**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LAGHOUAT**

DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

# MEMOIRE DE MAGISTER

***En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques***

Option : Analyse Fonctionnelle Et EDP

THEME DU PROJET :

## Méthode adaptée à deux phases pour la résolution des problèmes d'optimisation linéaire

Présenté par **:**

M. Abdelhak Hebbache

Dirigé par:

Dr. Mohand Bentobache

DEVANT LES MEMBRES DU JURY

| | | |
|---|---|---|
| Mme. Bendaoud Zohra | M.C.A, Université de Laghouat | Présidente |
| M. Mokhtari Abdelkader | Professeur, Université de Laghouat | Examinateur |
| M. Belacel Amar | M.C.A, Université de Laghouat | Examinateur |
| M. Bentobache Mohand | M.C.A, Université de Laghouat | Directeur du mémoire |
| Mme. Moussouni Nacima | M.C.B, Université de Laghouat | Invitée |

Année universitaire : 2016-2017

**Résumé**

Dans ce travail, nous avons adapté la méthode duale de support ainsi que la méthode adaptée développées par R. Gabasov et F.M. Kirillova pour la résolution des problèmes de la programmation linéaire à variables non-négatives. Afin d'initialiser ces algorithmes avec une solution réalisable de départ et un support initial, une technique d'initialisation utilisant une seule variable artificielle est proposée et une méthode dite la M-méthode avec une seule variable artificielle est présentée. Dans le but de comparer les performances de nos méthodes avec celles de la méthode du simplexe, nous les avons implémentées avec le langage de programmation C++. Les résultats trouvés montrent l'efficacité de la méthode adaptée.



**Mots clés :** Programmation linéaire, variables non-négatives, méthode duale de support, méthode adaptée, initialisation, résultats numériques.



**Abstract**

In this work, we adapted the dual support method as well as the adaptive method developed by R. Gabasov and F.M. Kirillova for solving linear programming problems with non-negative variables. In order to initialize these algorithms with an initial feasible solution and an initial support, an initialization technique using a single artificial variable is proposed and a method called the M-method with a single artificial variable is presented. In order to compare the performance of our methods with those of the simplex method, we have implemented them with the C ++ programming language. The obtained results show the efficiency of the adaptive method.



**Keywords :** Linear programming, non-negative variables, dual support method, adaptive method, initialization, numerical experiments.

**Remerciements**

⋆ Je remercie Dieu qui m'a guidé et m'a permit d'accomplir ce travail modeste.

⋆ Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à monsieur Mohand Bentobache, mon directeur de mémoire, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, ses encouragements, ses valeurs, ses conseils et sa disponibilité permanente. Je le remercie également pour nous avoir donné une bonne base et une forte motivation à la recherche.

⋆ Je remercie vivement Dr. Bendaoud Zohra pour avoir accepté de présider le jury, Pr. Mokhtari Abdelkader et Dr. Belacel Amar pour avoir accepté de juger ce travail, Dr. Moussouni Nacima pour avoir accepté notre invitation .

⋆ Je remercie tout mes enseignants, allant des enseignants du primaire. jusqu'à mes enseignants en magistère qui nous ont enseigné et nous ont initié à la recherche.

⋆ Je remercie tout mes collègues pour leur aide et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

⋆ Je remercie mes parents, toute ma famille et tout mes amis et amies.

## Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

⋆ À mes très chers parents.

⋆ À toute ma famille.

⋆ À tout mes amis et amies.

Abdelhak Hebbache

# Table des matières

# Introduction générale

La programmation linéaire est une discipline qui s'intéresse aux méthodes de résolution du problème consistant à maximiser ou minimiser une fonction linéaire, appelée fonction objectif, sur un domaine délimité par un ensemble d'équations ou d'inéquations linéaires, appelées contraintes. Son origine remonte au années 30 lorsque le mathématicien russe L.V. Kantorovitch [16] a modélisé un problème économique d'allocation optimale de ressource sous forme d'un problème de programmation linéaire. Plus tard, plusieurs problèmes pratiques sont modélisés sous forme de problèmes de programmation linéaire, on cite : le problème de planification de production, les problèmes de transport, les problèmes de découpe, les problèmes d'ordonnancement, etc.

Pour la résolution de ce types de problèmes, plusieurs méthodes sont développées et chaque méthode a des bienfaits et des méfaits. Parmi ces méthodes, on cite la méthode du simplexe développée par G.B. Dantzig en 1947 [9], qui consiste à démarrer d'un sommet initial du polyèdre des contraintes et de passer d'un sommet à un autre sommet adjacent meilleur jusqu'à atteindre le sommet minimal ou maximal ; la méthode des ellipsoïdes développée par Khachian en 1979 [18], qui est la première méthode de points intérieurs de complexité polynominale. Cette méthode a une importance théorique mais elle n'est pas efficace en pratique ; l'algorithme projectif de Karmarkar (1984) [17] qui est un algorithme polynominal très efficace pour la résolution des problèmes de grande dimension ; les algorithmes de points intérieurs de type primal-dual [21] ; les méthodes d'activation de contraintes de Gill et al. (1973) [15], la méthode adaptée de R. Gabasov et F.M. Kirillova mise au point dans les années 70 à l'université de insk, Biélorussie [12], etc.

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la méthode adaptée initialement développée pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables bornées, i.e., les problèmes de la forme :

$$\max\ z = c^T x,$$

$$Ax = b,$$

$$l \leq x \leq u,$$

où $c$, $x$, $u$ et $l$ sont des $n$-vecteurs avec $||u|| < \infty$ et $||l|| < \infty$, $b$ un $m$-vecteur, $A$ est une matrice de dimension $(m \times n)$ avec $rang(A) = m < n$.
Cette méthode est bien expliquée dans le livre [5]. Dans ce travail, nous allons adapter cette méthode pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variable non-

négatives écrit sous la forme suivante :

$$\max\ z = c^T x,$$
$$Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

où $c$ et $x$ sont des $n$-vecteurs , $b$ un m-vecteur, $A$ est une matrice de dimension $(m \times n)$ avec $rang(A) = m < n$.

Notre mémoire est constitué d'une introduction, trois chapitres et une conclusion. Dans le premier chapitre, nous donnerons quelques rappels d'algèbres linéaire et de programmation linéaire. La méthode primale de support pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables non-négatives est également présentée dans ce chapitre. Dans le deuxième chapitre, nous avons adapté la méthode duale de support pour la résolution des problèmes de programmations linéaire à variable non-négatives.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des méthodes que nous avons proposées, à savoir : la méthode adaptée avec la règle algébrique, la méthode adaptée avec la règle du pas simple, et ce, pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables non-négatives. Dans ce même chapitre, une technique d'initialisation nous permettant de trouver une base initiale et une solution réalisable de départ est suggérée.

De plus, nous avons implémenté les algorithmes proposés dans les chapitres précédents avec le langage de programmation C++ et nous avons comparé les performances de nos méthodes avec la méthode du simplexe [9]. Finalement, nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche.

# Chapitre 1

# Rappel d'algèbre linéaire et de programmation linéaire

## 1.1 Rappel d'algèbre linéaire

### 1.1.1 Matrices et vecteurs

– Soient deux ensembles d'indices :

$$I = \{1,2,\ldots,m\},\ J = \{1,2,\ldots,n\},\ m \leq n.$$

– Une matrice $A$ de dimension $(m \times n)$ est représentée par l'écriture suivante :

$$A = A(I,J) = \left(a_{ij}, i \in I, j \in J\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$A = \left(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ \vdots \\ A_i^T \\ \vdots \\ A_m^T \end{pmatrix},$$

où

$$a_j = A(I,j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ est un vecteur-colonne,}$$

$A_i^T = A(i,J) = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}, \ldots, a_{in})$ est un vecteur-ligne.

– Le symbole $\left(^T\right)$ est celui de la transposition. Chaque vecteur, noté

$$x = x(J) = (x_j, j \in J),$$

sera ainsi considéré comme un vecteur-colonne tandis que le vecteur-ligne sera noté $x^T$.

– La matrice transposée de $A$ sera notée

$$A^T = A^T(J,I) = (a_{ji}, j \in J, i \in I).$$

– Notons qu'un vecteur-colonne de dimension $m$ peut être considéré comme une matrice de dimension $(m \times 1)$, tandis qu'un vecteur-ligne de dimension $n$ peut étre considéré comme une matrice de dimension $(1 \times n)$.

– La matrice identité d'ordre $n$ sera notée $I_n$.

### 1.1.2 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

– Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps commutatif, on note $1_{\mathbb{K}}$ son élément neutre par rapport à loi "$\cdot$". On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ un ensemble $V$ d'éléments désignés par $x_1, x_2, \ldots$ et appelés vecteurs, muni d'une structure algébrique définie par la donnée de deux opérations :

1. **l'addition vectorielle :** à tout couple $(x_1, x_2)$ de vecteurs correspond un vecteur dans $V$ désigné par $x_1 + x_2$ et appelé somme de $x_1$ et $x_2$.
2. **la multiplication par un scalaire :** à tout couple $(\alpha, x)$ formé d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $x$ correspond un vecteur dans $V$ désigné par $\alpha x$ et appelé produit de $\alpha$ par $x$.

Ces deux opérations satisfont aux conditions suivantes :$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ :

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ ;
2. $x+y = y+x$ ;
3. II existe un vecteur, noté $0_V$ et appelé vecteur nul, tel que $x + 0_V = x$ pour tout vecteur $x \in V$ ;
4. Pour tout vecteur $x \in V$, il existe un vecteur, noté $-x$ et appelé vecteur opposé de $x$, tel que $x + (-x) = 0$ ;
5. $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$ ;
6. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ ;
7. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ ;
8. $1_{\mathbb{K}} x = x$.

– Soit $U$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On dit que $U$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $V$ si et seulement si :

1. $\forall x, y \in U,\ x+y \in U$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in U,\ \lambda x \in U$.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n$ vecteurs de $V$.

– L'expression $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,n}$ est dite combinaison linéaire des vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

– Si de plus $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$, la combinaison linéaire est appelée combinaison convexe.
– Les vecteurs $a_1, a_2, ..., a_n$ sont linéairement indépendants si :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0, \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

On dit aussi que $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ forme une famille libre de $V$.
– On dit que les vecteurs $a_1, a_2, ..., a_n$ forme une famille génératrice de $V$ si et seulement si :

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j.$$

– La dimension de $V$ est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants dans $V$.
– Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ une base de $V$. La représentation d'un vecteur quelconque $x$ de $V$ comme combinaison linéaire de vecteurs de base est unique :

$$\exists! \lambda_j, j = \overline{1,n}, \text{ tel que } x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j.$$

– La substitution du vecteur $x$ à un vecteur $a_k$ de la base fournit une nouvelle base si et seulement si $\lambda_k \neq 0$.

### 1.1.3 Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice $A$ et d'un vecteur $x$, après les avoir partitionnés judicieusement. On dit alors qu'on a effectué un produit par blocks.
En effet, si l'on a

$$A = (A_1, A_2), \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$Ax = (A_1, A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2.$$

De même, pour

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

l'équation $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 = b_1, \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2. \end{cases}$$

On peut partitionner une matrice d'une manière arbitraire. Par exemple, si $A = A(I, J)$ est une matrice de dimension $(m \times n)$ et que $J_B$ et $J_N$ sont deux sous-ensembles quelconques de $J$ tels que

$$J_B \cup J_N = J, J_B \cap J_N = \emptyset,$$

alors on peut partitionner $A$ de la façon suivante :

$$A = \left(a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n\right) = (A_B, A_N),$$

avec $A_B = A(I, J_B),\ A_N = A(I, J_N)$.
Si $x = x(J) = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $x_B = x(J_B),\ x_N = x(J_N)$, alors on peut écrire

$$Ax = \sum_{j\in J} a_j x_j = \sum_{j\in J_B} a_j x_j + \sum_{j\in J_N} a_j x_j = A(I, J_B)x(J_B) + A(I, J_N)x(J_N).$$

On a alors

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N.$$

### 1.1.4 Rang d'une matrice

**Définition 1.** Le nombre maximum de colonnes (considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$) linéairement indépendantes d'une matrice $A$ est égal au nombre maximum de lignes (considérées comme des $n$-vecteurs-lignes) linéairement indépendantes. Ce nombre est appelé rang de la matrice $A$ et il est noté par $rang(A)$.

**Remarque 1.** Le rang d'une matrice de dimension $(m \times n)$ est inférieur ou égal à $\min\{m, n\}$.

### 1.1.5 Discussion générale sur l'existence et le nombre de solutions d'un système linéaire

#### Généralités et définitions

Soient $m$ et $n$ deux nombres entiers. Un système de $m$ équations linéaires à coefficients réels à $n$ inconnues $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n$ s'écrit comme suit :

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n & = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Les nombres $b_1, b_2, ..., b_m$ sont appelés les seconds membres du système (1.1).
En posant

$$A = \left(a_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\right),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Le système (1.1) s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = b. \tag{1.2}$$

La matrice $\overline{A} = (A, b)$ est appelée la matrice augmentée du système (1.1). On a aussi

$$rang(A) \leq rang(\overline{A}). \tag{1.3}$$

**Définition 2.**

- Tout vecteur $x$ vérifiant les équations (1.1) s'appelle solution du système.
- Le système (1.1) est dit compatible s'il possède une ou plusieurs solutions. Dans le cas contraire, il est dit incompatible ou impossible. D'une manière générale, le système (1.2) possède une solution si le vecteur $b$ appartient au sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $A$.
- Lorsque le vecteur $b$ est nul, le système (1.2) est dit homogène. Tout système homogène possède la solution triviale $x = 0$.

**Définition 3.**
Le système linéaire (1.2) est dit de rang complet en ligne si $rang(A) = m,\ m \leq n$.

Si deux systèmes d'équations linéaires, avec le même nombre des inconnues possèdent exactement les mêmes solutions, on dit alors qu'ils sont équivalents. On a ainsi le théorème suivant :

**Théorème 1.** [6]
Si $M$ est une matrice régulière d'ordre $m$, alors les systèmes $Ax = b$ et $MAx = Mb$ sont équivalents.

**Lemme 1.** [6]
Soit $m \leq n$ et $rang(A) = m$. Alors le système $Ax = b$ admet toujours quelque soit le second membre $b$ :

1. Une solution et une seule si $m = n$.
2. Une infinité de solution si $m < n$.

**Théorème 2.** [6]
Le système $Ax = b$

1. possède une solution unique si $rang(A) = rang(A, b) = n$,
2. possède une infinité de solutions si $rang(A) = rang(A, b) < n$,
3. est impossible si $rang(A) < rang(A, b)$.

### 1.1.6 Solutions basiques d'un système d'équations

Soit $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ un vecteur partitionné qui est solution du système $Ax = b$, où $rang(A) = m < n$. Alors $x$ est dit solution basique si $x_N = 0$ et si les vecteurs qui composent la sous-matrice carrée $A_B$ sont linéairement indépendants.
Une solution basique est dite non-dégénérée si

$$x_j \neq 0, \forall j \in J_B, \text{ avec } x_B = A_B^{-1} b.$$

### 1.1.7 Inversion d'une matrice régulière par la méthode de Gauss-Jordan

Pour illustrer cette méthode d'inversion, considérons une matrice $A$ régulière d'ordre 3 et son inverse $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

La relation $AA^{-1} = I_3$ est ainsi équivalente à trois systèmes d'équations : $Ay_j = e_j, j = 1,2,3$, avec $y_j = A^{-1}(I,j) = \big(x_{ij}, i = 1,2,3\big)$ et $e_j$ le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la matrice identité $I_3$. On peut alors résoudre simultanément ces trois systèmes en mettant dans la seconde partie du tableau de Gauss-Jordan trois seconds membres différents :

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | $b^1 = e_1$ | $b^2 = e_2$ | $b^3 = e_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | | 1 | 0 | 0 |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | | 0 | 1 | 0 |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | | 0 | 0 | 1 |

**Tableau de départ**

En travaillant avec des pivots diagonaux tous égaux à 1, l'application de la méthode de Gauss-Jordan pour ce système avec trois seconds membres nous donne alors le tableau final suivant :

| $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ |
| 0 | 1 | 0 | | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ |
| 0 | 0 | 1 | | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ |

**Tableau final**

Puisque la matrice $A$ est transformée en matrice unité, il en résulte que les vecteurs qui se trouvent dans la deuxième partie du tableau seront les solutions des trois systèmes. Par conséquent, le processus d'inversion par la méthode de Gauss-Jordan conduit au schéma général suivant :

$$\boxed{A \;|\; I} \rightarrow \boxed{I \;|\; A^{-1}}$$

## 1.2 Rappel de programmation linéaire

### 1.2.1 Présentation d'un problème de programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire ou programme linéaire se présente sous la forme suivante :
Trouver les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui maximisent ou minimisent la fonction linéaire suivante :

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

sous les contraintes linéaires suivantes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m. \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Le problème s'écrit aussi sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{array}{ccc} \max\ z = c^T x, & & \min\ z = c^T x, \\ Ax = b, & \text{ou} & Ax = b, \\ x \geq 0. & & x \geq 0, \end{array}$$

où :

- $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur des coûts.
- $A = \left(a_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ est appelé matrice des contraintes.
- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur des variables de décision.
- La fonction $z$ est appelée fonction objectif du problème de programmation linéaire.
- Les système $Ax = b$ est appelé système des contraintes principales.
- Les contraintes $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$ sont appelées contraintes de non-négativité des variables.

### 1.2.2 Modélisation sous forme d'un programme linéaire

La formulation d'un modèle mathématique est l'étape la plus délicate de la résolution d'un problème. Elle nécessite un effort de conception qui doit aboutir à la détermination :

1. des variables pour lesquelles on doit décider du niveau à atteindre, tel que le niveau d'activité dans l'entreprise, on suppose, dans un premier temps que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive ;
2. de la fonction objectif qui décrit la relation linéaire, entre les variables de décision, représentant l'objectif de l'entreprise ;
3. des contraintes du modèle qui décrivent les relations linéaires entre les variables de décision représentant les restrictions auxquelles est sujette l'entreprise.

**Exemple de programme linéaire [22]**

On présente dans cette partie un exemple permettant d'introduire et d'expliciter la notion de formulation d'un modèle mathématique linéaire, cet exemple porte sur les problèmes pour lesquelles la modélisation en programme linéaire est bien adaptée et clairement explicitée.

Une compagnie est spécialisée dans la production de deux types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures machine et un certain nombre d'heures de main d'oeuvre. Le tableau suivant donne les informations nécessaires sur les deux produits, c'est-à-dire le nombre de chacun de ces produits. Dans toute la suite, on utilisera comme unité monétaire UM, qui peut être l'Euro, le Dollar ou le Dinar et le tableau nous donne, de plus, le nombre d'heures machine et d'heures de main d'oeuvre disponibles.

| | Heures machine | Main d'oeuvre | Profit |
|---|---|---|---|
| Climatiseur | $2h/$unité | $3h/$unité | $25UM/$unité |
| Ventilateur | $2h/$unité | $1h/$unité | $15UM/$unité |
| Disponibilité | $240h$ | $140h$ | |

**Formulation du problème :**

**a)** Variables de décisions : la compagnie veut décider du nombre de climatiseurs et du nombre de ventilateurs à produire. Notons les deux variables de décision par :

$$x_1 = \text{nombre de climatiseurs.}$$
$$x_2 = \text{nombre de ventilateurs.}$$

**b)** La fonction objectif : l'objectif de l'entreprise est de déterminer le plan de production qui maximisera son profit, la fonction objectif s'écrit alors

$$\max\ z = 25x_1 + 15x_2.$$

**c)** Les contraintes du modèle : la limitation des ressources contraint l'entreprise de la manière suivante :

1. contraintes heures machine : $2x_1 + 2x_2 \leq 240$;
2. contraintes main d'oeuvre : $3x_1 + x_2 \leq 140$;
3. contraintes de non-négativité (exprimant que les niveaux d'activité ne peuvent être négatifs).

**Modèle final :**

$$\begin{gathered} \max\ z(x) = 25x_1 + 15x_2, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240, \\ 3x_1 + x_2 \leq 140, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2\}. \end{gathered}$$

Ce programme linéaire s'écrit sous la forme standard suivante :

$$\begin{gathered} \max\ z(x) = 25x_1 + 15x_2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 240, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 140, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,4\}, \end{gathered}$$

avec $x_3$ et $x_4$ sont des variables non-négatives, appelées variables d'écarts.

### 1.2.3 Existence des solutions d'un programme linéaire

Avant d'étudier l'existence des solutions d'un problème de programmation linéaire, on va d'abord rappeler quelques éléments de topologie dans $\mathbb{R}^n$.

#### Éléments de topologie

Nous nous plaçons ici dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

**Définition 4.** (Convergence des suites dans $\mathbb{R}^n$)
Une suite infinie $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ dans $\mathbb{R}^n$ sera notée $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ si la norme $\|x_k - x\|$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

**Définition 5.** (Point d'accumulation)
On dit que $x$ est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on peut extraire de cette suite une sous suite $(x_l)_{l\in L\subset\mathbb{N}}$ convergente vers $x$. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle a un point d'accumulation unique qui est la limite de cette suite.

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.

**Définition 6.** (Point intérieur)
Un point $y \in S$ est un point intérieur de $S$ s'il existe une boule centrée en $y$ et contenue dans $S$. L'ensemble des points intérieurs de $S$ est appelé l'intérieur de $S$ et noté par $\mathrm{int}(S)$.

**Définition 7.** (Sous-ensemble ouvert)
On dit que $S \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert s'il coincide avec sont intérieur, i.e.,

$$S = \mathrm{int}(S).$$

**Définition 8.** (Voisinage)
Étant donné $y \in \mathbb{R}^n$, $v(y)$ est un voisinage de $y$ s'il contient une boule ouverte contenant $y$.

**Définition 9.** (Point d'adhérence)
Un point $y \in S$ est un point d'adhérence de $S$ si tout voisinage de $y$ rencontre $S$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in S, \quad \|y - x\| < \varepsilon.$$

**Définition 10.** (Sous-ensemble fermé)
On dit que $S \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé s'il coincide avec son adhérence, i.e.,

$$S = \overline{S}.$$

**Proposition 1.**
Un sous-ensemble $S$ de $\mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments dans $S$ a une limite dans $S$.

**Définition 11.** (Ensemble compact)
Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si de tout suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K$, on peut extraire une sous-suite infinie $(x_l)_{l\in L\subset\mathbb{N}}$ convergente vers un élément de $K$.

**Proposition 2.**
Dans $\mathbb{R}^n$ un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement s'il est fermé et borné.

Soit $f$ une fonction définie d'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème suivant étudie l'existence d'optimum pour la fonction $f$ sur l'ensemble $K$.

