

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Téliidji de Laghouat



Faculté des Sciences
Département de Mathématique et Informatique

Mémoire de Master

Domaine : Mathématique et Informatique

Filière : Mathématique

Option : Analyse Mathématique

Thème

Composition dans les espaces de Besov critiques

Présenté par :

M^{lle} Triche Nassiba Daouia

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

<i>Mr BELACEL Amar</i>	M.C.B, Université de Laghouat	Président
<i>M^{me} BENDAOUZ Zohra</i>	M.C.A, Université de Laghouat	Examinatrice
<i>Mr OUCHENANE Djamel</i>	M.C.B, Université de Laghouat	Examineur
<i>Mr BOUREGA Abdeldjabar</i>	M.A.A, Université de Laghouat	Examineur
<i>Mr ALLAOUI Salah Eddine</i>	M.C.A, Université de Laghouat	Encadreur

Année universitaire 2015/2016

Remerciements

Tout d'abord merci au mon dieu le tout puissant, qui nous donne la force, la patience et la volonté pour réalise ce travail dans des meilleures circonstances et bon état.

Je remercie notre encadreur Salah Eddine Allaoui pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire. Je remercie tous les membres de jury d'avoir accepter présider et examiner Notre Travail.

Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin pour atteindre notre objectif.

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A ma mère qui toujours sacrifie pour moi.

A mon père qui me donne la volonté.

A mes soeurs ainsi qu'à mes frères pour leur tendresse, leur complicité.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

A tous qui m'aiment, je dédie ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse aux opérateurs de composition, qui sont définis par $T_f(g) := f \circ g$, sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel à valeurs dans \mathbb{R}^k . Pour caractériser ces fonctions, on établit que le gradient de f appartient localement uniformément à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k) = B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k)$ ou $F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k)$ est une condition nécessaire, quand l'ordre de régularité vérifie $s = \frac{n}{p} > 1$ et si $k \leq n$. Ce travail se termine par une étude de la régularité de l'opérateur T_f dans certains espace de Besov.

Abstract

In this memory we look at the composition operators, which are defined by $T_f(g) = f \circ g$, on Besov spaces and spaces of Lizorkin-Triebel in \mathbb{R} . To characterize these functions, it establishes that the gradient of f locally uniformly belongs to $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k) = B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k)$ ou $F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k)$ is a necessary condition, when the order of regularity checks $s = \frac{n}{p} > 1$ and if $k \leq n$. This work concludes with a study of the regularity of the operator T_f in some Besov space.

Keywords : Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, composition operators.
2010 Mathematics Subject Classification : 46E35, 47H30.

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Quelques résultats préliminaires	4
1.1 Série de Littlewood-Paley	4
1.2 Définition et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel	6
1.3 Opérateurs de différences finis	8
1.4 Plongements dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$	8
1.5 Inégalités de Base	9
2 Une propriété de composition dans l'espace de Besov critique	11
2.1 Rappel	11
2.2 Localisation d'un espace de distribution	11
2.3 Localisation des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel	17
3 Une propriété de composition dans l'espace de Lizorkin-Triebel critique	27
3.1 Preuve de théorème 1 dans le cas des espaces de Lizorkin-Triebel	27
4 Remarques sur la régularité du calcul symbolique dans certains espaces de Besov	34
4.1 Régularité du calcul symbolique	34
4.2 Preuves des théorèmes 4 et 5	37
Conclusion	39
Bibliographie	40

Introduction

Nous considérons le calcul symbolique pour les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, avec $p, q \in [1, +\infty]$ dans le cas de l'espace de Besov, $q \in [1, +\infty]$ et $p \in [1, +\infty[$ dans le cas de l'espace de Lizorkin-Triebel. Nous posons $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) := B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ ou $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, quand il n'y a pas besoin de distinguer les espaces B et F .

Il est bien connu que la condition de Lipschitz, locale ou globale suivant que l'espace $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge ou non dans $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ est nécessaire, et la condition d'appartenance locale au même espace l'est aussi pour $k \leq n$ voir [15], [18] et [8]. On sait que le calcul fonctionnel est trivial dans la zone $1 + \frac{1}{p} \leq s < \frac{n}{p}$, voir [12], [14] et [8].

Dans un article précédent [8], on a étudié que les fonctions qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, pour tout $s > 0$. Nous nous proposons de revenir sur ces résultats, avec l'objectif : montrer que la condition que ∇f appartienne à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ localement uniformément est nécessaire, quand l'ordre de régularité vérifie $s = \frac{n}{p} > 1$.

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Soient $s = \frac{n}{p} > 1$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel, $1 \leq k \leq n$, k et n entier, et $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ dans $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial_j f$ appartient à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k)$ localement uniformément, pour tout $j = 1, \dots, k$.*

Notations

- $D(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.
- $D'(\mathbb{R})$ est le dual de $D(\mathbb{R})$, est appelé espace des distribution sur \mathbb{R} .
- $S(\mathbb{R})$ est l'espace de schwartz des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide sur \mathbb{R} (autremen dit : $\forall k \geq 0, \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^k |\varphi'(x)| = 0$).
- $S'(\mathbb{R})$ est l'espaces des distributions tempérées sur \mathbb{R} .
- Si $f \in S(\mathbb{R})$ sa transformée de Fourier est :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx,$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix \cdot \xi} dx.$$

- Nous notons T_f l'opérateur de composition, défini par $T_f(g) = f \circ g$.
- Pour une distribution f définie sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur de translation par $(\tau_h f)(x) = f(x - h), \forall x \in \mathbb{R}$.
- Pour une distribution f définie sur \mathbb{R} , on définit l'opérateur de différence finie par $\Delta_h f = \tau_{-h} f - f$.
- Soient f, g deux fonctions intégrables alors :
 $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy$ est appelée produit de convolution de f et g .
- Si E est un espace topologique, on note $\text{cl}_E(A)$ la fermetuer d'un sous-ensemble A .
- On note $\mathcal{I}_{m,n,E}$ l'ensemble des triplets (s, p, q) vérifiant $s > 1 + (1/p)$.

- nous notons $g(D)$ l'opérateur pseudodifférentiel de symbole g , défini sur les distributions tempérées par

$$\widehat{g(D)f} := g\widehat{f}, \quad \forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

- $Q = \{|x - a| \leq r \mid x \in \mathbb{R}\}$ intervalle fermé de centre a et de rayon r .

Chapitre 1

Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre, on va rappeler les notions essentielles qu'on va utiliser dans la suite à savoir l'espace de Besov, l'espace de Lizorkin-Triebel, opérateurs de différence finis et on termine par quelques inégalités de Base.

1.1 Série de Littlewood-Paley

La décomposition de Littlewood-Paley

Soit $\phi \in S(\mathbb{R})$, telle que :

1. $\text{supp } \phi \subset \{x \in \mathbb{R} : 2^{-1} \leq |x| \leq 2^1\}$,
2. $\phi(x) > 0$ pour $2^{-1} < |x| < 2^1$,
3. $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(2^{-j}x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On pose

$$\psi(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}x),$$

on obtient une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp } \psi \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}x) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1,1) converge dans $S(\mathbb{R})$ est appelée la partition de l'unité.

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolution :

$$\begin{aligned} Q_k : S'(\mathbb{R}) &\longmapsto C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (Q_k f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-k}x)) * f)(x), \quad (k \geq 1), \\ \Phi_j : S'(\mathbb{R}) &\longmapsto C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto (\Phi_j f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-j}x)) * f)(x), \quad (j \geq 0), \end{aligned}$$

avec $Q_0 = \Phi_0$.

