max}}} |u|^2 + |\nabla u|^2 = +\infty.$$

Si  $T_{\max} < +\infty$ , nous disons que la solution de (2.1.1)-(2.1.3) blows up et que  $T_{\max}$  est le temps de blows up.

Si  $T_{\max} = +\infty$ , nous disons que la solution de (2.1.1)-(2.1.3) est locale.

## CHAPITRE 3

### NON-EXISTENCE GLOBALE ET RÉSULTATS D'EXPLOSION EN TEMPS FINI POUR UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION QUASI-LINÉAIRE

Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites non linéaire avec un terme d'amortissement fort et un terme source non linéaire et plus générale de la forme  $f(u)$  dans le cas où le coefficient de viscosité  $k(t) = 0$  (Juste pour simplifier l'étude), est le suivant :

$$\begin{aligned} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) + f(u), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) &= 0 \text{ sur } \Gamma, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), x \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.0.1)$$

$f(u)$  est un terme source général dépendant de  $m$ , le coefficients  $a(x, \cdot)$  est une fonction mesurables sur  $\Omega$ ,  $m$  et  $p$  deux constants telles que :

$$2 \leq m < p \leq m_*, \quad (3.0.2)$$

où

$$m_* = \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{si } n > 2 \\ +\infty & \text{si } n \leq 2. \end{cases}$$

En se basant sur des conditions appropriées sur les données, un résultat d'explosion en temps fini est prouvé si le données initial possède une énergie positive appropriée et, dans ce cas, nous estimons avec précision la durée de vie de la solution  $T^*$ . L'explosion en temps fini des solutions avec une énergie initiale négative est également établi.

### 3.0.2 Préliminaires

Ci-dessous quelques propriétés de l'espace  $L^p(\Omega)$ , qui seront utilisées dans l'étude de problème.(3.0.1).

- L'inégalité de Hölder généralisée suivante

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) \|u\|_p \|v\|_{p'} \leq 2 \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

s'applique à tous  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $p \in (1, \infty)$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$ .

- Si  $\Omega$  a une mesure finie, et  $p, q$  sont tels que  $p \leq q$ , alors l'injection  $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  est continue.
- L'espace de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$  avec  $p \in (1, \infty)$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , est défini comme

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid |\nabla u|^p \in L^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \\ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{1,p} = \sum_i \|D_i u\|_{p,\Omega} + \|u\|_{p,\Omega}, \end{array} \right\}$$

et  $W_0^{1,p'}(\Omega)$  est défini de la même manière que les espaces de Sobolev habituels and (voir par exemple [24, 15]).

- Une norme équivalente de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est donnée par

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p,\Omega}.$$

De plus, nous fixons  $W_0^{1,p}(\Omega)$  à la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Cependant (voir [24, 15]). Le  $(W_0^{1,p}(\Omega))'$  est l'espace de dualité de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  par rapport au produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  et est défini par  $W^{-1,p'}(\Omega)$ , de la même manière que les espaces classiques de Sobolev, où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

- Si  $p, q : \Omega \rightarrow [1, +\infty)$  avec  $p^* - q > 0$  où  $p^* = \frac{np}{n-p}$ , alors  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  est continu et compact.

**Lemme 3.0.6** ([24, 15]) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p, m : \Omega \rightarrow [1, +\infty)$  satisfait (3.0.2), alors

$$B_0 \|\nabla u\|_m \geq \|u\|_p, \text{ pour tous } u \in W_0^{1,m}(\Omega). \quad (3.0.3)$$

où la constante optimale de Sobolev intégrant  $B_0$  est dépendante de  $p$  et  $|\Omega|$ .

**Lemme 3.0.7 (Inégalité de Poincaré)** ([24, 15]) Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $m$  satisfait (3.0.2), alors

$$D_0 \|\nabla u\|_m \geq \|u\|_m, \text{ pour tous } u \in W_0^{1,m}(\Omega). \quad (3.0.4)$$

où la constante optimale de Sobolev intégrant  $D_0$  est dépendante de  $m$  et  $|\Omega|$ .

