

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالاغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : SAHLI Adel

THEME

Résolution numérique de certaines équations différentielles fractionnaires

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

- | | | |
|--------------------|-------|-----------|
| • Mr. BENTOBACHE.M | M.C.A | Président |
| • Mr. OUCHENANE.D | M.C.A | Examineur |
| • Mr. MERRAD.B | M.A.A | Examineur |
| • Mr. BOUKEHILA.A | M.C.B | Encadreur |

Année Universitaire 2018/2019

Dédicaces

Je dédie cette mémoire à mes chers parents, qui m'ont soutenu pendant la réalisation de ce travail qui est le fruit de leur amour leurs encouragements et sacrifices, à tous mes enseignants pour leurs conseils, leurs patiences, leur persévérance, à mes très chers sœurs et frères à toute ma famille, à tous mes amis et à toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail.

Remerciement

Je voudrais d'abord remercier mon Dieu qui m'a donné Volonté et courage de faire ce travail. Je remercie aussi mon père, qui m'a encouragé et aidé à atteindre ce stade d'étude. Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à finaliser ce travail modeste. Merci au docteur BOUKEHILA AHCENE l'encadreur qui a guidé ce projet.

Je remercie également les membres du jury :

Dr.BENTOBACHE.M et Dr.OUCHENANE. D et Dr.MERRAD. B.

Enfin, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont aidé on cours de mes études, j'exprime ma gratitude à tous mes amis.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont des généralisations des équations différentielles classiques. Dans ce travail, nous étudions des approximations numériques de la solution d'un problème différentiel fractionnaire par la méthode HPM, nous appliquons la méthode HPM pour résoudre une certaine classe d'équation différentielles fractionnaires, au sens de Caputo, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution, cette méthode est d'une importance remarquable pour le traitement numérique des équations différentielles fractionnaires ou sens de Caputo. Des exemples sont présentés pour illustrer de cette méthode.

Mots clés : Equations différentielles fractionnaires, La méthode de perturbation d'homotopie, La méthode de décomposition d'Adomian, Méthode numériques, Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, Dérivée fractionnaire de Caputo.

Abstract

Fractional differential equations are a generalization of classical differential equations. In this work, we study numerical approximations of the solution of a fractional differential problem with the ADM, HPM methods, we apply the HPM method for a same class of FDE, with the Caputo, we establish the existence and uniqueness of the solution, this method is if great important for the study of the FDE. Illustrative examples have been shown to illustrate this method.

Key words : Fractional differential equations, The homotopy disturbance method, The Adomian Decomposition Methods, Numerical method, Fractional derivative of Riemann-Liouville, Fractional derivative of Caputo.

ملخص

المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة هي تعميم للمعادلات التفاضلية الكلاسيكية. في هذه المذكرة تطرقنا الى دراسة تقريبات عددية لحل هذه المعادلات و ذلك باستخدام بعض الطرق (ADM, HPM) ، نطبق طريقة HPM لحل فئة معينة من المعادلات التفاضلية الكسرية ، بمعنى $Caputo$ نثبت وجود وحدانية الحل، هذه الطريقة ذات أهمية ملحوظة للمعالجة العددية للمعادلة التفاضلية الكسرية .بمعنى كابيتو، اخيرا تم عرض أمثلة توضيحية لتوضيح هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية ذات رتبة ناطقة، طريقة التحلل ادوميان، طريقة الاضطراب الهوموتوبي، الطريقة العددية، مشتق كسري .بمعنى $Riemann - Liouville$ ، مشتق كسري .بمعنى $Caputo$.

Table des matières

Introduction	5
1 Propriétés de calculs fractionnaires	7
1.1 Calcul fractionnaire	7
1.1.1 Intégration fractionnaire	7
1.1.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	9
1.1.3 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo	10
1.2 Transformation de Laplace	13
1.2.1 Définition et propriétés	13
1.2.2 Transformée inverse de Laplace et propriétés	14
1.2.3 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires	16
2 Deux méthodes numériques pour résoudre des EDO (ADM, HPM)	17
2.1 La méthode ADM	17
2.1.1 Description de la méthode	17
2.1.2 Résolution d'équations différentielles par la méthode d'Adomian	19
2.2 La méthode HPM	22
2.2.1 Description de la méthode	22
2.2.2 Convergence et estimation de l'erreur	25
3 Applications de la méthode HPM pour résoudre certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire	30
3.1 Existence et unicité pour l'équation fractionnaire de type Caputo	30
3.2 La méthode HPM pour les équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire	33
3.3 L'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire	39
3.3.1 Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire temporelle	40
3.3.2 Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire spatiale	43
3.4 L'équation de Fisher fractionnaire	44

3.4.1	Résolution numérique de l'équation de Fisher fractionnaire temporelle	45
3.4.2	Résolution numérique de l'équation de Fisher fractionnaire spatiale	48
	Conclusion	51

Table des figures

3.2.1 (Bleu) : La solution exacte (3.2.18); (Rouge) : La solution numérique (3.2.23)	37
3.3.1 (Gauche) : La solution exacte de (3.3.4); (Milieu) : La solution approximative de (3.3.4) pour $\alpha = 1/2$; (Droite) : La solution approximative de (3.3.4) pour $\alpha = 1$	42
3.3.2 (Gauche) : La solution approximative de (3.3.7) pour $\beta = 1$; (Droite) : La solution approximative de (3.3.7) pour $\beta = 1/2$	44
3.4.1 (Gauche) : La solution exacte de (3.4.14) – (3.3.15); (Droite) : La solution approximative de (3.4.14) – (3.4.15) avec quatre termes pour $\alpha = 1$	48
3.4.2 (Gauche) : La solution approximative de (3.4.14) – (3.4.15) pour $\alpha = 0.5$; (Droite) : La solution approximative de (3.4.14) – (3.4.15) pour $\alpha = 0.9$	48
3.4.3 (Gauche) : La solution approximative de (3.4.19) – (3.4.20) pour $\alpha = 0.5$; (Droite) : La solution approximative de (3.4.19) – (3.4.20) pour $\alpha = 0.9$	50

Notations

Ω : Domaine borné dans \mathbb{R}^N .

Fr : La frontière de Ω .

$L_p[a, b]$: $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est mesurable sur } [a, b] \text{ et } \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\}$.

$L_\infty[a, b]$: $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et essentiellement bornée sur } [a, b]\}$.

$C[a, b]$: $C^0[a, b]$.

$AC[a, b]$: espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

$AC^n[a, b]$: espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n - 1$ et telle que $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$.

$C_\mu[a, b]$: espace des fonctions définies sur $(a, b]$, telle que $(x - a)^\mu f(x) \in C[a, b]$ et $\|f\|_{C_\mu} : \|(x - a)^\mu f(x)\|_C$, $C_0[a, b] = C[a, b]$.

$C_\mu^m[a, b]$: espace de Banach des fonctions f qui sont continûment dérivable sur $[a, b]$ à l'ordre $n - 1$ et telle que $f^{(n)} \in C_\mu[a, b]$.

$C_\mu^0[a, b]$: $C_\mu[a, b]$.

Introduction

Le calcul fractionnaire confiné historiquement à quelques correspondances datant de 1695 entre les précurseurs de l'époque, le marquis de L'hôpital (1661-1704) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), La dérivation fractionnaire, depuis ces trois dernières décennies, s'est énormément développée et a pris beaucoup d'importance dans différents domaines de la recherche scientifique. Une des raisons principales réside dans ses applications dans des nombreuses disciplines scientifiques. Le calcul fractionnaire par ses outils reste un moyen très adapté pour la résolution des systèmes différentiels, ceux-ci traduisent en général des modèles mathématiques ou physiques de nombreux phénomènes naturels qui nous entourent. Les équations intégro-différentielles et les systèmes différentiels fractionnaires se sont révélés tout récemment comme étant très utiles dans le domaine de la physique, de l'ingénierie, du traitement de contrôle pour les systèmes visco-élastiques, la diffusion, les processus de relaxation. Beaucoup de contributions ont été apportées ces dernières décennies autant à la théorie abstraite qu'aux applications des équations différentielles fractionnaires. Le calcul fractionnaire est devenu tout simplement l'analyse fractionnaire. Parmi les méthodes numériques de résolution des équations différentielles fractionnaires, il existe les méthodes ADM, HPM, VIM, Picard. On restreint donc notre travail uniquement sur les méthodes ADM, HPM

Pour la méthode décomposition d'Adomian (ADM) : elle consiste à décomposer l'équation donnée en parties linéaires et des parties non linéaires et à rechercher la solution sous la forme d'une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et à décomposer le terme non linéaire Nu sous la forme d'une série $Nu = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$, où les termes A_n sont appelés polynômes Adomian.

Pour la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) : elle a été proposée par Ji-Huan He en 1998. et a été appliquée par plusieurs auteurs à différents problèmes linéaires et non linéaires.

L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la méthode de perturbation d'homotopie et aussi la (ADM) pour résoudre des équations différentielles fractionnaires. Notre mémoire est organisé selon le plan suivant.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques préliminaires concer-

nant les outils de base du calcul fractionnaire, ainsi que les transformations de Laplace

Dans le deuxième chapitre, nous donnons la description de la méthode de décomposition d'Adomian et la méthode de perturbation d'homotopie et nous faisons l'analyse de sa convergence pour les EDO.

et ce après avoir établi l'existence et l'unicité de l'équation différentielle fractionnaire, au sens de Caputo .

Dans le troisième chapitre, nous traitons quelques applications de la méthode HPM pour résoudre des équations différentielles fractionnaires comme exemple l'équation de Cahn-Hilliard et l'équation de Fisher.

Chapitre 1

Propriétés de calculs fractionnaires

Dans ce chapitre, on fait un rappel des outils de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail. En particulier, nous présentons certains résultats fondamentaux sur les propriétés de la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, la transformation de Laplace [16].

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ; on pose :

$$(If)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (1.1.1)$$

Pour une primitive d'ordre 2, on a :

$$(I^2 f)(t) = \int_a^t (If)(x) dx = \int_a^t \left(\int_a^x f(\tau) d\tau \right) dx = \int_a^t (t-x)f(x) dx. \quad (1.1.2)$$

En répétant n fois, on obtient la relation suivante :

$$(I^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.1.3)$$

En utilisant la fonction Gamma-Euler $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, pour $\text{Re}(x) > 0$, on aura la définition suivante :

Définition 1.1.1. Soit $\alpha > 0$; l'opérateur I_a^α définit sur $L_1[a, b]$ par :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; \alpha > 0, \quad (1.1.4)$$

est appelé opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Exemple 1.1.1. • On calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f telle que :

$$f(t) = (t - a)^n, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n > -1.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t - a)^n &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^n d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+n} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha-1} x^n dx \\ &= \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} (t - a)^{\alpha+n}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5$, $n = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (t)^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

• Calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f telle que : $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

On a :

$$I^\alpha (e^{\lambda x}) = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}.$$

• L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ d'une fonction constante $f(t) = C$:

$$I_a^\alpha (C) = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (x - a)^\alpha, \quad a \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1.1 Pour $f \in C[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] = I_a^{\alpha+\beta} f(x), \quad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0. \quad (1.1.5)$$

Démonstration. La preuve découle directement de la définition :

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-1}} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}} du. \quad (1.1.6)$$

Où $f \in C[a, b]$. D'après le théorème de Fubini, on peut changer l'ordre de l'intégration. on pose :

$$t = u + s(x - u);$$

on obtient

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(x)] = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha-\beta}} du = I_a^{\alpha+\beta} f(x), \quad (1.1.7)$$

tel que $B(\alpha, \beta)$ désigne la fonction Béta ($B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$, pour $x, y \in [0, \infty[$). □

1.1.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. et $0 < \alpha < 1$, on a

$$\boxed{{}^{RL}D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau,} \quad (1.1.8)$$

est appelée la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f , avec $t \geq 0$.