Ecrivons la relation (1.1) au point $2^{-k}x$, alors

$$\psi(2^{-k}x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi(2^{-j}x) = 1.$$

En multipliant par \hat{f} donc

$$\psi(2^{-k}x)\hat{f} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \phi(2^{-j}x)\hat{f} = \hat{f}. \quad (1.2)$$

En appliquant l'application \mathcal{F}^{-1} sur (1,2), on obtient

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi(2^{-k}x)\hat{f}) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}(\phi(2^{-j}x)\hat{f}) = f,$$

$$\Phi_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = f. \quad (1.3)$$

Pour $k = 0$

$$Q_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j f = f,$$

alors

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f.$$

On remplace f dans (1,3), on trouve alors :

$$\Phi_k f + \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_j f = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j f, \quad (1.4)$$

$$\Phi_k f = \sum_{j=0}^k Q_j f. \quad (1.5)$$

Remarque 1.1.1. *On peut construire la série de Littlewood-paley :*

Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$, telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, et :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

On pose $\Psi(x) = \varphi(x) - \varphi(2x)$, alors

$$i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(2^{-k}x) = 1, \quad x \neq 0.$$

$$ii) \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(2^{-k}x) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

et

$$\text{supp} \Psi \subset \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}.$$

Définition des espaces localisés

Nous utiliserons des fonctions de $D(\mathbb{R})$. Soient φ, ϕ et χ des fonctions de classe C^∞ , telles que $\text{supp} \varphi \subset [0, 3]$, $\text{supp} \chi \subset [0, R]$, ($R > 1$), et ϕ portée par la couronne

$1 \leq |\xi| \leq 3$ telles que

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) + \int_0^1 \phi(t\xi) \frac{dt}{t} &= 1, \quad (\xi \in \mathbb{R}), \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(x - k) &= 1, \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Nous notons $\phi_t(\xi) = \phi(t\xi)$ et $\varphi_t(\xi) = \varphi(t\xi)$ pour ($t > 0, \xi \in \mathbb{R}$).

Définition 1.1.1. *Soit $E \subset D'(\mathbb{R})$ un espace de Banach. On définit l'espace $(E)_{\ell^r}$ ($1 \leq r \leq \infty$) comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{C} vérifiant*

$$\|f\|_{(E)_{\ell^r}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|(\tau_k \chi) f\|_E^r \right)^{1/r} < +\infty. \quad (1.6)$$

E sera l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$. L'expression définie en (1.6) présente une norme sur $(E)_{\ell^r}$ pour $1 \leq r \leq \infty$, et une semi-norme pour $0 < r < 1$.

1.2 Définition et propriétés des espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

Espace de Besov

Définition 1.2.1. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in]0, +\infty]$, l'espace de Besov noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} < \infty$, où*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \begin{cases} (\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \|Q_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} 2^{sk} \|Q_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

Proposition 1.2.1. *i) $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est un espace quasi-Banach (espace de Banach si $\min(p, q) \geq 1$).*

ii) Soient $p_0 < p$ et $s_0 - \frac{1}{p_0} = s - \frac{1}{p}$ alors

$$B_{p,q}^{s_0} \hookrightarrow B_{p,q}^s.$$

Espace de Lizorkin-Triebel

Définition 1.2.2. *Soit $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$, l'espace de Lizorkin-Triebel, noté $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R})$ telle que :*

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \begin{cases} \|(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |Q_k f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \|\sup_{k \geq 0} 2^{sk} |Q_k f|\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.2.3. *Un espace de Banach de distributions (E.B.D.) dans $D'(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel E de $D'(\mathbb{R})$ muni d'une norme complète $\|\cdot\|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow D'(\mathbb{R})$ soit continue.*

Définition 1.2.4. *Soit E un E.B.D. On dit qu'une distribution g est un multiplicateur de E (on note $g \in M(E)$), s'il existe $c > 0$, tel que pour tout $f \in C^\infty \cap E$, on ait $gf \in E$ et $\|gf\|_E \leq c\|f\|_E$.*

On munit $M(E)$ de la norme

$$\|g\|_{M(E)} := \sup\{\|gf\|_E \quad : f \in C^\infty \cap E, \|f\|_E = 1\}.$$

Définition 1.2.5. *l'espace de Sobolev $W^m(E)$ d'ordre m de base E , où E est un E.B.D., définie par*

$$W^m(E) := \{f \in D'(\mathbb{R}) : D^\alpha f \in E, \quad |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(E)$ est un E.B.D. pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_E.$$

1.3 Opérateur de différences finis

Proposition 1.3.1. Soient $f \in S'(\mathbb{R})$ et $x, h \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, l'opérateur de différences finis est noté par Δ_h^m telle que

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k (-1)^k f(x + (m-k)h),$$

où

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Proposition 1.3.2. Soient ℓ un entier, $0 < s < \ell$, $q \in [1, +\infty]$ et $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|} \right)^{1/q} < +\infty,$$

pour $1 \leq p < \infty$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^1 (t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^\ell f(\cdot)|^q dh) \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\| < +\infty.$$

Les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ ne dépendent pas de l'entier ℓ car $\ell > s$.

Proposition 1.3.3. Soit $s > 0$, alors une distribution f appartient à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in L_p(\mathbb{R})$ et $f' \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$. De plus l'expression

$$\|f\|_p + \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})},$$

est une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Proposition 1.3.4. Soient ℓ un entier et $0 < s < \ell$, alors l'expression

$$\|f\|_p + \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_{p,\ell}(f;t)}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

est une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

1.4 Plongements dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$

Proposition 1.4.1. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $C^s(\mathbb{R}) = B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R})$, si $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

$$ii) L_p(\mathbb{R}) = F_{p,2}^0(\mathbb{R}), \text{ si } 1 < p < \infty,$$

$$iii) B_{p,p}^s(\mathbb{R}) = F_{p,p}^s(\mathbb{R}), \text{ si } 1 \leq p < \infty, s \in \mathbb{R},$$

$$iv) W_p^m(\mathbb{R}) = F_{p,2}^m(\mathbb{R}), \text{ si } 1 < p < \infty, m \in \mathbb{N}^*.$$

1.5 Inégalités de Base

Notation 1.5.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p , ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Young

Proposition 1.5.1. [19] Soient $1 < p < \infty$ et $a, b > 0$. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration. La fonction \log est concave. Donc $\forall a, b > 0$

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\log(a^p)}{p} + \frac{\log(b^q)}{q} = \log(ab).$$

D'où

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Inégalité de Hölder

Proposition 1.5.2. [19] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et,

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.7)$$

Démonstration. 1. Si $p = 1$ et $p = \infty$ la conclusion est évidente.

2. Si $1 < p < \infty$: d'après l'inégalité de young, on a :

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad p.p \text{ sur } \Omega.$$

Il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{1}{p} \|f(x)\|_p^p + \frac{1}{q} \|g(x)\|_q^q.$$

On remplace f par λf ($\lambda > 0$) il vient :

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_q^q. \quad (1.8)$$

On choisit $\lambda = \|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{\frac{q}{p}}$.

De manière à minimiser le membre à droite das (1.8), on obtient alors

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Inégalité de Monkowski

Proposition 1.5.3. *Soient $p \in]1, \infty[$ Alors pour toute fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. En utilisant (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f + g|^p dx \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f + g|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left\{ \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{1/p} \right\}. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique immédiatement le résultat cherché.

□

Chapitre 2

Une propriété de composition dans l'espace de Besov critique

Le deuxième chapitre est consacré à une préparation sur la localisation d'un espace de distribution, et démontrons le théorème 1 dans le cas de Besov.

2.1 Rappel

Lemme 2.1.1. [8] Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction s'annulant à l'origine telle que T_f envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f \circ g\|_{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})} \leq M,$$

soit vérifiée par toute fonction g portée par Q .

Proposition 2.1.1. Soit $s > 0$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $s < \frac{1}{p}$ ou $s = \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas de Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. Si T_f envoie $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})$, alors f est Lipschtzienne.

2.2 Localisation d'un espace de distribution

Localisation

Un espace de Banach de distributions (E.B.D.) dans $D'(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel E de $D'(\mathbb{R})$ muni d'une norme complète $\|-\|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow D'(\mathbb{R})$

soit continue. On dit que l'espace E est un $D(\mathbb{R})$ -module si $\phi f \in E$ pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$ et tout $f \in E$.