**Théorème 3.** (Théorème de Weierstrass)
Si $f$ est une fonction continue sur un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$, alors le problème d'optimisation :

$$\begin{gathered} \textit{maximiser } f(x) \\ x \in K \end{gathered}$$

a une solution optimale $\bar{x} \in K$.

**Preuve.**

Soit $M = \sup\limits_{x\in K}\{f(x)\}$. La caractérisation de $M$ nous donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in K, \quad M - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq M.$$

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$, nous obtenons

$$\exists x_n \in K, \quad M - \tfrac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M.$$

Comme $K$ est compact, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_l)_{l\in L\subset\mathbb{N}}$, telle que

$$x_l \to \bar{x} \in K.$$

Puisque $f$ est continue,

$$f(x_l) \to f(\bar{x}).$$

Comme $(x_l)_{l\in L\subset\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on aura

$$x_l \in K, \quad M - \tfrac{1}{l} \leq f(x_l) \leq M.$$

En passant à la limite, nous obtenons

$$\exists \bar{x} \in K, \quad M \leq f(\bar{x}) \leq M,$$

i.e., $\exists \bar{x} \in K$ avec $f(\bar{x}) = M = \sup\limits_{x\in K}\{f(x)\}$.

**Théorème 4.**
Si $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors $f$ est continue.

**Preuve.**
Soit $\{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ une base dans $\mathbb{R}^n$, et soit $x$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On a

$$|f(x)| = \left|f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, |f(e_i)| \leq (\sup_{i=\overline{1,n}} |x_i|) \cdot \sum_{i=1}^{n} |f(e_i)| \leq k \, \|x\|_\infty.$$

D'après l'équivalence des normes dans un espace de dimension fini, on aura

$$\exists \alpha > 0, \quad \|x\|_\infty \leq \alpha \, \|x\|.$$

Alors

$$\exists M = k.\alpha > 0, \quad |f(x)| \leq M \|x\|.$$

Comme $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, donc elle vérifie :

$$\exists M > 0, \quad |f(x)| \leq M \|x\|.$$

Alors f est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Maintenant considérons le problème de programmation linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \max\ z &= c^T x, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Notons le domaine réalisable du programme linéaire (1.4) par

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, \, Ax = b, \, x \geq 0\}.$$

**Proposition 3.**
L'ensemble $S$ est fermé.

**Preuve.**
Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)_{k\in N}$ une suite de $S$ convergente vers une limite $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Puisque $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $S$, alors on a

$$Ax^k = b, \quad x^k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme les fonctions associées aux contraintes du problème sont linéaires, alors elles sont continues, donc on peut passer à la limite puisque $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^0$ :

$$Ax^0 = b, \quad x^0 \geq 0.$$

Ce qui implique que $x^0 \in S$. Par conséquent, $S$ est un ensemble fermé.

**Proposition 4.**
Si $S$ est un ensemble non vide et borné, alors le problème (1.4) admet un solution optimale $\bar{x}$.

**Preuve.**
La fonction $z$ est une fonction linéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors elle est continue. De plus, puisque $S$ est fermé et borné donc compact de $\mathbb{R}^n$, alors d'après le théorème de Weierstrass, le problème (1.4) admet une solution optimale $\bar{x}$.

**Point extrême et optimalité**

**Définition 12.** (Point extrême)
Un vecteur $x \in S$ est appelé point extrême de $S$ si $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, avec $x_1, x_2 \in S$ et $\lambda \in ]0,1[$ implique que $x = x_1 = x_2$.

**Théorème 5.** [10]
La fonction objectif du problème de programmation linéaire définie sur un polyèdre $S$ atteint son maximum en un point extrême de ce polyèdre.

**Preuve.**
Soit le problème de programmation linéaire sous forme standard

$$\begin{aligned} \max\ z &= c^T x, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Soient $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^p$ les points extrêmes du polyèdre $S$, avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\}$ et $x^0$ une solution optimale du problème (1.5).
Supposons le contraire ($x^0$ n'est pas un point extrême de $S$).
Alors $x^0 = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \bar{x}^i$, où $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, avec $\lambda_i \geq 0$. On a

$$z(x^0) = z(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \bar{x}^i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z(\bar{x}^i). \tag{1.6}$$

Déterminons la valeur maximale que prend la fonction objectif $z$ aux points extrêmes

$$\max_{i \in \{1,\ldots,p\}} z(\bar{x}^i) = z(\bar{x}^r). \tag{1.7}$$

En vertu des relations (1.6) et (1.7), on obtient

$$z(x^0) = z(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \bar{x}^i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z(\bar{x}^i) \leq z(\bar{x}^r) \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = z(\bar{x}^r).$$

Ce qui implique que $x^0$ n'est pas une solution optimale du problème (1.5). D'où l'on déduit que $x^0$ est un point extrême de $S$.

**Théorème 6.** [10]
Si la fonction objectif prend sa valeur maximale en au plus d'un point extrême alors toute combinaison linéaire convexe de ces points donne la même valeur de la fonction objectif.

**Preuve.**
Soient $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^p$ les points extrêmes du polyèdre $S$, tels que

$$z(\bar{x}^1) = z(\bar{x}^2) = \cdots = z(\bar{x}^p) = \alpha,$$

où $\alpha$ est la valeur maximale. Soit $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \bar{x}^i$, où $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, avec $\lambda_i \geq 0$. On a

$$z(\bar{x}) = z(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \bar{x}^i) = \alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = \alpha = z(\bar{x}^i).$$

**Théorème 7.** [10]
$\bar{x}$ est un point extrême si et seulement s'il est une solution de base réalisable.

## 1.3 Méthode primale de support pour la résolution des programmes linéaires

### 1.3.1 Position du problème et définitions

Le problème de programmation linéaire à variables non-negatives se présente sous la forme standard suivante :

$$\max\ z = c^T x, \tag{1.8}$$

$$Ax = b, \tag{1.9}$$

$$x \geq 0, \tag{1.10}$$

où $c$ et $x$ sont des $n$-vecteurs, $b$ un $m$-vecteur, $A$ est une matrice de dimension $(m \times n)$ avec $rang(A) = m < n$.

– Définissons les ensembles d'indices suivants :

$$I = \{1,2,\ldots,m\},\ J = \{1,2,...,n\},\ J = J_B \cup J_N,\ J_B \cap J_N = \emptyset,\ |J_B| = m.$$

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice $A$ de la manière suivante :

$$x = x(J) = (x_j, j \in J) = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},\ \text{où } x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B) \text{ et } x_N = x(J_N) = (x_j, j \in J_N),$$

$$c = c(J) = (c_j, j \in J) = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix},\ \text{où } c_B = c(J_B) = (c_j, j \in J_B) \text{ et } c_N = c(J_N) = (c_j, j \in J_N),$$

$$A = A(I,J) = \left(a_{ij}, i \in I, j \in J\right) = \left(a_j, j \in J\right),\ \text{où } a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

$$A = (A_B, A_N),\ A_B = A(I,J_B),\ A_N = A(I,J_N).$$

– Un vecteur $x$ vérifiant les contraintes (1.9) et (1.10) est appelé solution réalisable (SR) du problème (1.8)-(1.10). Notons par $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\}$ l'ensemble des solutions réalisables du problème (1.8)-(1.10).

– Une solution réalisable $x^0$ est dite optimale si

$$z\left(x^0\right) \geq z(x), \quad \forall x \in S.$$

– D'autre part, une solution réalisable $x$ est appelée $\varepsilon$-optimale ou suboptimale si

$$z\left(x^0\right) - z\left(x^\varepsilon\right) = c^T x^0 - c^T x^\varepsilon \leq \varepsilon,$$

où $x^0$ est une solution optimale du problème (1.8)-(1.10) et $\varepsilon$ un nombre positif ou nul choisi a l'avance.

– Soit un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$ tel que $|J_B| = |I| = m$. L'ensemble $J_B$ est alors appelé support si

$$\det A_B = \det A(I, J_B) \neq 0.$$

– Le couple $\{x, J_B\}$ formé de la solution réalisable $x$ et du support $J_B$ est appelé solution réalisable de support (SRS).

– Une (SRS) est dite non-dégénérée si

$$x_j > 0, \; j \in J_B.$$

– Définissons le vecteur des multiplicateurs $\pi$ :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1}, \tag{1.11}$$

ainsi que le vecteur des coûts réduits $E^T = (E_B^T, E_N^T)$ :

$$E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T \Leftrightarrow E_j = \pi^T a_j - c_j, j \in J_N, \tag{1.12}$$

et

$$E_B^T = \pi^T A_B - c_B^T = c_B^T A_B^{-1} A_B - c_B^T = 0.$$

On définit les deux sous-ensembles $J_{N^+}$ et $J_{N_0}$ de $J_N$ comme suit :

$$J_{N^+} = \left\{ j \in J_N / x_j > 0 \right\} \text{ et } J_{N_0} = \left\{ j \in J_N / x_j = 0 \right\}.$$

### 1.3.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1.8)-(1.10). Considérons une autre solution réalisable quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit

$$\Delta z = z(\bar{x}) - z(x) = c_B^T \Delta x_B + c_N^T \Delta x_N. \tag{1.13}$$

Comme on a

$$\begin{cases} A\bar{x} = b \\ Ax = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_B \bar{x}_B + A_N \bar{x}_N = b \\ A_B x_B + A_N x_N = b \end{cases} \Rightarrow (\bar{x}_B - x_B) = -A_B^{-1} A_N (\bar{x}_N - x_N).$$

Alors on trouve :

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N.$$

D'autre part

$$\Delta z = z(\bar{x}) - z(x) = c_B^T \Delta x_B + c_N^T \Delta x_N = (-c_B^T A_B^{-1} A_N + c_N^T)\Delta x_N.$$

D'où

$$\Delta z = z(\bar{x}) - z(x) = -E_N^T \Delta x_N = -\sum_{j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - x_j). \tag{1.14}$$

La formule d'accroissement prend alors la forme finale suivante :

$$\Delta z = -E_{N^+}^T \Delta x_{N^+} - E_{N_0}^T \Delta x_{N_0}, \tag{1.15}$$

avec

$$E_{N^+} = (E_j,\ j \in J_{N^+}),\ E_{N_0} = (E_j,\ j \in J_{N_0}),\ \Delta x_{N^+} = (\Delta x_j,\ j \in J_{N^+}),\ \Delta x_{N_0} = (\Delta x_j,\ j \in J_{N_0}).$$

### 1.3.3 Critère d'optimalité

On a le théorème suivant [12] :

**Théorème 8.** (Critère d'optimalité )
Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1.8)-(1.10). Alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si } j \in J_{N_0}\,; \\ E_j = 0, & \text{si } j \in J_{N^+}\,; \end{cases} \tag{1.16}$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable $x$. Ces mêmes relations sont aussi nécessaires dans le cas où la SRS $\{x, J_B\}$ est non-dégénérée.

### 1.3.4 Critère de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $z(x^0)$ et une autre valeur $z(x)$ d'une SRS quelconque $\{x, J_B\}$, remplaçons dans la formule d'accroissement (1.14) le vecteur $\bar{x}$ par $x^0$. On aura donc

$$\Delta z = z(x^0) - z(x) = -\sum_{j \in J_N} E_j(x_j^0 - x_j) = \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0). \tag{1.17}$$

Majorons la valeur de l'expression (1.17). Supposons que $E_N \geq 0$, on a alors

$$\Delta z \leq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - 0) = \sum_{j \in J_N} E_j x_j. \tag{1.18}$$

Pour $E_N \geq 0$, le nombre

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j x_j,$$

est appelé estimation de suboptimalité. On a alors le théorème suivant [12] :

**Théorème 9.** (Condition suffisante de suboptimalité)
Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (1.8)-(1.10), avec $E_N \geq 0$ et $\varepsilon$ un nombre positif ou nul arbitraire. Si

$$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon, \tag{1.19}$$

alors la solution réalisable $x$ est $\varepsilon$-optimale.

**Preuve.**
En vertu de (1.18), on peut écrire

$$z(x^0) - z(x) \leq \beta(x, J_B) \leq \varepsilon.$$

La solution réalisable $x$ est donc $\varepsilon$-optimale.

### 1.3.5 Schéma de l'algorithme primal du support

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS et $\varepsilon$ un nombre arbitraire positif ou nul.

**Algorithme 1.**

1. Calculer $\pi^T = c_B^T A_B^{-1}$ et $E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T$;
2. Test d'optimalité de la SRS $\{x, J_B\}$ :
   (a) **Cas 1** : $E_N \geq 0$ :
   - Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B) = E_N^T x_N$ ;
   - Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{x, J_B\}$ une SRS optimale.
   - Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{x, J_B\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale.
   - Sinon aller à l'étape 3 ;

   (b) **Cas 2** : $E_N \ngeq 0$. Aller à l'étape 3 ;
3. Amélioration de la SRS $\{x, J_B\}$ :
   - Déterminer l'ensemble des indices non-optimaux :

   $$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0,\ x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0,\ x_j > 0\right] \right\};$$

   - Choisir l'indice $j_0$ tel que $\left|E_{j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left\{ \left|E_j\right| \right\}$ ;
   - Calculer la direction d'amélioration $d$ tel que :

   $$d_{j_0} = -\text{sign}(E_{j_0});\ d_j = 0, j \neq j_0,\ j \in J_N;\ d(J_B) = A_B^{-1} a_{j_0} \text{sign}(E_{j_0});$$

   - Calculer le pas de déplacement $\theta^0$ tel que $\theta^0 = \min\left\{\theta_{j_1}, \theta_{j_0}\right\}$, où

   $$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \left\{\theta_j\right\}, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{-x_j}{d_j}, & \text{si } \ d_j < 0; \\ \infty, & \text{si } \ d_j \geq 0; \end{cases}$$

et

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0}, & \text{si} \quad E_{j_0} > 0; \\ \infty, & \text{si} \quad E_{j_0} < 0; \end{cases}$$

- Si $\theta^0 = \infty$, alors le problème est non borné et l'algorithme s'arrête.
- Sinon calculer $\bar{x} = x + \theta^0 d$ et $\bar{z} = z + \theta^0 \left| E_{j_0} \right|$ ;

4. Test d'optimalité de la nouvelle SRS $\{\bar{x}, J_B\}$ :
   (a) **Cas 1** : $E_N \geq 0$ :
   - Calculer l'estimation de suboptimalité

   $$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0 E_{j_0};$$

   - Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\bar{x}, J_B\}$ une SRS optimale.
   - Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\bar{x}, J_B\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale.
   - Sinon aller à l'étape 5 ;

   (b) **Cas 2** : $E_N \ngeq 0$ : Aller à l'étape 5 ;
5. Changement du support $J_B$ en $\overline{J}_B$ :
   - Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors on pose $\overline{J}_B = J_B$;
   - Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors on pose $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ ;
6. Poser $\overline{J}_B = J_B$, $x = \bar{x}$ et aller à l'étape 1.

**Exemple 1.**
Résolvons par la méthode primale de support le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) = -x_1 + 2x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 5\}. \end{aligned}$$

**Solution**
Soit $x = (0,0,5,2,1)^T$ une solution réalisable de support initiale de ce problème et $z(x) = 0$ la valeur de la fonction objectif correspondante.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{3,4,5\},\ J_N = \{1,2\},\ c_B^T = (0,0,0),\ c_N^T = (-1,2),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul du vecteur des multiplicateurs et du vecteur des coûts réduits :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0,0),\ E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T = (1,-2).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on peut améliorer la SR $x$.
Amélioration de la SR $x$ :
Calcul des indices non-optimaux :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0,\ x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0,\ x_j > 0\right] \right\} = \{2\}.$$

Choisir l'indice $j_0$ avec la règle suivante :

$$\left|E_{j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|E_j\right| = \{2\} = |E_2| \Rightarrow j_0 = 2.$$

Calcul de la direction d'amélioration $d$ :

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_B = A_B^{-1} a_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :

$$\theta^0 = \min\left\{\theta_{j_1}, \theta_{j_0}\right\},\ \text{avec } \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

$$\theta_{j_0} = \theta_2 = \infty \text{ et } \theta_{j_1} = \min\left\{\tfrac{-5}{-1}, \tfrac{-2}{-1}, \tfrac{-1}{-1}\right\} = 1 = \theta_5.$$

On a alors

$$\theta^0 = \theta_5 = 1 \Rightarrow j_1 = 5.$$

Calcul de la nouvelle SR $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :

$$\bar{z} = z + \theta^0 \left|E_{j_0}\right| = 0 + |-2| = 2.$$

Changement du support $J_B$ en $\bar{J}_B$ :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = (\{3,4,5\} \setminus \{5\}) \cup \{2\} = \{3,4,2\},\ \bar{J}_N = \{1,5\}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{3,4,2\},\ J_N = \{1,5\},\ c_B^T = (0,0,2),\ c_N^T = (-1,0),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul du vecteur des multiplicateurs et du vecteur des coûts réduits :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0,2),\ E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T = (-1,2).$$

On a alors :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0,\ x_j = 0\right] \text{ou} \left[E_j \neq 0,\ x_j > 0\right] \right\} = \{1\}.$$

Choisir l'indice $j_0$ avec la règle suivante :

$$\left|E_{j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|E_j\right| = \{1\} = |E_1| \Rightarrow j_0 = 1.$$

Calcul de la direction d'amélioration $d$ :

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ d_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :

$$\theta_{j_0} = \theta_1 = \infty \text{ et } \theta_{j_1} = \min\left\{ \frac{-4}{-2}, \frac{-1}{-1}, \infty \right\} = 1 = \theta_4.$$

On a alors

$$\theta^0 = \theta_4 = 1 \Rightarrow j_1 = 4.$$

Calcul de la nouvelle solution réalisable $\overline{x}$ :

$$\overline{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :

$$\overline{z} = z + \theta^0 |E_1| = 2 + |-1| = 3.$$

Changement du support $J_B$ en $\overline{J}_B$ :

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = (\{3,4,2\} \setminus \{4\}) \cup \{1\} = \{3,1,2\},\ \overline{J}_N = \{4,5\}.$$

**Troisième itération :**

On a

$$J_B = \{3,1,2\},\ J_N = \{4,5\},\ c_B^T = (0,-1,2),\ c_N^T = (0,0),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul du vecteur des multiplicateurs et du vecteur des coûts réduits :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,1,1), \quad E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T = (1,1).$$

On a $E_N \geq 0$, alors on peut calculer l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Alors la solution $\bar{x} = (1,2,2,0,0)^T$ est optimale et la valeur de la fonction objectif en cette solution est $z(\bar{x}) = 3$.

## 1.4 Dualité

### 1.4.1 Introduction

La notion de dualité a été introduite par Von Neuman en 1947 [11], puis développée par Gale, Kuhn et Tuker en 1951 [11]. Les propriétés fondamentales des problèmes duals ont été définies par Goldman et Tuker en 1956 [11]. Nous commencerons par illustrer cette notion de dualité à l'aide d'un exemple, puis nous continuerons par l'étude des relations existantes entre le primal et le dual. Ensuite, nous évoquerons quelques propriétés fondamentales de la dualité.

### 1.4.2 Exemple d'un problème de programmation linéaire et son dual

Considérons l'exemple suivant [3] :

Bouzid a un chat "Klibo" qu'il veut nourrir au moindre coût. Le chat "Klibo" a besoin d'un minimum de 3 unités de protéines et de 2 unités de vitamines par jour. Sur le marché local, il existe deux catégories de pâté.

– Le pâté de régime qui coûte 15 dinars la boite contenant une unité de protéines et une de vitamines.
– Le pâté de luxe fournit deux unités de protéines et cinq de vitamines au prix de 50 dinars.

Le programme linéaire correspondant aux voeux de Bouzid peut être formulé de la manière suivante :

$$\begin{gathered} \min z(x) = 15x_1 + 50x_2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 + 5x_2 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2\}, \end{gathered}$$

où $x_1$ et $x_2$ désignent respectivement le nombre de boites de pâté de régime et de pâté de luxe.
La solution optimale de ce programme linéaire est $x = (3,0,0,1)^T$ où $x_3$ et $x_4$ sont des variables d'écarts et la valeur optimale de la fonction objectif est $z = 45$.
Désignons par $y_1$ et $y_2$ les prix respectifs d'une unité de protéine et de vitamine.
Supposons que le fabricant de pâté pour chats connaisse les besoins minimaux en protéines et vitamines de "Klibo" et les coûts de marché des deux types de nourriture. Le problème du fabricant est de déterminer les prix $y_1$ et $y_2$ de façon à maximiser sa recette compte tenu des coûts des deux pâtés.
Le programme linéaire qui en est dérivé est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \max\ \phi(y) = 3y_1 + 2y_2, \\ y_1 + y_2 \leq 15, \\ 2y_1 + 5y_2 \leq 50, \\ y_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\}. \end{aligned}$$

Connaissant les besoins minimaux du chat "Klibo" en éléments nutritifs, le fabricant va essayer de déterminer les prix $y_i$ de façon à maximiser sa recette. Étant donné que le pâté de régime contient une unité de protéine et une unité de vitamine, le prix total de ce type de nourriture, i.e. $y_1 + y_2$, ne doit pas dépasser 15 dinars. Le même raisonnement s'applique à la seconde contrainte. Enfin, les prix $y_i$ doivent être non négatifs. La solution optimale de ce programme linéaire est $y = (15,0,0,20)^T$ avec $\phi(y) = 45$.

**Remarque 2.**
Le dual et le primal d'un programme linéaire s'agissent du même problème vu sous des angles différents : celui de l'acheteur et celui du vendeur.

### 1.4.3 Relation entre le primal et le dual d'un programme linéaire

Nous avons vu qu'un problème de programmation linéaire pouvait se présenter sous deux formes différents : la forme canonique et la forme standard. Nous nous intéressons en premier lieu à la forme canonique d'un programme linéaire qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \max\ z = c^T x, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0, \end{aligned}$$

où $x$ et $c$ sont des $n$-vecteurs, $b$ un $m$-vecteur et $A$ une matrice de dimension $(m \times n)$. Le programme linéaire suivant est appelé dual ou problème dual du problème de programmation linéaire précédent :

$$\begin{aligned} \min\ \phi = b^T y, \\ A^T y \geq c, \\ y \geq 0, \end{aligned}$$

où $y$ est un $m$-vecteur. Le premier appelé le problème primal et le deuxième problème dual. Le problème typique consiste à poser le dual à partir du primal, il s'agit donc d'examiner les relations existantes entre le primal et son dual.
Afin de poser le dual à partir du primal, il faut tout d'abord que la maximisation devient une minimisation. Les variables ne sont plus les mêmes par conséquent, nous les notons non plus $x$ mais $y$. Les coefficients de ses nouvelles variables dans la fonction objectif à minimiser sont les seconds membres des contraintes du problème primal. A chaque contrainte du primal correspond une variable duale. Notons que la matrice des coefficients des contraintes se retrouve dans sa forme transposée pour le dual. Les nouveaux seconds membres des contraintes du dual sont les coefficients de la fonction objectif du problème primal. Il ne faut pas oublier de changer le sens des inégalités dans les contraintes.
Nous nous proposons d'effectuer la transformation d'un problème primal en dual en partant d'un exemple.