Définition 1.1.2. Si $\alpha > 0$, alors nous définissons

$${}^{RL}D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, & m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}^* \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m \end{cases} \quad (1.1.9)$$

D'autre part, si $\alpha < 0$ on note par $D^\alpha f(t) = I^{-\alpha} f(t)$, la définition peut être aussi appliquée et $D^\alpha f(t)$ existe pour f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut être aussi définie par la formule suivante :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \{ I^{(m-\alpha)} f(t) \}. \quad (1.1.10)$$

Exemple 1.1.2. • La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante. En général la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante est ni nulle ni constante. On a :

$${}^{RL}D^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

• La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f telle que :
 $f(t) = (t-a)^\beta$

$${}^{RL}D^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n+\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ et $a = 0$, on aura :

$${}^{RL}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

1.1.3 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.1.3. La dérivée fractionnaire de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned}
{}^C D^\alpha f(t) &= I^{m-\alpha} D^m f(t) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}^*. \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), \alpha = m. \end{cases} \quad (1.1.11)
\end{aligned}$$

Lemme 1.1.1 Si $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}^*$, alors ${}^C D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$ et

$$I({}^C D^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+), t > 0. \quad (1.1.12)$$

$$({}^C D^\alpha f)(t) = ({}^{RL}D^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. \quad (1.1.13)$$

Démonstration. Le développement de Taylor nous donne :

$$\begin{aligned}
f(t) &= f(a) + (t-a)f'(a) + \frac{(t-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(t-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots \\
&+ \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_{n-1}.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1}.$$

Où

$$\begin{aligned} R_{n-1} &= \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t f^{(n)}(s)(t-s)^{n-1} ds \\ &= I^n f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la dérivée Riemann-Liouville, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= {}^{RL}D_a^\alpha \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + R_{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{RL}D_a^\alpha (t-a)^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(a) + {}^{RL}D_a^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + {}^C D_a^\alpha f(t). \end{aligned}$$

Donc

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = {}^C D_a^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a).$$

□

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a : $({}^C D^\alpha f)(t) = ({}^{RL}D^\alpha f)(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$.

Dans le cas où $f(0) = f^{(1)}(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$, la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est à dire : $({}^C D^\alpha f)(t) = ({}^{RL}D^\alpha f)(t)$. L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier.

Définition 1.1.4. Soit $u \in C_{-1}^n, n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire de Caputo (à gauche) de u est défini pour $t > 0$ par

$$\begin{aligned}
{}^C D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} d\tau, n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}, \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.3. • La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle ;

$$\begin{aligned}
{}^C D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \\
&= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} \times 0 d\tau = 0.
\end{aligned}$$

• La dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$. Soit α non entier et $0 \leq n - 1 < \alpha < n$ avec $\beta > n - 1$, alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} (\tau - a)^{\beta - n}.$$

D'où

$${}^C D^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - n} d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t - a)$, on aura :

$$\begin{aligned}
{}^C D^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{n - \alpha - 1} s^{\beta - n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1) B(n - \alpha, \beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\beta - n + 1) \Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}.
\end{aligned}$$

• La dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction $f(t) = t^\beta$ est donnée par

$${}^C D^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} t^{\beta - \alpha}, \beta > \alpha - 1 \\ 0, \beta \leq \alpha - 1 \end{cases}$$

1.2 Transformation de Laplace

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.2.1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

- On appelle transformée de Laplace de f , la fonction $L(f)$ définie par :

$$L(f)(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-tp} dt.$$

- On appelle transformation de Laplace, l'application $L : C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \rightarrow F(\mathbb{C})$ définie par $L(f)$, opérateur à variable complexe.

Exemple 1.2.1. 1. Soit la fonction constante

$$\begin{cases} f(t) = a, & t \geq 0, \\ f(t) = 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L(f)(p) &= \int_0^{\infty} ae^{-tp} dt = a \int_0^{\infty} e^{-tp} dt = -\frac{a}{p} [e^{-tp}]_0^{\infty} \\ &= -\frac{a}{p} [e^{-tx} e^{-ity}]_0^{\infty} = \frac{a}{p}, \end{aligned}$$

si $\operatorname{Re}(p) > 0$; car $|e^{-ity}| = 1$ (bornée) et e^{-tx} ne converge à plus l'infini que si $x = \operatorname{Re}(p) > 0$

2.

$$\begin{cases} f(t) = e^{\alpha t}, & t \geq 0, \quad \alpha = a + ib \in \mathbb{C}, \\ f(t) = 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L(f)(p) &= \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-tp} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p-\alpha)} dt \\ &= -\frac{1}{p-\alpha} [e^{-t(p-\alpha)}]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{p-\alpha} [e^{-t(x-a)} e^{-it(y-b)}]_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha} \end{aligned}$$

si $\operatorname{Re}(p) = x > \operatorname{Re}(\alpha) = a$.

Linéarité

Proposition 1.2.1. Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace $L(f)$ et $L(g)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Transformée de Laplace de la translation

Proposition 1.2.2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de Laplace $L(f)(p)$. On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(t) = f(t - \alpha)$, $\alpha > 0$.

$$L(f_\alpha)(p) = e^{-\alpha p} L(f)(p).$$

Transformée de Laplace des dérivées

Proposition 1.2.3. Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. Alors

$$L(f^{(n)})(p) = p^n L(f)(p) - \sum_{k=1}^n p^{k-1} f^{(n-k)}(0).$$

Transformée du produit de convolution

Définition 1.2.2. Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g est une autre fonction, qui se note généralement $f * g$ et qui est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 1.2.4. Transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions

$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)]L[g(t)].$$

Transformée de Laplace d'une primitive

Proposition 1.2.5. Soit $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ une primitive de f . On a alors $F' = f$ et $F(0) = 0$.

$$L(F)(p) = \frac{L(f)(p)}{p}.$$

1.2.2 Transformée inverse de Laplace et propriétés

Définition 1.2.3. La transformée inverse de Laplace est donnée par :

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

Si $F(p) = L(f)(p)$, on note $f(t) = L^{-1}(F)(t)$.

Soient $F(p) = L(f)(p)$ et $G(p) = L(g)(p)$.

Proposition 1.2.6. *Linéarité de la transformée inverse de Laplace*

$$L^{-1}(\alpha F + \beta G)(t) = \alpha L^{-1}(F)(t) + \beta L^{-1}(G)(t).$$

-Transformée inverse de Laplace d'une translation

L'originale de $L(f)(p - a)$ est $L^{-1}[L(f)(p - a)](t) = e^{ta} f(t)$.

-Transformée inverse de Laplace d'une dérivée

$$L^{-1} [(L(f))^{(n)}] (t) = (-1)^n t^n f(t).$$

Application de la transformée de Laplace aux équations différentielles

Exemple 1.2.2. *Soit l'équation $y' + y = 1$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.*

Par application de la transformée de Laplace, on obtient :

$$L(y')(p) + L(y)(p) = \frac{1}{p},$$

ou encore

$$pL(y)(p) - y(0) + L(y)(p) = \frac{1}{p}.$$

D'où

$$L(y)(p)[1 + p] = \frac{1}{p},$$

et par suite

$$L(y)(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

On conclut alors que

$$y(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) (t) = 1 - e^{-t}.$$

Exemple 1.2.3. *Résoudre, en utilisant la transformée de Laplace, l'équation différentielle :*

$y'' + 2y' + 5y = \sin t$, avec les conditions initiales $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation. On aura :

$$L[y'' + 2y' + 5y](p) = L(y'')(p) + 2L(y')(p) + 5L(y)(p)$$

par suite

$$p^2 L(y)(p) - py(0) - y'(0) + 2[pL(y)(p) - y(0)] + 5L(y)(p) =$$

$$L(y)(p)[p^2 + 2p + 5] - p - 4.$$

L'équation devient :

$$L(y)(p) [p^2 + 2p + 5] - p - 4 = L(\sin t)(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

et donc

$$L(y)(p) = \frac{p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{1}{(p^2 + p)(p^2 + 2p + 5)}.$$

On décompose la fraction en éléments simples et on aboutit à l'équation algébrique :

$$L(y)(p) = \frac{11}{10} \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{29}{20} \cdot \frac{2}{(p+1)^2+2^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

L'originale est alors :

$$y(t) = \frac{1}{10}e^{-t} \cos 2t + \frac{29}{20}e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{10} \cos t \frac{1}{5} \sin t$$

ou encore

$$y(t) = e^{-t} \left(\frac{11}{10} \cos 2t + \frac{29}{20} \sin 2t \right) - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{5} \sin t.$$

1.2.3 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

• Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

En utilisant la propriété de la transformée de Laplace (Dérivation), on arrive à la formule suivante :

$$L \{ {}^{RL}D^\alpha f(t) : s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}^{RL}D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, (m-1 \leq \alpha \leq m). \quad (1.2.1)$$

• Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Avec les mêmes propriétés précédentes, on arrive à la formule suivante :

$$L \{ {}^C D^\alpha f(t) : s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), (m-1 \leq \alpha < m). \quad (1.2.2)$$

Chapitre 2

Deux méthodes numériques pour résoudre des EDO (ADM, HPM)

2.1 La méthode ADM

La méthode de décomposition d'Adomian[16] permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégro-différentielles, aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires.

Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme :

$AU = f$ qui est appelée forme canonique d'Adomian.

2.1.1 Description de la méthode

Considérons l'équation fonctionnelle :

$$\boxed{AU = f} \tag{2.1.1}$$

où A est un opérateur différentiel contenant des termes linéaires et des termes non linéaires et f est une fonction connue ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Le terme linéaire de l'opérateur A est décomposé en $L + R$ où L est inversible et R est le reste de (2.1.1) On note N le terme non linéaire de A et donc $A = L + R + N$.

alors (2.1.1) s'écrit comme : $LU + RU + NU = f$. L étant inversible, si L^{-1} est son inverse on a :

$$U = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}RU - L^{-1}NU, \tag{2.1.2}$$

où Φ est la constante de l'intégration.