Définition 2.2.1. Si E est un espace de distributions dans \mathbb{R} , on appelle E_{loc} l'ensemble des distributions $f \in D'(\mathbb{R})$ telle que $\phi f \in E$ pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2.1. Soit E un E.B.D.. Si E un $D(\mathbb{R})$ -module, alors l'opérateur linéaire $f \mapsto \phi f$ est borné sur E , pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$.

Sous les hypothèses de la proposition (2.2.1), on posera

$$\|\varphi\|_{M(E)} := \sup\{\|\phi f\|_E : f \in E, \|f\|_E = 1\}.$$

Proposition 2.2.2. Soit E un E.B.D.. Si E est un $D(\mathbb{R})$ -module et si $f \in D'(\mathbb{R})$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $f \in E_{loc}$.

ii) il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ telle que $(\tau_a \varphi_0)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I contenant a et $g \in E$ tels que $g|_I = f|_I$.

Démonstration. On commence par démontrer que ((i) \Rightarrow (ii)) ou :

Si $f \in E_{loc}$ alors $\varphi f \in E, \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$.

On a $\tau_a \varphi \in D(\mathbb{R}), \forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}$, donc $\exists \varphi \in D(\mathbb{R})$ positive telle que

$$(\tau_a \varphi_0)f \in E.$$

Démontrons maintenant que la propriété (ii) qui est : il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ telle que $(\tau_a \varphi_0)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, implique la propriété (iii).

Sopposons que la condition (ii) est satisfaite. On peut donc supposer que φ_0 ne s'annule pas sur un intervalle ouvert I dans \mathbb{R} .

Soit $\psi \in D(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \text{supp } \psi \subset I \\ \psi(x) = 1 \quad \text{sur } I/2. \end{cases}$$

Alors $\psi = \theta\varphi_0$, pour une certaine fonction $\theta \in D(\mathbb{R})$.

On a $\tau_a\psi \in D(\mathbb{R})$, d'après (ii) $(\tau_a\psi)f \in E$, et on a $\tau_a\psi(x) = 1$ sur $(I/2) + a$, donc

$$(\tau_a\psi)f = f \quad \text{sur} \quad (I/2) + a.$$

On obtient donc la propriété (iii).

Démontrons maintenant que la propriété (ii) qui est : pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle ouvert I contenant a et $g \in E$ tels que $g|_I = f|_I$, implique la propriété (i).

Supposons que f a la propriété (iii) et considérons $\phi \in D(\mathbb{R})$. Par la compacité du support de ϕ , il existe des intervalles $I_j =]x_j, r_j[$ et des distributions $g_j \in E$, pour tout $j = 1, \dots, N$, telles que g_j et f ont la même restriction à $]x_j, r_j[$, et telles que

$$\text{supp } \phi \subset \bigcup_{j=1}^N I_j.$$

Par compacité, il existe $\varepsilon \in]0, \min(r_1, \dots, r_N)[$ tel que

$$\text{supp } \phi \subset \bigcup_{j=1}^N]x_j, r_j - \varepsilon[.$$

Il existe des fonctions $\psi_j \in D(\mathbb{R})$ telles que $0 \leq \psi_j \leq 1$, $\psi_j(x) = 1$ sur $]x_j, r_j - \varepsilon[$, et $\text{supp } \psi_j \subset]x_j, r_j[$. Comme la fonction $\sum_{j=1}^N \psi_j$ ne s'annule pas sur le support de ϕ , il existe $\theta \in D(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned} \phi &= \theta \sum_{j=1}^N \psi_j \\ f\phi &= \sum_{j=1}^N \theta \psi_j f \\ f\phi &= \sum_{j=1}^N \theta \psi_j g_j \in E. \end{aligned}$$

□

Localisation uniforme

Un E.B.D. est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$. De plus si E est un $D(\mathbb{R})$ -module, nous avons la propriété suivante :

$$\|\tau_a \phi\|_{M(E)} = \|\phi\|_{M(E)} \quad , \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Proposition 2.2.3. *Soit E un E.B.D.. Si E est un $D(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation, on dit qu'une distribution f appartient localement uniformément à E si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ telle que $(\tau_a \varphi_0)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et

$$\|f\|_{E_{lu}} := \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0)f\|_E < +\infty.$$

ii) Pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$, on a $(\tau_a \phi)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \phi)f\|_E < +\infty.$$

L'ensemble des distributions ayant ces propriétés est noté E_{lu} ; c'est un $D(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation pour la norme $\|-\|_{E_{lu}}$.

Démonstration. Il est clair que $\|-\|_{E_{lu}}$ est une norme invariante par translation, et que E_{lu} est un $D(\mathbb{R})$ -module.

- Supposons que la condition (i) est satisfaite et considérons $\phi \in D(\mathbb{R})$. Soit I un intervalle ouvert où la fonction φ_0 ne s'annule pas. Par compacité, il existe x_1, \dots, x_N dans \mathbb{R} tels que

$$\text{supp } \phi \subset \bigcup_{j=1}^N (I + x_j),$$

et donc une fonction $\psi \in D(\mathbb{R})$ telle que

$$\phi = \psi \left(\sum_{j=1}^N \tau_{x_j} \varphi_0 \right). \quad (2.2)$$

Par la propriété (2.1), il vient alors

$$\begin{aligned} \|(\tau_a \phi)f\|_E &\leq \sum_{j=1}^N \|(\tau_a \chi)(\tau_{a+x_j} \varphi_0)f\|_E \\ &\leq N \|\chi\|_{M(E)} \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(\tau_x \varphi_0)f\|_E, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la propriété suivant : pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$, on a $(\tau_a \phi)f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et $\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \phi)f\|_E < +\infty$.

- Considérons de nouveau une fonction $\phi \in D(\mathbb{R})$, est une fonction ψ telle qu'on ait (2.2).

La continuité du plongement $E \hookrightarrow D'(\mathbb{R})$ implique l'existence d'une constante $c = c(\psi)$ qui vérifie $|\langle g, \psi \rangle| \leq c \|g\|_E$ pour tout $g \in E$. D'où :

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq \sum_{j=1}^N |\langle (\tau_{x_j} \varphi_0) f, \psi \rangle| \leq Nc \|f\|_{E_{l_u}},$$

ce qui donne la continuité du plongement $E_{l_u} \hookrightarrow D'(\mathbb{R})$.

- Il reste vérifie la complétude de E_{l_u} . Soit (f_k) une suite de Cauchy dans E_{l_u} . Comme on vient de le voir, (f_k) admet une limite qui est f au sens des distributions.

Par ailleurs la suite $((\tau_a \varphi_0) f_k)$ est de Cauchy dans E , elle a donc une limite $u_a \in E$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Puisque u_a est aussi la limite de $((\tau_a \varphi_0) f_k)$, on a donc $(\tau_a \varphi_0) f = u_a$. Alors la définition de l'espace E_{l_u} implique que $f \in E_{l_u}$ et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0)(f - f_k)\|_E = 0.$$

□

Remarque 2.2.1. De la preuve ci-dessus, il résulte qu'à équivalence près, la norme de E_{l_u} ne dépend pas du choix de φ_0 .

Proposition 2.2.4. Soit E un E.B.D.. Si E est un $D(\mathbb{R})$ -module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a

$$(W^m(E))_{l_u} = W^m(E_{l_u}),$$

avec des normes équivalente.