**Exemple 2.**
Soit le programme linéaire suivant, considéré comme étant le primal :

$$\begin{gathered}\max\ z(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3,\\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 7,\\ 3x_1 - x_3 \leq 6,\\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,2,3\}.\end{gathered}$$

Nous obtenons le dual correspondant :

$$\begin{gathered}\min\ \phi(y) = 7y_1 + 6y_2,\\ y_1 + 3y_2 \geq 2,\\ 3y_1 \geq 5,\\ 2y_1 - y_2 \geq 4,\\ y_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\}.\end{gathered}$$

Nous voyons que la maximisation est devenue une minimisation, et on tenant compte des modifications suivantes : les deux contraintes du primal deviennent les deux variables du dual et à chacune des trois variables du primal correspond une contrainte duale. La matrice des coefficients des contraintes du primal, c'est à dire :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

devient pour le dual :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur second membre des contraintes $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ devient le vecteur des coefficients de la fonction objectif du dual $b^T = (7,6)$.

Quand au vecteur des coefficients $c^T = (2,4,5)$, il se transforme en vecteur second membres des contraintes du dual $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant étudier comment trouver le dual d'un problème énoncé sous sa forme standard :

$$\begin{aligned} \max\ z = c^T x, & \\ Ax = b, & \qquad \text{(PLS)} \\ x \geq 0. & \end{aligned}$$

Le problème dual associé à ce problème est le suivant :

$$\begin{aligned} \min\ \phi = b^T y, & \\ A^T y \geq c, & \qquad \text{(PLD)} \\ y \in \mathbb{R}^m. & \end{aligned}$$

Cela signifie que les contraintes d'égalité dans le primal conduisent à des variables sans restriction de signe dans le dual. Les variables sans restriction de signe dans le primal conduisent à des contraintes d'égalité dans le dual.
Les différentes relations existantes entre le primal et le dual d'un problème de programmation linéaire sont résumées dans le tableau suivant :

| Primal | Dual |
|---|---|
| maximisation | minimisation |
| contrainte $\leq$ | variable $y_i \geq 0$ |
| contrainte $=$ | variables sans restriction de signe |
| variable $x_j \leq 0$ | contrainte $\leq$ |
| variables sans restriction de signe | contrainte $=$ |

Tableau 1 : Relations entre primal et dual.

### 1.4.4 Propriétés fondamentales de la dualité

Dans ce paragraphe nous allons voir les relations qui existent entre les solutions du problème primal et celles du problème dual.

**Théorème 10.** [11]
Considérons un problème primal sous forme standard (PLS) et son dual (PLD). Si $x$ et $y$ sont respectivement des solutions réalisables du primal et du dual, alors :

$$c^T x \leq b^T y.$$

**Preuve.**
Nous avons pour le primal $Ax = b$, car $x$ est réalisable. Nous allons multiplier cette inégalité par $y^T$, on aura :

$$y^T Ax = y^T b \Leftrightarrow y^T Ax = b^T y.$$

D'autre part, nous avons pour le dual $A^T y \geq c$, puisque $y$ est une solution réalisable. Nous pouvons transposer cette inégalité en :

$$y^T A \geq c^T.$$

Nous multiplions par $x$ l'inégalité précédente, nous obtenons

$$y^T Ax \geq c^T x.$$

De $y^T Ax = b^T y$ et $y^T Ax \geq c^T x$, nous déduisons que $c^T x \leq b^T y$.

**Théorème 11.** [11]
Si $x$ et $y$ sont respectivement les solutions réalisables d'un problème primal sous forme standard (PLS) et de son dual (PLD) et si $c^T x = b^T y$, alors $x$ et $y$ sont des solutions optimales pour le primal et le dual respectivement.

**Preuve.**
Soient $x$ et $y$ les solutions réalisables du problème primal (PLS) et de son dual (PLD) respectivement. Soit $\bar{x}$ une autre solution réalisable du primal, alors avec l'application du théorème 10, nous avons :

$$c^T \bar{x} \leq b^T y = c^T x.$$

Puisque le primal est un problème de maximisation, $x$ est une solution optimale.
Un raisonnement analogue montre que $y$ est une solution optimale au problème dual.

Les deux théorèmes suivants sont énoncées par Gale, Kuhn et Tuker [11] :

**Théorème 12.** [11]
Une solution réalisable du primal $x$ est optimale si et seulement s'il existe une solution réalisable du dual $y$ pour laquelle $c^T x = b^T y$.

**Théorème 13.** [11]
- Un programme linéaire possède une solution optimale finie si et seulement si lui et son dual possèdent des solutions réalisables.
- Si le problème primal possède une solution optimale infinie, alors le dual n'a pas de solutions réalisables.
- Si le dual ne possède pas de solutions réalisables alors que le primal en possède, alors la solution du primal est une solution optimale infinie.

# Chapitre 2

# Méthode duale de support

## 2.1 Introduction

La méthode duale de support est une méthode qui exploite les relations existantes entre le primal et le dual ainsi que les propriétés fondamentales de la dualité afin d'obtenir la solution optimale d'un problème de programmation linéaire. Une itération de cette méthode consiste à commencer par une solution duale réalisable de support initiale $\{y,\ J_B\}$ ; calculer la co-solution réalisable $\{\delta, J_B\}$ et la pseudo-solution associée $\kappa$, puis grâce au critère d'optimalité, elle permet de tester l'optimalité de la co-solution courante. Si cette co-solution n'est pas optimale, on passe à une nouvelle co-solution réalisable meilleure $\left\{\overline{\delta}, \overline{J}_B\right\}$, et ce, en suivant une direction duale $t$ avec un pas de déplacement $\sigma^0$. Ce processus est répété jusqu'à l'obtention d'une co-solution optimale pour le dual, la pseudo-solution associée est alors optimale pour le problème primal.

### 2.1.1 Le problème dual d'un PL sous forme standard

Considérons le problème de programmation linéaire à variables non-negatives qui se présente sous la forme standard suivante :

$$\max\ z = c^T x, \tag{2.1}$$

$$Ax = b, \tag{2.2}$$

$$x \geq 0, \tag{2.3}$$

où $c$ et $x$ sont des $n$-vecteurs, $b$ un $m$-vecteur, $A$ est une matrice de dimension $(m \times n)$ avec $rang(A) = m < n$.

Le problème dual associé au problème (2.1)-(2.3) est donné par :

$$\min\ \phi(y) = b^T y, \tag{2.4}$$

$$A^T y - c - \delta = 0, \tag{2.5}$$

$$\delta \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.6}$$

### 2.1.2 Définitions

- Considérons le problème de programmation linéaire (2.1)-(2.3) et soit $\{x,\ J_B\}$ une SRS initiale de ce problème. Le vecteur des multiplicateurs $\pi$, le vecteur des coûts réduits $E$ sont définis par les relations :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1},$$

$$E^T = \pi^T A - c^T,\ E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T,\ E_B^T = 0.$$

  Pour $E_N \geq 0$, l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$ est donnée par :

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j.$$

- Un $m$-vecteur $y$ est appelé solution réalisable duale s'il vérifie les contrainte du problème (2.4)-(2.6).
- Si $y$ est une solution réalisable duale, alors le $n$-vecteur $\delta = A^T y - c$ est dit co-solution réalisable correspondant à cette solution.
- D'autre part, le couple $\{y,\ J_B\}$, formé d'une solution réalisable duale et d'un support $J_B$ est appelé solution réalisable duale de support du problème (2.4)-(2.6). Le couple $\{\delta,\ J_B\}$ est alors appelé co-solution réalisable de support.
- Une co-solution réalisable de support $\{\delta, J_B\}$ est dite non-dégénérée si

$$\delta_j > 0,\ \forall j \in J_N = J \setminus J_B.$$

- En outre, une solution réalisable duale $y^0$ est dite solution duale optimale si elle réalise le minimum de la fonction objectif du problème (2.4)-(2.6). Le vecteur $\delta^0 = A^T y^0 - c$ est alors dit co-solution optimale.
- Enfin, définissons la notion de pseudo-solution réalisable de support du problème (2.1)-(2.3). Soit donc $\{\delta,\ J_B\}$ une co-solution réalisable de support du problème dual (2.4)-(2.6) et considérons le $n$-vecteur $\kappa = (\kappa_B, \kappa_N)$ défini par :

$$\kappa_j = 0,\ j \in J_N \text{ et } \kappa(J_B) = A_B^{-1} b.$$

  Une pseudo-solution réalisable de support du problème (2.1)-(2.3) sera donc le couple $\{\kappa,\ J_B\}$ tel que $A\kappa = b$ et dont les composantes $\kappa_j, j \in J_N$ sont nulles.

## 2.2 Accroissement de la fonction duale et critère d'optimalité

### 2.2.1 Accroissement de la fonction duale

Soit $\{\delta,\ J_B\}$ une co-solution réalisable de support correspondant à la solution réalisable duale de support $\{y,\ J_B\}$. Considérons une autre solution réalisable duale $\overline{y}$ et la co-solution réalisable associée $\overline{\delta}$, telles que :

$$\overline{\delta} = A^T\overline{y} - c,$$
$$\overline{y} = y + \Delta y,$$
$$\overline{\delta} = \delta + \Delta\delta.$$

Posons $\Delta y = s$ et $\Delta\delta = t$ et calculons l'accroissement de la fonction objectif duale :

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = b^T\overline{y} - b^Ty = b^T(\overline{y} - y) = b^T\Delta y = b^Ts = s^Tb.$$

Comme on a

$$\delta = A^Ty - c,$$
$$\overline{\delta} = A^T\overline{y} - c,$$

alors

$$t = \Delta\delta = \overline{\delta} - \delta = A^T(\overline{y} - y) = A^T\Delta y = A^Ts \Rightarrow t^T = s^TA.$$

On déduit que

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = s^Tb = s^TA\kappa = t^T\kappa = \sum_{j\in J} t_j\kappa_j.$$

Comme la pseudo-solution réalisable $\kappa$ vérifie $\kappa_j = 0,\ j \in J_N$, nous obtenons :

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = \sum_{j\in J_B} t_j\kappa_j. \tag{2.7}$$

Afin de tester l'optimalité d'une co-solution réalisable de support $\{\delta,\ J_B\}$, nous allons démontrer le théorème suivant :

### 2.2.2 Critère d'optimalité

**Théorème 14.** (Critère d'optimalité)
Soit $\{\delta,\ J_B\}$ une co-solution réalisable de support pour le problème (2.4)-(2.6) et $\kappa$ la pseudo-solution réalisable associée. On a alors les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \kappa_j = 0, & \text{si } \delta_j > 0; \\ \kappa_j \geq 0, & \text{si } \delta_j = 0; \end{array}\right. \quad j \in J_B \tag{2.8}$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la co-solution réalisable de support $\{\delta,\ J_B\}$. Elles sont aussi nécessaires dans le cas où $\{\delta,\ J_B\}$ est non-dégénérée. La pseudo-solution $\kappa$

correspondant à la co-solution optimale $\{\delta,\, J_B\}$ est alors une solution optimale du problème primal (2.1)-(2.3).

**Preuve.**
**Condition suffisante.**
Soit $\{\delta,\, J_B\}$ une co-solution réalisable vérifiant le critère d'optimalité et soit $\overline{\delta}$ une autre co-solution réalisable quelconque. En vertu de la formule d'accroissement de la fonction duale, nous avons :

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = \sum_{j \in J_B} t_j \kappa_j.$$

Grâce au critère d'optimalité, on aura :

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = \sum_{j \in J_B, \delta_j = 0} \overline{\delta}_j \kappa_j. \;\; (\delta_j = 0 \Rightarrow \overline{\delta}_j = \delta_j + t_j = t_j).$$

Comme $\overline{\delta}_j \geq 0$ ($\overline{\delta}$ est une co-solution réalisable) et $\kappa_j \geq 0$, $\forall j \in J_B$ ($\kappa$ vérifie les relations d'optimalité (2.8)), on aura

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) \geq 0 \Rightarrow \phi(\overline{y}) \geq \phi(y).$$

La solution duale réalisable $y$ et sa co-solution réalisable correspondante $\delta$ sont donc optimales pour le problème dual.
Montrons ensuite que la pseudo-solution $\kappa$ vérifiant le critère d'optimalité (2.8) est une solution réalisable optimale du problème primal (2.1)-(2.3). On a $A\kappa = b$ et $\kappa \geq 0$, donc la pseudo-solution $\kappa$ est réalisable. De plus,

$$z(\kappa) = c^T \kappa = (y^T A - \delta^T)\kappa = y^T b - \delta^T \kappa.$$

Comme $\delta$ et $\kappa$ vérifient le critère d'optimalité (2.8), on a

$$\delta^T \kappa = \sum_{j \in J_B} \delta_j \kappa_j = 0.$$

On déduit alors que

$$z(\kappa) = c^T \kappa = y^T b = \phi(y).$$

Les valeurs des fonctions primales et duales sont donc égales et d'après le théorème de la dualité (Théorème 11), le vecteur $\kappa$ est par conséquent une solution optimale pour le problème primal (2.1)-(2.3).
**Condition nécessaire.**
Soit $\{\delta,\, J_B\}$ une co-solution réalisable non-dégénérée et supposons que le critère d'optimalité (2.8) n'est pas vérifié, alors il existe un indice $j_1 \in J_B$ tel que :

$$\left[\delta_{j_1} > 0 \text{ et } \kappa_{j_1} \neq 0\right] \text{ ou } \left[\delta_{j_1} = 0 \text{ et } \kappa_{j_1} < 0\right].$$

Soit $j_1 \in J_B$ tel que $\delta_{j_1} > 0$ et $\kappa_{j_1} \neq 0$, on construit alors une solution duale $\overline{y}$ et sa co-solution correspondante $\overline{\delta}$ de la manière suivante :

$$\overline{y} = y + \sigma^0 s,\ \overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t.$$

On pose

$$\Delta\delta_{j_1} = t_{j_1} = -\mathrm{sign}(\kappa_{j_1}),$$
$$\Delta\delta_j = t_j = 0, j \neq j_1, j \in J_B.$$

Le pas $\sigma^0$ est choisi de telle sorte que la co-solution $\overline{\delta}$ soit réalisable :

$$\sigma^0 = \min\left\{\sigma_{j_1},\ \sigma_{j_0}\right\},$$

où

$$\sigma_{j_1} = \begin{cases} \delta_{j_1}, & \text{si } \kappa_{j_1} > 0 \text{ et } \delta_{j_1} > 0; \\ \infty, & \text{sinon;} \end{cases}$$

et

$$\sigma_{j_0} = \min_{j \in J_N}\left\{\sigma_j\right\},\ \text{avec}\ \sigma_j = \begin{cases} -\delta_j/t_j, & \text{si} \quad t_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad t_j \geq 0. \end{cases}$$

En utilisant l'accroissement de la fonction duale, nous obtenons :

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = \sigma^0 t^T \kappa = \sigma^0 \sum_{j \in J_B} t_j \kappa_j.$$

On a alors

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = -\sigma^0 \left|\kappa_{j_1}\right|.$$

Comme $\sigma^0 > 0$ (hypothèse de non-dégénérescence de $\delta$) et $\kappa_{j_1} \neq 0$, on déduit que

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) < 0 \Rightarrow \phi(\overline{y}) < \phi(y).$$

Cette dernière inégalité contredit l'optimalité de la solution duale $y$, ce qui achève la démonstration.
Le cas où $j_1 \in J_B$ vérifie $\delta_{j_1} = 0$ et $\kappa_{j_1} < 0$ peut être traité de la même manière que le cas précédent.

## 2.3 Algorithme de résolution

L'algorithme dual de support commence par une solution réalisable duale $y$ et un support $J_B$. Nous calculons la co-solution réalisable de support correspondante $\{\delta,\ J_B\}$ et la pseudo-solution $\kappa$, puis nous vérifions l'optimalité de cette pseudo-solution : d'abord nous calculons l'ensemble des indices basiques non-optimaux :

$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B :\ \left[\delta_j > 0 \text{ et } \kappa_j \neq 0\right] \text{ ou } \left[\delta_j = 0 \text{ et } \kappa_j < 0\right] \right\}.$$

- Si $J_{BNO} = \emptyset$, alors l'algorithme s'arrête avec $\kappa$ une solution réalisable optimale.
- Sinon nous construirons une autre co-solution réalisable $\overline{\delta}$ meilleure.
Une itération de l'algorithme consiste donc à faire le passage de $\{\delta,\, J_B\}$ vers $\left\{\overline{\delta}, \overline{J}_B\right\}$.
On construit la nouvelle co-solution $\overline{\delta}$ de la manière suivante :

$$\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t, \;\; \sigma^0 \geq 0,$$

où $t$ est un $n$-vecteur appelé direction duale et $\sigma^0$ est le pas le long de cette direction. Pour que l'accroissement dual soit maximal, il faut prendre $\sigma^0$ aussi grand que possible et choisir l'indice $j_0$ tel que :

$$\left|\kappa_{j_1}\right| = \max_{j \in J_{BNO}} \left|\kappa_j\right|.$$

On posera donc :

$$t_{j_1} = -\mathrm{sign}(\kappa_{j_1}); \;\; t_j = 0, j \neq j_1,\, j \in J_B; \;\; t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N.$$

D'autre part, le pas $\sigma^0$ doit vérifier les relations suivants :

$$\begin{aligned} &\sigma^0 \mathrm{sign}(\kappa_{j_1}) \leq \delta_{j_1}; \\ &-\sigma^0 t_j \leq \delta_j, \; j \in J_N. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En calculant les différentes valeurs que peut prendre le pas $\sigma^0$ dans les relations (2.9), on aura :

$$\sigma_{j_1} = \begin{cases} \delta_{j_1}, & \text{si } \kappa_{j_1} > 0 \text{ et } \delta_{j_1} > 0; \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre $\sigma_{j_0}$ est calculé de la manière suivante : $\sigma_{j_0} = \min\limits_{j \in J_N} \left\{\sigma_j\right\}$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / t_j, & \text{si} \quad t_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad t_j \geq 0. \end{cases}$$

Par conséquent, le pas maximal $\sigma_0$ le long de la direction $t$ est égal à :

$$\sigma^0 = \min\left\{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_0}\right\}.$$

Alors la nouvelle co-solution réalisable s'écrit :

$$\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t.$$

Après nous passons au changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$.
- Si $\sigma^0 = \infty$, alors le problème dual est non borné et d'après la théorie de la dualité, l'ensemble des solutions réalisables du problème primal (2.1)-(2.3) est vide.
- Si $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$, alors on pose $J_B = \overline{J}_B$.

- Si $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, alors on pose $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$.
- Calculer $\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t$ et $\overline{\phi} = \phi(\overline{y}) = \phi(y) - \sigma^0 |\kappa_{j_1}|$.

Puis, on recommencera une nouvelle itération avec la nouvelle co-solution de support $\left\{\overline{\delta},\, \overline{J}_B\right\}$.

## 2.4 Schéma de l'algorithme dual de support

Soient $J_B$ un support initial du problème (2.1)-(2.3), $y$ une solution réalisable duale, $\delta = A^T y - c$ la co-solution réalisable correspondante et $\phi = \phi(y)$ la valeur de la fonction objectif duale en $y$. Le schéma de l'algorithme dual de support est décrit comme suit :

**Algorithme 2.**

1. Calculer la pseudo-solution $\kappa$ associée à la co-solution réalisable $\delta$, en utilisant les relations :
$$\kappa_j = 0,\ j \in J_N \text{ et } \kappa(J_B) = A_B^{-1} b;$$
2. Tester l'optimalité de la pseudo-solution de support $\{\kappa,\, J_B\}$ :
- Déterminer l'ensemble des indices basiques non-optimaux :
$$J_{BNO} = \left\{j \in J_B :\ \delta_j > 0 \text{ et } \kappa_j \neq 0\right\} \cup \left\{j \in J_B :\ \delta_j = 0 \text{ et } \kappa_j < 0\right\};$$
- Si $J_{BNO} = \emptyset$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\kappa,\, J_B\}$ une SRS optimale pour le problème primal (2.1)-(2.3).
- Sinon, choisir l'indice $j_1$ tel que :
$$\left|\kappa_{j_1}\right| = \max_{j \in J_{BNO}} \left|\kappa_j\right|;$$
- Calculer la direction $t = (t_B, t_N)$ en utilisant les relations suivantes :
$$t_{j_1} = -\text{sign}(\kappa_{j_1});\ t_j = 0,\ j \neq j_1, j \in J_B;\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N;$$
- Calculer le nombre $\sigma_{j_1}$ :
$$\sigma_{j_1} = \begin{cases} \delta_{j_1}, & \text{si } \kappa_{j_1} > 0 \text{ et } \delta_{j_1} > 0; \\ \infty, & \text{sinon;} \end{cases}$$
- Calculer $\sigma_{j_0} = \min\limits_{j \in J_N} \sigma_j$, avec :
$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / t_j, & \text{si} \quad t_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad t_j \geq 0; \end{cases}$$
- Calculer le pas le long de la direction duale : $\sigma^0 = \min\left\{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_0}\right\}$;
3. Changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$ ;
- Si $\sigma^0 = \infty$, alors le problème dual est non borné et d'après la théorie de la dualité, l'ensemble des solutions réalisables du problème primal (2.1)-(2.3) est vide.
- Si $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$, alors on pose $J_B = \overline{J}_B$ ;
- Si $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, alors on pose $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$;
- Calculer $\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t$ et $\overline{\phi} = \phi - \sigma^0 |\kappa_{j_1}|$;

4. Poser $\delta = \overline{\delta}$, $\phi = \overline{\phi}$, $J_B = \overline{J}_B$ et aller à l'étape 1.

**Exemple 3.**
Résolvons par la méthode duale de support le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_2 + x_4 &= 2, \\ x_j &\geq 0, \forall j \in \{1, ..., 4\}. \end{aligned}$$

**Solution**
D'abord on forme le problème dual associé à ce problème :

$$\begin{aligned} \min\ \phi(y) &= 3y_1 + 2y_2, \\ y_1 &\geq 1, \\ y_1 + y_2 &\geq 1, \\ y_1 &\geq -1, \\ y_2 &\geq -1, \\ y_i &\in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

**Première itération**
On a

$$J_B = \{1, 2\},\ J_N = \{3, 4\},$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Choisissons une solution réalisable du problème dual : $y^T = (1, 1)$. La valeur de la fonction objectif duale en $y$ est $\phi = \phi(y) = 5$.
**Calcul de la co-solution réalisable $\delta$ :**

$$\delta = A^T y - c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ associée à la co-solution $\delta$ :**

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_B \\ \kappa_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Test d'optimalité de la pseudo-solution $\kappa$ :**
Calculons d'abord l'ensemble des indices basiques non-optimaux :

$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B : \left[\delta_j > 0 \text{ et } \kappa_j \neq 0\right] \text{ ou } \left[\delta_j = 0 \text{ et } \kappa_j < 0\right] \right\} = \{2\} \neq \emptyset.$$

Alors la pseudo-solution $\kappa$ n'est pas optimale.
**Le choix de l'indice $j_1$ :**

$$|\kappa_{j_1}| = \max_{j \in J_{BNO}} \left\{ \left|\kappa_j\right| \right\} = |\kappa_2| = 2 \Rightarrow j_1 = 2.$$

**Calcul de la direction duale $t$ :**

$$t_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t_N^T = \; t_B^T A_B^{-1} A_N \; = (0, -1), \; t = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas dual $\sigma^0$ le long de la direction $t$ :**
On a $\sigma^0 = \min\left\{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_0}\right\}$, où

$$\sigma_{j_1} = \sigma_2 = 1, \; \sigma_{j_0} = \min\{\sigma_3, \sigma_4\} = \left\{\infty, \frac{-2}{-1}\right\} = 2 = \sigma_4 \Rightarrow \sigma^0 = \sigma_{j_1} = 1.$$

**Changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$ :**

$$\overline{J}_B = J_B, \; \overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de $\overline{\phi}$ :**

$$\overline{\phi} = \phi - \sigma^0 |\kappa_{j_1}| = 5 - 1.(2) = 3.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{1,2\}, \; J_N = \{3,4\},$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des indices basiques non-optimaux est $J_{BNO} = \emptyset$. Par conséquent, la pseudo-solution $\{\kappa, J_B\}$ est optimale, avec $z(\kappa) = 3$.