### 3.0.3 Hypothèses mathématiques

Dans cette section, nous établissons l'agrandissement de certaines solutions à énergie positive. Énoncer et prouver notre résultat.

Soit la fonction  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ , avec la primitive

$$F(u) = \int_0^u f(\eta) d\eta. \quad (3.0.5)$$

satisfait

$$|f(s)| \leq C_0 |s|^{p-1}, \quad pF(s) \leq sf(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad C_0 > 0. \quad (3.0.6)$$

Un exemple typique simple de ces fonctions est

$$f(s) = |s|^{p-2} s.$$

Supposons que  $a(x, t)$  soit une fonction positive appartenant à l'espace  $W^{1,\infty}(0, \infty; L^\infty(\Omega))$  et que  $a_t(x, t) \leq 0$  p.p pour  $t \geq 0$ .

Soit

$$B_1 = \max\left(1, B_0, \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{1}{p}}\right), \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{B_1^p C_0}\right)^{\frac{m}{p-m}}, \quad \alpha_0 = \|\nabla u_0\|_m^m, \quad (3.0.7)$$

et

$$E_0 = \left(\frac{1}{B_1^p C_0}\right)^{\frac{m}{p-m}} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) \alpha_1. \quad (3.0.8)$$

## 3.1 Résultat principal

Dans cette section, nous présentons notre principal résultat de gonflement. Nous commençons par un résultat d'existence locale pour le problème (3.0.1), en utilisant les résultats de Agaki et Otani [14], le théorème suivant, qui confirme l'existence d'une solution locale est un résultat direct.

**Théorème 3.1.1** *Pour tout  $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ , il existe un nombre  $T_0 \in (0; T]$  tel que le problème (3.0.1) a une solution forte  $u$  sur  $[0, T_0]$  satisfaisant :*

$$u \in C([0, T_0], W^{1,m}(\Omega)) \cap C([0, T_0], W^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,2}([0, T_0], L^2(\Omega)).$$

### 3.2 Explosion en temps fini où l'énergie initiale est positive

Cette section présente d'abord notre principal résultat d'explosion et sa preuve du problème (3.0.1). Pour cela, nous commençons par le lemme suivant qui définit l'énergie de la solution

**Lemme 3.2.1** La fonction d'énergie correspondante au problème (3.0.1) est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \quad (3.2.1)$$

de plus, par la formule facilement vérifiable

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Omega} a(x, t) u_t^2(x, t) dx \leq 0 \quad (3.2.2)$$

l'inégalité  $E(t) \leq E(0)$  est obtenue.

**Démonstration.** En multipliant (3.0.1) par  $u_t$  on obtient :

$$\begin{aligned} & (a(x, t)u_t, u_t) - (\operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u), u_t) = (f(u), u_t) \\ & = (a(x, t)u_t, u_t) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)u_t dx = \int_{\Omega} f(u)u_t dx \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

On calcule d'abord les intégrales suivants :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u)u_t dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F(u) dx \text{ (voire (0.0.16))} \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)u_t dx &= - \int_{\Gamma} |\nabla u|^{m-2}\nabla u u_t d\Gamma + \int_{\Omega} |\nabla u|^{m-2}\nabla u \nabla u dx \end{aligned}$$

comme on a :

$$- \int_{\Gamma} |\nabla u|^{m-2}\nabla u u_t d\Gamma = 0 \text{ car } u(x, t) = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Alors

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \operatorname{div} |\nabla u|^{m-2}\nabla u u_t dx &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{m-2}\nabla u \nabla u dx \\ &= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx \end{aligned}$$

Donc (3.2.3) devient

$$(a(x, t)u_t, u_t) + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} F(u) dx = 0$$

or

$$(a(x, t)u_t, u_t) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx - \int_{\Omega} F(u) dx \right) = 0$$

si on pose :

$$E(t) = \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx - \int_{\Omega} F(u) dx$$

on obtient que

$$(a(x, t)u_t, u_t) + \frac{d}{dt} E(t) = 0$$

Alors

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\Omega} a(x, t) u_t u_t dx \leq 0, \text{ car } a(x, t) u_t^2(x, t) \geq 0.$$

Alors  $E(t)$  décroissante, et on a

$$E(t) \leq E(0).$$

où

$$E(0) = \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^m dx - \int_{\Omega} F(u_0) dx.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer nos principaux résultats du théorème.