La méthode d'Adomian consiste à rechercher la solution sous forme d'une série :

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \tag{2.1.3}$$

et à décomposer le terme non linéaire NU sous forme d'une série :

$$NU = F(U) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n. \quad (2.1.4)$$

Les A_n sont appelés polynômes d'Adomian et sont obtenus grâce à la relation suivante :

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad (2.1.5)$$

où λ est un paramètre réel introduit par convenance.

En remplaçant les relations (2.1.3) et (2.1.4) dans (2.1.2), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \Phi + L^{-1}f - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n. \quad (2.1.6)$$

Ce qui entraîne par identification :

$$\begin{cases} u_0 = \Phi + L^{-1}f \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \vdots \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Tous les termes de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peuvent être calculés, en utilisant l'approximation

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1, \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = U. \quad (2.1.8)$$

Le problème qui se pose est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$.

Les polynômes d'Adomian

Définition 2.1.1. Les polynômes d'Adomian sont définie par la formule :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) = F(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \end{cases} \quad (2.1.9)$$

La formule proposé par G.Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
 A_0(u_0) &= N(u_0) = F(u_0) \\
 A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{d}{du} N(u_0) = u_1 F'(u_0) \\
 A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{d}{du} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{d^2}{du^2} N(u_0) = u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 F^{(2)}(u_0) \\
 A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \frac{d}{du} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{d^3}{du^3} N(u_0) \\
 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F^{(2)}(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 F^{(3)}(u_0) \\
 &\vdots \\
 A_n &= \sum_{v=0}^n c(v, n) N^{(v)}(u_0), n \geq 1.
 \end{aligned}$$

Où, $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisée par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égale à n ; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

2.1.2 Résolution d'équations différentielles par la méthode d'Adomian

Si $AU = f$ est une équation différentielle ou A est un opérateur différentiel non linéaire (ou A linéaire) possédant des termes linéaires et non linéaires. Le terme linéaire est décomposé en $L + R$ où par convenance L est un opérateur différentiel d'ordre le plus grand facilement inversible.

Soit l'équation différentielle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{d^n u}{dt^n} + Ru + Nu = f, \tag{2.1.10}$$

où $u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0)$ sont des valeurs données.

Si on pose $L = \frac{d^n}{dt^n}(\cdot)$. La formule $LU + RU + NU = f$ transforme l'équation différentielle ci-dessus en $Lu + Ru + Nu = f$. L'équation (2.1.2) s'écrit :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + L^{-1}R \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right). \tag{2.1.11}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases}
 u_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) + L^{-1}f(t) \\
 u_1(t) = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\
 \vdots \\
 u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n.
 \end{cases}$$

où L^{-1} désigne n intégration successives de t_0 à t .

Exemple 2.1.1. Soit l'équation

$$\begin{cases} u'(t) - u(t) = t^2, \\ u(0) = -2. \end{cases}$$

On a : $Lu = u'(t)$, $Ru = -u(t)$, $Nu = 0$ et $f(t) = t^2$. L^{-1} représente une simple intégration de 0 à t . On trouve :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u(0) + L^{-1}(t^2) + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right). \quad (2.1.12)$$

Par identification on a :

$$u_0 = u(0) + L^{-1}(t^2) = -2 + \frac{t^3}{3}$$

$$u_1 = L^{-1}(u_0) = -2t + \frac{t^4}{12}$$

$$u_2 = L^{-1}(u_1) = -t^2 + \frac{t^5}{60}$$

$$u_3 = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{300}$$

⋮

$$u_n = -2\frac{t^n}{n!} + 2\frac{t^{n+3}}{(n+3)!}$$

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -2 - 2t - t^2$, qui est la solution exacte de l'équation différentielle.

Exemple 2.1.2. Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u' - e^u = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On a : $Lu = u'(t)$, $Nu = e^u$. On applique L^{-1} ($L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$) aux termes du problème. On trouve :

$$u = L^{-1}(e^u). \quad (2.1.13)$$

On utilise la série de la décomposition pour la fonction linéaire $u(t)$ et la série polynomiale pour le terme non-linéaire, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 \\ u_{k+1}(t) = L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

Les polynômes d'Adomian pour le terme non-linéaire e^u sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= e^{u_0} = 1 \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1 \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2 \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

On remplace (2.1.15) dans (2.1.14) on trouve :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = L^{-1}(A_0) = t \\ u_2 = L^{-1}(A_1) = \frac{1}{2}t^2 \\ u_3 = L^{-1}(A_2) = \frac{1}{3}t^3 \\ u_4 = L^{-1}(A_3) = \frac{1}{4}t^4 \\ \vdots \end{cases}$$

Alors la solution dans une forme d'une série est donnée par :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \dots \quad (2.1.16)$$

Exemple 2.1.3. (Equation de Riccati)

$$\begin{cases} u' - u^2 = 1, \\ u(0) = 1 \end{cases}. \quad (2.1.17)$$

On a $Lu = u'(t)$, $Nu = -u^2$, $f(t) = 1$.

La solution exacte de l'équation est :

$$u(t) = \tan(t).$$

$$u_0 = t$$

$$u_1 = \frac{t^3}{3}$$

La solution approximative est : $u_2 = \frac{2t^5}{15}$

$$u_3 = \frac{357t^7}{6615}$$

⋮

D'où la solution est

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5 + \frac{357}{6615}t^7 + \dots \quad (2.1.18)$$

2.2 La méthode HPM

La méthode des perturbation de l'homotopie (HPM)[17] a été établie par **Ji-Haun-He**[17] en 1999. La méthode a été utilisée par beaucoup de chercheurs et appliquée pour résoudre plusieurs équations linéaires et non linéaires.

2.2.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\boxed{A(u) - f(r) = 0 \quad , r \in \Omega,} \quad (2.2.1)$$

avec les conditions aux limite :

$$B \left(u, \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0 \quad , r \in Fr, \quad (2.2.2)$$

où A est un opérateur différentielle général, B est un opérateur de la limite, $f(r)$ est une fonction analytique connu, et Γ est la limite du domaine Ω .
L'opérateur A peut être divisé en deux parties qui sont L et N , où, L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non-linéaire, peut être récrit comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.2.3)$$

Avec la technique de l'homotopie, nous construisons une homotopie :

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.4)$$

qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p) [L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1]; r \in \Omega. \quad (2.2.5)$$

Où

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.2.6)$$

avec $p \in [0, 1]$ est un paramètre, u_0 est une approximation initiale de 2.2.1 qui satisfait les conditions aux limites. Évidemment, d'après les deux équations précédentes nous aurons :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.2.8)$$

En faisant varier p de 0 à 1, on change $v(r, p)$ de $u_0(r)$ à $u(r)$. D'après la méthode **HPM**, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre, et supposons que les solutions de l'équation peut être écrite(2.2.1), comme une série suivante :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.9)$$

Mettant $p = 1$, la solution approximative de l'équation (2.2.1) est :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_2 + \dots \quad (2.2.10)$$

Exemple 2.2.1. *Nous considérons en premier temps l'exemple suivant :*

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0 & ; \quad t \geq 0, \quad t \in \Omega, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

D'où la solution exacte est $u(t) = \frac{1}{1+t}$.

Nous pouvons construire l'homotopie suivante : $v : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$(1 - p)(v' - u'_0) + p(v' + v^2) = 0, p \in [0, 1], \quad t \in \Omega \quad (2.2.12)$$

avec l'approximation initiale $u_0 = 1$.

Supposons que la solution de (2.2.1) soit sous la forme :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (2.2.13)$$

En remplaçant 2.2.13 dans 2.2.12, et identifions les termes avec les puissances identiques de p :

$$p^0 : v'_0 = u'_0$$

$$p^1 : v'_1 + u'_0 + v_0^2 = 0, \quad v_1(0) = 0$$

$$p^2 : v'_2 + 2v_0v_1 = 0, \quad v_2(0) = 0.$$

Par conséquent, les premières composants de la solution sont données par $v_0 = 1, v_1 = -t, v_2 = t^2$. Donc la solution est

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 = 1 - t + t^2$$

Exemple 2.2.2. *Nous considérons l'équation de Riccati suivante :*

$$\begin{cases} u' - u^2 = 1, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (2.2.14)$$

La solution exacte de l'équation (2.2.14) est $u(t) = \tan(t)$. Le développement de Taylor de u au voisinage de zero est donné par :

$$u(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + t^8\varepsilon(t)$$

On cherche maintenant la solution avec l'utilisation de la méthode **HPM**
 Nous pouvons construire l'homotopie suivante : $U : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$(1 - p)(U' - u'_0) + p(U' - U^2 - 1) = 0, p \in [0, 1], t \in \Omega. \quad (2.2.15)$$

La solution de l'équation peut être écrite comme une série suivante :

$$U = U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \dots \quad (2.2.16)$$

On identifie les termes avec les puissances identiques de p :

$$U' - u'_0 + p(u'_0 - U^2 - 1) = 0, \quad (2.2.17)$$

on obtient :

$$(U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \dots)' - u'_0 + p[u'_0 - (U_0 + pU_1 + p^2U_2 + \dots)^2 - 1] = 0 \quad (2.2.18)$$

où

$$\left(\dot{U}_0 + p\dot{U}_1 + p^2\dot{U}_2 + \dots \right) - u'_0 + p \left[\begin{array}{l} u'_0 - (U_0^2 + 2pU_0U_1 + p^2U_1^2 + \\ 2pU_0U_2 + 2p^3U_1U_2 + p^4U_2^2) - 1 \end{array} \right] = 0 \quad (2.2.19)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} p^0 : \dot{U}_0 - u'_0 - U_0^2 - 1 &= 0 \\ p^1 : \dot{U}_1 + u'_0 - U_0^2 - 1 &= 0 \\ p^2 : \dot{U}_2 - 2U_1U_0 &= 0 \\ p^3 : \dot{U}_3 - U_1^2 + 2U_0U_2 &= 0 \\ p^4 : \dot{U}_4 + 2U_0U_3 + 2U_1U_2 &= 0 \\ p^5 : \dot{U}_5 - 2U_1U_3 + U_2^2 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Par conséquent, les premières composantes de la solution sont données par :

$U_0 = 0, U_1 = t, U_2 = 0, U_3 = \frac{1}{3}t^3, U_4 = 0, U_5 = \frac{2}{15}t^5, \dots$
 Mettant $p = 1$, la solution approximative de l'équation. (2.2.14) est

$$u = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \quad (2.2.20)$$

Donc :

$$u(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \dots \quad (2.2.21)$$

2.2.2 Convergence et estimation de l'erreur

Dans cette section, on étudie la convergence de la méthode **HPM** (voir : [4], [5], [10]). On peut réécrire (2.2.6) comme suit

$$\boxed{L(v) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N(v)]} \quad (2.2.22)$$

En remplaçant (2.2.9) dans (2.2.22), on obtient

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right]. \quad (2.2.23)$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right]. \quad (2.2.24)$$

Selon le développement de Maclaurin de $N(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i)$ par rapport à p , nous avons

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right)_{p=0} p^i. \quad (2.2.25)$$