Démonstration. $W^m(E)$ un espace de Banach de distribution (E.B.D) pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_E.$$

$\varphi f \in W^m(E)$ pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$ car $\varphi f \in E$, donc $W^m(E)$ est un $D(\mathbb{R})$ -module.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\tau_a f \in W^m(E)$, et

$$\|\tau_a f\|_{W^m(E)} = \|f\|_{W^m(E)}$$

car $\varphi f \in E$, donc $W^m(E)$ est un isométriquement invariant par translation.

$$f \in (W^m(E))_{lu} \Leftrightarrow \text{pour tout } \varphi \in D(\mathbb{R}), \text{ on a } (\tau_a \varphi) f \in (W^m(E)) \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ et}$$

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi) f\|_{W^m(E)} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \text{pour tout } \varphi \in D(\mathbb{R}), D^\alpha(\tau_a \varphi) f \in E \text{ pour } a \in \mathbb{R}, \text{ et}$$

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|D^\alpha(\tau_a \varphi) f\|_E < +\infty, |\alpha| < m$$

$$\Leftrightarrow f \in (W^m(E)_{lu}).$$

Donc

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}).$$

□

Proposition 2.2.5. Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors une fonction mesurable f sur \mathbb{R} appartient à $L_p(\mathbb{R})_{lu}$ si et seulement si

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (2.3)$$

où I un intervalle ouvert donné dans \mathbb{R} . De plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$.

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert.

- Supposons que f a la propriété suivant : $\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

Soit $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ une fonction non nulle, telle que $\text{supp } \varphi_0 \subset I$, on a

$$\begin{aligned} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |(\tau_a \varphi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{I+a} |(\tau_a \varphi_0)(x) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\sup_{x \in (I+a)} |(\tau_a \varphi_0)(x)|) \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\sup_{x \in I} |\varphi_0(x)|) \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi_0\|_\infty \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Donc $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$.

-On suppose que $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. ie pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$, on a $(\tau_a \phi)f \in L_p(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \phi)f\|_p < +\infty.$$

En choisissant la fonction $\phi \in D(\mathbb{R})$ tel que $\phi(x) = 1$ sur I . On a

$$\begin{aligned} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{I+a} |f(x)\phi(x-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \phi)f\|_p. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

□

2.3 Localisation des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

On dispose des formules suivantes, où $k \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}$ et où f et g sont des fonctions quelconques.

$$\text{On a : } \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta_h(fg)(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) \\ &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + (g(x+h) - g(x))f(x) \\ &= (\Delta_h f(x))\tau_{-h}g(x) + (\Delta_h g(x))f(x) \end{aligned}$$

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h}g) + f(\Delta_h g), \quad (2.4)$$

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h}g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h}f) + (\Delta_h f)(\Delta_{2h}g). \quad (2.5)$$

Proposition 2.3.1. Soient $h \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\Delta_h = 2^{-k} \Delta_{2^k h} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2. \quad (2.7)$$

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. Soit $h' \in \mathbb{R}$, on a

$$\Delta_{2h'} - 2 \Delta_{h'} - \Delta_{h'}^2 = 0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Delta_{2h'} f(x) - 2 \Delta_{h'} f(x) - \Delta_{h'}^2 f(x) &= f(x + 2h') - f(x) - 2(f(x + h') - f(x)) - \\ &\quad \Delta_{h'}(f(x + h') - f(x)) \\ &= f(x + 2h') - f(x) - 2f(x + h') + 2f(x) - f(x + 2h') \\ &\quad + 2f(x + h') - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition (2.3.1).

Démonstration. On utilise la démonstration par récurrence.

Pour $k = 1$ on a

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x) &= 2^{-1} \Delta_{2h} f(x) - 2^{-1} \Delta_h^2 f(x) \\ &= 2^{-1}(f(x + 2h) - f(x)) - 2^{-1}(f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)) \\ &= f(x + h) - f(x), \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang 1.

Supposons la propriété vraie au rang $k = n$ telle que

$$\Delta_h = 2^{-n} \Delta_{2^n h} - \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2.$$

Démontrons que la propriété reste encore vraie au rang $k = n + 1$:

$$\begin{aligned}
 \Delta_h &= 2^{-n-1} \Delta_{2^{n+1}h} - \sum_{l=0}^n 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2 \\
 &= 2^{-n} \Delta_{2^n h} + 2^{-n-1} \Delta_{2^{n+1}h} - 2^{-n} \Delta_{2^n h} - \sum_{l=0}^n 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2 \\
 &= 2^{-n} \Delta_{2^n h} - \sum_{l=0}^{n-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l h}^2 + 2^{-n-1} \Delta_{2^{n+1}h} - 2^{-n} \Delta_{2^n h} - 2^{-n-1} \Delta_{2^n h}^2 \\
 &= \Delta_h + 2^{-n-1} \left[\Delta_{2^{n+1}h} - 2 \Delta_{2^n h} - \Delta_{2^n h}^2 \right].
 \end{aligned}$$

En choisissant $h' = 2^n h$.

D'après le lemme (2.3.1), on a le résultat. \square

Pour $1 \leq p \leq \infty$, et pour tout sous-ensemble borélien A de \mathbb{R} , on pose

$$\begin{aligned}
 \omega_{p,A}(f, t) &:= \sup_{|u| \leq t} \left(\int_A |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 \eta_{p,A}(f, t) &:= \sup_{|u| \leq t} \left(\int_A |\Delta_u^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas $A = \mathbb{R}$, on pose $\omega_p := \omega_{p,\mathbb{R}}$, de même pour η .

Lemme 2.3.2. *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\omega_{p,Q+a}(f, t) \leq ct \left\{ \left(\int_{2Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\log t| \sup_{0 < v \leq \frac{1}{2}} (v^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, v)) \right\},$$

pour tout $0 < t \leq \frac{1}{2}$, tout $a \in \mathbb{R}$, tout $p \in [1, \infty]$ et toute fonction localement intégrable f .

Démonstration. On définit l'entier $k \geq 1$ par l'encadrement suivante

$2^{-k-1} < t < 2^k$ et on pose :

$$M := \sup_{0 < v \leq \frac{1}{2}} (v^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, v)).$$

D'après la formule (2,7), on obtient

$$\begin{aligned}
 \Delta_u f(x) &= 2^{-k} \Delta_{2^k u} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l u}^2 f(x) \\
 \left(\int_{Q+a} |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{Q+a} |2^{-k} \Delta_{2^k u} - \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \Delta_{2^l u}^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 2^{-k} \left(\int_{Q+a} |\Delta_{2^k u} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} \left(\int_{Q+a} |\Delta_{2^l u}^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 2^{-k+1} \left(\int_{2Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-l-1} (M 2^{-l-k}), \\
 &\leq 4t \left(\int_{2Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\ln 2} t |\ln t| M.
 \end{aligned}$$

\square

Lemme 2.3.3. *Soit $0 < s \leq 1$. Si $f' \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$, et $f \in L^p(\mathbb{R})_{lu}$, alors $f \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.*

Démonstration. Dans cette démonstration on a deux cas.

Le cas $0 < s < 1$. Par le plongement

$$E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu} \hookrightarrow L_p(\mathbb{R})_{lu},$$

les hypothèses sur f impliquent $f \in W^1(L_p(\mathbb{R})_{lu})$. comme la proposition (2.2.4), ceci nous donne $f \in (W^1(L_p(\mathbb{R})))_{lu}$. Puisqu'on a $W^1 L_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ (dans le cas $s < 1$), on conclut donc que $f \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Le cas $s = 1$. On a

$$B_{p,q}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{p,q}^{1/2}(\mathbb{R}).$$

Par hypothèse sur f , on a $f' \in E_{p,q}^{1/2}(\mathbb{R})_{lu}$ et $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. de premier cas, on obtient $f \in E_{p,q}^{1/2}(\mathbb{R})_{lu}$ et, on conclut que $f \in E_{p,q}^{3/2}(\mathbb{R})_{lu}$ donc $f \in E_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$. \square

Proposition 2.3.2. *Si $s > 0$ et $p, q \in [1, +\infty]$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$ vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement :*

i) dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$;

ii) dans le cas $s = 1$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B_{p,q}^1(\mathbb{R})_{lu}$;

iii) dans le cas $m < s \leq m + 1$, $m = 1, 2, \dots$,

$$D^\alpha f \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})_{lu} \quad , \text{ pour } |\alpha| = m.$$

De plus

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Démonstration. On fixe les fonction φ_0 et φ_1 dans $D(\mathbb{R})$, telle que

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 0 & \text{hors de } Q/4 \\ \varphi_1(x) = 1 & \text{sur } 4Q, \end{cases}$$

on a alors trois cas suivant :

Le cas $0 < s < 1$.