**Théorème 3.2.2** *Si les données initiales  $u_0 \in W^{1,m}(\Omega)$  sont telles que  $u_0 \neq 0$ ,*

$$E(0) = \int_{\Omega} \frac{1}{m} |\nabla u_0(x)|^m dx - \int_{\Omega} F(u_0(x)) dx \leq E_0 \quad (3.2.4)$$

alors il existe un  $T^*$  tel que  $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|u(\cdot, t)\|_2 = +\infty$ . De plus, si  $E(0) < E_0$ , alors le  $T^*$  peut être borné inférieurement comme suit :

$$T^* \leq \frac{8 \|\sqrt{a_0} u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{(p-2)^2 (E_0 - E(0))}. \quad (3.2.5)$$

où  $a(x, 0) := a_0$  et  $u(x, 0) := u_0$ .

Pour prouver le théorème principal, rappelons d'abord les lemmes suivants.

**Lemme 3.2.3** ([28, Lemma1.1] *Supposons que  $\varphi \in C^2([0, T])$  satisfaisant :*

$$\varphi'' \varphi - (1 + \alpha) (\varphi')^2 \geq 0, \quad \alpha > 0$$

et

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi'(0) > 0,$$

alors

$$\varphi \rightarrow \infty \text{ quand } t \rightarrow t_1 \leq t_2 = \frac{\varphi(0)}{\alpha\varphi'(0)}.$$

**Lemme 3.2.4** Supposons que  $E(0) < E_0$ . Il existe alors une constante  $\alpha_2 > \alpha_1$  telle que :

$$\|\nabla u\|_m^m \geq \alpha_2 > \alpha_1 \text{ pour tous } t \geq 0.$$

**Démonstration.** Grâce à (3.0.5) et (3.0.3), nous avons pour tout  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \\ &\geq \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m - \frac{C_0}{p} \int_{\Omega} |u(x, t)|^p dx \\ &\geq \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m - \frac{C_0}{p} B_1^p \|\nabla u\|_m^p =: g(\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, +\infty[ \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

où  $\alpha = \|\nabla u\|_m^m$ . Maintenant si nous posons

$$h(\alpha) = \frac{1}{m} \alpha - \frac{C_0}{p} (\alpha B_1^m)^{\frac{p}{m}}$$

Notez que  $h(\alpha) = g(\alpha)$ . Il est facile de vérifier que la fonction  $h(\alpha)$  croissante pour  $0 < \alpha < \alpha_1$  et décroissante pour  $\alpha_1 < \alpha \leq +\infty$ .

Étant donné que  $E(0) < E_0 = h(\alpha_1)$ , il existe une constante positive  $\alpha_2 \in (\alpha_1, +\infty)$  telle que  $h(\alpha_2) = E(0)$ . Alors nous avons  $h(\alpha_0) = g(\alpha_0) \leq E(0) = h(\alpha_2)$ . Cela implique que  $\alpha_0 \geq \alpha_2 > \alpha_1$ .

Pour montrer que  $\|\nabla u(x, t)\|_m^m \geq \alpha_2$  nous raisonnons par absurde en supposant que  $\|\nabla u(x, t^*)\|_m^m < \alpha_2$  pour un certain  $t^*$ . Ensuite, par la continuité de  $\|\nabla u(\cdot, t)\|_m$ -norm par rapport à la variable de temps, on peut choisir  $t^*$  tel que  $\alpha_2 > \|\nabla u(x, t^*)\|_m^m > \alpha_1$ . La monotonie de  $h(\alpha)$  donne  $E(t^*) \geq h(\|\nabla u(x, t^*)\|_m^m) > h(\alpha_2) = E(0)$  c'est impossible car  $E(0) \geq E(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Par conséquent, pour tous  $t \geq 0$  :

$$\|\nabla u\|_m^m \geq \alpha_2 > \alpha_1. \quad (3.2.7)$$

■

**Démonstration du Théorème 3.2.2. Cas 1 :**  $E(0) < E_0$ . Le but est de construire une fonction appropriée qui réponde aux conditions du lemme 3.2.3, nous avons défini la fonction

