الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي - الأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI DE LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Harouach Mohamed Amine

THEME

Les opérateurs de Riesz.

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr. Boukhatem Amina	M.C.B	Président
Dr.Chafika Belabbaci	M.C.A	Encadreur
Dr. Choucha Omar	M.C.B	Examinateur

Année Universitaire : 2024/2025

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
À ma chère mère et mon cher père,
À toute ma famille,
À mon professeur superviseur Chafika Belabbaci,
À tous mes enseignants,
À mes amis sans exception.

Remerciements

Je remercie **Dr. CHAFIKA BELABBACI**, directrice de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je remercie : **Dr. Choucha Omar** et **Dr. Boukhatem Amina** qui ont accepté d'être membres de mon jury.

Je salue l'ensemble des membres du département de mathématiques de l'université **Amar Telidji Laghouat**.

Finalement, j'adresse mes remerciements les plus vifs à mes parents pour leur soutien exemplaire et leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir.

Table des matières

Résumé

Ce mémoire de Master étudie la théorie des opérateurs de Riesz, une classe importante d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach, qui généralisent les opérateurs compacts en conservant des propriétés spectrales remarquables. L'objectif principal est d'étudier leurs caractéristiques structurelles, spectrales et fonctionnelles.

Mots clés : Opérateurs de Riesz, Fredholm, Perturbations de Fredholm, polynomialement compacts, quasi-nilpotents.

الملخص

تتناول هذه المذكرة لنيل درجة الماستر نظرية المؤثرات من نوع ريز، وهي فئة مهمة من المؤثرات الخطية المحدودة على فضاء باناش، والتي تُعمِّم المؤثرات المدمجة مع الحفاظ على خصائص طيفية مميزة ، الهدف الرئيسي هو دراسة خصائصها البنيوية والطيفية والوظيفية.

الكلمات المفتاحية: مؤثرات ريز، فريدولم، اضطرابات فريدولم، مدمجة متعددة الحدود، شبه منعدمة.

Abstract

This Master's thesis studies the theory of Riesz operators, an important class of bounded linear operators on a Banach space, which generalize compact operators while preserving remarkable spectral properties. The main objective is to study their structural, spectral, and functional characteristics.

Keywords : Riesz operators, Fredholm operators, Fredholm perturbations, Polynomially compact operators, Quasi-nilpotent.

Notations

X	Espace de Banach,
$B(X)$	Algèbre des opérateurs linéaires et bornés sur E,
$K(X)$	Idéal des opérateurs compacts sur X,
$\Phi^r(X)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm à droite sur X,
$\Phi^l(X)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche sur X,
$\Phi^+(X)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm supérieur sur X,
$\Phi^-(X)$	Ensemble des opérateurs semi-Fredholm inférieur sur X,
$\Phi(X)$	Ensemble des opérateurs de Fredholm sur X,
$\mathcal{R}(X)$	Ensemble des opérateurs de Riesz sur X,
$\mathcal{F}(X)$	Ensemble des perturbations de Fredholm sur X,
$\mathcal{W}(X)$	Ensemble des opérateurs de Weyl sur X,
$\mathcal{B}r(X)$	Ensemble des opérateurs de Browder sur X,
$H(A)$	Ensemble de toutes les fonctions holomorphes,
I	L'opérateur identité sur X,
$\ker(A)$	Noyau de A,
$R(A)$	Image de A,
$\dim(\cdot)$	Dimension algébrique,
codim	Codimension algébrique,
$\alpha(A)$	Nullité de A,
$\beta(A)$	Déficience de A,
$p(A)$	L'ascente de A,
$q(A)$	Descente de A,
A^*	Adjoint de A,
$M^\perp$	L'orthogonale de M dans X,
$\sigma(A)$	Spectre de A,
$\sigma_p(A)$	Spectre ponctuel de A,
$\sigma_c(A)$	Spectre continu de A,
$\sigma_r(A)$	Spectre résiduel de A,
$\sigma_{e_i}(A)$	Spectre essentiel de A.