D'après [11], on obtient

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) \right)_{p=0} = \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n v_i p^i\right) \right)_{p=0}. \quad (2.2.26)$$

Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n v_i p^i\right) \right)_{p=0} p^i. \quad (2.2.27)$$

Posons

$$H_n(v_0, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^n v_i p^i\right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.28)$$

H_n sont appelés polynômes de He [11]. Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i p^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \quad (2.2.29)$$

En remplaçant (2.2.29) dans (2.2.24), on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i \right]. \quad (2.2.30)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on trouve

$$\begin{aligned}
p^0 : L(v_0) - L(u_0) &= 0, \\
p^1 : L(v_1) &= f(r) - L(u_0) - H_0, \\
p^2 : L(v_2) &= -H_1, \\
&\vdots \\
p^{n+1} : L(v_{n+1}) &= -H_n, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Donc, on conclut

$$\begin{aligned}
p^0 : v_0 &= u_0, \\
p^1 : v_1 &= L^{-1}(f(r)) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\
p^2 : v_2 &= -L^{-1}(H_1), \\
&\vdots \\
p^{n+1} : v_{n+1} &= -L^{-1}(H_n), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Théorème 2.2.1 La solution de l'équation (2.2.1) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de s_n donnée par

$$s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad s_0 = 0, \tag{2.2.33}$$

en utilisant le schéma itératif

$$s_{n+1} = -L^{-1}N_n(s_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \tag{2.2.34}$$

où

$$N_n \left(\sum_{i=0}^n v_i \right) = \sum_{i=0}^n H_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2.35}$$

Démonstration. Pour $n = 0$, d'après (2.2.34), on a :

$$s_1 = -L^{-1}N_0(s_0 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \tag{2.2.36}$$

Alors

$$v_1 = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \tag{2.2.37}$$

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}
s_2 &= -L^{-1}N_1(s_1 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1}(H_1 + H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1}(H_1) + v_1.
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Selon $s_2 = v_1 + v_2$, nous obtenons

$$v_2 = -L^{-1}(H_1). \quad (2.2.39)$$

Ce théorème sera démontré par induction. Supposons que $v_{k+1} = -L^{-1}(H_k)$, pour $k = 1, 2, \dots, n-1$, donc

$$s_{n+1} = -L^{-1}N_n(s_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1}\left(\sum_{i=0}^n H_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \quad (2.2.40)$$

$$s_{n+1} = -\sum_{i=0}^n L^{-1}(H_i) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = v_1 + \dots + v_n - L^{-1}(H_n). \quad (2.2.41)$$

Puis, à partir de (2.2.33), on peut trouver

$$v_{n+1} = -L^{-1}(H_n). \quad (2.2.42)$$

Ce résultat est identique à celui de (2.2.32) obtenu par la méthode HPM. \square

Théorème 2.2.2 Soit B un espace de Banach.

-(a) $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers $s \in B$, si

$$\exists(0 \leq \lambda < 1) \text{ telque } (\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|v_n\| \leq \lambda \|v_{n-1}\|) \quad (2.2.43)$$

-(b) $s = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ vérifie

$$s = -L^{-1}N(s + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \quad (2.2.44)$$

Démonstration. (a) on a

$$\|s_{n+1} - s_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \lambda \|v_n\| \leq \lambda^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} \|v_0\| \quad (2.2.45)$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &= \|(s_n - s_{n-1}) + (s_{n-1} - s_{n-2}) + \dots + (s_{m+1} - s_m)\|, \\ &\leq \|s_n - s_{n-1}\| + \|s_{n-1} - s_{n-2}\| + \dots + \|s_{m+1} - s_m\|, \\ &\leq \lambda^n \|v_0\| + \lambda^{n-1} \|v_0\| + \dots + \lambda^{m+1} \|v_0\|, \\ &\leq (\lambda^{m+1} + \dots + \lambda^{n+1}) \|v_0\|, \\ &\leq \lambda^{m+1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\|, \\ &\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1 - \lambda} \|v_0\|. \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Ainsi

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|s_n - s_m\| = 0. \quad (2.2.47)$$

$(s_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans espace B complet. Elle est donc convergente, i.e :

$$\exists s \in B, \text{ avec : } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s. \quad (2.2.48)$$

(b) D'après (2.2.34), on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n (s_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n \left(\sum_{i=0}^n v_i \right) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

$$\begin{aligned} s &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{H}_i - u_0 + L^{-1}(f(r)). \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

Par(2.2.35) et (2.2.29), pour $p = 1$, il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_i = N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right). \quad (2.2.51)$$

Ainsi

$$s = -L^{-1} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i \right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1} N (s + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \quad (2.2.52)$$

□

Lemme 2.2.1 L'équation (2.2.44) est équivalente à

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.2.53)$$

Démonstration. On écrit l'équation (2.2.44) comme suit

$$s + u_0 = -L^{-1} N (s + v_0) + L^{-1}(f(r)). \quad (2.2.54)$$

En appliquant l'opérateur L à l'équation précédente, on obtient

$$L(s + u_0) = -N(s + v_0) + f(r). \quad (2.2.55)$$

Comme $u_0 = v_0$

$$L(s + v_0) + N(s + v_0) = f(r). \quad (2.2.56)$$

Soit $u = s + v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$, l'équation (2.2.53) devient l'équation d'origine. En suite, la solution de l'équation (2.2.44) est la même que celle de la solution de $A(u) - f(r) = 0$ □

Définition 2.2.1. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit*

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0, \\ 0, & \|v_i\| = 0. \end{cases} \quad (2.2.57)$$

Dans le théorème 2.2.2, $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers la solution exacte, lorsque $0 \leq \lambda_i < 1$. Si v_i et v'_i sont obtenus par deux différentes homotopies, et $\lambda_i < \lambda'_i$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le taux de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ est supérieure à $\sum_{i=0}^{\infty} v'_i$

Chapitre 3

Applications de la méthode HPM pour résoudre certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications de la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) aux équations différentielles fractionnaires (voir : [6], [12], [14]).

3.1 Existence et unicité pour l'équation fractionnaire de type Caputo

Dans cette partie on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). On utilisera les symboles ${}^{RL}D^\alpha$ et ${}^CD^\alpha$ pour les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et Caputo.

Définition 3.1.1. Soit $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ alors :

$$\boxed{{}^{RL}D^\alpha u(x) = f(x, u(x))}, \quad (3.1.1)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville. Comme conditions initiales pour ce type d'EDF on utilise :

$${}^{RL}D^{\alpha-k}u(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} I^{n-\alpha}u(z) = b_n. \quad (3.1.2)$$

De la même manière

$${}^CD^\alpha u(x) = f(x, u(x)), \quad (3.1.3)$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$u^k(0) = b_k \quad (k = 0, 2, \dots, n-1). \quad (3.1.4)$$

L'utilisation de conditions initiales de différents types pour les équations différentielles fractionnaires (3.1.1) et (3.1.3) nous assure l'unicité des solutions de l'EDF correspondante, qu'on va prouver dans les théorèmes suivants.

Théorème 3.1.1[9]

Soit (U, d) un espace métrique complet non vide, soit $0 < \omega < 1$ et soit $T : U \rightarrow U$ une contractante telle que, pour chaque $u, v \in U$, la relation

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v) \quad (3.1.5)$$

est vérifiée. Alors l'opérateur T a un point fixe unique $u^* \in U$. Nous notons que, si la contraction $T : U \rightarrow U$ vérifie la condition (3.1.5), est appelée une contraction, ou une application contractive.

Théorème 3.1.2 [2]

Soit $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, n = [\alpha] + 1$. De plus, soit $k > 0, h^* > 0$, et $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. On définit

$$G = [0, h^*] \times [b_0 - K, b_0 + K]$$

et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $h > 0$ et une fonction $u \in C[0, h]$ solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo muni des conditions initiales. Dans le cas $\alpha \in (0, 1)$ le paramètre h est donné par la relation

$$h = \min \left\{ h^*, (KT(\alpha + 1)/M)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \text{avec} \quad M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x, z)|$$

Si de plus f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable, c'est-à-dire:

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| < L |u_1 - u_2|$$

avec $L > 0$ une constante indépendante de x, u_1 et u_2 , alors la fonction $u \in C[0, h]$ est unique.

Théorème 3.1.3 [3] Sous les hypothèses du théorème précédent, la fonction $u \in C[0, h]$ est une solution de l'EDF de type Caputo avec les conditions initiales si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt \quad (3.1.6)$$

Démonstration. Premièrement supposons que u est solution de l'équation précédente, on peut écrire cette équation sous la forme réduite :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} u_0^{(k)} + I_0^\alpha f(x, u(x))$$

En appliquant l'opérateur de différentiation ${}^{RL}D_0^\alpha$ sur les deux cotés de cette relation on aura immédiatement que y est solution de l'équation différentielle. Appliquons maintenant l'opérateur ${}^R D_0^k$, $0 \leq k \leq n-1$ sur l'équation de Volterra.

$${}^{RL}D_0^k u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} {}^{RL}D_0^k \frac{(x)^j}{j!} u_0^{(j)} + {}^{RL}D_0^k I_0^k I_0^{\alpha-k} f(x, u(x)).$$

${}^{RL}D_0^k(t)^j = 0$ pour $j < k$ alors si $x = 0$ on a :

$${}^{RL}D_0^k u(0) = {}^{RL}D_0^k \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)} \Big|_{x=0} + I_0^{\alpha-k} f(x, u(x)) \Big|_{x=0}$$

et comme $\alpha - k > 0$, l'intégrale est nul $I_0^{\alpha-k} f(x, u(x)) \Big|_{x=0} = 0$ par suite ${}^{RL}D_0^k u(0) = u_0^{(k)} = b_k$. D'autre part on définit $z(x) = f(x, u(x))$ alors $z \in C[0, h]$ on réécrit l'équation de la forme

$$\begin{aligned} z(x) = f(x, u(x)) &= {}^C D_0^\alpha u(x) = {}^{RL}D_0^\alpha (u - T_{n-1}[u, 0])(x) \\ &= {}^{RL}D_0^n I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x) \end{aligned}$$

$T_{n-1}[u, 0]$ est le polynôme de Taylor de degré $n-1$ ($T_{n-1}[u, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x)^k}{k!} u_0^{(k)}$) pour la fonction f autour de 0. En appliquant l'opérateur I_0^n sur les deux termes de cette relation elle devient :

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x) + q(x).$$

Avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $n-1$. Comme z est continue la fonction $I_0^n z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine. En outre la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ a la même propriété par construction. Et donc la fonction $I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi. Par suite le polynôme q a la même propriété mais comme il est de degré ne dépassant pas $n-1$ il en résulte que $q = 0$, par conséquent

$$I_0^n z(x) = I_0^{n-\alpha} (u - T_{n-1}[u, 0])(x).$$

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_0^{n-\alpha}$ sur les deux cotés de cette équation elle devient :

$$u(x) - T_{n-1}[u, 0](x) = I_0^\alpha z(x).$$

En substituant $z(x)$ et $T_{n-1}[u, 0](x)$ on retrouve l'équation de Volterra :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t)) dt.$$