appropriée suivante pour notre proposition,

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u^2(x,s)dxds + \int_0^t \int_{\Omega} (s-t)a_t(x,s)u^2(x,s)dxds \quad (3.2.8) \\
 &\quad + (T_0 - t) \int_{\Omega} a_0(x)u_0(x)dx + \beta(t+t_0)^2, \quad t < T_0 \leq T \\
 &= \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u^2(x,s)dxds + \int_0^t \int_{\Omega} sa_t(x,s)u^2(x,s)dxds \\
 &\quad - t \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x,s)u^2(x,s)dxds + (T_0 - t) \int_{\Omega} a_0(x)u_0(x)dx + \beta(t+t_0)^2.
 \end{aligned}$$

Dérivons  $\varphi$  :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= \int_{\Omega} a(x,t)u^2(x,t)dx - \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x,s)u^2(x,s)dxds \\
 &\quad - \int_{\Omega} a_0(x)u_0^2(x)dx + 2\beta(t+t_0).
 \end{aligned}$$

On pose :

$$I = \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x,s)u^2(x,s)dxds$$

On intégrons par parties :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_{\Omega} a_t(x,s)u^2(x,s)dxds &= \left[ \int_{\Omega} a(x,s)u^2(x,s)dx \right]_{s=0}^{s=t} \\
 &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u(x,s)u_t(x,s)dxds \\
 &= \int_{\Omega} a(x,t)u^2(x,t)dx - \int_{\Omega} a_0(x)u_0^2(x)dx \\
 &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u(x,s)u_t(x,s)dxds
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= \int_{\Omega} a(x,t)u^2(x,t)dx - \int_{\Omega} a(x,t)u^2(x,t)dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} a_0(x)u_0^2(x)dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u(x,s)u_t(x,s)dxds \\
 &\quad - \int_{\Omega} a_0(x)u_0^2(x)dx + 2\beta(t+t_0).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi'(t) = 2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u(x, s) u_t(x, s) dx ds + 2\beta (t + t_0). \quad (3.2.9)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= 2 \int_{\Omega} a(x, t) u(x, t) u_t(x, t) dx + 2\beta \\ &= 2 \int_{\Omega} (\operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) + f(u)) u(x, t) dx + 2\beta \\ &= 2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u(x, t) dx + 2 \int_{\Omega} f(u) u(x, t) dx + 2\beta \\ &= 2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) u(x, t) dx + 2 \int_{\Omega} f(u) u(x, t) dx + 2\beta \\ &= 2 \int_{\Gamma} |\nabla u(x, t)|^{m-2} \nabla u(x, t) u(x, t) d\Gamma \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{m-2} \nabla u(x, t) \nabla u(x, t) dx + 2 \int_{\Omega} f(u) u(x, t) dx + 2\beta. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

comme on a :

$$2 \int_{\Gamma} |\nabla u(x, t)|^{m-2} \nabla u(x, t) u(x, t) d\Gamma = 0 \text{ car } u = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Alors, d'après (3.2.4) et (3.2.10)

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &\geq -2 \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx + 2 \int_{\Omega} pF(u) dx + 2\beta \\
&\geq -2 \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx + 2p \left( \int_{\Omega} \frac{1}{m} |\nabla u(x, t)|^m dx - E(t) \right) + 2\beta \\
&\geq \left( \frac{2p}{m} - 2 \right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx - 2pE(t) + 2\beta \\
&\geq \left( \frac{2p}{m} - 2 \right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx - 2p \left( E(0) - \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \right) + 2\beta \\
&\geq \left( \frac{2p}{m} - 2 \right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx + 2p \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2pE(0) + 2\beta \\
&\geq \left( \frac{2p}{m} - 2 \right) \|\nabla u\|^m + 2p \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2pE(0) + 2\beta \\
&\geq \left( \frac{2p}{m} - 2 \right) \alpha_2 + 2p \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2pE(0) + 2\beta \\
&\geq 2p \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) \alpha_1 + 2p \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds - 2pE(0) + 2\beta \\
&= 2p \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right) \alpha_1 - 2pE(0) + 2\beta + 2p \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \\
&= 2p(E_0 - E(0)) + 2\beta + 2p \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds
\end{aligned}$$