Introduction

Le concept d'opérateur de Riesz a été introduit par F. Riesz en utilisant un système axiomatique des propriétés des opérateurs compacts qu'il avait précédemment utilisés dans ses travaux sur les équations intégrales. Un opérateur de Riesz est ainsi une généralisation de la notion d'opérateur compact, partageant de nombreuses propriétés spectrales avec ce dernier. Cependant, il est crucial de noter qu'ils ne possèdent pas nécessairement les mêmes propriétés algébriques.

Dans ce mémoire, notre objectif principal est de fournir une étude concise de la classe des opérateurs de Riesz. Plus précisément, on étudie les propriétés fondamentales et les principaux théorèmes des opérateurs de Riesz linéaires dans les espaces de Banach. Ainsi quelques propriétés spectrales de ces opérateurs qui se caractérisent par leur comportement spectral particulier, similaire aux opérateurs compacts.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, le premier chapitre intitulé "Rappels et compléments" porte sur les rappels indispensables pour les autres chapitres. On introduit les concepts fondamentaux tels que les opérateurs linéaires bornés, compacts, Fredholm, semi-Fredholm, perturbation de Fredholm, l'algèbre de Calkin ainsi que des notions de résolvante, de spectre et des spectres essentiels. Le deuxième chapitre intitulé "Opérateurs de Riesz" est consacré à l'étude des propriétés des opérateurs de Riesz (somme, produit, limite, restriction et adjoint d'opérateurs de Riesz, ...) et leurs propriétés algébriques et spectrales comme la description du spectre ($\sigma(T)$) et le cas particulier des opérateurs de Riesz à spectre fini.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés des opérateurs polynomialement de Riesz c'est à dire les opérateurs T tels que $P(T)$ est de Riesz pour un polynôme P caractérisation de leurs propriétés spectrales..

Chapitre 1

Rappels et compléments

On rappelle dans ce chapitre les outils de base nécessaires pour la suite de notre travail. On donne quelques notions sur les différentes classes d'opérateurs (compacts, opérateurs adjoints, Fredholm, semi-Fredholm...) . Ainsi, on étudie les différentes propriétés spectrales des opérateurs linéaires bornés comme les propriétés de l'opérateur résolvent et quelques définitions des spectres essentiels.

Les ouvrages [12],[16] et [14] ont été utilisés pour la rédaction de ce chapitre.

1.1 Opérateurs linéaires bornés

Dans toute la suite de ce mémoire on considère X un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|$.

Définition 1.1.1. *Un opérateur linéaire A défini sur X est dit borné ou bien continu s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

La norme de opérateur A notée, $\|A\|$, est définie par

$$\|A\| = \inf \{c > 0 \,|\, \|Ax\| \leq c\|x\| \, \text{pour tout } x \in X\}.$$

Si A est un opérateur borné sur X, alors

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Ax\| \,|\, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{pour } \|x\| \leq 1. \end{aligned}$$

On note par $B(X,Y)$, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur X dans Y. Lorsque $X = Y$, on le note par $B(X)$.

— Si X est de dimension finie, alors tout opérateur défini de X dans X est borné.

— L'opérateur identité sur X, noté I, est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in X$.

— L'opérateur nul est l'opérateur 0 défini par $0x = 0$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.1.2. *Un opérateur $A \in B(X)$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné dans $B(X)$, noté A^{-1}, tel que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Image et noyau d'un opérateur

L'image d'un opérateur $A \in B(X, Y)$, notée R(A), est défini par

$$R(A) = \{Ax \,|\, x \in X\}.$$

Le noyau d'un opérateur $A \in B(X, Y)$, noté $\ker(A)$ est défini par

$$\ker(A) = \{x \in X \,|\, Ax = 0\}.$$

Ascente et descente

Rappelons que les noyaux et les images des itérés d'un opérateur linéaire borné A sur X forment respectivement deux suites croissante et décroissante de sous-espaces de X.

$$\ker(A^0) = \{0\} \subset \ker(A) \subset \ker(A^2) \subset \cdots$$

et

$$\mathrm{R}(A^0) = X \supset \mathrm{R}(A) \supset \mathrm{R}(A^2) \supset \cdots$$

Généralement, ces inclusions sont strictes. Mais, s'il existe un certain rang à partir du quel ces suites deviennent constantes, alors on a la définition suivante.