**Exemple 4.**
Résolvons par la méthode duale de support le problème suivant :

$$\begin{gathered}\max\ z(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4,\\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2,\\ -7x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,\\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,4\}.\end{gathered}$$

**Solution.**
D'abord on forme le problème dual associé à ce problème :

$$\begin{gathered}\min\ \phi(y) = 2y_1 + 2y_2,\\ y_1 - 7y_2 \geq 2,\\ -y_1 + y_2 \geq -3,\\ 3y_1 + 2y_2 \geq -1,\\ 2y_1 + 3y_2 \geq 1,\\ y_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2\}.\end{gathered}$$

**Première itération :**
On a

$$J_B = \{1,2\}\,,\ J_N = \{3,4\}\,,\ c_B^T = (2,-3),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ -7/6 & -1/6 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nous choisissons comme solution réalisable du problème dual le vecteur

$$y^T = c_B^T A_B^{-1} = (19/6, 1/6).$$

La valeur de la fonction objectif du problème dual en cette solution est $\phi = \phi(y) = 40/6$.
**Calcul de la co-solution réalisable $\delta$ :**

$$\delta = A^T y - c = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 65/6 \\ 35/6 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ associée à la co-solution $\delta$ :**

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_B \\ \kappa_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de l'ensemble des indices basiques non-optimaux :**

$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B : \left[\delta_j > 0 \text{ et } \kappa_j \neq 0\right] \text{ ou } \left[\delta_j = 0 \text{ et } \kappa_j < 0\right] \right\} = \{1,2\} \neq \emptyset.$$

Alors la pseudo-solution $\kappa$ n'est pas optimale.
**Le choix de l'indice $j_1$ :**

$$\kappa_{j_1} = \max_{j \in J_{BNO}} \left\{ \left|\kappa_j\right| \right\} = \max\{2/3,\ 8/3\} = 8/3 = \kappa_2 \Rightarrow j_1 = 2.$$

**Calcul de la direction duale $t$ :**

$$t_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t_N = \begin{pmatrix} -23/6 \\ -17/6 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -23/6 \\ -17/6 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas dual $\sigma^0$ le long de la direction $t$** :
On a $\sigma^0 = \min\left\{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_0}\right\}$, où

$$\sigma_{j_1} = \sigma_2 = \infty;\ \sigma_{j_0} = \min\{\sigma_3, \sigma_4\} = \left\{\tfrac{-65/6}{-23/6}, \tfrac{-35/6}{-17/6}\right\} = 35/17 = \sigma_4 \Rightarrow j_0 = 4.$$

D'où

$$\sigma^0 = 35/17 = \sigma_4.$$

**Changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$ :**

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{1,4\} \text{ et } \overline{J}_N = \{3,2\},\ \overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t = \begin{pmatrix} 0 \\ 35/17 \\ 50/17 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de $\overline{\phi}$ :**

$$\overline{\phi} = \phi - \sigma^0 |\kappa_{j_1}| = 40/6 - (35/17)(16/6) = 20/17.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{1,4\},\ J_N = \{3,2\},$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/17 & -2/17 \\ 7/17 & 1/17 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 35/17 \\ 50/17 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa_B = \begin{pmatrix} 2/17 \\ 16/17 \end{pmatrix},\ \kappa_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \kappa = \begin{pmatrix} 2/17 \\ 0 \\ 0 \\ 16/17 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de l'ensemble des indices basiques non-optimaux :**
On a $J_{BNO} = \emptyset$, alors la pseudo-solution $\{\kappa, J_B\}$ est optimale, avec $z(\kappa) = 20/17$.

**Remarque 3.**
Dans le cas où $y$ est une solution duale réalisable basique, i.e.,

$$y^T = c_B^T A_B^{-1} \text{ et } \delta = E = A^T y - c \geq 0.$$

On a $\delta_j = E_j = 0, \forall j \in J_B$. Par conséquent,

1. la condition suffisance d'optimalité du couple $(\kappa, y)$ devient :
$$\kappa_j \geq 0, \forall j \in J_B;$$
2. l'ensemble des indices basique non-optimaux devient :
$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B :\ [\delta_j > 0 \text{ et } \kappa_j \neq 0] \text{ ou } [\delta_j = 0 \text{ et } \kappa_j < 0] \right\} = \left\{ j \in J_B,\ \kappa_j < 0 \right\};$$
3. le pas dual $\sigma^0$ devient :
$$\sigma^0 = \min_{j \in J_N} \{\sigma_j\} \text{ car } \sigma_{j_1} = \infty.$$

On retombe alors sur la méthode duale du simplexe. C'est pourquoi la méthode duale de support est considérée comme étant une généralisation de la méthode duale du simplexe.

## 2.5 Schéma de l'algorithme dual du simplexe

Soient $J_B$ un support initial du problème primal (2.1)-(2.3), $y = c_B^T A_B^{-1}$ la solution duale réalisable basique, avec $\delta = A^T y - c \geq 0$ et $\phi = \phi(y)$ . Grâce à la remarque précédente, nous déduisons les différentes étapes de l'algorithme dual du simplexe :

**Algorithme 3.**

1. Calculer la pseudo-solution $\kappa$ associée à la co-solution réalisable $\delta$ en utilisant les relations :
$$\kappa_j = 0,\ j \in J_N \text{ et } \kappa_B = \kappa(J_B) = A_B^{-1} b;$$
2. Test d'optimalité de la pseudo-solution $\kappa$ :
- Déterminer l'ensemble des indices basiques non-optimaux :
$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B,\ \kappa_j < 0 \right\};$$
- Si $J_{BNO} = \emptyset$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\kappa, J_B\}$ une solution de base réalisable (SBR) optimale pour le problème primal (2.1)-(2.3).
- Sinon, aller à l'étape (3) pour améliorer la solution courante ;
3. Choisir l'indice $j_1$, tel que :

$$|\kappa_{j_1}| = \max_{j \in J_{BNO}} |\kappa_j| ;$$

4. Calculer la direction $t = (t_B, t_N)$ en utilisant les relations suivantes :

$$t_{j_1} = -\text{sign}(\kappa_{j_1});\ t_j = 0,\ j \neq j_1,\ j \in J_B;\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N;$$

5. Calculer le pas dual $\sigma^0$ le long de la direction $t$ : $\sigma^0 = \min\limits_{j \in J_N} \sigma_j$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / t_j, & \text{si} \quad t_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad t_j \geq 0; \end{cases}$$

6. Changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$ ;
   - Si $\sigma^0 = \infty$, alors le problème dual est non borné et d'après la théorie de la dualité, l'ensemble des solutions réalisables du problème primal est vide.
   - Si $\sigma^0 < \infty$, alors $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ ;
   - Calculer $\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t$ et $\overline{\phi} = \phi - \sigma^0 |\kappa_{j_1}|$;
7. Poser $\delta = \overline{\delta},\ \phi = \overline{\phi},\ J_B = \overline{J}_B$, puis aller à l'étape 1.

**Exemple 5.**
Résolvons par la méthode duale du simplexe le problème suivant :

$$\begin{gathered} \max\ z(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_6 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_7 = 3, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 7\}. \end{gathered}$$

**Solution.**
**Première itération :**
Commençons par

$$J_B = \{4,5,6,7\},\ J_N = \{1,2,3\},\ c_B^T = (0,0,0,0),$$

$$y^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0,0,0) \text{ et } \delta = A^T y - c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa_N = 0,\ \kappa_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix},\ \kappa = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de l'ensemble des indices basiques non-optimaux :**

$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B,\ \kappa_j < 0 \right\} = \{4,5,6,7\}.$$

**Choix de l'indice $j_1$ :**

$$\left|\kappa_{j_1}\right| = \max_{j \in J_{BNO}} \left|\kappa_j\right| = 6 = |\kappa_6| \Rightarrow j_1 = 6.$$

**Calcul de la direction duale $t$ :**

$$t_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N = (-1,-1,2),\ t = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas dual $\sigma^0$ :**

$$\sigma^0 = \min_{j \in J_N} \left\{ \sigma_j \right\} = \min \left\{ \tfrac{-1}{-1}, \tfrac{-2}{-1}, \infty \right\} = 1 = \sigma_1 \Rightarrow j_0 = 1.$$

**Changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$ :**

On a

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{4,5,1,7\}, \overline{J}_N = \{6,2,3\},$$

$$\overline{\delta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{\phi} = 0 - 1 \cdot |6| = -6.$$

**Deuxième itération :**

On a

$$J_B = \{4,5,1,7\}, J_N = \{6,2,3\},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \phi = -6.$$

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa_B = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \kappa_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \kappa = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de l'ensemble des indices basiques non-optimaux :**

$$J_{BNO} = \left\{ j \in J_B, \ \kappa_j < 0 \right\} = \{5\}.$$

**Choix de l'indice $j_1$ :**

$$\left| \kappa_{j_1} \right| = |\kappa_5| = 9 \Rightarrow j_1 = 5.$$

**Calcul de la direction $t$ :**

$$t_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N = (1, -2, -2), \ t = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas dual $\sigma^0$ :**

$$\sigma^0 = 1/2 = \sigma_2 \Rightarrow j_0 = 2.$$

**Changement de la co-solution $\delta$ et du support $J_B$ :** On a

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{4, 2, 1, 7\}, \ \overline{J}_N = \{6, 5, 3\},$$

$$\overline{\delta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1/2) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{\phi} = -6 - (1/2) \cdot |9| = -21/2.$$

**Troisième itération :**
On a
$$J_B = \{4,2,1,5\},\ J_N = \{6,5,3\},\ \delta = (0,0,4,0,1/2,1,0)^T.$$

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 9/2 \\ 3/2 \\ 9/2 \end{pmatrix},\ \kappa_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \kappa = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/2 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 9/2 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des indices basiques non-optimaux est $J_{BNO} = \emptyset$. Par conséquent, la pseudo-solution $\kappa = (3/2, 9/2, 0, 10, 0, 0, 9/2)^T$ est optimale, avec $z(\kappa) = -21/2$.

## 2.6 Algorithme dual de support sous forme de tableaux

Par analogie avec la méthode des tableaux du simplexe, nous présentons ici la méthode duale de support sous forme de tableaux. Un tableau de la méthode duale de support doit contenir les données suivantes :

1. la matrice des contraintes du problème $A$ ;
2. le vecteur des coefficients de la fonction objectif $c$ ;
3. le vecteur des seconds membres $b$ ;
4. le support $J_B$ ;
5. le pseudo-solution $\kappa$ ;
6. la direction duale $t$ et le pas dual $\sigma^0$.

Considérons le problème de programmation linéaire écrit sous la forme suivante :

$$\max\ z = c_B^T x_B + c_N^T x_N,$$
$$I_m x_B + A_N x_N = b,$$
$$x \geq 0,$$

où

$$b \in \mathbb{R}^m,\ J_B = \{1,2,...,m\},\ J_N = \{m+1, m+2, ..., n\},$$

$$A_B = A(I, J_B) = I_m,\ A_N = A(I, J_N),\ A = (A_B, A_N).$$

La matrice $I_m$ désigne la matrice identité d'ordre $m$.
Soit $\{\kappa, J_B\}$ une pseudo-solution de support pour notre problème. Le premier tableau de la méthode de support aura alors la forme suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta$ | $\delta_1 \cdots\cdots\cdots \delta_m$ | $\delta_{m+1} \cdots\cdots\cdots \delta_n$ | |
| | | $t$ | $t_1 \cdots\cdots\cdots t_m$ | $t_{m+1} \cdots\cdots\cdots t_n$ | |
| $J_B$ | $\delta_B$ | $\kappa_B$ | $a_1 \cdots\cdots\cdots a_m$ | $a_{m+1} \cdots\cdots\cdots a_n$ | $b$ |
| 1 | $\delta_1$ | $\kappa_1$ | | | $b_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $A_B = A(I, J_B) = I_m$ | $A_N = A(I, J_N)$ | $\vdots$ |
| $m$ | $\delta_m$ | $\kappa_m$ | | | $b_m$ |
| | | $z(\kappa)$ | $\sigma_1 \cdots\cdots\cdots \sigma_m$ | $\sigma_{m+1} \cdots\cdots\cdots \sigma_n$ | $\sigma^0$ |

On calcule :

$$|\kappa_{j_1}| = \max_{j \in J_{BNO}} |\kappa_j|;$$

$$J_{BNO} = \{j \in J_B : \ \delta_j > 0 \text{ et } \kappa_j \neq 0\} \cup \{j \in J_B : \ \delta_j = 0 \text{ et } \kappa_j < 0\};$$

$$t_{j_1} = -\text{sign}(\kappa_{j_1}); \ t_j = 0, \ j \neq j_1, \ j \in J_B;$$

$$t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N = t_B^T A_N = -\text{sign}(\kappa_{j_1}) e_{i_1}^T A_N = -\text{sign}(\kappa_{j_1}) A_{i_1}^T,$$

où $i_1$ représente la position de l'indice $j_1$ dans $J_B$ et $A_{i_1}^T$ la ligne $i_1$ de $A$;

$$\sigma^0 = \min_{j \in J_N} \sigma_j, \text{ avec } \sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / t_j, & \text{si } \ t_j < 0; \\ \infty, & \text{si } \ t_j \geq 0. \end{cases}$$

Les indices non-basiques non-optimaux sont accompagnés d'un astérisque dans la colonne $J_B$ du tableau.
Trois cas peuvent se présenter :

1. Cas 1. Si $\sigma^0 = \infty$, alors le problème dual est non borné et le problème primal est irréalisable.
2. Cas 2. Si $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$, alors $J_B = \overline{J}_B$, $\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t$, puis nous mettons à jour le tableau précédent.
3. Cas 3. Si $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, alors $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$, $\overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t$, puis on obtient un nouveau tableau en effectuant un pivotage sur l'élément $a_{i_1 j_0}$, où $i_1$ représente la position de l'indice $j_1$ dans $J_B$.

Pour bien comprendre les étapes de la méthode duale de support sous forme de tableaux, considérons l'exemple suivant :

**Exemple 6.**

$$\begin{gathered} \max \ z(x) = -x_1 - x_2 - x_3, \\ x_1 + x_3 = \tfrac{14}{3}, \\ x_2 - 3x_3 = -\tfrac{2}{3}, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 3\}. \end{gathered}$$

**Solution.**
Le dual de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \min\ \phi(y) = \frac{14}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2, \\ y_1 \geq -1, \\ y_2 \geq -1, \\ y_1 - 3y_2 \geq -1, \\ y_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\}. \end{aligned}$$

Choisissons comme solution duale réalisable de départ le vecteur $y^T = (0,0)$ et un support initial $J_B = \{1,2\}$, $A_B = I_2$.
La co-solution et la pseudo-solution associées à $y$ sont données par :

$$\delta = A^T y - c = (1,1,1)^T,\ \kappa_B = A_B^{-1} b = (14/3, -2/3).$$

**Première itération :**
On a le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta$ | 1 | 1 | 1 | |
| | | $t$ | -1 | 0 | -1 | |
| $J_B$ | $\delta_B$ | $\kappa_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b$ |
| $1^\star$ | 1 | 14/3 | 1 | 0 | 1 | 14/3 |
| 2 | 1 | -2/3 | 0 | 1 | -3 | -2/3 |
| | | -4 | 1 | $\infty$ | $\infty$ | 1 |

L'ensemble des indices non-optimaux est $J_{BNO} = \{1\}$. Donc

$$|\kappa_{j_1}| = \max_{j \in J_{BNO}} \{|\kappa_j|\} = \max\{|\frac{14}{3}|, |\frac{-2}{3}|\} = \frac{14}{3} = \kappa_1 \Rightarrow j_1 = 1.$$

La direction duale est alors

$$t^T = -\text{sign}(\kappa_1) A_1^T = (-1, 0, -1).$$

Le pas dual est donné par

$$\sigma^0 = \min\{1, \infty, \infty\} = 1 = \sigma_1 = \sigma_{j_1}.$$

Donc

$$\bar{J_B} = J_B \text{ et } \overline{\delta} = \delta + \sigma^0 t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors le nouveau tableau suivant :
**Deuxième itération :**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta$ | 0 | 1 | 0 | | |
| | | $t$ | 0 | 1 | -3 | | |
| $J_B$ | $\delta_B$ | $\kappa_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b$ | |
| 1 | 0 | 14/3 | 1 | 0 | 1 | 14/3 | |
| $2^\star$ | 1 | -2/3 | 0 | 1 | -3 | -2/3 | $j_1 \rightarrow$ |
| | | -4 | $\infty$ | $\infty$ | 0 | 0 | |
| | | | | | $j_0 \uparrow$ | | |

L'indice $j_1 = 2$ ne vérifie pas les relations d'optimalité, donc $J_{BNO} = \{2\}$ et

$$\kappa_{j_1} = \kappa_2 = -2/3 \Rightarrow j_1 = 2.$$

La direction duale est

$$t^T = -\text{sign}(\kappa_2)A_2^T = (0, 1, -3).$$

D'où

$$\sigma^0 = \min\{\infty, \infty, 0\} = 0 = \sigma_3 \Rightarrow j_0 = 3.$$

L'indice 2 sort de $J_B$ et l'indice 3 entre dans celui-ci.
En effectuant un pivotage sur l'élément $a_{i_1 j_0} = a_{23} = -3$, nous obtenons le nouveau tableaux suivant :

**Troisième itération :**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta$ | 0 | 1 | 0 | |
| | | $t$ | - | - | - | |
| $J_B$ | $\delta_B$ | $\kappa_B$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b$ |
| 1 | 0 | 40/9 | 1 | 1/3 | 0 | 40/9 |
| 3 | 0 | 2/9 | 0 | -1/3 | 1 | 2/9 |
| | | -42/9 | - | - | - | - |

On a $J_{BNO} = \emptyset$, alors la pseudo-solution $\kappa = (40/9, 0, 2/9)^T$ est optimale pour notre problème, avec $z(\kappa) = -42/9$.

# Chapitre 3

# Méthode adaptée

## 3.1 Introduction

La méthode adaptée est développée par R. Gabasov et F.M. Kirillova dans les années soixante-dix à l'université de Minsk, Biélorussie pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables bornées [12, 13]. Le principe de cette méthode est comme suit : en commençant par une solution réalisable de support initiale, elle permet de passer à une nouvelle solution améliorée en suivant une direction dite "direction adaptée". Puis on procède au changement de support. Ce processus est répété jusqu'à ce que le critère d'optimalité ou de suboptimalité soit vérifié.

Il existe trois règles pour changer de support : la règle algébrique, la règle du pas simple et la règle du pas multiple. Dans ce qui suit on présentera la méthode adaptée utilisant la règle algébrique et celle utilisant le pas simple, et ce, pour résoudre des programmes linéaires à variables non-négatives.

## 3.2 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire à variables non-negatives qui se présente sous la forme standard suivante :

$$\max\ z = c^T x, \tag{3.1}$$

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

$$x \geq 0, \tag{3.3}$$

où $c$ et $x$ sont des $n$-vecteurs, $b$ un $m$-vecteur, $A$ est une matrice de dimension $(m \times n)$ avec $rang(A) = m < n$.

## 3.3 Méthode adaptée avec la règle algébrique

### 3.3.1 Principe de la méthode

Soient $\{x, J_B\}$ une SRS initiale du problème de programmation linéaire à variables non-négatives (3.1)-(3.3) et $\varepsilon$ un nombre arbitraire positif ou nul choisi à l'avance. Une itération de la méthode adaptée avec la règle algébrique consiste a passer de la SRS $\{x, J_B\}$ à une autre SRS meilleure $\left\{\bar{x}, \bar{J}_B\right\}$.

Le passage de $x$ à $\bar{x}$ est réalisé en suivant une direction d'amélioration dite adaptée dans le but d'améliorer la valeur de la fonction objectif du problème primal et de diminuer l'estimation de suboptimalité.

Le changement de support est effectué en utilisant une règle appelée "la règle algébrique" : on choisit l'indice entrant afin d'assurer une amélioration maximale de la fonction objectif et on choisit l'indice sortant de telle sorte que la nouvelle matrice formée des colonnes correspondantes aux indices basiques soit inversible.