On pose :

$$\beta = 2(E_0 - E(0))$$

et noté que  $p > 2$ . Alors on obtient

$$\varphi''(t) \geq (p+2)\beta + (p+2) \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u_t^2(x, s) dx ds \quad (3.2.11)$$

De (3.2.8), (3.2.9), (3.2.10) et (3.2.11), on a :

$$\begin{cases} \varphi(0) = T_0 \int_{\Omega} a_0(x) u_0^2(x) dx + \beta t_0^2 > 0; \\ \varphi'(0) = 2\beta t_0 > 0; \\ \varphi''(t) \geq (p+2)\beta > 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Donc  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont tous les deux positifs. Puisque  $a_t(x, t) \leq 0$ , pour tout  $x \in \Omega$  et  $t \geq 0$ , nous avons

$$\varphi(t) \geq \int_0^t \int_{\Omega} a(x, s) u^2(x, s) dx ds + \beta(t + t_0)^2 \quad (3.2.12)$$

Ainsi de (3.2.8)-(3.2.11) et (3.2.12), ce qui suit inféré pour tout  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} & \varphi(t)\xi^2 + \varphi'(t)\xi\eta + \frac{\eta^2}{p+2}\varphi''(t) \geq \\ & \left( \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u^2(x,s)dxds + \beta(t+t_0)^2 \right) \xi^2 + 2\xi\eta \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u(x,s)u_t(x,s)dxds \\ & + 2\beta\xi\eta(t+t_0) + \beta\eta^2 + \eta^2 \int_0^t \int_{\Omega} a(x,s)u_t^2(x,s)dxds \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$(\varphi')^2 - 4\varphi(t)\frac{\varphi''(t)}{p+2} \leq 0.$$

or

$$\varphi(t)\frac{\varphi''(t)}{p+2} - \left( \frac{\varphi'(t)}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Multipliant par  $(p+2)$  on obtient :

$$\varphi(t)\varphi''(t) - \frac{p+2}{4}(\varphi')^2 \geq 0. \quad (3.2.13)$$

Utilisant lemme 3.2.3, on obtient que  $\varphi(t) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow T^*$ .

$$T^* \leq \frac{\varphi(0)}{\left(\frac{p-2}{4}\right)\varphi'(0)} = \frac{2\left(T_0\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta t_0^2\right)}{(p-2)\beta t_0}$$

Maintenant, nous allons choisir approprié  $t_0$  et  $T_0$ . Soit  $t_0$  un nombre qui ne dépend que de  $p$ ,  $E_0 - E(0)$  et  $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$  comme

$$t_0 > \frac{\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{(p-2)(E_0 - E(0))}$$

Fixons  $t_0$ , alors  $T_0$  peut être choisir comme

$$T_0 = \frac{2(T_0\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta t_0^2)}{(p-2)\beta t_0}$$

pour que

$$T_0 = \frac{2(E_0 - E(0))t_0^2}{(p-2)(E_0 - E(0))t_0 - \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

Par conséquent, la durée de vie de la solution  $u(x, t)$  est limitée par

$$\begin{aligned} T^* &\leq \inf_{t \geq t_0} \frac{2(E_0 - E(0))t^2}{(p-2)(E_0 - E(0))t - \|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2} \\ &= \frac{8\|\sqrt{a_0}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{(p-2)^2(E_0 - E(0))} \end{aligned}$$

**Cas02 :**  $E(0) = E_0$ . Pour ce cas, réellement nous considérons l'allégation suivante :

**Affermation 3.2.5** *Il existe  $t^* > 0$  tel que  $E(t^*) < E_0$ .*

Supposons que l'allégation ne soit pas vraie, ce qui signifie que  $E(t) = E_0$  pour tous  $t \geq 0$ . Puis par la continuité de  $a(x, t)u_t(x, t)$  il existe  $t_0$  assez petit, tel que

$$0 = E(t) - E_0 = - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} a(x, t)u_t^2(x, t) dx dt$$