□

3.2 La méthode HPM pour les équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire

Momani et al. [14] ont introduit un algorithme pour traiter d'une manière simple et efficace les équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre fractionnaire. Ils considèrent les équations aux dérivées partielles non linéaires fractionnaire temporelle de la forme

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) = L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) + h(x, t), t > 0 \\ u^k(x, 0) = g_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où L est un opérateur linéaire, N un opérateur non linéaire qui pourrait également inclure d'autres dérivées fractionnaires d'ordre inférieur à α . La fonction h est une fonction connue et ${}^C D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha(m-1 < \alpha \leq m)$. Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante :

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - L(u, u_x, u_{xx}) - h(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^C D_t^\alpha u \right], \quad (3.2.2)$$

ou

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} - h(x, t) = p \left[\frac{\partial u^m}{\partial t^m} + L(u, u_x, u_{xx}) + N(u, u_x, u_{xx}) - {}^C D_t^\alpha u \right], \quad (3.2.3)$$

où $p \in [0, 1]$. Dans le cas où $p = 0$, l'équation (3.2.2) devient l'équation linéaire suivante

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} = L(u, u_x, u_{xx}) + h(x, t). \quad (3.2.4)$$

et l'équation (3.2.3)

$$\frac{\partial u^m}{\partial t^m} = h(x, t). \quad (3.2.5)$$

La solution de l'équation (3.2.2) ou de (3.2.3) s'écrit sous la forme de la série

$$\boxed{u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 \dots} \quad (3.2.6)$$

La solution approximative est donnée par

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)} \quad (3.2.7)$$

Analyse de convergence de la méthode de perturbation d'homotopie pour les équations aux dérivées partielles fractionnelles

Asma et al. [10] ont étudié la convergence de la méthode de perturbation d'homotopie pour les équations différentielles fractionnaires avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

$${}^C D_t^\alpha u(t) = f(t, u(t), D^{n_1} u(t), D^{n_2} u(t), \dots, D^{n_q} u(t)), \quad t \in [0, T] \quad (3.2.8)$$

$$u^k(0) = b^k, \quad u(x, t) = g(x, t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.9)$$

Où ${}^C D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α , $m - 1 \leq \alpha \leq m$, $n_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i .

Considérons que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ admet des dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ continues et bornées qui satisfont la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} & |f(t, u_1(t), D^{n_1} u_1(t), \dots, D^{n_q} u_1(t)) - f(t, u_2(t), D^{n_1} u_2(t), \dots, D^{n_q} u_2(t))| \\ & \leq L |f(u_1, D^{n_1} u_1, \dots, D^{n_q} u_1) - f(u_2, D^{n_1} u_2, \dots, D^{n_q} u_2)|, t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

où L étant la constante de Lipschitz. Pour illustrer les concepts de base de la HPM pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires (3.2.8) avec les conditions initiales (3.2.9), nous construisons l'homotopie de (3.2.8) comme suit

$$(1 - p) {}^C D_t^\alpha u(x, t) + p ({}^C D_t^\alpha u(x, t) - f(t, u(t), D^{n_1} u(t), D^{n_2} u(t), \dots, D^{n_q} u(t))) = 0 \quad (3.2.11)$$

ou bien

$${}^C D_t^\alpha u(t, x) = p (f(t, u(t), D^{n_1} u(t), D^{n_2} u(t), \dots, D^{n_q} u(t))) \quad (3.2.12)$$

En remplaçant (2.2.20) dans (3.2.12) et en identifiant les coefficients des différents monômes en p , on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} p^0 : {}^C D_t^\alpha u_0(x, t) &= f(x, t) \\ p^1 : {}^C D_t^\alpha u_1(x, t) &= f(t, u_0(t), D^{n_1} u_0(t), D^{n_2} u_0(t), \dots, D^{n_q} u_0(t)) \\ p^2 : {}^C D_t^\alpha u_2(x, t) &= f(t, u_1(t), D^{n_1} u_1(t), D^{n_2} u_1(t), \dots, D^{n_q} u_1(t)) \\ p^n : {}^C D_t^\alpha u_n(x, t) &= f(t, u_{n-1}(t), D^{n_1} u_{n-1}(t), D^{n_2} u_{n-1}(t), \dots, D^{n_q} u_{n-1}(t)) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Utilisons l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville I^α , qui est l'opérateur inverse de la dérivée de Caputo ${}^C D_t^\alpha$ sur les deux côtés de (3.2.13),

les premieres termes de la solution sont donnés par

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k t^k}{k!} + I^\alpha(f(x, t)) \\
 u_1(x, t) &= I^\alpha(f(t, u_0(t), D^{n_1}u_0(t), D^{n_2}u_0(t), \dots, D^{n_q}u_0(t))) \\
 u_2(x, t) &= I^\alpha(f(t, u_1(t), D^{n_1}u_1(t), D^{n_2}u_1(t), \dots, D^{n_q}u_1(t))) \\
 &\vdots \\
 u_n(x, t) &= I^\alpha(f(t, u_{n-1}(t), D^{n_1}u_{n-1}(t), D^{n_2}u_{n-1}(t), \dots, D^{n_q}u_{n-1}(t))) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

La solution de (3.2.8) sous forme de série est donnée par

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \tag{3.2.15}$$

Soit $(C[0, T], \|\cdot\|)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, T]$ avec la norme

$$\|f(t)\| = \max_{\forall t \in [0, T]} |f(t)| \tag{3.2.16}$$

Théorème 3.2.1 Si f satisfait la condition de Lipschitz (3.2.10), alors le problème (3.2.8) admet une solution unique $u(x, t)$, pour tout $0 < \gamma < 1$.

Démonstration. voir[16] □

Théorème 3.2.2 Soient $u_n(x, t)$ et $u(x, t)$ définies dans l'espace de Banach $(C[0, T], \|\cdot\|)$ Alors, la solution sous forme de série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ définie dans (3.2.15) converge vers la solution de (3.2.8), si $0 < \gamma < 1$.

Démonstration. voir[16] □

Théorème 3.2.3 L'estimation de l'erreur de la solution en série (3.2.15) du problème (3.2.8).

$$\left| u(x, t) - \sum_{i=0}^m u_i(x, t) \right| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{(1 - \gamma)} \|u_0(t)\|.$$

Démonstration. voir[16] □

Exemple 3.2.1. On considère l'équation suivante

$$u' + u^2 = 0, \quad t \geq 0, \quad t \in \Omega \text{ et } u(0) = 1, \tag{3.2.17}$$

La solution exacte de cette équation est

$$u(t) = \frac{1}{1+t}. \quad (3.2.18)$$

Selon la méthode **HPM**, on peut construire l'homotopie suivante :

$$U : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(1-p)(v' - u'_0) + p(v' + v^2) = 0, \quad p \in [0, 1], t \in \Omega. \quad (3.2.19)$$

Les solutions de l'équation (3.2.17), peuvent être écrites sous forme de série

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (3.2.20)$$

En remplaçant (3.2.20) dans (3.2.19) et identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on obtient

$$\begin{aligned} p^0 : v'_0 &= u'_0, \\ p^1 : v'_1 &= -u'_0 - v_0^2, \quad v_1(0) = 0, \\ p^2 : v'_2 &= -2v_0v_1, \quad v_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Par conséquent, les premières composantes de la solution sont données par

$$\begin{aligned} p^0 : v_0 &= 1, \\ p^1 : v_1 &= -t, \\ p^2 : v_2 &= t^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Donc, la solution de (3.2.17) est

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = 1 - t + t^2 + \dots \quad (3.2.23)$$

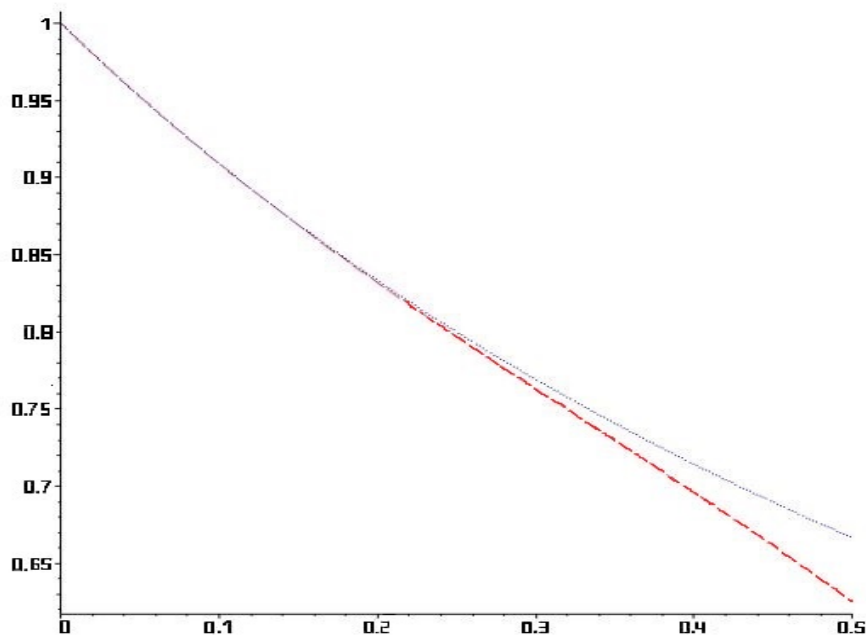


FIGURE 3.2.1 – (Bleu) : La solution exacte (3.2.18); (Rouge) : La solution numérique (3.2.23)

Exemple 3.2.2. On considère l'équation différentielle partielle d'ordre fractionnaire suivante [10]

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \left[0, \frac{1}{2}\right) \tag{3.2.24}$$

$$u(x, 0) = 2x. \tag{3.2.25}$$

La solution exacte dans le cas particulier $\alpha = 1$ est donnée par

$$u(x, t) = \frac{2x}{1 + 2t}. \tag{3.2.26}$$

Selon la méthode **HPM**, on construit l'homotopie suivante

$$(1 - p) ({}^C D_t^\alpha u - {}^C D_t^\alpha u_0) = p (u_{xx} - uu_x - {}^C D_t^\alpha u), \tag{3.2.27}$$

où

$${}^C D_t^\alpha u - {}^C D_t^\alpha u_0 = p (u_{xx} - uu_x - {}^C D_t^\alpha u). \tag{3.2.28}$$

En substituant (2.2.9) dans (3.2.28) et identifiant les termes avec ceux de mêmes

puissances de p , on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned}
p^0 : & {}^C D_t^\alpha u_0 = 0 \\
p^1 : & {}^C D_t^\alpha u_1 = u_{0xx} - u_0 u_{0x} - c D_t^\alpha u_0 \\
p^2 : & {}^C D_t^\alpha u_2 = u_{1xx} - u_1 u_{0x} - u_0 u_{1x} \\
p^3 : & {}^C D_t^\alpha u_3 = u_{2xx} - u_2 u_{0x} - u_1 u_{1x} - u_0 u_{2x} \\
& \vdots \\
p^i : & {}^C D_t^\alpha u_i = (u_{i-1})_{xx} - \sum_{j=0}^{i-1} u_j (u_{i-j-1})_x \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Par utilisation de l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville I^α sur les deux côtés de (3.2.29), on obtient