Supposons que la condition (i) est satisfaite avec $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. Par la formule (2.4) et pour $|u| \leq t \leq \frac{1}{2}$, nous avons

$$\Delta_u((\tau_a \varphi_0)f)(x) = (\Delta_u f(x))(\tau_{-u+a} \varphi_0)(x) + f(x)(\Delta_u \tau_a \varphi_0)(x), \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u((\tau_a \varphi_0)f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u f(x) \varphi_0(x+u-a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |\Delta_u(\tau_a \varphi_0)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c_1 \left(\int_{Q+a} |(\Delta_u f(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_2 |u| \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\left(\int_{Q+a} |(\Delta_u f(x))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + t \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq c(\omega_{p,Q+a}(f, t) + t \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}). \end{aligned}$$

Donc

$$\omega_p((\tau_a \varphi_0)f, t) \leq c(\omega_{p,Q+a}(f, t) + t \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}).$$

De la condition $s < 1$, on voit que

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_0)f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t^{-s} \omega_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \right).$$

Par les proposition (1.3.4), (2.2.3) et (2.2.5), en déduit que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0)f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \left(\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \right).$$

Dans l'autre sens, on suppose que $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$. On voit que

$$\Delta_u((\tau_a \varphi_1)f)(x) = \Delta_u f(x),$$

pour tout $x \in Q + a$ et $|u| \leq 1$. On obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u (\tau_a \varphi_1) f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{Q+a} |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \omega_{p, Q+a}(f, t) &\leq \omega_p((\tau_a \varphi_1) f, t) \\ \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_1) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_1) f\|_{B_{p, q}^s(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

Le cas $s = 1$.

supposons que la condition (ii) est satisfaite avec $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. par la formule (2.5), pour $|u| \leq t \leq \frac{1}{4}$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_u^2((\tau_a \varphi_0) f)(x) &= (\Delta_u^2 f(x))(\tau_{-2u}(\tau_a \varphi_0)(x)) + (\Delta_u^2(\tau_a \varphi_0)(x))(\tau_{-u} f(x)) \\ &\quad + (\Delta_u f(x))(\Delta_{2u}(\tau_a \varphi_0)(x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u^2 f(x) \varphi_0(x + 2u - a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x + u)|^p |\Delta_u^2(\tau_a \varphi_0)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u f(x) (\varphi_0(x + 2u - a) - \varphi_0(x - a))|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\int_{Q+a} |\Delta_u^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + ct^2 \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + ct \left(\int_{Q+a} |\Delta_u f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c(\eta_{p, Q+a}(f, t) + t^2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} + t \omega_{p, Q+a}(f, t)), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq c \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (t^{-1} \eta_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + c \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \\ &\quad + c \left(\int_0^{\frac{1}{4}} (\omega_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Par le lemme (2.3.2), et les proposition (1.3.4), (2.2.3) et (2.2.5), on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p, q}^1(\mathbb{R})} &\leq c \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-1} \eta_{p, Q+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + c \left(\|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} + q^{-\frac{2}{q}} \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{2Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + (q^2 + q)^{-\frac{1}{q}} M \right). \end{aligned}$$

Dans l'autre sens on suppose que $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$. On voit que

$$\Delta_u^2((\tau_a \varphi_1)f)(x) = \Delta_u^2 f(x),$$

pour tout $x \in Q + a$ et $|u| \leq 1$. On obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u^2(\tau_a \varphi_1)f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_u^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{Q+a} |\Delta_u^2 f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \eta_{p,Q+a}(f,t) &\leq \eta_p((\tau_a \varphi_1)f,t) \\ \left(\int_0^1 (t^{-s} \eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^1 (t^{-s} \eta_p((\tau_a \varphi_1)f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \eta_{p,Q+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_1)f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

Le cas $m < s \leq m + 1$.

On sait que

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}) = W^m(B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})). \quad (2.8)$$

Par la proposition (2.2.4) et le lemme (2.3.3), on voit que $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ si et seulement si $f^{(\alpha)} \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})_{lu}$ pour $|\alpha| = m$ et $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. \square

Lemme 2.3.4. *Soient $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$, il existe $c > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(\int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} &\leq \left\| \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(\int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} \\ &\quad + c \|f(\cdot)\|_{L_p(Q+a)}, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

$$|\Delta_h f(\cdot)| = |f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq |f(\cdot + h)| - |f(\cdot)|, \quad (2.9)$$

integrant l'égalité (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh &\geq \int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh - \int_{|h| \leq t} |f(\cdot)| dh, \\ \int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh &\leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh + \int_{-t}^t |f(\cdot)| dh, \\ \int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh &\leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh + 2t|f(\cdot)|, \end{aligned}$$

integrant une deuxième fois on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} &\leq \int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh + 2t|f(\cdot)| \right)^q \frac{dt}{t}^{1/q}, \\ \int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} &\leq \int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t}^{1/q} + \\ &\int_0^{1/16} (2t|f(\cdot)|)^q \frac{dt}{t}^{1/q}, \end{aligned}$$

passant à la norme on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |f(\cdot + h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right\|_{L_p(Q+a)}^{1/q} &\leq \left\| \int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right\|^{1/q} + \\ &c \|f(\cdot)\|_{L_p(Q+a)}, \\ &\leq \left\| \left(\int_0^{1/16} \left(\int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} \\ &+ c \|f(\cdot)\|_{L_p(Q+a)}. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.5. [8] Soient $s = \frac{1}{p}$ et $q > 1$. Alors il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par $2Q$, telle que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = 0$.

Théorème 2. Soient $s = \frac{1}{p} > 1$, $q > 1$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, alors f' appartient à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$ localement uniformément.

Démonstration. Soit $s = \frac{1}{p}$, $m < s \leq m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Supposons que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, d'après le lemme (2.1.1), il existe des nombres $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq M, \quad (2.10)$$

pour toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, avec le support de g inclus dans $2Q$. Soit φ une fonction dans $D(\mathbb{R})$, à support dans $2Q$, telle que $\varphi(x) = x$ sur $2Q$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g_a par

$$g_a(x) = b\varphi(2^\nu x) + \theta_\nu(x)a. \quad (2.11)$$

Le lemme (2.3.5) nous autorise à choisir $\nu = \nu(a) \geq 1$ tel que $2|a|\|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta$ et on a

$$\|\varphi(\lambda(\cdot))\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c\lambda^{s-(\frac{1}{p})}\|\varphi\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \quad \forall \lambda \geq 1, \quad (2.12)$$

et par la condition $s = \frac{1}{p}$, on définit $b \geq 1$ par l'égalité

$$2b\|\varphi\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \delta.$$

Dans ces conditions on a $\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq |a|\|\theta_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} + b\|\varphi(2^\nu(\cdot))\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq \delta$. Pour $x \in \mathbb{R}$.

Par la construction de g , on obtient

$$\Delta_h(f \circ g)'(x) = c\Delta_h f'(2^\nu bx + a), \quad (2.13)$$

de la proposition (2.1.1), f est lipschtzienne, on a donc

$$f' \in L_p(\mathbb{R})_{lu}. \quad (2.14)$$

Dans cette démonstration on a deux cas :

Le cas $m < s < m + 1$, avec $m \in \mathbb{N}$.

En utilisant l'implication (2.10) et la propriété (2.8), on a

$$\|(f \circ g_a)'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq M, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

En appliquant (2.15) et (2.13), on obtient

$$\left(\int_0^1 \left(t^{1-s} \left(\int_{2^{-\nu} Q_n} |\Delta_{2^{-\nu} t} f'(2^\nu bx + a)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_1,$$

alors

$$\left(\int_0^1 \left(t^{1-s} \left(\int_{bQ+a} |\Delta_t f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^b \left(t^{1-s} \left(\int_{bQ+a} |\Delta_t f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\left(\int_0^1 (t^{1-s} \omega_{p,bQ+a}(f', t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^b (t^{1-s} \omega_{p,bQ+a}(f', t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_3.$$

d'après la propriété (2.14), et la proposition (2.3.2) (i), (iii), on conclut $f' \in (B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))_{lu}$.