Se qui donne

$$\int_{\Omega} a(x, t)u_t(x, t)u(x, t) dx = 0 \text{ sur } [0, t_0]$$

Alors nous considérons la solution de (3.0.1) sur  $[0, t_0]$

$$0 = E(t) - E_0 = - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} a(x, t)u_t^2(x, t) dx dt.$$

Ensuite nous avons

$$\int_{\Omega} a(x, t)u_t^2(x, t) dx = 0 \text{ p.p sur } [0, t_0].$$

et

$$a(x, t)u_t^2(x, t) = 0 \text{ p.p sur } \Omega \times [0, t_0].$$

or

$$\int_{\Omega} (a(x, t)u_t(x, t)u(x, t))^2 dx = 0 \text{ p.p sur } [0, t_0].$$

qui donne

$$\int_{\Omega} a(x, t)u_t(x, t)u(x, t) dx = 0 \text{ p.p sur } [0, t_0].$$

Nous avons utilisé les lemmes suivantes :

**Lemme 3.2.6** *Si  $f$  est une fonction intégrable non négative de Lebesgue définis sur une ensemble mesurable de Lebesgue  $E$  et  $\int_E f = 0$ . Alors  $f(x) = 0$ . presque partout sur  $E$ .*

**Lemme 3.2.7** Soit  $f$  est une fonction intégrable de Lebesgue sur  $[a, b]$  et soit  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Si pour tout  $x \in [a, b]$  nous avons que  $F(x) = 0$ . Alors  $f(x) = 0$  presque partout sur  $[a, b]$ .

Et par conséquent, d'après l'équation (3.0.1),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x, t)u_t(x, t)u(x, t)dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx + \int_{\Omega} u(x, t)f(u(x, t))dx = 0 \text{ sur } [0, t_0]. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} E_0 = E(t) &= \int_{\Omega} \frac{1}{m} |\nabla u(x, t)|^m dx - \int_{\Omega} F(u(x, t))dx \\ &\geq \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} u(x, t)f(u(x, t))dx \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^m dx \quad (\text{d'après (3.2.14)}) \\ &> \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) \alpha_1 \quad (\text{d'après (3.2.7)}) \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) \alpha_1 = E_0 \quad (\text{d'après (3.0.7) et (3.0.8)}) \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction. La preuve du théorème ?? est complet puisque l'on peut appliquer le cas précédent (**cas1**) après avoir modifié le temps d'origine par  $t^*$ . ■

### 3.3 Blows up où l'énergie initiale est négative

Notre résultat principal d'explosion et sa preuve sont présentés dans cette section. Suppose que  $a(x, t)$  est une fonction positive qui appartient a l'espace  $W^{1,\infty}((0, \infty; L^\infty(\Omega)))$  et que  $a_t(x, t) \geq 0$  pour  $t \geq 0$ .

La prochaine lemme donne le résultat de l'explosion.

**Lemme 3.3.1** Soit  $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tel que  $\int_{\Omega} u_0^2 dx > 0$ ,  $f$  satisfait (3.0.6) et  $E(0) \leq 0$ . Ensuite, il existe un temps fini  $T_{\max} < \infty$  tel que

$$\int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow T_{\max}.$$

**Démonstration.** la preuve du lemme 3.3.1. nous définissons

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, t) |u(t)|^2 dx$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x, t) |u(t)|^2 dx$$

Dérivant  $\phi$  par rapport a  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_{\Omega} a(x, t) uu' dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_1(x, t) |u(t)|^2 dx \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^m - uf(u)) dx \quad (\text{par (3.0.1)}) \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^m - pF(u)) dx \quad (\text{par (3.0.6)}) \\ &\geq - \int_{\Omega} (|\nabla u|^m dx + p \int_{\Omega} F(u) dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx + p \int_{\Omega} \frac{1}{m} |\nabla u(x, t)|^m dx - pE(t) \quad (\text{par (3.2.1)}) \\ &\geq \left(\frac{p}{m} - 1\right) \int_{\Omega} (|\nabla u|^m dx - pE(0)) \quad (\text{par (3.2.2)}) \\ &\geq \left(\frac{p}{m} - 1\right) \int_{\Omega} (|\nabla u|^m dx = c_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx, (c_0 > 0) \end{aligned}$$