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= 2x \\
u_1(x, t) &= \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\
u_2(x, t) &= \frac{16xt^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\
u_3(x, t) &= \frac{-16xt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \right) \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

D'après $t \leq \frac{\gamma}{2}$, $0 < \gamma < 1$, $\alpha = 1$, et selon le théorème 3.2.2, nous avons

$$\begin{aligned}
\|s_1 - s_0\| &= \left\| \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\| \\
&= \left\| (2x) \frac{-2xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\| \\
&\leq 2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \|u_0\| = \gamma \|u_0\|
\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

$$\begin{aligned}
\|s_2 - s_0\| &\leq \|s_2 - s_1\| + \|s_1 - s_0\| \\
&= \left\| \frac{16xt^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right\| + \left\| \frac{-4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\| \\
&= \left\| (2x) \frac{8xt^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right\| + \left\| (2x) \frac{-2xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\| \\
&\leq 4 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \|2x\| = \gamma^2 \|u_0\|
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

$$\begin{aligned}
\|s_3 - s_1\| &\leq \|s_3 - s_2\| + \|s_2 - s_1\| \\
&= \left\| \frac{-16xt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \right) \right\| + \left\| \frac{16xt^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right\| \\
&= \left\| (2x) \frac{-8t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \right) \right\| + \left\| (2x) \frac{8t^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right\|. \quad (3.2.33) \\
&\leq 48 \left(\frac{\gamma}{2} \right)^3 \|2x\| = \gamma^3 \|u_0\|
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|s_n - s_m\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \|u_0\| = 0$; donc, s_n est une suite de Cauchy. La solution approchée sous forme de série est

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \\
&= 2x - \frac{4xt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{16xt^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{16xt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(4 + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \right) + \dots \quad (3.2.34)
\end{aligned}$$

3.3 L'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire

L'équation de Cahn-Hilliard est liée à un certain nombre de phénomènes physiques intéressants comme celui de la séparation de phase et de la dynamique de commande de phase (voir : [7], [13], [15]). L'équation n'étant pas facile à résoudre nous appliquons dans cette section la méthode **HPM** pour sa résolution dans les cas fractionnaires temporels et spatiaux. La résolution de l'équation de Cahn-Hilliard par cette méthode réduit les difficultés de calcul par rapport à l'algorithme de décomposition d'Adomian (**ADM**) (voir [8]) .

Dans le cas entier, l'équation de Cahn-Hilliard définie par

$$\boxed{u_t = \gamma u_x + 6u (u_x)^2 + (3u^2 - 1) u_{xx} - u_{xxxx}}, \quad (3.3.1)$$

et dans le cas fractionnaire, elle s'écrit

$${}^C D_t^\alpha u = \gamma {}^C D_x^\beta u + 6u \left({}^C D_x^\beta u \right)^2 + (3u^2 - 1) u_{xx} - u_{xxxx}; \begin{cases} 0 < \alpha \leq 1 \\ 0 < \beta \leq 1 \end{cases} . \quad (3.3.2)$$

A présent, nous utilisons la méthode **HPM** ([5], [14]) pour obtenir les solutions numériques de l'équation (3.3.2). Dans le cas particulier $\gamma = 1$, nous obtenons par la formule (3.2.2) l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left[\frac{\partial u}{\partial t} + {}^C D_x^\beta u + 6u \left({}^C D_x^\beta u \right)^2 + (3u^2 - 1) u_{xx} - u_{xxxx} - {}^C D^\alpha u \right]. \quad (3.3.3)$$

Nous allons résoudre numériquement l'équation (3.3.2) en séparant le cas temporel du cas spécial.

3.3.1 Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire temporelle

Pour $\beta = 1$, nous obtenons l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire temporelle [6]

$${}^C D_t^\alpha u = u_x + 6u(u_x)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx}, \quad (3.3.4)$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = g(x) = \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$. La solution exacte de (3.3.4) pour $\alpha = 1$ est

$$u(x, t) = \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + t)\right). \quad (3.3.5)$$

La transformée homotopique de (3.3.4) est définie comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u_x + 6u(u_x)^2 + (3u^2 - 1)u_{xx} - u_{xxxx} - {}^C D_t^\alpha u \right]. \quad (3.3.6)$$

En tenant compte de $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots$ et la condition initiale $u(x, 0) = \tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$ dans (3.3.6), il vient par identification avec les termes de mêmes puissances de p :

$$p^0 : u_0 = g(x),$$

$$p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + (u_0)_x + 6u_0((u_0)_x)^2 + (3u_0^2 - 1)(u_0)_{xx} - (u_0)_{xxxx} - ({}^C D_t^\alpha u_0),$$

$$p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1)_x + 6u_1((u_0)_x)^2 + 6u_0u_1(u_0)_{xx} + (3u_0^2 - 1)(u_1)_{xx} + 12u_0(u_0)_x(u_1)_x - (u_1)_{xxxx} - ({}^C D_t^\alpha u_1),$$

$$p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2)_x + 6u_2((u_0)_x)^2 + 6u_0u_1(u_1)_{xx} + (3u_0^2 - 1)(u_1)_{xx} + 12u_1(u_0)_x(u_1)_x + (u_2)_x + 6u_0(2(u_0)_x(u_2)_x + ((u_1)_x)^2) + (6u_0u_2 + 3u_1^2)(u_0)_{xx} - (u_2)_{xxxx} - ({}^C D_t^\alpha u_2),$$

⋮

La résolution de ces équations donne

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= \tanh \left[\frac{\sqrt{2}}{2} x \right], \\
 u_1(x, t) &= \frac{t \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}}, \\
 u_2(x, t) &= \frac{t \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]}{2} - \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, \\
 u_3(x, t) &= \frac{t \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]}{2} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2} t^3 \left(2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4} \\
 &\quad - \frac{\left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Les premières termes de la solution de (3.3.4) sont déterminés comme suit Cas $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= \tanh \left[\frac{\sqrt{2}}{2} x \right], \\
 u_1(x, t) &= \frac{t \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}}, \\
 u_2(x, t) &= -\frac{t^2}{2} \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right], \\
 u_3(x, t) &= \frac{\sqrt{2} t^3 \left(2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4}.
 \end{aligned}$$

Nous concluons que dans ce cas ($\alpha = 1$), la série de solution des quatre premières termes de (3.3.4) est déterminée par

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) \\
 u(x, t) &= \tanh \left[\frac{\sqrt{2}}{2} x \right] + \frac{t \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2} \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2} t^3 \left(2 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 - 3 \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^4 \right)}{4}.
 \end{aligned}$$

Cas $\alpha = 1/2$

Dans ce cas : en remplaçant $\alpha = 1/2$, on obtient

$$u_0(x, t) = \tanh \left[\frac{\sqrt{2}}{2} x \right],$$

$$u_1(x, t) = \frac{t \operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right]^2}{\sqrt{2}},$$

$$u_2(x, t) = \frac{t \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2}{\sqrt{2}} - \frac{t^2}{2} \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2 \tanh \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \\ - 0.3761263891 \cdot \sqrt{2} t^{3/2} \left(\operatorname{sech} \left[\frac{x}{\sqrt{2}} \right] \right)^2.$$

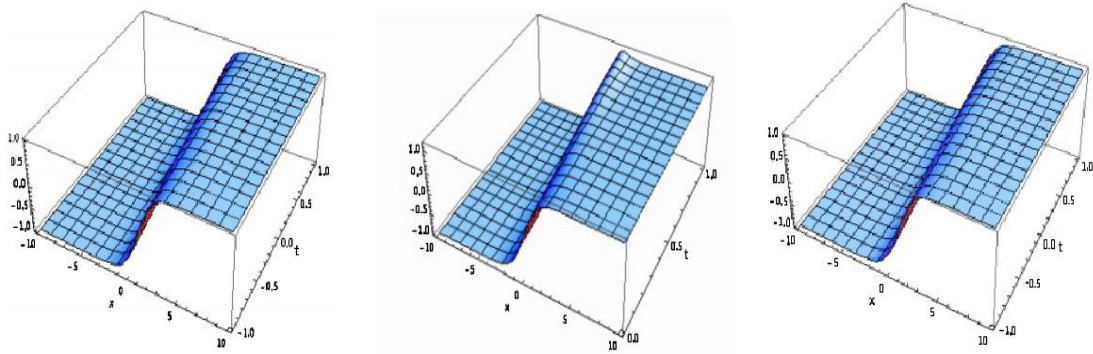


FIGURE 3.3.1 – (Gauche) : La solution exacte de (3.3.4); (Milieu) : La solution approximative de (3.3.4) pour $\alpha = 1/2$; (Droite) : La solution approximative de (3.3.4) pour $\alpha = 1$

3.3.2 Résolution numérique de l'équation de Cahn-Hilliard fractionnaire spatiale

Pour $\alpha = 1$, nous obtenons l'équation fractionnaire spatiale de la forme [6]

$$u_t = {}^C D_x^\beta u + 6u \left({}^C D_x^\beta u \right)^2 + (3u^2 - 1) u_{xx} - u_{xxxx}; 0 < \beta \leq 1, x, t > 0. \quad (3.3.7)$$

On prend la condition initiale

$$u(x, 0) = g(x) = x^2, \quad (3.3.8)$$

(ce choix est fait pour éviter les difficultés de calcul de la différentiation fractionnaire). La transformée homotopique de (3.3.7) est construite comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left[{}^C D_x^\beta u + 6u \left({}^C D_x^\beta u \right)^2 + (3u^2 - 1) u_{xx} - u_{xxxx} \right]. \quad (3.3.9)$$