Le cas $s = m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. En utilisant l'implication (2.10) et la propriété (2.8), on obtient

$$\|(f \circ g)'\|_{B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})} \leq M, \quad (2.16)$$

Par l'estimation (2.16) et l'égalité (2.13), nous avons

$$\left(\int_0^1 \left(t^{-1} \left(\int_{bQ+a} |\Delta_t^2 f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^b \left(t^{-1} \left(\int_{bQ+a} |\Delta_t^2 f'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_2,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, ce qui donne

$$\left(\int_0^1 (t^{-1} \eta_{p,bQ+a}(f', t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^b (t^{-1} \eta_{p,bQ+a}(f', t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq M_3.$$

d'après la propriété (2.14), et la proposition (2.3.2) (ii), (iii), donc $f' \in (B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}))_{lu}$. \square

Remarque. *Tout le resultat de Besov et Lizorkin-Triebel valable dans le cas \mathbb{R}^n sauf dans le cas Lizorkin-Triebel (Théorème 3 on va voir plus loin) on suppose toujours $n \geq 2$.*

Chapitre 3

Une propriété de composition dans l'espace de Lizorkin-Triebel critique

3.1 Preuve de théorème 1 dans le cas des espaces de Lizorkin-Triebel

Dans ce chapitre, on va démontrer le théorème 1 dans le cas des espaces de Lizorkin-Triebel.

Proposition 3.1.1. *Si $s > 0$, $1 \leq p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)_{lu}$ est l'ensemble des fonctions $f \in L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}$ vérifiant de plus les conditions suivantes, respectivement :*

i) dans le cas $0 < s < 1$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left\| \left(\int_0^1 (t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left\| \left(\int_0^1 (t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)_{lu}$.

ii) dans le cas $s = 1$,

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left\| \left(\int_0^1 (t^{-3} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(\cdot)| dh)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} < +\infty.$$

De plus l'expression

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-3} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $F_{p,q}^1(\mathbb{R}^2)_{lu}$.

iii) dans le cas $m < s < m + 1$, avec $m = 1, 2, \dots$,

$$f^{(\alpha)} \in F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^2)_{lu}, \text{ pour } |\alpha| = m.$$

De plus

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^2)_{lu}},$$

est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)_{lu}$.

Démonstration. On fixe les fonctions φ_0 et φ_1 comme dans la preuve de la proposition (2.3.2)

Le cas $0 < s < 1$.

Supposons la condition (i) est satisfaite avec $f \in L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}$. Par la formule (2.4) on a

$$\Delta_h((\tau_a \varphi_0)f)(x) = (\Delta_h f(x))(\tau_{-h+a} \varphi_0)(x) + f(x)(\Delta_h \tau_a \varphi_0)(x),$$

$$\begin{aligned} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0)f)(x)| dh &\leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\varphi_0(x+h-a)| dh \\ &\quad + |f(x)| \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0)f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\varphi_0(x+h-a)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\quad + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-2} |f(x)| \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0)f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\int_{Q+a} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad c \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^2} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} < +\infty.$$

Dans l'autre sens, supposons maintenant que $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)_{lu}$. Comme

$$\Delta_h((\tau_a \varphi_1) f)(x) = \Delta_h f(x),$$

pour tout $x \in Q + a$ et $|h| \leq 1$. On a

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(f(\cdot))| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(Q+a)} \\ & \leq \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_1) f)(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^2$. la propriété (i) en découle aussitôt.

Le cas $s = 1$.

Supposons la condition (ii) est satisfaite avec $f \in L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}$. Par la formule (2.5), nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x) &= (\Delta_h^2 f(x))(\tau_{-2h}(\tau_a \varphi_0)(x)) + (\Delta_h^2(\tau_a \varphi_0)(x))(\tau_{-h} f(x)) \\ &\quad + (\Delta_h f(x))(\Delta_{2h}(\tau_a \varphi_0)(x)) \\ &\quad \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \leq \\ &\quad \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| |\varphi_0(x + 2h - a)| dh + \int_{|h| \leq t} |f(x + h)| |\Delta_h^2(\tau_a \varphi_0)(x)| dh + \\ &\quad \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\Delta_{2h}(\tau_a \varphi_0)(x)| dh. \end{aligned}$$

On pose

$$U(x) = \left(\int_0^1 \left(t^{-3} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.1)$$

Du support de $\tau_a \varphi_0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-3} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-3} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-3} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-1} \int_{|h| \leq t} |f(x+h)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\
 & c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\
 & = A + B + C.
 \end{aligned}$$

On voit que

$$A + B \leq c_1 \sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left(\int_{Q+a} |U(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + c_2 \|f\|_{L_p(Q+a)}.$$

Estimation de C : On pose

$$C_1(x) = \left(\int_0^{\frac{1}{16}} \left(t^{-2} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour cela, on écrit

$$]0, 1/16] = \cup_{j \geq 4}]2^{-j-1}, 2^{-j}],$$

et en utilisant des majorations, on obtient

$$C_1(x) \leq c C_2(x),$$

avec

$$C_2(x) = \left(\sum_{j \geq 4} \left(2^{2j} \int_{|h| \leq 2^{-j}} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par le changement de variables $h' = 2^{j-3}h$, on obtient

$$C_2(x) = \left(\sum_{j \geq 4} \left(\int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_{2^{-j+3}h} f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Par (2.7) on obtient

$$\Delta_{2^{-j+3}h} = 2^{-j+3} \Delta_h - \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} \Delta_{2^{l-j+3}h},$$

alors

$$C_2(x) \leq c(C_3(x) + C_4(x)),$$

avec

$$C_3(x) = \left(\sum_{j \geq 4} \left(2^{-j} \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

et

$$C_4(x) = \left(\sum_{j \geq 4} \left(\int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} |\Delta_{2^{l-j+3}h} f(x)| dh \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Estimation de C_3 : On a aussitôt

$$C_3(x) = c \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_h f(x)| dh.$$

Par Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} C_3(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq c \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \left\{ \int_{\frac{Q}{2}+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dh \\
 &\leq c \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \left\{ \int_{\frac{Q}{2}+a} |f(x+h)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dh + c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq c \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \left\{ \int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dh + c \left(\int_{\frac{Q}{2}+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq c \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Estimation de C_4 : On a de même

$$C_4(x) \leq \sum_{j \geq 4} \int_{|h| \leq \frac{1}{8}} \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} |\Delta_{2^{l-j+3}h}^2 f(x)| dh.$$

On vérifie facilement que

$$\int_{|h| \leq \frac{1}{8}} |\Delta_{2^{l-j+3}h}^2 f(x)| dh = c 2^{2(j-l)} \int_{|h| \leq 2^{l-j}} |\Delta_h^2 f(x)| dh \quad (3.2)$$

Dans l'expression (3.1), on peut remplacer la norme $L_q([0, 1], \frac{dt}{t})$ par une norme $L_\infty([0, 1])$ en minorant ; ce qui donne.

$$\int_{|h| \leq t} |\Delta_h^2 f(x)| dh \leq ct^3 U(x),$$

de sorte que l'expression (3.2) est estimée par $2^{2(l-j)} U(x)$. On a donc

$$C_4(x) \leq c U(x) \sum_{j \geq 4} \sum_{l=0}^{j-4} 2^{-l-1} 2^{l-j} = c_1 U(x).$$

Par conséquence

$$\left(\int_{\frac{Q}{2}+a} C_4(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \left(\int_{Q+a} U(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En tenant compte des estimations obtenues pour C_3 et C_4 , on peut conclure que l'expression C est estimée par

$$\left(\int_{Q+a} U(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{Q+a} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans l'autre sens, on suppose que $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)_{lu}$. On voit aussitôt que

$$\Delta_h^l((\tau_a \varphi_1) f)(x) = \Delta_h^l f(x),$$

pour tout $x \in Q + a$ et $|h| \leq 1$, de sorte que f vérifie l'estimation souhaitée