Donc, utilisant le fait que  $\|\nabla u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_q$ , pour tous  $q \geq 2$ , pour obtient

$$(\phi')^{\frac{2}{m}} \geq C_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

par conséquent

$$(\phi')^{\frac{2}{m}} \geq C_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq C_3 \int_{\Omega} |u|^2 dx \geq \frac{C_3}{\sup a(x, t)} \phi(t), \forall t \geq 0. \quad (3.3.1)$$

D'après (3.3.1) et le fait que  $\phi(t) \geq \phi(0) > 0$  ( $\phi'(t) > 0$ ), nous avons, pour chaque  $t > 0$

$$(\phi')^{\frac{2}{m}} \geq \frac{C_4}{2} \phi(t) \geq \frac{C_4}{2} \phi(0);$$

et alors

$$\phi'(t) \geq \alpha = C_5 (\phi(0))^{\frac{m}{2}},$$

Ce qui donne

$$\phi'(t)^{\frac{2}{m}} (1 + \alpha)^{\frac{2}{m}} \geq C_5 (\phi(t))^{\frac{m}{2}};$$

par conséquent

$$\phi'(t) \geq \beta \phi^{\frac{m}{2}}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Par intégration simple

$$\phi(t)^{1-\frac{m}{2}} \leq (\phi(0))^{1-\frac{m}{2}} - \frac{m-2}{2} \beta t, \quad \forall t \geq 0.$$

Ce qui implique que

$$\phi(t) \geq \frac{1}{\left( (\phi(0))^{1-\frac{m}{2}} - \frac{m-2}{2} \beta t \right)^{\frac{2}{m-2}}}$$

Ceci montre que  $\phi$  explose en temps fini  $T_{\max}$  par l'estimation

$$T_{\max} \leq \frac{2(\phi(0))^{1-\frac{m}{2}}}{(m-2)\beta}.$$

■

## CONCLUSION

DANS ce mémoire, nous avons considéré un problème aux limites semi linéaires paraboliques pour les équations visqueux  $p$ -Laplacienne et un problème aux limites parabolique non linéaires avec terme source généralisée de la forme  $f(u)$ . Pour le premier problème, en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité ainsi que le théorème de monotonie, nous avons analysé les questions de l'existence globale et l'unicité d'une solution faible pour ce problème ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux données et l'explosion en temps fini de la solution . Pour le deuxième problème, en se basant sur les techniques utilisées par [9, 10, 13, 7, 6, 12, 27, 26, 1], pour montrer un résultat d'explosion en temps fini est prouvé si le données initial possède une énergie positive appropriée et, dans ce cas, nous estimons exactement avec précision la durée de vie de la solution  $T^*$ . A la fin, nous utilisons des techniques basées sur l'application des inégalités et des intégrales connus pour montrées l'explosion en temps fini des solutions avec une énergie initiale négative est également établi.

- [1] A.S. Kalashnikov, *Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations*, Russ. Math. Surv. 42(2) (1987), pp. 169–222.
- [2] A. Novick - Cohen and R. L. Pego, *Stable patterns in a viscous diffusion equation*, Trans. Amer. Math. Soc., 324 (1991), 331-351.
- [3] A. N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Uravneniya matematicheskoi fiziki*, Nauka, Moscow 1976. Translation : *Equations of mathematical physics*, Macmillan, New York 1963
- [4] Aiguo Bao and Xianfa Song, *Bounds for the blowup time of the solutions to quasi-linear parabolic problems*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) 65 (2014).
- [5] Baghaei Khadijeh, Ghaemi Mohammad Bagher, and Hesaaraki Mahmoud, *Lower bounds for the blow-up time in a semilinear parabolic problem involving a variable source*, Applied Mathematics Letters 27 (2014).
- [6] B. D. Coleman, R. J. Duffin, and V. J. Mizel, *Instability, uniqueness and non-existence theorems for the equations,  $u_t = \Delta u - \Delta u_t$  on a strip*, Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965), 100-116 .
- [7] C.C. Liu, *Weak solutions for a viscous  $p$ -Laplacian equation*, Electronic J. Differ. Eqns 63 (2003), pp. 1–11.
- [8] E. Acerbi and G. Mingione, *Regularity results for stationary electrorheological fluids*, Arch. Ration. Mech. Anal 164 (2002), 213–259.
- [9] E. DiBenedetto and M. Pierre, *On the maximum principle for pseudo parabolic equations*, Indiana Univ. Math. J., 30 (6) (1981), 821- 854.
- [10] E. DiBenedetto and R. E. Showalter, *Implicit degenerate evolution equations and applications*, SIAM J. Math. Anal., 12 (5) (1981 ), 731-751 .