Similairement au cas temporel avec la condition initiale $u(x, 0) = g(x) = x^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} p^0 : u_0 &= g(x), \\ p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} + (3(u_0)^2 - 1) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + 6u_0 \left(\frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} \right)^2, \\ p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial t} &= (3(u_0)^2 - 1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 6u_0 u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &+ 12u_0 \left(\frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^\beta u_1}{\partial x^\beta} + 6u_1 \left(\frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} \right)^2 + \frac{\partial^\beta u_1}{\partial x^\beta} - \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4}, \\ p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial t} &= (3(u_0)^2 - 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 6u_0 u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (6u_0 u_2 + 3(u_1)^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &- \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 6u_0 \left(2 \left(\frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^\beta u_2}{\partial x^\beta} + \left(\frac{\partial^\beta u_1}{\partial x^\beta} \right)^2 \right) \\ &+ 12u_1 \left(\frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^\beta u_1}{\partial x^\beta} + 6u_2 \left(\frac{\partial^\beta u_0}{\partial x^\beta} \right)^2 + \frac{\partial^\beta u_2}{\partial x^\beta}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$u_0(x, t) = x^2,$$

$$\text{Cas } \beta = 1 : u_1(x, t) = 2t(-1 + 3x^4),$$

$$u_2(x, t) = \frac{2t(-3\pi + 4\sqrt{\pi}x^{3/2} + 9\pi x^4 + 64x^5)}{3\pi}.$$

Par conséquent, la solution de l'équation (3.3.7) est donnée par

$$u(x, t) = x^2 + 2t(-1 + 3x^4) + 24(-3t^2 - 2t^2 x^2 + 6t^2 x^6),$$

Lorsque $\beta = 1/2$, on obtient les termes suivants

$$u_0(x, t) = x^2,$$

$$u_1(x, t) = \frac{2t(-3\pi + 4\sqrt{\pi}x^{3/2} + 9\pi x^4 + 64x^5)}{3\pi},$$

$$u_2(x, t) = \frac{t^2}{3780\pi^2 x^{5/2}} \begin{pmatrix} -2835\pi^{3/2} - 7560\pi^{3/2}x^2 - 272160\pi^2 x^{5/2} \\ -9676800\pi x^{7/2} + 3780\pi^2 x^{7/2} - 181440\pi^2 x^{9/2} \\ -1895040\pi x^{11/2} + 113292\pi^{3/2}x^6 \\ +542720\sqrt{\pi}x^7 + 120960\pi^{3/2}x^7 \\ +544320\pi^2 x^{17/2} + 7617024\pi x^{19/2} + 13926400x^{21/2} \end{pmatrix}. \quad \text{La so-}$$

lution approximative de (3.3.7) est illustrée dans la figure 3.2.2

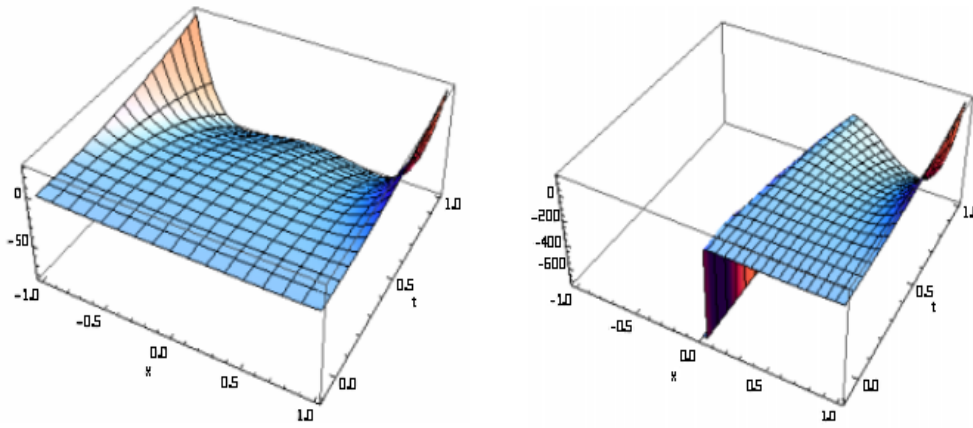


FIGURE 3.3.2 – (Gauche) : La solution approximative de (3.3.7) pour $\beta = 1$; (Droite) : La solution approximative de (3.3.7) pour $\beta = 1/2$.

3.4 L'équation de Fisher fractionnaire

Dans cette section, nous étudions la résolution numérique de l'équation de Fisher fractionnaire temporelle et spatiale [12]

$$\boxed{{}^C D_t^\alpha u = {}^C D_x^\beta u + \gamma u(1 - u), \quad 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2,} \quad (3.4.1)$$

où

$${}^C D_t^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}, \quad {}^C D_x^\beta u = \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}.$$

Pour le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, l'équation (3.4.1) devient

$$u_t = u_{xx} + \gamma u(1 - u). \quad (3.4.2)$$

Cette équation a été proposée par Fisher [12]. L'équation de Fisher est très utilisée dans les procédés physiques. elle c'était distinguée jusqu à 1979 par l'absence d'une solution analytique. Cependant, une solution particulière de l'équation (3.4.2) a été trouvée par Ablowitz et Zeppetella [1]. Elle est donnée par

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{\frac{\gamma}{6}}x - \frac{5}{6}\gamma t}} \right)^2. \quad (3.4.3)$$

Cette équation est très connue dans la chimie, elle représente la concentration du réactif et la constante γ caractérise la vitesse de la réaction chimique.

Dans ce qui suit, nous appliquons la méthode HPM modifiée (Algorithme de Momani et al.) pour obtenir des solutions analytiques approchées de l'équation de Fisher fractionnaire temporelle. Nous utilisons la méthode HPM pour résoudre l'équation de Fisher dans le cas fractionnaire spatial.

3.4.1 Résolution numérique de l'équation de Fisher fractionnaire temporelle

Pour $\beta = 2$, nous obtenons l'équation de Fisher fractionnaire temporelle

$${}^C D_t^\alpha u = u_{xx} + \gamma u(1 - u), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.4.4)$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$. D'après l'équation (3.2.3), l'homotopie de l'équation (3.4.4) peut être construite comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u_{xx} + \gamma u - \gamma u^2 - {}^C D_t^\alpha u \right] \quad (3.4.5)$$

Similairement à ce qui a été fait dans le paragraphe 3.2.1, nous obtenons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial u_0}{\partial t} &= 0, \\ p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_{0xx} + \gamma u_0 - \gamma u_0^2 - {}^C D_t^\alpha u_0, \\ p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_{1xx} + \gamma u_1 - \gamma (2u_0 u_1) - {}^C D_t^\alpha u_1, \\ p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial t} &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_{2xx} + \gamma u_2 - \gamma (2u_0 u_2 + u_1^2) - {}^C D_t^\alpha u_2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

avec les conditions suivantes

$$u_0(x, 0) = f(x), \quad (3.4.7)$$

$$u_i(x, 0) = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots \quad (3.4.8)$$

Cas 1 : pour $\gamma = 1$, l'équation (3.4.4) devient

$${}^C D_t^\alpha u = u_{xx} + u(1 - u), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.4.9)$$

avec la condition initiale

$$u_0(x, 0) = \lambda. \quad (3.4.10)$$

L'utilisation de la condition initiale (3.4.10) avec la résolution des équations (3.4.6) donnent

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \lambda \\ u_1(x, t) &= \lambda(1 - \lambda)t \\ u_2(x, t) &= \lambda(1 - \lambda)t + \lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)\frac{t^2}{2!} - \lambda(1 - \lambda)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \\ u_3(x, t) &= \lambda(1 - \lambda)t + 2\lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)\frac{t^2}{2!} + \lambda(1 - \lambda)(1 - 6\lambda + 6\lambda^2)\frac{t^3}{3!} \\ &\quad - 2\lambda(1 - \lambda)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} + \lambda(1 - \lambda)\frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4 - 2\alpha)} - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4 - \alpha)} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Les quatre premières termes de la solution de l'équation (3.4.9) sont donnés par

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lambda + 3\lambda(1 - \lambda)t + 3\lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)\frac{t^2}{2!} + \lambda(1 - \lambda)(1 - 6\lambda + 6\lambda^2)\frac{t^3}{3!} \\ &\quad - 3\lambda(1 - \lambda)\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} + \lambda(1 - \lambda)\frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4 - 2\alpha)} - 2\lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)\frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4 - \alpha)}. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

En remplaçant par $\alpha = 1$, nous obtenons la même solution approximative de l'équation aux dérivées partielles non linéaires de Fisher obtenue par Matinfar et al. dans [12] qui s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lambda + \lambda(1 - \lambda)t + \lambda(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)\frac{t^2}{2!} + \lambda(1 - \lambda)(1 - 6\lambda + 6\lambda^2)\frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \frac{\lambda e^t}{1 - \lambda + \lambda e^t}. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Cas 2 : pour $\gamma = 6$, l'équation (3.4.4) devient

$${}^C D_t^\alpha u = u_{xx} + 6u(1 - u), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.4.14)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}. \quad (3.4.15)$$

L'utilisation de la condition initiale (3.4.15) avec la résolution des équation

(3.4.6) donnent

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \frac{1}{(1 + e^x)^2}, \\
u_1(x, t) &= \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3}t, \\
u_2(x, t) &= \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3}t + \frac{50e^x (2e^x - 1) t^2}{(1 + e^x)^4 2!} - \frac{10e^x t^{2-\alpha}}{(1 + e^x)^3 \Gamma(3 - \alpha)}, \\
u_3(x, t) &= \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3}t + \frac{50e^x (2e^x - 1) t^2}{(1 + e^x)^4 2!} + \frac{250e^x (4e^{2x} - 7e^x + 1) t^3}{(1 + e^x)^4 3!} \\
&\quad - \frac{20e^x t^{2-\alpha}}{(1 + e^x)^3 \Gamma(3 - \alpha)} + \frac{10e^x t^{3-2\alpha}}{(1 + e^x)^3 \Gamma(4 - 2\alpha)} - \frac{50e^x (2e^x - 1) t^{3-\alpha}}{(1 + e^x)^4 \Gamma(4 - \alpha)}, \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Les quatre premières termes de la solution de l'équation (3.4.14) sont donnés par

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \frac{30e^x}{(1 + e^x)^3}t + \frac{100e^x (2e^x - 1) t^2}{(1 + e^x)^4 2!} + \frac{250e^x (4e^{2x} - 7e^x + 1) t^3}{(1 + e^x)^4 3!} \\
&\quad - \frac{30e^x t^{2-\alpha}}{(1 + e^x)^3 \Gamma(3 - \alpha)} + \frac{10e^x t^{3-2\alpha}}{(1 + e^x)^3 \Gamma(4 - 2\alpha)} - \frac{50e^x (2e^x - 1) t^{3-\alpha}}{(1 + e^x)^4 \Gamma(4 - \alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

En remplaçant par $\alpha = 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{(1 + e^x)^2} + \frac{10e^x}{(1 + e^x)^3}t + \frac{50e^x (2e^x - 1) t^2}{(1 + e^x)^4 2!} + \frac{250e^x (4e^{2x} - 7e^x + 1) t^3}{(1 + e^x)^4 3!} + \dots \\
&= \frac{1}{(1 + e^{x-5t})^2}.
\end{aligned} \tag{3.4.18}$$

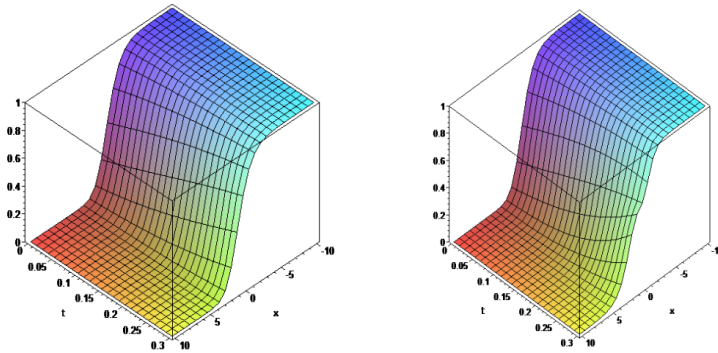


FIGURE 3.4.1 – (Gauche) : La solution exacte de (3.4.14) – (3.3.15); (Droite) : La solution approximative de (3.4.14) – (3.4.15) avec quatre termes pour $\alpha = 1$

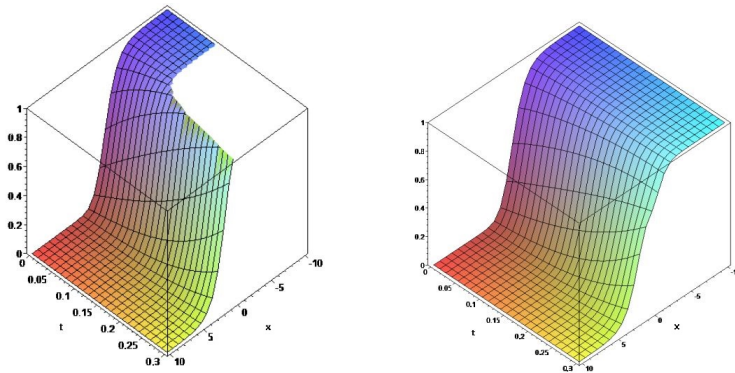


FIGURE 3.4.2 – (Gauche) : La solution approximative de (3.4.14) – (3.4.15) pour $\alpha = 0.5$; (Droite) : La solution approximative de (3.4.14) – (3.4.15) pour $\alpha = 0.9$.