### 3.3.2 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

La méthode primale de support est une méthode dont la direction d'amélioration est basée sur la métrique du simplexe. Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (3.1)-(3.3). Dans ce qui suit nous construisons la direction réalisable $d$ comme suit :

$$x_j + d_j \geq 0,\ j \in J_N \Leftrightarrow -x_j \leq d_j,\ j \in J_N. \tag{3.4}$$

Cette métrique dépend de la solution réalisable courante $x$, et de ce fait, elle est dite adaptée. Les composantes (3.4) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non-basiques. Afin de calculer les composantes de la direction $d$, considérons l'accroissement

$$z(x+d) - z(x) = -\sum_{j \in J_N} E_j d_j.$$

En tenant compte de la métrique (3.4), nous choisissons les valeurs des composantes non-basiques de $d$ comme suit :

$$\begin{cases} d_j = -x_j, & \text{si} \quad E_j > 0; \\ d_j = 0, & \text{si} \quad E_j = 0; \qquad j \in J_N \\ d_j = \alpha, & \text{si} \quad E_j < 0; \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\alpha$ est un paramètre positif.
Les composantes basiques de $d$ seront donc déduites de la formule $Ad = 0$ :

$$d_B = -A_B^{-1} A_N d_N. \tag{3.6}$$

Avec ce choix, l'accroissement de la fonction objectif sera comme suit :

$$\Delta z = -\sum_{j\in J_N} E_j d_j = \sum_{j\in J_N, E_j>0} E_j x_j - \alpha \sum_{j\in J_N, E_j<0} E_j \geq 0.$$

### 3.3.3 Changement de la solution réalisable

D'une façon analogue au chapitre précédent, nous définissons l'estimation de suboptimalité comme suit :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j\in J_N} E_j x_j.$$

Si $E_N \geq 0$ et $\beta(x, J_B) = 0$, alors la solution courante $x$ est optimale. Si $E_N \geq 0$ et $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors la solution courante $x$ est $\varepsilon$-optimale. Dans le cas contraire, on construit une nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ sous la forme

$$\bar{x} = x + \theta d,$$

où $d$ est la direction d'amélioration définie par les formules (3.5) et (3.6). Le nombre $\theta$ est le pas le long de cette direction. Il se calcule de façon à ce que les contraintes de non-négativité sur le vecteur $\bar{x}$ soient vérifiées, i.e.,

$$-x_j \leq \theta d_j, \text{ si } j \in J_N; \tag{3.7}$$

$$-x_j \leq \theta d_j, \text{ si } j \in J_B. \tag{3.8}$$

Pour satisfaire les inégalités (3.7), nous choisissons $\theta \leq \theta_{j_0}$, où

$$\theta_{j_0} = \min_{j\in J_N} \theta_j, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} 1, & \text{si } d_j < 0; \\ \infty, & \text{si } d_j \geq 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Pour satisfaire les contraintes (3.8), on doit choisir $\theta$ tel que $\theta \leq \theta_{j_1}$, où

$$\theta_{j_1} = \min_{j\in J_B} \theta_j, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{-x_j}{d_j}, & \text{si } d_j < 0; \\ \infty, & \text{si } d_j \geq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

On prendra donc

$$\theta = \theta^0 = \min\left\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\right\}.$$

Nous démontrons la proposition suivante qui permet de nous donner une condition suffisante pour l'optimalité de la nouvelle solution $\bar{x}$.

**Proposition 5.**
Soit $x$ une solution réalisable du problème (3.1)-(3.3) et $\bar{x} = x + \theta^0 d$ une autre solution réalisable du même problème.
Si $E_N \geq 0$ et $\theta^0 = 1$, alors la SRS $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimale pour le problème (3.1)-(3.3).

**Preuve.**
L'accroissement de la fonction objectif du problème (3.1)-(3.3) est donné par :

$$z(\bar{x}) - z(x) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j.$$

Si $E_N \geq 0$, alors nous obtenons

$$z(\bar{x}) - z(x) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j = \theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j x_j = \theta^0 \beta(x, J_B).$$

Aussi, l'estimation de suboptimalité de la nouvelle SRS $\{\bar{x}, J_B\}$ s'écrit :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j \bar{x}_j.$$

On aura alors

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j(x_j + \theta^0 d_j) = \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j.$$

En remplaçant les composantes $d_j$ par leur valeurs dans (3.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{x}, J_B) &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j \\
&= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(-x_j) \\
&= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) \\
&= (1 - \theta^0)\beta(x, J_B).
\end{aligned}$$

Si de plus $\theta^0 = 1$, alors :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) = 0.$$

Ce qui démontre que la SRS $\{\bar{x}, J_B\}$ est une solution optimale du problème (3.1)-(3.3).

Trois cas peuvent alors se présenter :

1. Cas 1. Si $\theta^0 = \infty$, alors le problème (3.1)-(3.3) est non borné et l'algorithme s'arrête.
2. Cas 2. Si $\theta^0 = 1$, alors
   **a-** Si $E_N \geq 0$, alors la solution réalisable $\bar{x} = x + d$ est optimale grâce à la proposition précédente.
   **b-** Si $E_N \not\geq 0$, alors on procède au changement de support.
3. Cas 3. Si $\theta^0 \neq 1$, alors l'accroissement de la fonction objectif du problème (3.1)-(3.3) sera égal à :
   $$z(\bar{x}) - z(x) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j.$$
   Nous distinguons deux cas possibles :
   **a-** Si $E_N \geq 0$, alors on pose :
   $$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B).$$
   - Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimale.
   - Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est $\varepsilon$-optimale.
   - Sinon on procède au changement de support.

   **b-** Si $E_N \not\geq 0$, alors on procède au changement de support.

### 3.3.4 Changement du support avec la règle algébrique

Comme on l'a vu, le changement du support se fait lorsque $\theta^0 = \theta_{j_1}$. Ce cas se réalise donc pour un indice $j_1 \in J_B$ tel que $d_{j_1} \neq 0$.
En vertu de la relation (3.6), on peut alors écrire

$$d_B = d(J_B) = -A_B^{-1}A_N d_N = -\sum_{j\in J_N} A_B^{-1}a_j d_j.$$

En posant $X_j = A_B^{-1}a_j = (x_{ij},\ i \in I)$, on aura :

$$d_B = -\sum_{j\in J_N} X_j d_j.$$

Donc

$$d_{j_1} = -\sum_{j\in J_N} e_{i_1}^T X_j d_j = -\sum_{j\in J_N} x_{i_1 j} d_j \neq 0, \tag{3.11}$$

où $i_1$ est la position de l'indice $j_1$ dans l'ensemble $J_B$. D'autre part, l'ensemble des indices non-optimaux s'écrit :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\}.$$

Comme $d_j = 0$ pour tout $j \in J_N \setminus J_{NNO}$, la relation (3.11) devient :

$$d_{j_1} = -\sum_{j\in J_{NNO}} x_{i_1 j} d_j \neq 0.$$

Il existe donc un indice $j_0 \in J_{NNO}$ tel que $x_{i_1 j_0} \neq 0$. Cette dernière condition nous assure par conséquent que le nouvel ensemble $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ est bien un support. Si le critère d'optimalité ou de suboptimalité n'est pas vérifié, on recommencera alors une nouvelle itération à partir de la nouvelle SRS $\left\{\bar{x}, \bar{J}_B\right\}$.

### 3.3.5 Schéma de l'algorithme de la méthode adaptée avec la règle algébrique

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS de notre problème. Soient $\varepsilon$ un nombre arbitraire positif ou nul et $\alpha > 0$.

**Algorithme 4.**

1. Calculer $\pi^T = c_B^T A_B^{-1}$ et $E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T$;
2. Test d'optimalité de la SRS $\{x, J_B\}$ :
   (a) Cas 1. Si $E_N \geq 0$, alors
   - Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B) = E_N^T x_N$ ;
   - Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{x, J_B\}$ une SRS optimale.
   - Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{x, J_B\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale.
   - Sinon, aller à l'étape 3 ;

   (b) Cas 2. Si $E_N \ngeq 0$, alors aller à l'étape 3 ;

3. Amélioration de la SRS $\{x, J_B\}$ :
   - Calculer la direction d'amélioration $d$ :
$$\begin{cases} d_j = -x_j, & \text{si} \quad E_j > 0; \\ d_j = 0, & \text{si} \quad E_j = 0; \quad j \in J_N,\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N; \\ d_j = \alpha, & \text{si} \quad E_j < 0; \end{cases}$$
   - Calculer le pas de déplacement $\theta^0$ : $\theta^0 = \min\left\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\right\}$, où
$$\theta_{j_0} = \min_{j \in J_N} \theta_j, \text{ avec } \theta_j = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad d_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad d_j \geq 0; \end{cases}$$
$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \text{avec } \theta_j = \begin{cases} \frac{-x_j}{d_j}, & \text{si} \quad d_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad d_j \geq 0; \end{cases}$$
   - Si $\theta^0 = \infty$, alors le problème est non borné et l'algorithme est arrêté ;
   - Sinon, calculer
$$\bar{x} = x + \theta^0 d \text{ et } \bar{z} = \begin{cases} z + \theta^0 \beta(x, J_B), & \text{si } E_N \geq 0\,; \\ z - \theta^0 \sum\limits_{j \in J_N} E_j d_j, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$
4. Test d'optimalité de la nouvelle SRS $\{\bar{x}, J_B\}$ :
   (a) Cas 1. Si $E_N \geq 0$, alors
      - Si $\theta^0 = 1$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\bar{x}, J_B\}$ une SRS optimale ;
      - Si $\theta^0 < 1$, alors calculer $\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$;
         - Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\bar{x}, J_B\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale ;
         - Sinon, aller à l'étape 5 ;
   (b) Cas 2. Si $E_N \ngeq 0$, alors aller à l'étape 5 ;
5. Changement de support $J_B$ en $\overline{J}_B$ avec la règle algébrique :
   - Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors poser $J_B = \overline{J}_B$ et $J_N = \overline{J}_N$ ;
   - Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors soit $i_1$ la position de l'indice $j_1$ dans l'ensemble $J_B$.
     - Calculer l'ensemble des indices non-optimaux :
$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\};$$
     - Calculer $x_{i_1 j} = e_{i_1}^T A_B^{-1} a_j$, $j \in J_{NNO}$ ;
     - Choisir un indice $j_0 \in J_{NNO}$ tel que $x_{i_1 j_0} \neq 0$.
       Pour assurer une meilleure stabilité numérique, on peut choisir $j_0$ tel que
$$\left|x_{i_1 j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|x_{i_1 j}\right|;$$
   - Poser $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ ;
6. Poser $x = \bar{x}$, $z = \bar{z}$, $J_B = \overline{J}_B$ et aller à l'étape 1.

**Exemple 7.**

Résolvons par la méthode adaptée avec la règle algébrique le problème suivant :

$$\max \ z(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4,$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2,$$
$$-7x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2,$$
$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 4\}.$$

**Solution.**
Soit $\{x, J_B\}$, avec $x = (1,3,0,2)^T$ et $J_B = \{1,2\}$ une solution réalisable de support initiale de ce problème et $z(x) = -5$ la valeur de fonction objectif correspondante. Posons $\alpha = 1$.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{1,2\}, \ J_N = \{3,4\}, \ c_B^T = (2,-3), \ c_N^T = (-1,1),$$
$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ -7/6 & -1/6 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (19/6, 1/6), \quad E_N^T = (E_3, E_4) = \pi^T A_N - c_N^T = (65/6, 35/6).$$

On a $E_N \geq 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_3 x_3 + E_4 x_4 = 35/3 \neq 0.$$

Donc la solution $x$ n'est pas optimale.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_3, \theta_4\} = \min\{\infty, 1\} = 1,$$

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\left\{\tfrac{-1}{-10/6}, \tfrac{-3}{-34/6}\right\} = 18/34 = \theta_2.$$

D'où
$$\theta^0 = \min\left\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\right\} = \theta_2 = 18/34 \Rightarrow j_1 = 2.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (18/34) \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/17 \\ 0 \\ 0 \\ 16/17 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :**

$$\bar{z} = z + \theta^0 \beta(x, J_B) = -5 + (18/34) \times (35/3) = 20/17.$$

**Test d'optimalité de la nouvelle solution $\bar{x}$ :**
On a $E_N \geq 0$, alors on peut calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B)$ :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) = (1 - \frac{18}{34}) \cdot \frac{35}{3} = \frac{280}{51} \neq 0.$$

Donc la SRS $\{\bar{x}, J_B\}$ n'est pas optimale. Passons alors au changement de support avec la règle algébrique.

**Changement de support $J_B$ en $\bar{J}_B$ :**
L'ensemble des indices non-optimaux est :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\} = \{4\}.$$

Calculons

$$x_{i_1 j} = x_{2j} = e_2^T A_B^{-1} a_j, \ j \in J_{NNO}.$$

On a $x_{24} = e_2^T A_B^{-1} a_4 = -17/6$. D'où

$$\left|x_{i_1 j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|x_{i_1 j}\right| = |x_{24}| \Rightarrow j_0 = 4.$$

Le nouveau support est alors

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{1, 4\}, \ \bar{J}_N = \{3, 2\}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{1, 4\}, \ J_N = \{3, 2\}, \ c_B^T = (2, 1), \ c_N^T = (-1, -3),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/17 & -2/17 \\ 7/17 & 1/17 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (13/17, -3/17), \ E_N^T = (E_3, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (50/17, 35/17).$$

On a $E_N \geq 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_3 x_3 + E_2 x_2 = (50/17) \cdot 0 + (35/17) \cdot 0 = 0.$$

Donc la solution $x = (2/17, \ 0, \ 0, \ 16/17)^T$ est une solution optimale du problème considéré et la valeur de la fonction objectif correspondante est $z(x) = 20/17$.

**Exemple 8.**
Résolvons par la méthode adaptée avec la règle algébrique le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \ z(x) &= x_1 + x_2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 1, \\ x_j &\geq 0, \forall j \in \{1, ..., 4\}. \end{aligned}$$

**Solution.**
Soit $x = (0,0,1,1)^T$ une solution réalisable initiale et $J_B = \{3,4\}$ un support initial de ce problème. La valeur de la fonction objectif est $z(x) = 0$. Posons $\alpha = 1$.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{3,4\}, \ J_N = \{1,2\}, \ c_B^T = (0,0), \ c_N^T = (1,1),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0), \ E_N^T = (E_1, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (-1,-1).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de la solution réalisable $x$.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty,$$

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_3, \theta_4\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty.$$

Alors nous obtenons $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\} = \infty$.
Par conséquent, le problème considéré est non borné.

**Exemple 9.**
Résolvons par la méthode adaptée avec la règle algébrique le problème suivant :

$$\begin{gathered} \max \ z(x) = 3x_1 + 2x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 50, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,4\}. \end{gathered}$$

**Solution.**
Soit $\{x, J_B\}$, où $x = (10,2,3,20)^T$ et $J_B = \{3,4\}$ une solution réalisable de support initiale de ce problème, avec $z(x) = 34$. Posons $\alpha = 1$.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{3,4\}, \ J_N = \{1,2\}, \ c_B^T = (0,0), \ c_N^T = (3,2),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\ E_N^T = (E_1, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (-3,-2).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de la solution réalisable $x$.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty,$$

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_3, \theta_4\} = \min\left\{\tfrac{-3}{-2}, \tfrac{-20}{-7}\right\} = 3/2 = \theta_3 \Rightarrow j_1 = 3.$$

Alors nous obtenons $\theta^0 = \min\left\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}\right\} = \theta_3 = 3/2$.
**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix} + (3/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/2 \\ 7/2 \\ 0 \\ 19/2 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :**

$$\bar{z} = 34 - (3/2)(-3 \cdot 1 + -2 \cdot 1) = 83/2.$$

**Test d'optimalité de $\bar{x}$ :**
On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe au changement de support.
**Changement du support $J_B$ en $\overline{J}_B$ :**
L'ensemble des indices non-optimaux est :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\} = \{1,2\}.$$

Calculons

$$x_{i_1 j} = x_{1j} = e_1^T A_B^{-1} a_j = e_1^T a_j,\ j \in J_{NNO}.$$

$$\left|x_{i_1 j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|x_{i_1 j}\right| = \max\{|x_{11}|, |x_{12}|\} = \max\{1,1\} = 1.$$

On prend $j_0 = 1$.
Le nouveau support est alors

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{1,4\},\ \overline{J}_N = \{3,2\}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{1,4\},\ J_N = \{3,2\},\ c_B^T = (3,0),\ c_N^T = (0,2),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (3,0),\ E_N^T = (E_3, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (3,1).$$

On a $E_N \geq 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_3 x_3 + E_2 x_2 = 7/2 \neq 0.$$

**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -7/2 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 21/2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 21/2 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_3, \theta_2\} = \min\{\infty, 1\} = 1,$$

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_1, \theta_4\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty.$$

Alors nous obtenons $\theta^0 = 1$.
**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 23/2 \\ 7/2 \\ 0 \\ 19/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 21/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :**

$$\bar{z} = (83/2) - 1(3 \cdot 0 + 1 \cdot (-7/2)) = 45.$$

**Test d'optimalité de $\bar{x}$ :**
On a $E_N \geq 0$ et $\theta^0 = 1$. Par conséquent, la solution $\bar{x} = (15, 0, 0, 20)^T$, avec $z(x) = 45$ est optimale pour le problème considéré.

**Remarque 4.**
Dans le cas où le problème de programmation linéaire admet plusieurs solutions optimales, la méthode adaptée peut fournir des SRS optimales qui ne sont pas des sommets. Pour illustrer ce cas, considérons l'exemple suivant :

**Exemple 10.**
Résolvons par la méthode adaptée avec la règle algébrique le problème suivant :

$$\begin{aligned}
\max\ z(x) &= x_1 + x_2,\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 3,\\
x_2 + x_4 &= 2,\\
x_j \geq 0, \forall j &\in \{1,...,4\}.
\end{aligned}$$

**Solution.**
Soit $\{x, J_B\}$, avec $x = (1,1,1,1)^T$ et $J_B = \{3,4\}$, une solution réalisable de support initiale de ce problème et $z(x) = 2$ la valeur de fonction objectif correspondante. Posons $\alpha = 1$.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{3,4\},\ J_N = \{1,2\},\ c_B^T = (0,0),\ c_N^T = (1,1),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\quad E_N^T = (E_1, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (-1,-1).$$

On a $E_N \ngeq 0$ alors on passe a l'amélioration de la solution réalisable $x$.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \min\left\{\theta_{j_1}, \theta_{j_0}\right\},\ \text{où}\ \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j\ \text{et}\ \theta_{j_0} = \min_{j \in J_N} \theta_j.$$

$$\theta_{j_1} = 1/2 = \theta_3 \Rightarrow j_1 = 3.$$

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\{\infty, \infty\} = \infty.$$

Donc nous obtenons $\theta^0 = \theta_3 = 1/2$.
**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :**

$$\bar{z} = 2 - (1/2)\,[(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1] = 3.$$

**Test d'optimalité de $\bar{x}$ :**
On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe au changement de support.
**Changement du support $J_B$ en $\bar{J}_B$ :**
**Calcul des indices non-optimaux :**

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0,\ x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0,\ x_j > 0\right] \right\} = \{1,2\}.$$

Calculons

$$x_{i_1 j} = x_{1j} = e_1^T A_B^{-1} a_j = e_1^T a_j,\ j \in J_{NNO}.$$

Donc

$$\left|x_{i_1 j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|x_{i_1 j}\right| = \max\{|x_{11}|, |x_{12}|\} = \max\{1,1\} = 1.$$

On prend $j_0 = 1$.
Le nouveau support est :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = (\{3,4\} \setminus \{3\}) \cup \{1\} = \{1,4\},\ \bar{J}_N = \{3,2\}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{1,4\},\ J_N = \{3,2\},\ c_B^T = (1,0),\ c_N^T = (0,1),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (1,0),\ E_N^T = (E_3, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (1,0).$$

**Test d'optimalité de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**
On a $E_N \geq 0$ et $\beta(x, J_B) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3/2 = 0$.
Alors la solution $x = (3/2, 3/2, 0, 1/2)^T$ et optimale pour le problème considéré, avec $z(x) = 3$.
Le chemin suivi par la méthode adaptée pour cet exemple est montré dans la figure 1. Cette figure montre que la méthode adaptée fournie la solution optimale $B$ qui est un point frontière.

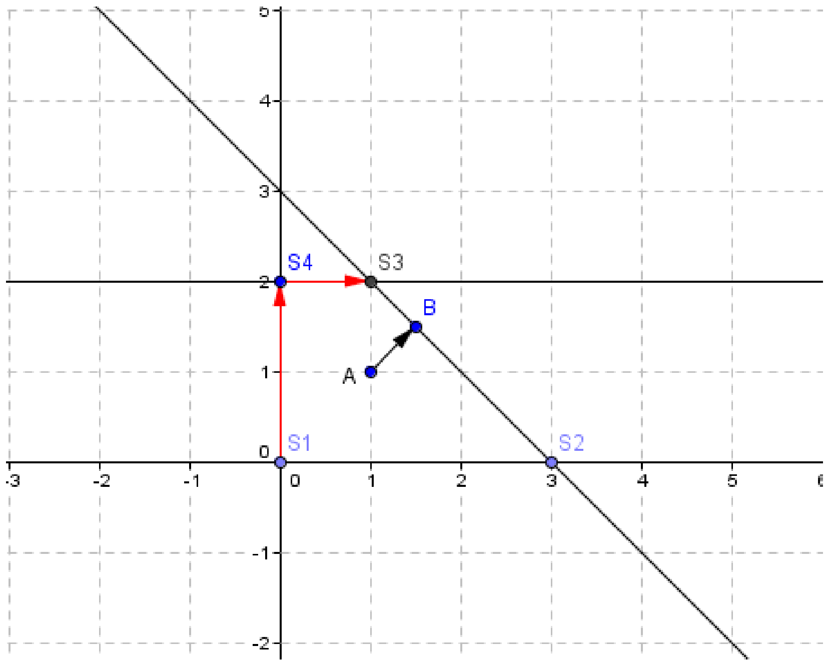


Figure -1-

- Chemin de la méthode du simplexe : $S1 \rightarrow S4 \rightarrow S3$.
- Chemin de la méthode adaptée avec la règle algébrique : $A \rightarrow B$.

## 3.4 Méthode adaptée avec la règle du pas simple

### 3.4.1 Principe de la méthode

Soit $x$ une solution réalisable initiale du problème de programmation linéaire à variables non-négatives (3.1)-(3.3), $\varepsilon$ un nombre arbitraire positif ou nul choisi a l'avance et $J_B$ un support dual réalisable, i.e.,

$$\det A_B \neq 0 \text{ et } E_N = \pi^T A_N - c_N \geq 0.$$

Une itération de la méthode adaptée avec la règle du pas simple consiste a passer de la SRS $\{x, J_B\}$ à une autre SRS meilleure $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$. Le passage de $x$ à $\bar{x}$ est réalisé en suivant une direction d'amélioration dite adaptée dans le but d'améliorer la valeur de la fonction objectif du problème primal tout en diminuant l'estimation de suboptimalité. Le changement de support est effectué en exploitant les informations relatives au problème dual de telle sorte à diminuer d'avantage l'estimation de suboptimalité.