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [11] Ferreira R., de Pablo A. Pérez-LLanos M., and Rossi J. D., *Critical exponents for a semilinear parabolic equation with variable reaction*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics **142** (2012)
- [12] G. I. Barwnblatt, Iv. P. Zheltov, and I. N. Kochina, *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks*, J. Appl. Math. Mech., **24** (1960), 1286 - 1303.
- [13] G. I. Barenblatt, V. M. Entov, and V. M. Rizhik, *Dvizhenie zhidkosti i gazov û prirodnykh plastakh (Motion of fluids and gases in natural strata)*, Nedra, Moscow 1984.
- [14] G. Akagi and M. Ôtani, *Evolutions inclusions governed by subdifferentials in reflexive banach spaces*, J. Evol. Equ. **4** (2004), 519–541.
- [15] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial, Differential Equations*, New York, 2010.
- [16] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. **13**(1966), no.~I, 109-124.
- [17] Hua Wang and Yijun He, *On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters **26** (2013), no. 10, 1008-1012.
- [18] J. G. Berryman and C. J. Holland, *Stability of the separable solution for fast diffusion*, Arch. Rat. Mech. Anal. **74** (1980), 379-388. MR 81m :35065.
- [19] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1966.
- [20] J. Simon, *Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura. Appl. **4**(146) (1987), pp. 65–96.
- [21] Kalantarov, V. and O. A. Ladyzhenskaya : *The occurrence of collapse for quasilinear equation of parabolic and hyperbolic types*. J. Sov. Math. **10** (1978), 53
- [22] P. Grisvard. *Boundary value problem in plan polygon Instruction for use E.D.F*, Journal of Math. Anal. and Applic, serie C, **1** :21–59, 1986.
- [23] P. J. Chen and M. E. Gurtin, *On a theory of heat conduction involving two temperatures*, Z. Angew. Math. Phys., **19** (1968 ), 614-627.
- [24] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 2003.
- [25] R. E. Showalter and T. W. Ting , *Pseudo - parabolic partial differential equations*, SIAM J. Math. Anal., **1** (1970), 1-26 .
- [26] T. W. Ting, *Parabolic and pseudo parabolic partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan, **21** (1969), 440- 453.
- [27] T. W. Ting, *A cooling process according to two temperature theory of heat conduction*, J. Math. Anal. Appl. , **45** ( 1 974 ) , 23 - 3 1 .
- [28] V. Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya, *The occurrence of collapse for quasilinear equation of parabolic and hyperbolic types*, J. Sov. Math. **10** (1978), 53–70.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [29] V. R. G . Rao and T . W . Ting, *Solutions of pseudo - heat equation in whole space*, Arch. Rat. Mech. Anal., 49 (1972), 57-78 .
- [30] W. M. Ni, P. E. Sacks, and J. Tavantzis, *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations*, J. Differential Equations **54** (1984), 97-120.
- [31] Wu Xiulan, Guo Bin, and Gao Wenjie, *Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy*, Applied Mathematics Letters **26** (2013).
- [32] Y. Fu, *The existence of solutions for elliptic systems with nonuniform growth*, Studia Math. **151** (2002), 227-246.
- [33] Zhong Tan, *The reaction-diffusion equation with lewis function and critical sobolev exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **272** (2002), no.2, 480–495.