3.4.2 Résolution numérique de l'équation de Fisher fractionnaire spatiale

Maintenant, nous considérons l'équation de Fisher fractionnaire spatiale de la forme

$$u_t = {}^C D_t^\beta u_{xx} + \gamma u(1 - u), \quad 1 < \beta \leq 2, \quad (3.4.19)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x^2. \quad (3.4.20)$$

Selon la méthode HPM, nous construisons l'homotopie suivante

$$u_t - v_{0t} + p \left[-{}^C D_x^\beta - u(1 - u) + v_{0t} \right], \quad 1 < \beta \leq 2, \quad (3.4.21)$$

où $p \in [0; 1]$, $v_0 = u(x; 0) = x^2$ et $\gamma = 1$ Similairement au cas temporel, nous obtenons le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}
 p^0 : \frac{\partial u_0}{\partial t} &= v_{0t} \\
 p^1 : \frac{\partial u_1}{\partial t} &= {}^C D_x^\beta u_0 + u_0 - u_0^2 - v_{0t} \\
 p^2 : \frac{\partial u_2}{\partial t} &= {}^C D_x^\beta u_1 + u_1 - 2u_0 u_1 \\
 p^3 : \frac{\partial u_3}{\partial t} &= {}^C D_x^\beta u_2 + u_2 - (2u_0 u_2 + u_1^2) \\
 &\vdots \\
 p^n : \frac{\partial u_n}{\partial t} &= {}^C D_x^\beta u_{n-1} + u_{n-1} - \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i u_{n-i-1} \right), \quad n \geq 1,
 \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

avec les conditions suivantes

$$u_0(x, 0) = x^2, u_i(x, 0) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \tag{3.4.23}$$

En utilisant les conditions initiales (3.4.22) avec la résolution des équations (3.4.23) donnent

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= x^2 \\
 u_1(x, t) &= \left(a_1 x^{2-\beta} + x^2 - x^4 \right) t \\
 u_2(x, t) &= \left(a_2 x^{2-2\beta} + a_3 x^{2-\beta} + a_4 x^{4-\beta} + x^2 - 3x^4 + 2x^6 \right) \frac{t^2}{2!} \\
 u_3(x, t) &= \left(a_5 x^{2-3\beta} + a_6 x^{2-2\beta} + a_7 x^{2-\beta} + a_8 x^{4-2\beta} + a_{10} x^{6-\beta} + x^2 - 6x^4 + 10x^6 - 5x^8 \right) \frac{t^3}{3!} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

où

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{\Gamma(3-\beta)}, a_2 = \frac{2}{\Gamma(3-2\beta)}, a_3 = \frac{4}{\Gamma(3-\beta)}, a_4 = -\frac{24}{\Gamma(5-\beta)} - \frac{4}{\Gamma(3-\beta)}, a_5 = \frac{2}{\Gamma(3-3\beta)}, \\
 a_6 &= \frac{6}{\Gamma(3-2\beta)}, a_7 = \frac{6}{\Gamma(3-\beta)}, a_8 = -\frac{24}{\Gamma(3-2\beta)} - \frac{4\Gamma(5-\beta)}{\Gamma(3-\beta)\Gamma(5-2\beta)} - \frac{4}{\Gamma^2(3-\beta)}, \\
 a_9 &= -\frac{96}{\Gamma(5-\beta)} - \frac{16}{\Gamma(3-\beta)}, a_{10} = 2\frac{6!}{\Gamma(7-\beta)} + \frac{48}{\Gamma(7-\beta)} + \frac{12}{\Gamma(3-\beta)}.
 \end{aligned}$$

Pour $p = 1$, nous avons la solution pour u_0, u_1, u_2, u_3

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= x^2 + \left(a_1 x^{2-\beta} + x^2 - x^4 \right) t \\
 &\quad + \left(a_2 x^{2-2\beta} + a_3 x^{2-\beta} + a_4 x^{4-\beta} + x^2 - 3x^4 + 2x^6 \right) \frac{t^2}{2!} \\
 &\quad + \left(a_5 x^{2-3\beta} + a_6 x^{2-2\beta} + a_7 x^{2-\beta} + a_8 x^{4-2\beta} + a_9 x^{4-\beta} \right. \\
 &\quad \left. + a_{10} x^{6-\beta} + x^2 - 6x^4 + 10x^6 - 5x^8 \right) \frac{t^3}{3!}.
 \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Cas 1 : Pour $\beta = 2$, la solution devient

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & x^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} + x^2 - x^4 \right) t + \left(\frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} + x^2 - \frac{104}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} - 3x^4 + 2x^6 \right) \frac{t^2}{2!} \\
 & + \left(\frac{12}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{39\pi + 16}{\pi} x + x^2 - \frac{416}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} - 6x^4 + \frac{7328}{105\sqrt{\pi}} x^{\frac{9}{2}} + 10x^6 - 5x^8 \right) \frac{t^3}{3!}.
 \end{aligned}
 \tag{3.4.26}$$

De la même manière, nous pouvons obtenir la solution approchée d'ordre supérieur de l'équation (3.4.18) en utilisant les formules d'itération (3.4.23) et Maple.

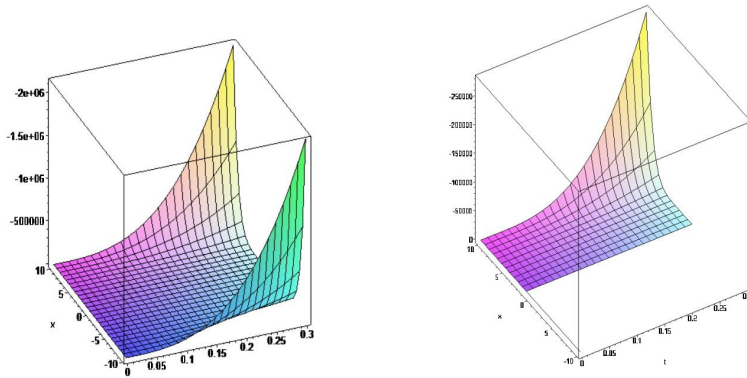


FIGURE 3.4.3 – (Gauche) : La solution approximative de (3.4.19) – (3.4.20) pour $\alpha = 0.5$; (Droite) : La solution approximative de (3.4.19) – (3.4.20) pour $\alpha = 0.9$.

Conclusion

Dans ce travail deux méthodes numériques ont été utilisées pour résoudre quelques problèmes de Cauchy sur les EDO. Les résultats obtenus montrent la fiabilité et l'importance de la méthode ADM. En revanche la méthode HPM appliquée à l'équation de Fisher et Cahn-Hilliard fractionnaire montre l'efficacité de cette méthode pour la résolution des équations différentielles fractionnaires.

Bibliographie

- [1] Ablowitz, M.J., Zepetella, A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed, *Bull. Math. Biol.*, 41, (1979), 835 – 840.
- [2] Anatoly A.Kilbas, Sergei A.Marzan, Cauchy Problem for Differential Equation with Caputo derivative, *Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2004.
- [3] A. M. SALAH, Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires, université Mentouri-Constantine, faculté des sciences, 2009.
- [4] Ayatia, Z. Biazar, J. On the convergence of Homotopy perturbation method, *J. Egyptian. Math. Soci.*, 23, (2015), 424 – 428.
- [5] Biazar, J., Ghazvini, H. Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*. 10, (2009), 2633– 2640.
- [6] Bouhassoun, A., Hamdi Cherif, M. Homotopy Perturbation Method For Solving The Fractional Cahn-Hilliard Equation, *J. Interdisc. Math.*, 18(5), (2015), 513 – 524.
- [7] Cahn, J.W. Hilliard, J.E. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy, *J. Chem. Phys.*, 28(258), (1958).
- [8] Dahmani, Z., Benbachir, M. Solutions of the Cahn-Hilliard Equation with Time and Space Fractional Derivatives, *Int. J. Nonlinear. Sci.*, 8(1), (2009), 19 – 26.
- [9] D. ZIANE, Etude de l'existence et de la stabilité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire, université d'Oran Senia, faculté des sciences, 2012 .

-
- [10] Elbeleze, A.A., Kiliçman, A., Taib, B.M. Note on the Convergence Analysis of Homotopy Perturbation Method for Fractional Partial Differential Equations, H. Pub. corp. Abst. Appl. Anal., A. ID 803902, (2014), 1 – 8.
- [11] Ghorbani, A. Beyond Adomian's polynomials : He polynomials, Chaos Solitons Fract. 39(3), (2009), 1486 – 1492.
- [12] Hamdi Cherif, M., Belghaba, K., Ziane, D. HOMOTOPY PERTURBATION METHOD FOR SOLVING THE FRACTIONAL FISHER'S EQUATION, Int. J. Of Anal. App. 10(1), (2016), 9 – 16.
- [13] Liu, S., Wang, F., Zhao, H. Global existence and asymptotics of solutions of the Cahn-Hilliard equation, J. Differential Equations., 238(2), (2007), 426 – 469.
- [14] Momani, S., Odibat, Z. Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, Phy. Lett. A., 365, (2007), 345 – 350.
- [15] Morton, E.G. Generalized Ginzburg-Landau and Cahn-Hilliard equations based on a microforce balance, Phys. D., 92(3 – 4), (1996), 178 – 192.
- [16] Podlubny, I. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA, 1999
- [17] B.Gbadamosi, O.Adebimpe, E.I.Akinola, I.A.Olopade, Solving Riccati equation using Adomian Decomposition Method, Departement of pure Mathematics, uni- versity of Technology PMB 4000, Ogbomose, NIGERIA, 2012
- [18] He, J.H. Homotopy perturbation technique, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 178 (3), (1999), 257-262.