Définition 1.1.3. *On appelle*

— *L'ascente de A, le plus petit entier naturel p, noté $= p(A)$, tel que*

$$\ker(A^p) = \ker(A^{p+1}).$$

— *La descente de A, le plus petit entier naturel q, noté $q(A)$, tel que*

$$\mathrm{R}(A^q) = \mathrm{R}(A^{q+1}).$$

Si la suite $(\ker(A^n))_n$ (resp. $(\mathrm{R}(A^n))_n$) est strictement croissante (resp. strictement décroissante), on écrit

$$p(A) = \infty \quad (\text{resp. } q(A) = \infty).$$

Il est clair que

$$p(A) = 0 \iff A \text{ est injectif.}$$

$$q(A) = 0 \iff A \text{ est surjectif.}$$

Proposition 1.1.1. *Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace normé X. Si* $\mathrm{p}(A)$ *et* $\mathrm{q}(A)$ *sont finis, alors* $\mathrm{p}(A) = \mathrm{q}(A)$.

1.1.1 Opérateurs compacts

Définition 1.1.4. *Soit K un opérateur linéaire sur X. On dit que K est compact sur X s'il transforme tout sous-ensemble borné de X en un sous-ensemble relativement compact.*

Autre définition équivalente est donnée par

Définition 1.1.5. *Soient X et Y des espaces normés. Un opérateur $A \in B(X, Y)$ est dit compact si, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X, la suite (Ax_n) dans Y contient une sous-suite convergente.*

L'ensemble des opérateurs compacts est noté par $\mathcal{K}(X, Y)$.

Théorème 1.1.1. *Soient X et Y deux espaces normés et $A \in \mathcal{K}(X, Y)$. Alors A est borné.*

Autrement dit $\mathcal{K}(X, Y) \subset B(X, Y)$.

Démonstration. Supposons que A n'est pas borné. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un vecteur unitaire x_n tel que $\|Ax_n\| \geq n$. Puisque la suite (x_n) est bornée, par la compacité de A, il existe une sous-suite $(Ax_{n(r)})$ qui converge.
Mais ceci contredit le fait que $\|Ax_{n(r)}\| \geq n(r)$, donc A doit être borné.

□

Théorème 1.1.1. *Soient X, Y, Z des espaces normés.*

(a) Si $S, A \in \mathcal{K}(X, Y)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha S + \beta A$ est compact.

(b) Si $S \in B(X, Y)$, $A \in B(Y, Z)$ et au moins l'un des opérateurs S ou A est compact, alors $AS \in B(X, Z)$ est compact.

Démonstration.

(a) Soit (x_n) une suite bornée dans X. Puisque S est compact, il existe une sous-suite $(x_{n(r)})$ telle que $(Sx_{n(r)})$ converge dans Y. Ensuite, comme $(x_{n(r)})$ est bornée et que A est compact, il existe une sous-suite $(x_{n(r(s))})$ de $(x_{n(r)})$ telle que $(Ax_{n(r(s))})$ converge dans Y. Il s'ensuit que la suite $(\alpha Sx_{n(r(s))} + \beta Ax_{n(r(s))})$ converge dans Y, donc $\alpha S + \beta A$ est compact.

(b) Soit (x_n) une suite bornée dans X.
Si S est compact, alors il existe une sous-suite $(x_{n(r)})$ telle que $(Sx_{n(r)})$ converge dans Y. Comme A est borné (et donc continu), la suite $(ASx_{n(r)})$ converge dans Z, donc AS est compact.
Si S est borné mais non compact, alors par la continuité de S, la suite (Sx_n) est bornée dans Y. Par la compacité de A, il existe une sous-suite $(x_{n(r)})$ telle que $(ASx_{n(r)})$ converge dans Z, donc AS est compact. □

Proposition 1.1.2. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$ et $A = I - K$, alors*

1. *Le noyau de A est de dimension finie;* $\dim \ker(I - K) < \infty$.
2. *L'image $R(A)$ est fermée dans X.*