### 3.4.2 Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique suivante pour les composantes non-basiques de la direction réalisable $d$ :

$$-x_j \leq d_j, \ \ j \in J_N. \tag{3.12}$$

Les composantes (3.12) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non-basiques. Afin de calculer les composantes de la direction $d$ considérons l'accroissement

$$z(x+d)-z(x)=-\sum_{j\in J_N}E_jd_j.$$

En tenant compte de la métrique (3.12), cet accroissement atteint son maximum pour les valeurs des composantes non-basiques de $d$ suivantes :

$$d_j=-x_j,\quad \forall j\in J_N. \tag{3.13}$$

Les composantes basiques de $d$ seront donc déduites de la formule $Ad=0$ :

$$d_B=-A_B^{-1}A_Nd_N. \tag{3.14}$$

Avec ce choix, l'accroissement de la fonction objectif s'écrit :

$$\Delta z=-\sum_{j\in J_N}E_jd_j=\sum_{j\in J_N}E_jx_j.$$

**Remarque 5.**
L'initialisation de la méthode adaptée avec une solution réalisable et un support dual réalisable nous permet d'avoir à chaque itération $E_N\geq 0$. Par conséquent, l'estimation de suboptimalité est toujours définie et est égale à :

$$\beta(x,J_B)=\sum_{j\in J_N}E_jx_j=E_N^Tx_N.$$

### 3.4.3 Changement de la solution réalisable

Si $\beta(x,J_B)=0$, alors la solution courante $x$ est optimale. Si $\beta(x,J_B)\leq\varepsilon$, alors la solution courante $x$ est $\varepsilon$-optimale. Dans le cas contraire, on construit une nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ sous la forme

$$\bar{x}=x+\theta d,$$

où $d$ est la direction d'amélioration définie par les formules (3.13) et (3.14). Le nombre $\theta$ est le pas le long de cette direction. Il se calcule de façon à ce que les contraintes de non-négativité sur le vecteur $\bar{x}$ soient vérifiées ,i.e.,

$$-x_j\leq\theta d_j,\ \text{si}\ j\in J_N; \tag{3.15}$$

$$-x_j\leq\theta d_j,\ \text{si}\ j\in J_B. \tag{3.16}$$

Pour satisfaire les inégalités (3.15), nous choisissons $\theta\leq 1$.
Pour satisfaire les contraintes (3.16), on choisit $\theta\leq\theta_{j_1}$, où

$$\theta_{j_1}=\min_{j\in J_B}\theta_j,\ \text{avec}\ \theta_j=\begin{cases}\frac{-x_j}{d_j}, & si\quad d_j<0;\\ \infty, & si\quad d_j\geq 0.\end{cases} \tag{3.17}$$

On prendra donc

$$\theta = \theta^0 = \min\left\{1, \theta_{j_1}\right\}.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1. Cas 1. Si $\theta^0 = 1$, alors la solution $\bar{x} = x + d$ est optimale. En effet,

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1-\theta^0)\beta(x, J_B) = 0.$$

   Le processus de résolution du problème (3.1)-(3.3) est terminé.

2. Cas 2. Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, alors l'accroissement de la fonction objectif du problème (3.1)-(3.3) est égal à :

$$z(\bar{x}) - z(x) = -\theta^0 \sum_{j \in J_N} E_j d_j = \theta^0 \beta(x, J_B), \tag{3.18}$$

   et

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1-\theta^0)\beta(x, J_B). \tag{3.19}$$

   Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors la solution réalisable $\bar{x}$ est $\varepsilon$-optimale et le processus de résolution du problème (3.1)-(3.3) est arrêté. Dans le cas contraire, on devra changer le support $J_B$.

### 3.4.4 Changement de support avec la règle du pas simple

Dans la méthode adaptée avec la règle algébrique, le choix de l'indice $j_0$ est basé uniquement sur une condition algébrique, donc l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B)$ ne diminue pas forcément. Ici, on choisit dans l'ensemble $J_{NNO}$ un indice $j_0$ de tel sorte que l'estimation de suboptimalité correspondante à la nouvelle solution, $\beta(\bar{x}, J_B)$, diminue.
A cet effet, on peut faire correspondre à la SRS $\{x, J_B\}$ une co-solution réalisable $\delta$ et une solution réalisable duale $y$ du problème dual (3.4)-(3.5) de la manière suivante :

$$y^T = \pi^T = c_B^T A_B^{-1} \text{ et } \delta = E = A^T y - c.$$

Remarquons que la solution réalisable duale $y$ et sa co-solution correspondante $\delta$ dépendent uniquement du support $J_B$. On montre alors que l'estimation de suboptimalité se décompose ainsi :

$$\beta(x, J_B) = \beta(x) + \beta(J_B),$$

avec

$$\beta(x) = z(x^0) - z(x) = c^T x^0 - c^T x \text{ et } \beta(J_B) = \phi(y) - \phi(y^0) = b^T y - b^T y^0,$$

où les vecteurs $x^0$ et $y^0$ sont des solutions optimales respectivement du problème (3.1)-(3.3) et de son dual (3.4)-(3.5). On peut en effet écrire :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E^T x = (y^T A - c^T)x = y^T b - c^T x = \phi(y) - z(x).$$

Puisque $\phi(y^0) = z(x^0)$, on aura donc

$$\beta(x, J_B) = z(x^0) - z(x) + \phi(y) - \phi(y^0) = \beta(x) + \beta(J_B).$$

Grâce au changement de la solution réalisable $x$ par $\bar{x}$, on a amélioré l'estimation de suboptimalité en diminuant $\beta(\bar{x}, J_B)$ :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(\bar{x}) + \beta(J_B) = \beta(x) + (c^T x - c^T \bar{x}) + \beta(J_B) = \beta(x, J_B) - (c^T \bar{x} - c^T x).$$

En effet,

$$\beta(\bar{x}) = c^T x^0 - c^T \bar{x} = c^T x^0 - c^T \bar{x} + c^T x - c^T x = \beta(x) + (c^T x - c^T \bar{x}).$$

De la même manière, on fera diminuer $\beta(J_B)$ :

$$\beta(\bar{J}_B) = \beta(J_B) - (\phi(y) - \phi(\bar{y})). \tag{3.20}$$

Pour ce faire, on effectuera une itération de la méthode duale de support en passant de la co-solution réalisable de support $\{\delta, J_B\}$ à la co-solution réalisable de support $\left\{\bar{\delta}, \bar{J}_B\right\}$ pour laquelle $\beta(\bar{J}_B) \le \beta(J_B)$. Le passage de $y$ à $\bar{y}$ et de $\delta$ à $\bar{\delta}$ est effectué de la manière suivante :

$$\bar{y} = y + \sigma s \text{ et } \bar{\delta} = \delta + \sigma t,$$

où $\sigma \ge 0$, $s \in \mathbb{R}^m$ et $t \in \mathbb{R}^n$ sont les directions duales d'amélioration des vecteurs $y$ et $\delta$ respectivement qui sont construites comme suit :
On calcule d'abord la pseudo-solution réalisable $\kappa$ associée à la co-solution réalisable de support $\{\delta, J_B\}$ :

$$\kappa = x + d.$$

Les directions duales sont alors données par :

$$t_{j_1} = -\text{sign}(\kappa_{j_1});\ t_j = 0,\ j \in J_B \setminus \{j_1\};\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N;\ s^T = t_B^T A_B^{-1}.$$

Pour calculer l'accroissement de la fonction duale $\Delta\phi = \phi(\bar{y}) - \phi(y)$, considérons la fonction $\psi$ dépendant du paramètre $\sigma$ :

$$\psi(\sigma) = \Delta\phi = \phi(\bar{y}) - \phi(y) = \phi(y(\sigma)) - \phi(y) = b^T(\bar{y} - y) = \sigma s^T b.$$

Notons que

$$s^T A = t_B^T A_B^{-1} A = (t_B^T A_B^{-1} A_B, t_B^T A_B^{-1} A_N) = (t_B^T, t_N^T) = t^T.$$

Puisque $t^T = s^T A$ et $b = A\kappa$, alors

$$s^T b = s^T A \kappa = t^T \kappa.$$

La fonction $\psi$ s'écrit :

$$\psi(\sigma) = \sigma(t^T \kappa) = \sigma \sum_{j \in J_B} t_j \kappa_j + \sigma \sum_{j \in J_N} t_j \kappa_j = B(\sigma) + N(\sigma).$$

Évaluons le terme $B(\sigma)$ :

$$B(\sigma) = \sigma t_{j_1}\kappa_{j_1} + \sigma \sum_{j\in J_B, j\neq j_1.} t_j\kappa_j = -\sigma\left|\kappa_{j_1}\right|.$$

Maintenant, évaluons le terme $N(\sigma)$ :
Comme pour tout $j\in J_N$, on a $\kappa_j = x_j + d_j = x_j + (-x_j) = 0$, alors on déduit que

$$N(\sigma) = \sigma \sum_{j\in J_N} t_j\kappa_j = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi(\sigma) = -\sigma\left|\kappa_{j_1}\right|.$$

Afin de maximiser l'accroissement de la fonction duale tout en s'assurant que $\overline{\delta}$ restera positif ou nul, on posera $\sigma = \sigma^0$, où $\sigma^0$ est appelé pas dual qui est calculé de la manière suivante :

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min_{j\in J_N}\{\sigma_j\}, \text{ avec } \sigma_j = \begin{cases} -\delta_j/t_j, & \text{si } \ t_j < 0; \\ \infty, & \text{si } \ t_j \geq 0. \end{cases}$$

Avec un tel indice $j_0$ ainsi choisi, on construira un nouveau support

$$\overline{J}_B = (J_B\setminus\{j_1\})\cup\{j_0\}.$$

Si $\{\delta, J_B\}$ est non-dégénérée $(\sigma^0 > 0)$, alors le passage de la co-solution de support $\{\delta, J_B\}$ à la co-solution de support $\left\{\overline{\delta}, \overline{J}_B\right\}$ fera diminuer la fonction duale d'une valeur égale à $\sigma^0\left|\kappa_{j_1}\right|$ :

$$\phi(\overline{y}) - \phi(y) = -\sigma^0\left|\kappa_{j_1}\right| < 0.$$

En vertu de la relation (3.20), on aura

$$\beta(\overline{J}_B) = \beta(J_B) - (\phi(y) - \phi(\overline{y})) = \beta(J_B) - \sigma^0\left|\kappa_{j_1}\right|.$$

Donc l'estimation de suboptimalité de la SRS $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$ vaut :

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = \beta(\overline{x}) + \beta(\overline{J}_B) = \beta(\overline{x}) + \beta(J_B) - \sigma^0\left|\kappa_{j_1}\right| = \beta(\overline{x}, J_B) - \sigma^0\left|\kappa_{j_1}\right| < \beta(\overline{x}, J_B).$$

Si de plus, $x$ est non-dégénérée $(\theta^0 > 0)$, alors

$$\beta(\overline{x}, J_B) = (1-\theta^0)\beta(x, J_B) < \beta(x, J_B).$$

Par conséquent, le changement de support $J_B$ par $\overline{J}_B$ s'effectue de telle sorte que la valeur de la fonction duale diminue strictement. Ceci assure bien la convergence de la méthode adaptée sous l'hypothèse de la non dégénérescence primale $(\theta^0 > 0)$ et duale $(\sigma^0 > 0)$.
Dans le cas où $\{\delta, J_B\}$ est dégénérée, on distingue deux cas :

1. Cas 1. S'il existe au moins un indice $j_\star \in J_N$, tel que :

$$\delta_{j_\star} = 0,\ t_{j_\star} < 0,$$

alors les relations du pas donnent : $\sigma^0 = \sigma_{j_\star} = 0$, on prend alors $j_0 = j_\star$ et $\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$. Par conséquent, l'accroissement dual sera nul et :

$$\beta(\bar{x},\bar{J}_B) = \beta(\bar{x},J_B).$$

2. Cas 2. S'il n'existe pas d'indice $j_* \in J_N$, tel que

$$\delta_{j_\star} = 0,\ t_{j_\star} < 0,$$

alors pour tous les indices $j \in J_N$, avec $\delta_j = 0$, on a $t_j \geq 0$. Dans ce cas, $\sigma^0 = \infty$ donc le problème dual est non borné et le problème primal est irréalisable.

### 3.4.5 Schéma de l'algorithme de la méthode adaptée avec la règle du pas simple

Soit $x$ une solution réalisable du problème, $\varepsilon$ un nombre arbitraire positif ou nul et $J_B$ un support dual réalisable.

**Algorithme 5.**

1. Calculer $\pi^T = c_B^T A_B^{-1}$, $E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T$;
2. Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(x,J_B) = E_N^T x_N$ ;
3. Test d'optimalité de la SRS $\{x,J_B\}$ :
   - Si $\beta(x,J_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{x,J_B\}$ une SRS optimale.
   - Si $\beta(x,J_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{x,J_B\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale.
   - Sinon, aller à l'étape 4 ;
4. Amélioration de la SRS $\{x,J_B\}$ :
   - Calculer la direction d'amélioration $d$ :

   $$d_j = -x_j,\ \forall j \in J_N;\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N;$$

   - Calculer le pas de déplacement $\theta^0$ : $\theta^0 = \min\left\{1, \theta_{j_1}\right\}$, où

   $$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,\ \text{avec}\ \theta_j = \begin{cases} \frac{-x_j}{d_j}, & \text{si} \quad d_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad d_j \geq 0; \end{cases}$$

   - Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 d$ et $\bar{z} = z + \theta^0 \beta(x,J_B)$;
5. Test d'optimalité de la nouvelle SRS $\{\bar{x},J_B\}$ :
   - Si $\theta^0 = 1$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\bar{x},J_B\}$ une SRS optimale.
   - Si $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, alors calculer $\beta(\bar{x},J_B) = (1-\theta^0)\beta(x,J_B)$.
     - Si $\beta(\bar{x},J_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\{\bar{x},J_B\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale.
     - Sinon, aller à l'étape 6 ;
6. Changement de support $J_B$ en $\bar{J}_B$ avec la règle du pas simple :
   - Calculer la pseudo-solution $\kappa = x + d$;
   - Calculer la direction duale $t$ :

   $$t_{j_1} = -\text{sign}(\kappa_{j_1});\ t_j = 0,\ j \in J_B \setminus \{j_1\};\ t_N^T = t_B^T A_B^{-1} A_N;$$

   - Calculer le pas dual : $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min\limits_{j \in J_N} \left\{\sigma_j\right\}$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j/t_j, & \text{si} \quad t_j < 0; \\ \infty, & \text{si} \quad t_j \geq 0; \end{cases}$$

- Si $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, alors on pose $\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\}$ et $\overline{E} = E + \sigma^0 t$ ;
- Calculer l'estimation de suboptimalité

$$\beta(\overline{x},\overline{J}_B) = \beta(\overline{x},J_B) - \sigma^0 \left|\kappa_{j_1}\right|;$$

- Si $\beta(\overline{x},\overline{J}_B) = 0$, alors l'algorithme s'arrête avec $\left\{\overline{x},\overline{J}_B\right\}$ une SRS optimale.
- Si $\beta(\overline{x},\overline{J}_B) \leq \varepsilon$, alors l'algorithme s'arrête avec $\left\{\overline{x},\overline{J}_B\right\}$ une SRS $\varepsilon$-optimale.
- Sinon, aller à l'étape 7 ;

7. Poser $x = \overline{x}$, $z = \overline{z}$, $J_B = \overline{J}_B$, $E = \overline{E}$, $\beta(x,J_B) = \beta(\overline{x},\overline{J}_B)$ et aller à l'étape 4.

**Exemple 11.**
Résolvons par la méthode adaptée avec la règle du pas simple le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ -7x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,4\}. \end{aligned}$$

**Solution.**
Soit $x = (1,3,0,2)^T$ une solution réalisable initiale de ce problème, avec $z(x) = -5$ et $J_B = \{1,2\}$ un support dual réalisable.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{1,2\},\ J_N = \{3,4\},\ c_B^T = (2,-3),\ c_N^T = (-1,1),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ -7/6 & -1/6 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (19/6, 1/6),\ E_N^T = (E_3, E_4) = \pi^T A_N - c_N^T = (65/6, 35/6).$$

**Calcul de l'estimation de suboptimalité :**

$$\beta(x,J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_3 x_3 + E_4 x_4 = 35/3 \neq 0.$$

Alors la solution $x$ n'est pas optimale.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \min\left\{1, \theta_{j_1}\right\},\ \text{où}\ \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \min\left\{\tfrac{-1}{(-10/6)}, \tfrac{-3}{(-34/6)}\right\} = 18/34 = \theta_2 \Rightarrow \theta^0 = \theta_2 = 18/34.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (18/34) \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/17 \\ 0 \\ 0 \\ 16/17 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :**

$$\bar{z} = z + \theta^0 \beta(x, J_B) = -5 + (18/34) \times (35/3) = 20/17.$$

**Test d'optimalité de $\bar{x}$ :**
Calculons l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B)$ :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1-\theta^0)\beta(x, J_B) = (1 - \frac{18}{34}) \cdot \frac{35}{3} = \tfrac{280}{51} \neq 0.$$

Donc la solution $\{\bar{x}, J_B\}$ n'est pas optimale. On passe alors au changement de support avec la règle du pas simple.
**Changement de support $J_B$ en $\bar{J}_B$ :**
**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa = x + d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10/6 \\ -34/6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/6 \\ -16/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la direction duale $t$ et du pas dual $\sigma^0$ :**

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -23/6 \\ -17/6 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^0 = \min_{j \in J_N} \{\sigma_j\} = \min\{65/23, 35/17\} = 35/17 = \sigma_4 \Rightarrow j_0 = 4.$$

Le nouveau support $\bar{J}_B$ est :

$$\bar{J}_B = (\{1,2\} \setminus \{2\}) \cup \{4\} = \{1,4\} \text{ et } \bar{J}_N = \{3,2\}.$$

Le nouveau vecteur des coûts réduits est :

$$\bar{E}^T = (0,0,65/6,35/6) + (35/17)(0,1,-23/6,-17/6) = (0,35/17,50/17,0).$$

**Test d'optimalité de $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ :**

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) - \sigma^0 \left|\kappa_{j_1}\right| = (280/51) - (35/17) \cdot (16/6) = 0.$$

Par conséquent, la solution $\bar{x}^T = (2/17, 0, 0, 16/17)$ est une solution optimale au problème considéré, avec $\bar{z} = 20/17$.

**Exemple 12.**
Résolvons par la méthode adaptée avec la règle du pas simple le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 4\}. \end{aligned}$$

**Solution.**
Soit $x = (1, 1, 1, 1)^T$ une solution réalisable et $J_B = \{1, 2\}$ un support initial de ce problème, avec $z(x) = 0$.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{1,2\},\ J_N = \{3,4\},\ c_B^T = (1,1),\ c_N^T = (-1,-1),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (1, 0), \quad E_N^T = (E_3, E_4) = \pi^T A_N - c_N^T = (2, 1).$$

**Calcul de l'estimation de suboptimalité :**

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_3 x_3 + E_4 x_4 = 3 \neq 0.$$

Alors le solution $x$ n'est pas optimale.
**Amélioration de la solution réalisable $x$ :**
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}\}, \text{ où } \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j,$$

$$\theta_{j_1} = \min\{\theta_1, \theta_2\} = \infty \Rightarrow \theta^0 = 1.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la valeur de la fonction objectif en cette solution :**

$$\bar{z} = z + \theta^0 \beta(x, J_B) = 3.$$

**Test d'optimalité de la nouvelle SRS** $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ :
On a $\theta^0 = 1$, alors la solution $x^T = (1,2,0,0)$ est optimale pour le problème considéré, avec $z(x) = 3$.

## 3.5 Initialisation

### 3.5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on commence les méthodes présentées en choisissant une solution réalisable initiale et un support de départ, cependant dans la majorité des cas ces informations ne sont pas connues. Généralement, la technique du grand M est utilisée pour remédier à ce problème. Cette technique consiste à former un nouveau problème dit M-problème qui a une solution réalisable initiale et un support de départ évidents. La résolution de ce dernier permet de déduire la solution optimale du problème original.

### 3.5.2 La M-méthode adaptée avec la règle algébrique

Dans le cas où nous ne connaissons pas une solution réalisable de support initiale pour la méthode adaptée avec la règle algébrique, nous formons d'abord un nouveau problème dit M-problème, qui a une nouvelle variable dite variable artificielle. Ce nouveau problème possède une solution réalisable de support initiale évidente. L'application de la méthode adaptée avec la règle algébrique pour ce M-problème permet alors de nous donner la solution optimale du problème original.

Le support initial peut être trouvé avec la méthode de Gauss ou celle de Gauss-Jordan, cependant dans [4], l'auteur a prouvé que les techniques dite "crash procedures" sont plus efficaces et il a présenté une technique de recherche de support initial. Ces techniques permettent d'exploiter la structure de la matrice des contraintes pour trouver un ensemble de $m$ colonnes linéairement indépendantes.
Notons par $J_B$ le support trouvé avec par exemple la technique présentée dans [4] ou toute autre technique permettant de trouver une base initiale [15, 20].
Les différentes étapes de la M-Méthode adaptée avec la règle algébrique sont présentées ci-dessous :

1. Choisir un n-vecteur $x^+ \in \mathbb{R}^n_+$ ;
2. Calculer le vecteur $\rho = b - Ax^+$ ;
3. Former le M-problème :

$$\max z = c^T x - M x_{n+1},$$

$$Ax + \rho x_{n+1} = b,$$

$$x, x_{n+1} \geq 0,$$

où $M$ est un nombre positif arbitraire supposé très grand.

4. Résoudre le M-problème avec la méthode adaptée avec la règle algébrique, en commençant par la solution réalisable de support $\{y, J_B\}$, avec
$$y = (x, x_{n+1}) = (x^+, 1).$$
5. Soit $\{y^0, J_B^0\} = \{(x^0, x_{n+1}^0), J_B^0\}$ la SRS optimale trouvée.
Deux cas peuvent se présenter :
   (a) Cas 1. Si $x_{n+1}^0 > 0$, alors le problème original (3.1)-(3.3) n'a pas de solutions réalisables. En effet, supposons que le problème original (3.1)-(3.3) admet une solution réalisable $x \in \mathbb{R}_+^n$. Le vecteur $y^1 = (x, 0)$ est une solution réalisable pour le $M$-problème, avec $z(y^1) > z(y^0)$, ce qui contredit le fait que $y^0$ est une solution optimale pour le $M$-problème.
   (b) Cas 2. Si $x_{n+1}^0 = 0$, alors $x^0$ est une solution optimale pour le problème original (3.1)-(3.3).

**Exemple 13.**
Résolvons par la M-méthode adaptée avec la règle algébrique le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) = 3x_1 + 2x_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 50, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 4\}. \end{aligned}$$

**Solution.**
Prenons $J_B = \{3, 4\}$. Posons $x^+ = (1, 1, 1, 1)^T$ et calculons le vecteur

$$\rho = b - Ax^+ = \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

Considérons le M-problème suivant :

$$\begin{aligned} \max z(x) = 3x_1 + 2x_2 - Mx_5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 12x_5 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 + 42x_5 = 50, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 5\}, \end{aligned}$$

où $M$ est un nombre arbitraire supposé très grand. On remarque bien que le couple $\{y, J_B\}$, où

$$y^T = (x^+, 1) = (1, 1, 1, 1, 1),\ J_B = \{3, 4\},$$

est une solution réalisable de support pour le M-problème. Appliquons alors la méthode adaptée avec la règle algébrique à ce $M$-problème.