Le cas $m < s \leq m + 1$. On sait que

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2) = W^m(F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^2)). \quad (3.3)$$

Par la proposition (2.2.4), et lemme (2.3.3), en déduit que $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)_{lu}$ si et seulement si $f^{(\alpha)} \in F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^2)_{lu}$ pour $|\alpha| = m$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}$. \square

Lemme 3.1.1. [8] *Soient $s = \frac{2}{p}$ et $p > 1$. Alors il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par $2Q$, telle que $\theta_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\theta_\nu\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} = 0$.*

Théorème 3. *Soient $s = \frac{2}{p} > 1$, $p > 1$, et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$, alors $\partial_j f$ appartient à $F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2)$ localement uniformément, pour tout $j = 1, 2$.*

Démonstration. Soit $s = \frac{2}{p}$, $m < s \leq m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$, $p > 1$, et supposons que T_f envoie $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$ dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$. D'après le lemme (2.1.1), il existe des nombres $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \leq M, \quad (3.4)$$

pour toute fonction $g \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)$, dont le support est inclus dans $2Q$. Soit φ une fonction dans $D(\mathbb{R}^2)$, à support dans $2Q$, telle que $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ sur $2Q$. Pour $a \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction g_a par

$$g_a(x) = b\varphi(2^\nu x) + \theta_\nu(x)a. \quad (3.5)$$

Le lemme (3.1.1) nous autorise à choisir $\nu = \nu(a) \geq 1$ tel que $2|a|\|\theta_\nu\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \delta$ et on a

$$\|\varphi(\lambda(\cdot))\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \leq c\lambda^{s-(\frac{1}{p})}\|\varphi\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \quad \forall \lambda \geq 1, \quad (3.6)$$

par la condition $s = \frac{2}{p}$, on définit $b \geq 1$ par l'égalité

$$2b\|\varphi\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} = \delta.$$

Dans ces conditions on a $\|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \leq |a|\|\theta_\nu\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} + b\|\varphi(2^\nu(\cdot))\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^2)} \leq \delta$.

On pose $x^{(2)} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $h^{(2)} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta := (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) \in \mathbb{N}^2$. Par la construction de g , on voit que

$$\Delta_h(\partial^\beta(f \circ g))(x) = b^m 2^{\nu m} \Delta_{h^{(2)}}(\partial^\alpha f)(2^\nu b x^{(2)} + a), \quad |\alpha| = m. \quad (3.7)$$

par la proposition (2.1.1), f est lipschtzienne, on a donc

$$\partial_j f \in L_p(\mathbb{R}^2)_{lu}, \quad \forall j = 1, 2. \quad (3.8)$$

Le cas $m < s < m + 1, m \in \mathbb{N}$.

Par l'implication (3.4) et la propriété (3.3), donc on obtient

$$\|\partial^\beta(f \circ g)\|_{F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^2)} \leq c_2. \quad (3.9)$$

Par l'estimation (3.9) et l'égalité (3.7), on a

$$\left\| \left(\int_0^{2^{-\nu}} \left(t^{m-2-s} \int_{|h| \leq 2^\nu b t} |\Delta_{2^{-\nu} b^{-1} h^{(2)}}(\partial^\alpha f)(2^\nu b(\cdot) + a)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(2^{-\nu} Q_2)} \leq c_3,$$

d'où

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{m-2-s} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\partial^\alpha f)(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(bQ_2+a)} \\ & \leq \left\| \left(\int_0^b \left(t^{m-2-s} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\partial^\alpha f)(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L_p(bQ_2+a)} \leq c_4. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comme la proposition (3.1.1)(i), (iii) , et la propriété (3.8), donc $\partial_j f \in F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^2)_{lu}$.

Le cas $s = m + 1, m \in \mathbb{N}$. La démonstration, se traite presque exactement comme dans le cas 1 Δ_h étant remplacé par Δ_h^2 , dans l'estimation (3.10).

□

Chapitre 4

Remarques sur la régularité du calcul symbolique dans certains espace de Besov

Le chapitre 4 traitera de généralités sur la régularité du calcul symbolique, et démontrons les théorèmes 4 et 5.

Théorème 4. Soient $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Alors l'application $T_f : \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est lipschitzienne sur tout borné de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in E_{p,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$.

Théorème 5. Soient $r \in \mathbb{N}$, $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Alors l'application T_f est de classe C^r de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si $f \in \text{cl}_{E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc}}(C^\infty(\mathbb{R}))$.

4.1 Régularité du calcul symbolique

Rappel

Définition 4.1.1. Pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit l'espace $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{R} , f telles que

$$\|f\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} := \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|f\|_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} < +\infty.$$

.

Définition 4.1.2. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. On dit que φ opère par multiplication sur $E \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si $\varphi f \in E$ pour tout $f \in E$.

calcul symbolique borné

Définition 4.1.3. On dit que $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ a un calcul symbolique maximal si toute fonction appartenant à $E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}$ opère de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Définition 4.1.4. Si E et F sont deux espaces métriques, une application $T : E \rightarrow F$ est dite bornée si, pour toute partie bornée B de E , $T(B)$ est borné dans F .

Définition 4.1.5. Soit E un espace de Banach dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$; on dit que E est un $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ -module algébrique si tout élément de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ opère par multiplication sur E .

Il est bien connu que pour $s > 0$ les espaces $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ sont des $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ -modules algébriques, pour la multiplication usuelle entre les fonctions scalaires et les fonctions vectorielles, voir par exemple [21, 4.6.4].

Proposition 4.1.1. Soit $s > 0$. Pour toute fonction f appartenant à $C^\infty(\mathbb{R})$ et s'annulant en 0, l'opérateur T_f est borné sur $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Démonstration. Voir par exemple [8, prop. 4.1].

Soit $\Phi(\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}))$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour lesquelles T_f est une application bornée de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$.

L'espace $\Phi(\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}))$ sera abrégé en Φ si le contexte est clair.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on notera $W^r(\Phi)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f' \in \Phi$ pour tout $1 \leq r$.

□

Préparation

Si f de classe $C^1(\mathbb{R})$. Nous notons $T_{f'}$ l'opérateur de composition, défini par $T_{f'}(g) = f' \circ g$.

Proposition 4.1.2. Soit $s > 0$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue appartenant à $W^1(\Phi(\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})))$, alors l'application $T_f : \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est lipschitzienne sur tout borné de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Démonstration. Voir par exemple [8, thm. 4.3]. □

Proposition 4.1.3. *Soient $s > 1/p$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour toute intervalle \mathbb{I} de \mathbb{R} , l'application*

$$T_f : \left(\mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), \| - \|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \right) \rightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R})_{loc}$$

est uniformément continue. Alors f est une fonction affine.

Démonstration. Voir par exemple [8, thm. 4.4]. □

Soit $r \in \mathbb{N}$. Par la proposition (4.1.1), toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 0$ pour tout $1 \leq r$, appartient à $W^r(\Phi(\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})))$.

Proposition 4.1.4. *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $s > 0$. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue appartenant à $cl_{W^r(\Phi(\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})))}(C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^r(\Phi(\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}))))$, alors l'application*

$$T_f : \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) \text{ est de classe } C^r.$$

Démonstration. Voir par exemple [8, thm. 4.6] □

On notera $E_{p,q}^{\circ s}$ la fermeture de $D(\mathbb{R})$ dans $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Si $1 \leq p, q < \infty$, on a

$$E_{p,q}^{\circ s}(\mathbb{R}) = E_{p,q}^s(\mathbb{R}), \tag{4.1}$$

(voir par exemple [22, 2.3.3]).