Proposition 1.1.3. *Soit $K \in \mathcal{K}(X)$ un opérateur compact et $A = I - K$, alors A est surjectif si et seulement si A est injectif.*

1.1.2 Adjoint d'un opérateur

Le dual topologique X^* d'un espace de Banach X est l'espace de toutes les formes linéaires continues de X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x^* \in X^*$ et $x \in X$, on note généralement $\langle x, x^* \rangle$ au lieu de $x^*(x)$. Pour tout opérateur linéaire borné A dans $B(X)$, on définit l'opérateur $A^* : X^* \to X^*$ par :

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^* x^* \rangle \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } x^* \in X^*.$$

A^* est appelé l'opérateur adjoint de A.

Proposition 1.1.4. *Soient $A, B \in B(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors on a les propriétes suivantes*

1. $\|A\| = \|A^*\|$.
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$.
3. $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.
4. $(AB)^* = B^* A^*$.
5. $A^{**} = A$.

Proposition 1.1.5. *Soient $A \in B(X)$, alors*

1. $\ker A = \mathrm{R}(A^*)^{\perp}$.
2. $\ker A^* = \mathrm{R}(A)^{\perp}$.
3. $\mathrm{R}(A) = (\ker A^*)^{\perp}$.

Démonstration. Démontrons le premier point, on a

1. $$\begin{array}{rcl} \ker A & = & \{x \in X : Ax = 0\} \\ & = & \{x \in X : \forall y \in X, \langle Ax, y \rangle = 0\} \\ & = & \{x \in X : \forall y \in X, \langle x, A^* y \rangle = 0\} \\ & = & \mathrm{R}(A^*)^{\perp}. \end{array}$$

2. D'après la première assertion, en remplaçant A par A^*, on obtient alors
$$\ker A^* = \mathrm{R}(A^{**})^{\perp} = \mathrm{R}(A)^{\perp}.$$

3. D'après la deuxièmme assertion, on a
$$(\ker A^*)^{\perp} = \mathrm{R}(A)^{\perp\perp} = \mathrm{R}(A).$$

$\square$

1.1.3 Résolvante et spectre

Définition 1.1.6. *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, est dite **holomorphe** si elle est dérivable au sens complexe en tout point de U. Autrement dit, pour tout $z_0 \in U$, la limite suivante existe*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Définition 1.1.7. *Soit $A \in B(X)$. L'ensemble résolvant de A, noté $\rho(A)$, est l'ensemble défini par*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (A - \lambda I) \text{ est inversible}\}.$$

Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé la résolvante de $(A - \lambda I)$.

Théorème 1.1.2. *[14] Soit $A \in B(X)$, la résolvante $R(\lambda, A)$ est une application holomorphe de l'ensemble $\rho(X)$ dans $B(X)$.*

Proposition 1.1.6. *Soit $A \in B(X)$, alors Pour tout $(\lambda, \mu) \in \rho(A) \times \rho(A)$, on a*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A),$$

*appelée **équation résolvante**.*

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \rho(A) \times \rho(A)$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1} I - (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}[(\mu I - A) - (\lambda I - A)](\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \end{aligned}$$

En échangeant λ et μ, on obtient

$$R(\mu, A) - R(\lambda, A) = (\lambda - \mu)R(\mu, A)R(\lambda, A),$$

d'où

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A).$$

$\square$

Définition 1.1.8 (Pôle de la résolvante)**.** *Soit A un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X, et soit $\rho(A)$ le résolvant de A. On dit que $\lambda_0 \in \sigma(A)$ (le spectre de A) est un pôle de la résolvante de A si la fonction résolvante*

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

possède un pôle (au sens des fonctions holomorphes) en λ_0.

Autrement dit, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $R(\lambda, A)$ admet un développement en série de Laurent au voisinage de λ_0 de la forme

$$R(\lambda, A) = \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k A_k,$$

où les $A_k \in B(X)$ sont des opérateurs bornés, et $A_{-m} \neq 0$.
L'entier m est appelé l'ordre du pôle (voir [10]).