**Première itération :**

On a

$$J_B = \{3,4\},\ J_N = \{1,2,5\},\ c_B^T = (0,0),\ c_N^T = (3,2,-M),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 5 & 42 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\ E_N^T = (E_1, E_2, E_5) = \pi^T A_N - c_N^T = (-3,-2,M).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de la solutions réalisable $y$.

**Amélioration de $y$ :**

**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \\ 35 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :** $\theta^0 = \theta_{j_0} = 1$.

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\overline{y}$ :**

$$\overline{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \\ 35 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 11 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $z(\overline{y}) = 10$.

On a $E_N \ngeq 0$ et $\theta^0 = \theta_{j_0} = 1$, alors on pose $\overline{J}_B = J_B$ et $\overline{J}_N = J_N$.

**Deuxième itération :**

On a

$$J_B = \{3,4\},\ J_N = \{1,2,5\},\ c_B^T = (0,0),\ c_N^T = (3,2,-M),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 5 & 42 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\ E_N^T = (E_1, E_2, E_5) = \pi^T A_N - c_N^T = (-3,-2,M).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe à l'amélioration de la solution réalisable $y$.

**Amélioration de $y$ :**

**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \theta_4 = 36/7 \Rightarrow j_1 = 4.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\overline{y}$ :**

$$\overline{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 11 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} + (36/7) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/7 \\ 50/7 \\ 5/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $z(\overline{y}) = 250/7$.

**Changement de support avec la règle algébrique :**

L'ensemble des indices non-optimaux est donné par :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } y_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } y_j > 0\right] \right\} = \{1,2\}.$$

Donc

$$x_{i_1 j} = x_{2j} = e_2^T a_j,\ j \in J_{NNO} \text{ et } \left|x_{i_1 j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|x_{i_1 j}\right|.$$

Nous obtenons

$$|x_{i_1 j_0}| = \max\{|x_{21}|, |x_{22}|\} = \max\{2,5\} = |x_{22}| \Rightarrow j_0 = 2.$$

Le nouveau support est :

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = (\{3,4\} \setminus \{4\}) \cup \{2\} = \{3,2\},\ \overline{J}_N = \{1,4,5\}.$$

**Troisième itération :**

On a

$$J_B = \{3,2\},\ J_N = \{1,4,5\},\ c_B^T = (0,2),\ c_N^T = (3,0,-M),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 42 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,2/5),\ E_N^T = (E_1,E_4,E_5) = \pi^T A_N - c_N^T = (\frac{-11}{5}, \frac{2}{5}, M + \frac{84}{5}).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de la solution réalisable $y$.

**Amélioration de $y$ :**

**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \theta_3 = 25/21 \Rightarrow j_1 = 3.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable** $\bar{y}$ :

$$\bar{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 50/7 \\ 50/7 \\ 5/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (25/21) \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175/21 \\ 140/21 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $z(\bar{y}) = 805/21$.
**Changement de support avec la règle algébrique :**
L'ensemble des indices non-optimaux est donné par :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } y_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } y_j > 0\right] \right\} = \{1\} \Rightarrow j_0 = 1.$$

Le nouveau support est :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = (\{3,2\} \setminus \{3\}) \cup \{1\} = \{1,2\},\ \bar{J}_N = \{3,4,5\}.$$

**Quatrième itération :**
On a

$$J_B = \{1,2\},\ J_N = \{3,4,5\},\ c_B^T = (3,2),\ c_N^T = (0,0,-M),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 42 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (11/3, -1/3),\ E_N^T = (E_3, E_4, E_5) = \pi^T A_N - c_N^T = (11/3, -1/3, M+30).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de la solution réalisable $y$.
**Amélioration de** $y$ **:**
**Calcul de la direction d'amélioration** $d$ **:**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \theta_2 = 140/7 \Rightarrow j_1 = 2.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable** $\bar{y}$ :

$$\bar{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 175/21 \\ 140/21 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (140/7) \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $z(\bar{y}) = 45$.

**Changement de support avec la règle algébrique :**

L'ensemble des indices non-optimaux est donné par :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } y_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } y_j > 0\right] \right\} = \{4\} \Rightarrow j_0 = 4.$$

Le nouveau support est :

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = (\{1,2\} \setminus \{2\}) \cup \{4\} = \{1,4\}, \; \bar{J}_N = \{3,2,5\}.$$

**Cinquième itération :**

On a

$$J_B = \{1,4\}, \; J_N = \{3,2,5\}, \; c_B^T = (3,0), \; c_N^T = (0,2,-M),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 0 & 5 & 42 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (3,0), \; E_N^T = (E_3, E_2, E_5) = \pi^T A_N - c_N^T = (3, 1, M+36).$$

On a $E_N \geq 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{y}, J_B)$ :

$$\beta(\bar{y}, J_B) = \sum_{j \in J_N} E_j y_j = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Par conséquent, $y = (15, 0, 0, 20, 0)^T$ est une solution optimale du M-problème. Comme $x_5 = 0$, alors $x = (15, 0, 0, 20)^T$ est une solution optimale du problème original, avec $z(x) = 45$.

### 3.5.3 La M-méthode adaptée avec la règle du pas simple

Dans le cas où nous ne connaissons pas une solution réalisable initiale et un support dual réalisable pour la méthode adaptée à pas simple, nous formons un nouveau problème dit "M-problème" avec deux nouvelles variables et une contrainte additionnelle. Ce M-problème possède une solution réalisable initiale et un support dual réalisable de départ évidents. La résolution de ce M-problème avec la méthode adaptée à pas simple permet

d'obtenir la solution optimale du problème original.
Supposons qu'un support initial $J_B$ est connu pour le problème original (3.1)-(3.3) (s'il n'est pas connu on le calcule avec la technique présentée dans [4]). Alors ce dernier peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) &= c_B^T x_B + c_N^T x_N, \\ A_B x_B + A_N x_N &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Deux cas peuvent se présenter :
**Cas 1.** Le support initial $J_B$ est un support dual réalisable.
Les différentes étapes de la M-Méthode adaptée à pas simple sont présentées ci-dessous :

1. Choisir un n-vecteur $x^+ \in \mathbb{R}_+^n$ ;
2. Calculer le vecteur $\rho = b - Ax^+$ ;
3. Former le M-problème :

$$\begin{aligned} \max\ z(x) &= c^T x - Mx_{n+1}, \\ Ax + \rho x_{n+1} &= b, \\ x, x_{n+1} &\geq 0, \end{aligned}$$

   où $M$ est un nombre positif arbitraire supposé très grand.
4. Résoudre le M-problème avec la méthode adaptée à pas simple, en commençant par la solution réalisable de support $\{y, J_B\}$, avec

$$y = (x, x_{n+1}) = (x^+, 1).$$

5. Soit $\{y^0, J_B^0\} = \{(x^0, x_{n+1}^0), J_B^0\}$ la SRS optimale trouvée.
   Deux cas peuvent se présenter :
   (a) Cas 1. Si $x_{n+1}^0 > 0$, alors le problème original (3.1)-(3.3) n'a pas de solutions réalisables.
   (b) Cas 2. Si $x_{n+1}^0 = 0$, alors $x^0$ est une solution optimale pour le problème original (3.1)-(3.3).

**Cas 2.** Le support initial $J_B$ n'est pas un support dual réalisable ($\exists j \in J_N$, tel que $E_j < 0$). D'abord nous ajoutons au problème (3.21) une autre contrainte [24]. Ainsi nous obtenons le problème suivant :

$$\max\ z(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} A_B x_B + A_N x_N &= b, \\ e^T x_N + x_{n+1} &= M, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$x, x_{n+1} \geq 0, \tag{3.24}$$

où $M$ est un nombre arbitraire positif supposé très grand, $e \in \mathbb{R}^{n-m}$ un $n-m$-vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 et $x_{n+1}$ une variable positive ou nulle.

Notons par $\pi$, $E$ le vecteur des multiplicateurs et celui des coûts réduits respectivement, du problème original. Et par $\overline{\pi}$, $\overline{E}$ ceux du nouveau problème (3.22)-(3.24).
Démontrons la proposition suivante :

**Proposition 6.**
Le support $\overline{J}_B = J_B \cup \{p\}$ , où $p$ est l'indice vérifiant :

$$E_p = \min_{j \in J_N} \{E_j\}$$

est un support dual réalisable pour le problème (3.22)-(3.24).

**Preuve.**
On a :

$$\overline{J}_N = (J_N \setminus \{p\}) \cup \{n+1\},\ \overline{c}_N^T = (c_j, j \in \overline{J}_N),\ \overline{c}_B^T = (c_j, j \in \overline{J}_B),$$

$$\overline{A} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_{n+1}) = \begin{pmatrix} A_B & A_N & 0_{\mathbb{R}^m} \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & e^T & 1 \end{pmatrix},\ \overline{A}_B = \begin{pmatrix} A_B & a_p \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & 1 \end{pmatrix},\ \overline{A}_N = (I, \overline{J}_N).$$

On va tout d'abord démontrer que $\overline{J}_B$ est un support, i.e., $\det \overline{A}_B \neq 0$.
On a

$$\det \overline{A}_B = \det \begin{pmatrix} A_B & a_p \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det A_B = \det A_B \neq 0 \ \ (\text{car } J_B \text{ est un support}).$$

Ce qui démontre que $\overline{J}_B$ est un support.
Maintenant démontrons que le support $\overline{J}_B$ est un support dual réalisable, i.e.,

$$\overline{E}_j = \overline{\pi}^T \overline{a}_j - \overline{c}_j \geq 0,\ \forall j \in \overline{J}_N.$$

Pour ce faire, calculons l'inverse de la matrice $\overline{A}_B$ avec la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_B & a_p & \multirow{2}{*}{$I_{m+1}$} \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & 1 & \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|cc} \multirow{2}{*}{$I_{m+1}$} & A_B^{-1} & -A_B^{-1} a_p \\ & 0_{\mathbb{R}^m}^T & 1 \end{array}\right]$$

Alors on a

$$\overline{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} & -A_B^{-1} a_p \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des multiplicateurs $\overline{\pi}$ est alors calculé de la manière suivante :

$$\overline{\pi}^T = \overline{c}_B^T \overline{A}_B^{-1} = \left(c_B^T, c_p\right) \begin{pmatrix} A_B^{-1} & -A_B^{-1} a_p \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & 1 \end{pmatrix} = \left(c_B^T A_B^{-1}, -E_p\right).$$

- Si $j \in \overline{J}_N \setminus \{n+1\}$ , alors on aura

$$\overline{E}_j = \overline{\pi}^T \overline{a}_j - \overline{c}_j = \left(c_B^T A_B^{-1}, -E_p\right) \begin{pmatrix} a_j \\ 1 \end{pmatrix} - \overline{c}_j = c_B^T A_B^{-1} a_j - E_p - c_j.$$

Nous obtenons

$$\overline{E}_j = E_j - E_p \geq 0,\ j \in \overline{J}_N \setminus \{n+1\}.$$

- Si $j = n+1$, alors on aura

$$\overline{E}_{n+1} = \overline{\pi}^T \overline{a}_{n+1} - \overline{c}_{n+1} = \left(c_B^T A_B^{-1}, -E_p\right) \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^m} \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -E_p.$$

Comme $J_B$ est un support qui n'est pas dual réalisable, alors il existe $j \in J_N : E_j < 0$, donc $E_p = \min\limits_{j \in J_N} \{E_j\} < 0$, nous obtenons alors :

$$\overline{E}_{n+1} = -E_p \geq 0.$$

Ce qui complète la démonstration.

Afin d'avoir une solution réalisable de départ évidente, ajoutons une variable artificielle $x_{n+2}$ au problème (3.22)-(3.24), nous obtenons le M-problème suivant :

$$\max\ z(x) = \overline{c}^T \overline{x} - M' x_{n+2}, \tag{3.25}$$

$$\overline{A}\overline{x} + \rho x_{n+2} = \overline{b}, \tag{3.26}$$

$$\overline{x}, x_{n+2} \geq 0, \tag{3.27}$$

où

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_B & A_N & 0_{\mathbb{R}^m} \\ 0_{\mathbb{R}^m}^T & e^T & 1 \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix},\ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \\ x_{n+1} \end{pmatrix},\ \overline{c} = (c, 0),\ \rho = \overline{b} - \overline{A}\overline{x}^+,$$

avec $\overline{x}^+ \geq 0$ est un vecteur choisi arbitrairement et $M'$ un nombre arbitraire positif supposé très grand.

On résout ce M-problème avec la méthode adaptée à pas simple, en commençant par la solution réalisable de support $\{y, J_B\}$, où

$$y = (\overline{x}, x_{n+2}) = (\overline{x}^+, 1).$$

Soit $\{y^0, J_B^0\} = \{(\overline{x}^0, x_{n+2}^0), J_B^0\}$ la solution optimale de support trouvée.
Deux cas peuvent alors se présenter :

1. Cas 1. Si $x_{n+2}^0 > 0$, alors le problème (3.1)-(3.3) n'a pas de solutions réalisables car dans ce cas, la fonction $z = c^T x - M' x_{n+2}$, ne peut jamais prendre une valeur finie.
2. Cas 2. Si $x_{n+2}^0 = 0$, alors $\overline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0)^T$ est une solution optimale du problème (3.22)-(3.24). Ici également deux cas se présentent :
   (a) Cas 2.1. Si $x_{n+1}^0 > 0$, alors $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)^T$ est une solution optimale pour le problème original (3.1)-(3.3).
   (b) Cas 2.2. Si $x_{n+1}^0 = 0$, alors le problème original (3.1)-(3.3) est non borné.

**Exemple 14.**
Résolvons par la M-méthode adaptée à pas simple le problème suivant :

$$\begin{gathered}\max\ z(x) = x_1 + x_2,\\ x_1 + x_2 + x_3 = 3,\\ x_2 + x_4 = 2,\\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,4\}.\end{gathered}$$

**Solution.**
On a

$$\begin{gathered}J_B = \{3,4\},\ J_N = \{1,2\},\ c_B^T = (0,0),\ c_N^T = (1,1),\\ A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = I_2,\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{gathered}$$

On choisit $J_B = \{3,4\}$ comme un support initial. Calculons le vecteur des multiplicateurs et celui des coûts réduits :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\ E_N^T = (E_3, E_4) = \pi^T A_N - c_N^T = (-1,-1).$$

Alors ce support n'est pas un support dual réalisable. Donc nous ajoutons une autre contrainte à ce problème. Nous obtenons alors le problème suivant :

$$\begin{gathered}\max z(x) = x_1 + x_2,\\ x_1 + x_2 + x_3 = 3,\\ x_2 + x_4 = 2,\\ x_1 + x_2 + x_5 = M,\\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,5\},\end{gathered} \tag{3.28}$$

où $M$ est un nombre arbitraire positif supposé très grand.
On a

$$E_p = \min_{j \in J_N} \{E_j\} = \min\{-1,-1\} = E_1.$$

Donc le support $\overline{J}_B = J_B \cup \{p\} = \{3,4,1\}$ est un support dual réalisable pour le problème (3.28).
Posons

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ M \end{pmatrix},\ x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et calculons le vecteur $\rho$ :

$$\rho = \overline{b} - \overline{A}x^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M-3 \end{pmatrix}.$$

Considérons le $M$-problème suivant :

$$\begin{gathered}
\max\ z(x) = x_1 + x_2 - M' x_6, \\
x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
x_2 + x_4 = 2, \\
x_1 + x_2 + x_5 + (M-3)x_6 = M, \\
x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 6\},
\end{gathered}$$

où $M'$ est un nombre arbitraire supposé très grand et $\{y, \overline{J}_B\}$, avec

$$y = (x^+, 1) = (1,1,1,1,1,1),\ \overline{J}_B = \{3,4,1\},$$

est une solution réalisable de support pour le $M$-problème et $J_B$ est un support dual réalisable pour le $M$-problème. Appliquons la méthode adaptée à pas simple à ce $M$-problème.

**Première itération :**

Posons

$$J_B = \{3,4,1\},\ J_N = \{2,5,6\},\ c_B^T = (0,0,1),\ c_N^T = (1,0,-M'),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & M-3 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0,1),\ E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T = (0,1,M'+M-3).$$

On a $\beta(y,\ J_B) \neq 0$, alors on passe à l'amélioration de la solution réalisable $y$.

**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ d_B = \begin{pmatrix} -M+2 \\ 0 \\ M-2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} M-2 \\ 0 \\ -M+2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = 1/(M-2) = \theta_3 \Rightarrow j_1 = 3.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\overline{y}$ :**

$$\overline{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\tfrac{1}{M-2}) \begin{pmatrix} M-2 \\ 0 \\ -M+2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ (M-3)/(M-2) \\ (M-3)/(M-2) \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :**

$$z(\bar{y}) = \frac{-6+3M-M'M+3M'}{M-2}.$$

**Changement de support avec la règle du pas simple :**
**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa = y + d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M-2 \\ 0 \\ -M+2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M-1 \\ 1 \\ -M+3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la direction duale $t$ et du pas dual $\sigma^0$ :**

$$t_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -M+3 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -M+3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^0 = \sigma_5 = 1 \Rightarrow j_0 = 5.$$

Le nouveau support est alors

$$\bar{J}_B = (J_B / \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{5,4,1\},\ \bar{J}_N = \{2,3,6\}.$$

Le nouveau vecteur des coûts réduits est

$$\bar{E} = E + \sigma^0 t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ M'+M-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -M+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ M' \end{pmatrix}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{5,4,1\},\ J_N = \{2,3,6\},\ c_B^T = (0,0,1),\ c_N^T = (1,0,-M'),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & M-3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur des coûts réduits est : $E_N^T = (0,1,M')$.
On a $\beta(y, J_B) \neq 0$, alors on passe à l'amélioration de la solution réalisable $y$.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-M+3)/(M-2) \end{pmatrix}, \; d_B = \begin{pmatrix} (M-3)^2/(M-2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (M-3)^2/(M-2) \\ (-M+3)/(M-2) \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement :** $\theta^0 = 1 = \theta_6$.
**Calcul de la nouvelle solution** $\bar{y}$ **:**

$$\bar{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ M-3/M-2 \\ M-3/M-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (M-3)^2/(M-2) \\ (-M+3)/(M-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ M-3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $z(\bar{y}) = 3$.
On a $\theta^0 = 1$, alors $y = (2,1,0,1,M-3,0)^T$ est une solution optimale pour le $M$-problème. Comme $x_6 = 0$, nous obtenons $(2,1,0,1,M-3)^T$ est une solution optimale pour le problème (3.28). Puisque $x_5 = M-3 > 0$, alors

$$x = (2,1,0,1)^T$$

est une solution optimale pour le problème original, avec $z(x) = 3$.
Illustrons maintenant la méthode adaptée à pas simple pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables non-négatives qui sont non bornés.

**Exemple 15.**
Résolvons par la M-méthode adaptée à pas simple le problème suivant :

$$\begin{gathered} \max\ z(x) = x_1 + x_2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1,...,4\}. \end{gathered}$$

**Solution.**
On choisit $J_B = \{3,4\}$ comme support initial. Calculons le vecteur des multiplicateurs et celui des coûts réduits :

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\; E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T = (-1,-1).$$

Alors ce support n'est pas un support dual réalisable. Nous ajoutons une nouvelle contrainte à ce problème et nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{aligned}
\max\ z(x) &= x_1 + x_2, \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 1, \\
x_1 + x_2 + x_5 &= M, \\
x_j \geq 0, \forall j &\in \{1, ..., 5\},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

où $M$ est un nombre arbitraire positif supposé très grand.
On a

$$E_p = \min_{j \in J_N} \{E_j\} = \min\{-1, -1\} = E_1.$$

Donc le support $\overline{J}_B = J_B \cup \{p\} = \{3, 4, 1\}$ est un support dual réalisable pour le problème (3.29).
Posons

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ M \end{pmatrix}, \ x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et calculons le vecteur $\rho$ :

$$\rho = \overline{b} - \overline{A}x^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M-3 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une SRS de départ, considérons le $M$-problème suivant :

$$\begin{aligned}
\max z(x) &= x_1 + x_2 - M' x_6, \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 1, \\
x_1 + x_2 + x_5 + (M-3)x_6 &= M, \\
x_j \geq 0, \forall j &\in \{1, ..., 6\},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où $M'$ est un nombre arbitraire supposé très grand et $\{y, \overline{J}_B\}$, avec

$$y^T = (x^+, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, 1), \ \overline{J}_B = \{3, 4, 1\},$$

est une solution réalisable de support pour le $M$-problème (3.30) et $\overline{J}_B = \{3, 4, 1\}$ est un support dual réalisable pour le $M$-problème (3.30).

Appliquons la méthode adaptée à pas simple à ce $M$-problème.

**Première itération :**

Posons

$$J_B = \{3,4,1\},\ J_N = \{2,5,6\},\ c_B^T = (0,0,1),\ c_N^T = (1,0,-M'),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & M-3 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0,1),\ E_N^T = \pi^T A_N - c_N^T = (0,1,M'+M-3).$$

On a $\beta(y,J_B) \neq 0$, alors on passe à l'amélioration de la solution réalisable $y$.

**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ d_B = \begin{pmatrix} M \\ -M \\ M-1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} M-1 \\ -1 \\ M \\ -M \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = 1/M = \theta_4 \Rightarrow j_1 = 4.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{y}$ :**

$$\bar{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1/M) \begin{pmatrix} M-1 \\ -1 \\ M \\ -M \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2M-1}{M} \\ \frac{M-1}{M} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{M-1}{M} \\ \frac{M-1}{M} \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :**

$$z(\bar{y}) = \frac{-2+3M+M'-M'M}{M}.$$

**Changement de support avec la règle du pas simple :**

**Calcul de la pseudo-solution $\kappa$ :**

$$\kappa = y + d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M-1 \\ -1 \\ M \\ -M \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ M+1 \\ -M+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la direction duale $t$ et du pas dual $\sigma^0$ :**

$$t_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_N = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -M+3 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -M+3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^0 = \sigma_2 = 0 \Rightarrow j_0 = 2.$$

Le nouveau support est :

$$\overline{J}_B = (J_B/\{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{3,2,1\},\ \overline{J}_N = \{4,5,6\}.$$

Le nouveau vecteur des coûts réduits est

$$\overline{E} = E + \sigma^0 t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ M' + M - 3 \end{pmatrix}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{3,2,1\},\ J_N = \{4,5,6\},\ c_B^T = (0,1,1),\ c_N^T = (0,0,-M'),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & M-3 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des coûts réduits :** $E_N^T = (0,1,M'+M-3)$.
On a $\beta(y,J_B) \neq 0$, alors on passe à l'amélioration de cette solution.
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1-M}{M} \\ \dfrac{1-M}{M} \end{pmatrix},\ d_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{(M-1)(M-2)}{2M} \\ \dfrac{(M-1)(M-2)}{2M} \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} \dfrac{(M-1)(M-2)}{2M} \\ \dfrac{(M-1)(M-2)}{2M} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1-M}{M} \\ \dfrac{1-M}{M} \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement :** $\theta^0 = 1$.
**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\overline{y}$ :**

$$\bar{y} = y + \theta^0 d = \begin{pmatrix} \frac{2M-1}{M} \\ \frac{M-1}{M} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{M-1}{M} \\ \frac{M-1}{M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(M-1)(M-2)}{2M} \\ \frac{(M-1)(M-2)}{2M} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1-M}{M} \\ \frac{1-M}{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M+1}{2} \\ \frac{M-1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La nouvelle valeur de la fonction objectif est : $z(\bar{y}) = M$.
On a $\theta^0 = 1$, alors

$$y = (\frac{M+1}{2}, \ \frac{M-1}{2}, \ 2, \ 0, \ 0, \ 0)^T$$

est une solution optimale pour le $M$-problème (3.30). Puisque $x_6 = 0$,

$$(\frac{M+1}{2}, \ \frac{M-1}{2}, \ 2, \ 0, \ 0)^T$$

est une solution optimale pour le problème (3.29). Comme $x_5 = 0$, alors le problème original est non borné.