Proposition 4.1.5. *Soit $s > 0$. On suppose que $q \in [1, \infty[$. Alors*

$$(i) \text{ cl}_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})} \left(C^\infty(\mathbb{R}) \cap E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \right) = E_{p,q}^s(\mathbb{R}),$$

$$(ii) \text{ cl}_{E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}} \left(C^\infty(\mathbb{R}) \right) = E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}.$$

Démonstration. voir par exemple [11, prop. 7]. □

On dit que T_f a la propriété (\mathcal{P}_r) si T_f est de classe C^r de

$$\left(\mathcal{D}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), \| - \|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})} \right)$$

dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$, pour toute intervalle \mathbb{I} de \mathbb{R} .

Proposition 4.1.6. *Soient $s > 0$, $r \in \mathbb{N}$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'application $T_f : \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) \rightarrow \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est de classe C^r . Alors f appartient à $(E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R}))_{loc}$.*

Démonstration. Voir par exemple [8, thm. 4.9]. □

4.2 Preuves des théorèmes 4 et 5

Preuve de théorème 4

La nécessité de $f \in E_{p,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$ a été prouvée par [8, th. 4.5]. Nous tournons maintenant vers la suffisance. Supposons que $f \in E_{p,q}^{s+1}(\mathbb{R})_{loc}$ et $f(0) = 0$. Par l'hypothèse $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$ et une propriété standard de Sobolev, f est de classe C^1 , posons

$$u := f - f'(0) \cdot \text{id}_{\mathbb{R}}.$$

Par la propriété

$$E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R}) = W^r(E_{p,q}^s(\mathbb{R})) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

il vient donc $u \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}$ et $u' \in E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}$ (voir [11, prop. 13].)

Puisque $u(0) = u'(0) = 0$, et par l'hypothèse $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$, on a $u \in W^1(\Phi)$. Compte tenu de la proposition (4.1.2), il vient que T_u est lipschitzienne sur tout borné de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$. Puisque $T_f = T_u + f'(0) \cdot \text{id}_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})}$. D'où le résultat. Les propositions (4.1.2) et (4.1.5) ont la conséquence suivante, qui généralise les résultats correspondant pour les espaces de Sobolev W_p^1 , obtenus par Marcus et Mizel [20].

Corollaire (4.2.1). Soient $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) T_f opère de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$,
- (ii) T_f est un opérateur borné de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$,
- (iii) T_f est un opérateur continu de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Preuve de théorème 5

Étape 1 : Si T_f est de classe C^r de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$, compte tenu de la proposition (4.1.6), on a $f \in \left(\text{cl}_{E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})}(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \right)_{loc}$. On conclut que

$$f \in \text{cl}_{E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc}}(C^\infty(\mathbb{R})),$$

(voir [11, prop. 12].)

Étape 2 : Par la condition $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$, nous obtenons

$$E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc} \hookrightarrow C^r(\mathbb{R}). \quad (4.3)$$

En particulier, on pose

$$\tilde{E}_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc} : f(0) = f'(0) = 0, \quad 1 \leq r \right\}$$

est un sous-espace fermé dans $E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc}$. Par l'hypothèse $(s, p, q) \in \mathcal{I}_{1,1,E}$, on a $\tilde{E}_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})$ est inclus dans l'espace $W^r(\Phi)$ (voir [11, prop. 9].) Grâce au plongement

$$\Phi \hookrightarrow W_{\infty}^1(\mathbb{R})_{loc}, \tag{4.4}$$

(voir [8, th. 3.1]), soit encore

$$W^r(\Phi) \hookrightarrow W_{\infty}^{r+1}(\mathbb{R})_{loc} \hookrightarrow W_{\infty}^r(\mathbb{R})_{loc}.$$

Du théorème du graphe fermé, on déduit que

$$\tilde{E}_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R}) \hookrightarrow W^r(\Phi).$$

Étape 3 : Soit $f \in \text{cl}_{E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc}}(C^{\infty}(\mathbb{R}))$. Il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe

$C^{\infty}(\mathbb{R})$, telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ dans $E_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})_{loc}$. Par la proposition (4.1.1) la formule de Taylor polynomiale bornée de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ comme un opérateur de classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$, et par le plongement (4.3) implique que $\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(0) = f'(0)$ pour tout $1 \leq r$, il n'y a aucune perte de généralité pour supposons que $f, f_k \in \tilde{E}_{p,q}^{s+r}(\mathbb{R})$. Maintenant par l'étape 2, il vient $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ dans $W^r(\Phi)$. Puisque $f_k \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par la proposition (4.1.4), on conclut que T_f est de classe C^r de $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré un calcul symbolique pour les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans \mathbb{R}^n . Dans notre travail, le théorème 1 est fondamental, la condition ∇f appartient localement uniformément à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ est nécessaire. En fin nous avons étudié la régularité de l'opérateur T_f dans certains espace de Besov.

Bibliographie

- [1] **S.E. ALLAOUI.** *Remarques sur la régularité du calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles.* Soumis. 2016.
- [2] **S.E. ALLAOUI.** *PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS ON LOCALIZED BESOV SPACES.* Acta Mathematica Vietnamica, Volume 38, Number 1, 2013, page 255-278.
- [3] **S.E. ALLAOUI.** *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de $L.T$ à valeurs vectorielles.* Spring School on Analysis., Université Karlova v Praze, Praha, à Paseky , République Tchèque.
- [4] **S.E. ALLAOUI.** *Le calcul symbolique dans certains algèbres de Besov à valeurs vectorielles.* Fractals and Related Fields 2007.
- [5] **S.E. ALLAOUI.** *Boundedness of pseudo-differential operators on Lizorkin-Triebel spaces.* Soumis. 2015.
- [6] **S.E. ALLAOUI.** *A new characterization of the local uniform Besov spaces.* Soumis. 2016.
- [7] **S.E. ALLAOUI.** *Le lemme de Van Der Corput pour les intégrales oscillantes.* Annales de Mathématiques. S.B. Volume 7 (2000).
- [8] **S.E. Allaoui.** *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeur vectorielles.* Annales mathématiques Blaise Pascal. **16**, 2 (2009), 399-429.
- [9] **S.E. Allaoui.** *Sur la composition dans les espaces de Besov à valeurs vectorielles : un cas critique.* (soumis à Ann. I. H. Poincaré).

-
- [10] **S.E. Allaoui, G. Bourdaud.** *Composition dans les espaces de Besov critiques.* Annales mathématiques de la Faculté des Sciences de Toulouse. Sér. 6 **25** (2016), 1-18.
- [11] **G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis.** *Regularity of the symbolic calculus in Besov algebras.* Studia Math. **184** (2008), 271-298.
- [12] **G. Bourdaud.** *Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficient peu réguliers.* Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.
- [13] **G. Bourdaud.** *Localisations des espaces de Besov.* Studia Math., 90 (1988), 153-163.
- [14] **G. Bourdaud.** *La trivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 314 (1992), 187-190.
- [15] **G. Bourdaud.** *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov et de Triebel.* Ann. I. H. Poincaré-AN 10 (1993), 413-422.
- [16] **G. Bourdaud.** *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*, 2ième édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, 23(1995).
- [17] **G. Bourdaud.** *Superposition Operators in Zygmund and BMO spaces*, in : D. Haroske, T. Runst, H.-J. Schmeisser (Eds.), Proceedings on "Functions Spaces, Differential Operators and Non Linear Analysis", Birkhäuser, Basel, (2003), pp. 59-74.
- [18] **G. Bourdaud.** *Une propriété de composition dans l'espace $H^s(II)$.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006), 243-246.
- [19] **Haïm. BREZIS** *Analyse fonctionnelle Théorie et applications.* Massons, Paris, (1983).
- [20] **M. Marcus, and V.J. Mizel.** *Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous.* J. Functional Anal. **33** (1979), 217-229.
- [21] **T. Runst, W. Sickel.** *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations.* de Gruyter, Berlin, 1996.
- [22] **H. Triebel.** *Theory of function spaces.* Birkhäuser, Basel (1983). *tionnelle Théorie et applicatios.* Massons,Paris, (1983).