## 3.6 Exemples numériques et comparaison graphique entre la méthode adaptée et la méthode du simplexe

**Exemple 16.**
Résolvons par la méthode adaptée avec la règle algébrique le problème suivant :

$$\max \ z(x) = 3x_1 + 2x_2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 15,$$
$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 15,$$
$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1, ..., 4\}.$$

**Solution.**
Soit $\{x, J_B\}$, où $x = (0, 0, 15, 50)^T$ et $J_B = \{3, 4\}$ une solution réalisable de support initiale de ce problème, avec $z(x) = 0$. Posons $\alpha = 1$.
**Première itération :**
On a

$$J_B = \{3,4\}, \ J_N = \{1,2\}, \ c_B^T = (0,0), \ c_N^T = (3,2),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0,0),\ E_N^T = (E_1,E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (-3,-2).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de cette solution.
**Amélioration de la solution réalisable $x$ :**
**Calcul de la direction d'amélioration $d$ :**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \theta_4 = 50/7.$$

**Calcul de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ :**

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix} + (50/7) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/7 \\ 50/7 \\ 5/7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $\bar{z} = 250/7$.
**Test d'optimalité de $\bar{x}$ :**
On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe au changement de support.
**Changement de support $J_B$ en $\bar{J}_B$ :**
L'ensemble des indices non-optimaux est donné par :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\} = \{1,2\}.$$

Donc

$$x_{i_1 j} = x_{2j} = e_2^T A_B^{-1} a_j = e_2^T a_j,\ j \in J_{NNO} \text{ et } \left|x_{i_1 j_0}\right| = \max_{j \in J_{NNO}} \left|x_{i_1 j}\right|.$$

Nous obtenons

$$|x_{i_1 j_0}| = \max\{|x_{21}|, |x_{22}|\} = \max\{2,5\} = |x_{22}| \Rightarrow j_0 = 2.$$

Le nouveau support est

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{3,2\},\ \bar{J}_N = \{1,4\}.$$

**Deuxième itération :**
On a

$$J_B = \{3,2\},\ J_N = \{1,4\},\ c_B^T = (0,2),\ c_N^T = (3,0),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (0, 2/5),\ E_N^T = (E_1, E_4) = \pi^T A_N - c_N^T = (-11/5, 2/5).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de cette solution.
**Amélioration de la solution réalisable** $x$ **:**
**Calcul de la direction d'amélioration** $d$ **:**

$$d_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement** $\theta^0$ **:**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \theta_3 = 25/21.$$

D'où

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 50/7 \\ 50/7 \\ 5/7 \\ 0 \end{pmatrix} + (25/21) \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175/21 \\ 140/21 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $\bar{z} = 805/21$.
**Test d'optimalité de** $\bar{x}$ **:**
On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe au changement de support.
**Changement de support** $J_B$ **en** $\bar{J}_B$ **:**
L'ensemble des indices non-optimaux est donné par :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\} = \{1\} \Rightarrow j_0 = 1.$$

D'où

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{1, 2\},\ \bar{J}_N = \{3, 4\}.$$

**Troisième itération :**

$$J_B = \{1, 2\},\ J_N = \{3, 4\},\ c_B^T = (3, 2),\ c_N^T = (0, 0),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 175/21 \\ 140/21 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui des coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (11/3, -1/3),\ E_N^T = (E_3, E_4) = \pi^T A_N - c_N^T = (11/3, -1/3).$$

On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe a l'amélioration de cette solution.
**Amélioration de la solution réalisable** $x$ **:**
**Calcul de la direction d'amélioration** $d$ **:**

$$d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_B = -A_B^{-1}A_N d_N = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du pas de déplacement $\theta^0$ :**

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \theta_2 = 20.$$

D'où

$$\bar{x} = x + \theta^0 d = \begin{pmatrix} 175/21 \\ 140/21 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

**Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif :** $\bar{z} = 45$.
**Test d'optimalité de $\bar{x}$ :**
On a $E_N \ngeq 0$, alors on passe au changement de support.
**Changement de support $J_B$ en $\overline{J}_B$ :**
L'ensemble des indices non-optimaux est donné par :

$$J_{NNO} = \left\{ j \in J_N : \left[E_j < 0 \text{ et } x_j = 0\right] \text{ ou } \left[E_j \neq 0 \text{ et } x_j > 0\right] \right\} = \{4\} \Rightarrow j_0 = 4.$$

D'où

$$\overline{J}_B = (J_B \setminus \{j_1\}) \cup \{j_0\} = \{1,4\},\ \overline{J}_N = \{3,2\}.$$

**Quatrième itération :**
On a

$$J_B = \{1,4\},\ J_N = \{3,2\},\ c_B^T = (3,0),\ c_N^T = (0,2),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

**Calcul du vecteur des multiplicateurs et de celui coûts réduits :**

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} = (3,0),\ E_N^T = (E_3, E_2) = \pi^T A_N - c_N^T = (3,1).$$

On a $E_N \geq 0$, alors on calcule l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = E_N^T x_N = \sum_{j \in J_N} E_j x_j = E_3 x_3 + E_2 x_2 = 0.$$

Donc la solution $x$ est une solution optimale du problème considéré et la valeur de la fonction objectif correspondante est $z = 45$.

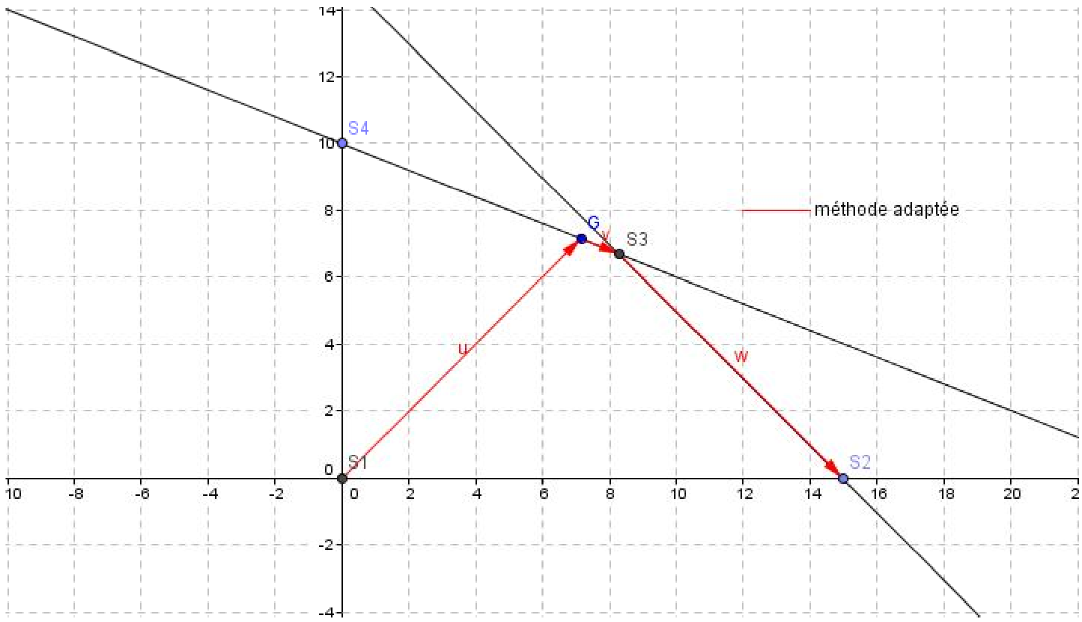


Figure -2-Chemin suivi par la méthode adaptée avec la règle algébrique en démarrant par un sommet.

**Remarque 6.**
Lorsque nous démarrons par un sommet, la méthode adaptée avec la règle algébrique peut passer à un point frontière.

**Exemple 17.**
On résout par la méthode adaptée et la méthode du simplexe le problème suivant :

$$\begin{gathered}\max\ z(x)=x_1+2x_2,\\ x_1+x_2\leq 5,\\ x_2\leq 2,\\ -x_1+x_2\leq 1,\\ x_1-x_2\leq 3,\\ x_j\geq 0,\forall j\in\{1,2\}.\end{gathered}$$

Dans la figure suivante nous montrons les chemins suivis par la méthode adaptée avec la règle algébrique et celle du simplexe pour obtenir la solution optimale.
On voit bien que les chemins suivis sont comme suit :
Méthode du simplexe : $S1\rightarrow S6\rightarrow S5\rightarrow S4$.
La méthode adaptée : $B\rightarrow D\rightarrow S4$.
Avec

$$S1=(0,0),\ S4=(3,2),\ S5=(1,2),\ S6=(0,1),\ B=(1,1),\ D=(2,2).$$

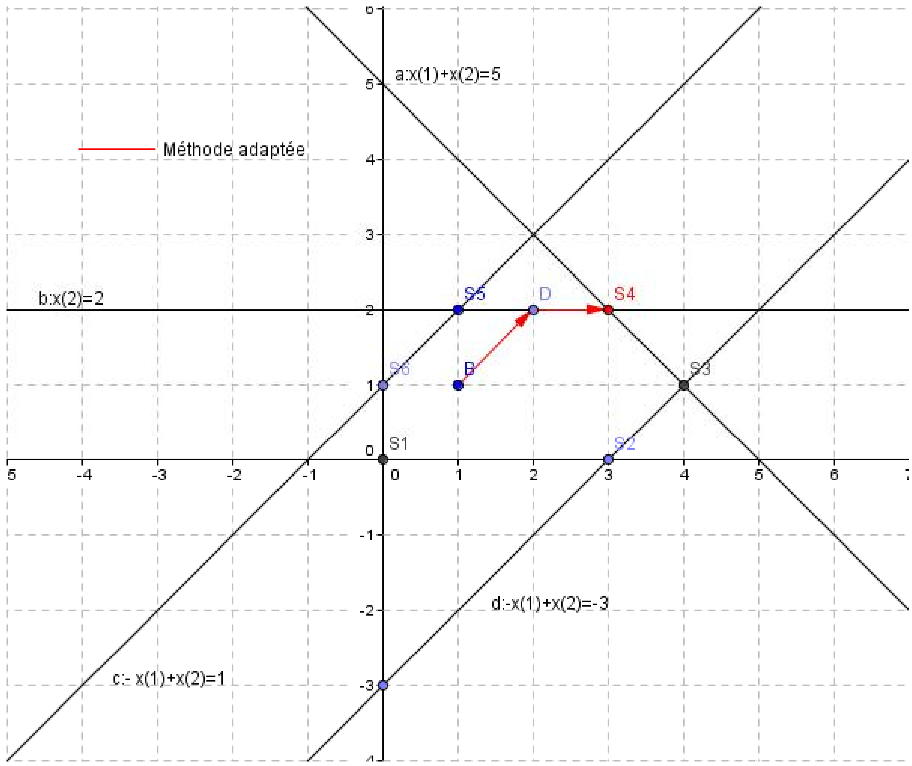


Figure-3-Chemin suivi par la méthode adaptée avec la règle algébrique.

## 3.7 Résultats expérimentaux

Afin d'effectuer une comparaison numérique entre la méthode primale du simplexe (MPS), la méthode duale du simplexe (MDS) et les deux variantes de la méthode adaptée : celle avec la règle algébrique (MAA) et celle à pas simple (MAPS), une implémentation sous le langage de programmation C++ a été développée. Nous avons également développé un programme qui permet de générer des problèmes de programmation linéaire de la forme :

$$\max\ z = c^T x,$$
$$Ax \leq b,$$
$$x \geq 0,$$

où $c, x$ et $b$ sont des $n$-vecteurs, $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$. Les éléments aléatoires de la matrice $A$ et du vecteur $c$ sont uniformément distribués dans l'intervalle $[0, 10]$, avec une densité 30% de la matrice $A$ (nombre d'éléments non-nuls$/n^2$).

Nous avons résolu des problèmes avec la matrice des contraintes $A$ de dimension $n \times n$, tel que $n \in \{20, 40, 60, 80, 100\}$. Pour chaque taille, nous avons généré dix problèmes différents. En totalité, nous avons généré 50 programmes linéaires. Nous avons résolu ces problèmes avec les quatres méthodes que nous avons implémentées. Les différentes méthodes sont initialisées en utilisant la technique de la M-méthode.

Les résultats numériques obtenus sont présentés dans la table 2, où TMP et NIT représentent respectivement le temps moyen d'exécution et le nombre moyen d'itérations né-

cessaires pour la résolution des dix problèmes générés pour chaque taille.
Nous avons également représenté graphiquement NIT et TMP pour les quatres algorithmes. Les graphiques sont montrés respectivement dans la figure 2 et la figure 3.

| | MPS | | MDS | | MAPS | | MAA | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taille | NIT | TMP | NIT | TMP | NIT | TMP | NIT | TMP |
| 20 | 16.6 | 0.02 | 15.7 | 0.10 | 17.3 | 0.02 | 70.7 | 0.03 |
| 40 | 42.7 | 0.08 | 37.8 | 0.05 | 41.4 | 0.06 | 203.5 | 0.02 |
| 60 | 79.1 | 0.13 | 67.6 | 0.20 | 69.6 | 0.22 | 380.7 | 1.01 |
| 80 | 138.2 | 0.47 | 95.9 | 0.64 | 85.2 | 0.59 | 3342.3 | 19.50 |
| 100 | 253.7 | 0.50 | 139.2 | 1.74 | 130.5 | 0.55 | 1979.9 | 22.00 |

Table-2- TMP et NIT en fonction de la taille du problème.

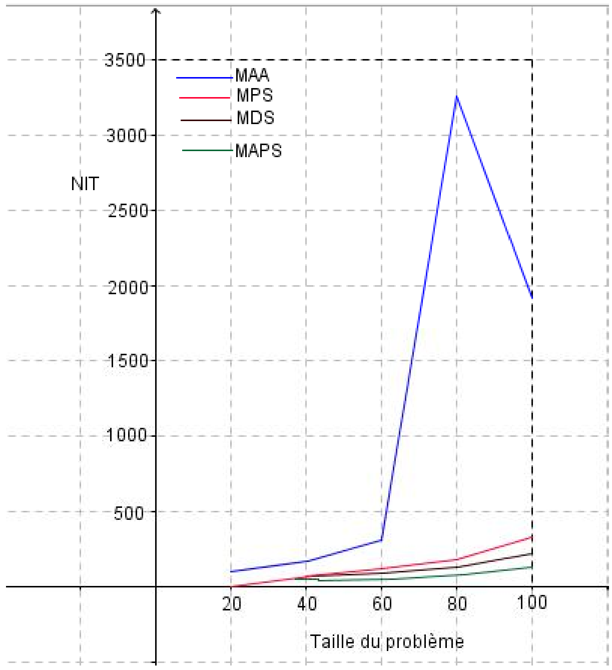


Figure -4-Nombre moyen d'itérations en fonction de la taille du problème.

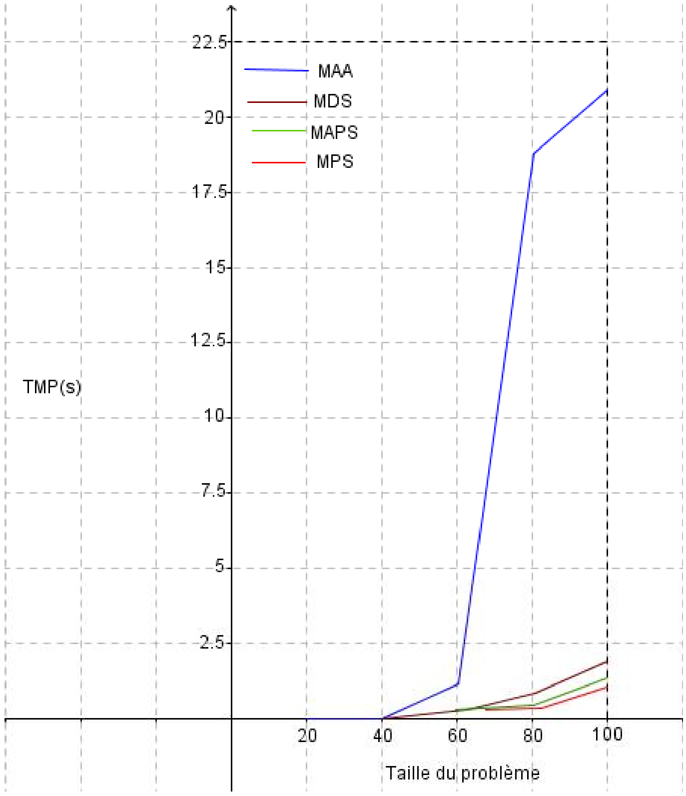


Figure -5-Temps moyen d'exécution en fonction de la taille du problème.

Les différents graphiques montrent bien que la méthode adaptée à pas simple est plus rapide que les autres méthodes.

# Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons adapté la méthode duale de support ainsi que la méthode adaptée développées par R. Gabasov et F.M. Kirillova pour la résolution des problèmes de programmation linéaire à variables non-négatives. A cet effet, trois algorithmes sont décrits et justifiés, à savoir : l'algorithme dual de support ; la méthode adaptée avec la règle algébrique ainsi que la méthode adaptée avec la règle du pas simple.

En s'inspirant des travaux développés dans la thèse de doctorat [4] et ceux présentés dans l'article [24], une technique d'initialisation est proposée et une méthode dite la M-méthode est présentée, et ce, dans le but d'initialiser ces algorithmes avec une solution réalisable de départ et un support initial.

Dans le but de comparer les performances de nos méthodes avec celles de la méthode du simplexe, nous les avons implémentées avec le langage de programmation C++ et nous avons mené plusieurs expérimentations numériques qui permettent de comparer le nombre d'itérations et le temps d'execution de nos méthodes avec celles de la méthode du simplexe. Les résultats trouvés montrent que la méthode adaptée à pas simple est plus rapide que la méthode du simplexe.

Néanmoins, d'autres expériences numériques sur les problèmes-test de la librairie NETLIB [14] sont nécessaires pour confirmer l'efficacité de nôtre méthode pour la résolution des problèmes de grande dimension. Dans de travaux futures, nous allons également adapter les algorithmes proposés dans ce mémoire pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe à variables non-négatives.

# Bibliographie


[1] R.G.D. Allen, Analyse mathématique et théorie économique, Presses Universitaires de France, Paris, 1950.

[2] M. Bazaraa, H.D. Sherali and C.M. Shetty, Nonlinear Programming : Theory and Algorithms, John Wiley, Third edition, USA, 2006.

[3] A.F. Benghezal, Programmation linéaire, Office des Publications Univercitaires, 2ème édition, Algérie, 2006.

[4] M. Bentobache, Méthodes Mathématiques de la Programmation Linéaire et Quadratique, Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, Algérie, 2013.

[5] M. Bentobache et M.O. Bibi, Méthodes Numériques de la Programmation Linéaire et Quadratique, Presses Académiques Francophones, Allemagne, 2016.

[6] M. Bentobache, Mémoire de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, 2005.

[7] M. Bentobache and M.O. Bibi, A Two-phase Support Method for Solving Linear Programs : Numerical Expriments, Mathematical Problems in Engineering. vol. 2012, Article ID 4821993, 28 pages.

[8] R. Cairoli, Algèbre linéaire, Presses Polytechnique et Universitaires Romandes, 2ème édition, 2004.

[9] G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[10] A. Derbala, Cours de Programmation Linéaire, 2010, disponible au site www.univ-blida.dz/pdf/derbala/pl_3ieme/cours/cours03_pl.pdf.

[11] Y. Dodge, Optimisation appliquée, Springer-verlag, France, 2005.

[12] R. Gabasov et F.M. Kirillova, Méthodes de la Programmation Linéaire, Volume 1, 2 et 3, Editions de l'université de Minsk, 1977, 1978 et 1980 (en russe).

[13] R. Gabasov, F.M. Kirillova and S.V. Prischepova, Optimal Feedback Control, Springer-Verlag, London, 1995.

[14] M. Gay, Electronic mail distribution of linear programming test problems, Mathematical Programming Society COAL, Bulletin no. 13, pp. 10–12, 1985, Data available at http ://www.netlib.org/lp/data.

[15] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders and M.H. Wright, A Practical Anticycling Procedure for Linearly Constrained Optimization, Mathematical Programming, vol. 45, pp. 437–474, 1989.

[16] L.V. Kantorovich, Mathematical methods in the organization and planning of production, Publication House of the Leningrad State University, 1939. Translated in management science, vol. 6, pp. 366–422, 1960.

[17] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica, vol. 4, pp. 373–395, 1984.

[18] L.G. Khachian, A polynomial algorithm for linear programming, Soviet Mathematics Doklady, vol. 20, pp. 191–194, 1979.

[19] E. Kostina, The long step rule in the bounded-variable dual simplex method : Numerical experiments, Mathematical Methods of Operations Research, vol. 55, pp. 413–429, 2002.

[20] A. Makhorin, GNU Linear Programming Kit, Reference Manual Version 4.9, Draft Edition, 2006, Software available at www.gnu.org/software/glpk/glpk.html.

[21] S. Mehrotra, On the implementation of a (primal-dual) interior point method, SIAM Journal on Optimization, vol.2, pp. 575–601, 1992.

[22] K. Melloli, A. El Kamal et P. Borne, Programmation Linéaire et Applications, Editions Technip, Paris, 2004.

[23] M. Minoux, Programmation mathématique : Théorie et algorithmes, Editions Lavoisier, Paris, 2007.

[24] K. Paparrizos, N. Samaras and G. Stephanides, A new efficient primal dual simplex algorithm, Computer & Operations research, vol. 30, pp. 1383–1399, 2001.