Définition 1.1.9. *Le complémentaire de l'ensemble résolvant dans le plan complexe, noté $\sigma(A)$ est appelé le spectre de A.*

Autrement dit,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (\lambda I - A) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Proposition 1.1.7. *Soit $A \in B(X)$, alors*

1. $\sigma(A) \subset \overline{B}_C(0, \|A\|) = \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \|A\|\}$, *ce qui équivaut à*

$$\text{si } |\lambda| > \|A\| \text{ alors } \lambda \in \rho(A).$$

2. $\rho(A)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$.
3. $\sigma(A)$ *est un compact non vide de* $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.10 (Rayon spectral)**.** *Soit A un opérateur linéaire borné. Le* rayon spectral *de A, noté $r(A)$, est défini par*

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

où $\sigma(A)$ désigne le spectre de A.

Définition 1.1.11. *Soit A un opérateur linéaire borné sur X. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $x \in X$, appelé vecteur propre, tel que*

$$A(x) = \lambda x.$$

L'ensemble de tous les vecteurs propres associés à une valeur propre λ, ainsi que le vecteur nul, forme un sous-espace vectoriel appelé espace propre associé à λ, on le note par

$$E(\lambda) = \{x \in X : A(x) = \lambda x\}.$$

Le spectre $\sigma(A)$ se décompose en trois parties disjointes :

1. **Spectre ponctuel**(l'ensemble des valeurs propres) $\sigma_p(A)$

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

2. **Spectre continu** $\sigma_c(A)$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (A - \lambda I) \text{ est injectif et } R(A - \lambda I) \text{ est dense dans } X\}.$$

C'est-à-dire

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Ker(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(A - \lambda I) = X\}.$$

3. **Spectre résiduel** $\sigma_r(A)$:

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (A - \lambda I) \text{ est injectif et } R(A - \lambda I) \text{ n'est pas dense dans } X\}.$$

C'est-à-dire

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Ker(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(A - \lambda I) \neq X\}.$$

1.2 Opérateurs semi-Fredholm et Fredholm

Définition 1.2.1. *Un sous-espace M d'un espace vectoriel F est dit avoir une codimension finie dans F si et seulement si l'espace quotient F/M a une dimension finie. Si M a une codimension finie, la dimension de F/M est appelée la codimension de M dans F et est notée codim(M).*

Définition 1.2.2. *Soit A un opérateur linéaire borné.*
- *La nullité de A, notée $\alpha(A)$, est la dimension du noyau de A ; $\alpha(A) = \dim\ker(A)$.*
- *La déficience de A, notée $\beta(A)$, est la codimention de l'image de A ; $\beta(A) = \operatorname{codim}(R(A))$.*

Définition 1.2.3. *Soient X, Y des espaces de Banach et $A \in B(X, Y)$. On dit que*
(i) A est semi-Fredholm supérieur si $\mathrm{R}(A)$ est fermé et $\dim\ker(A) < \infty$;
(ii) A est semi-Fredholm inférieur si $\operatorname{codim} \mathrm{R}(A) < \infty$.
(iii) A est Fredholm si $\dim\ker(A) < \infty$ et $\operatorname{codim} \mathrm{R}(A) < \infty$.

L'ensemble de tous les opérateurs semi-Fredholm supérieurs, semi-Fredholm inférieurs et Fredholm sera noté respectivement $\Phi^+(X, Y)$, $\Phi^-(X, Y)$ et $\Phi(X, Y)$.

Il est évident que

$$\Phi(X, Y) = \Phi^+(X, Y) \cap \Phi^-(X, Y).$$

Les opérateurs appartenant à $\Phi_\pm(X, Y) = \Phi^+(X, Y) \cup \Phi^-(X, Y)$ seront appelés *semi-Fredholm*.
Si $Y = X$, on écrira simplement $\Phi(X) = \Phi(X, X)$, et de même $\Phi^+(X)$, $\Phi^-(X)$ et $\Phi_\pm(X)$.

La définition des opérateurs semi-Fredholm paraît asymétrique. Cependant, la condition $\operatorname{codim} \mathrm{R}(A) < \infty$ implique que l'image de A est fermée.

Définition 1.2.4. *L'ensemble des opérateurs de Fredholm à gauche défini de X dans Y (à droite respectivement) sont définis respectivement par*

$$\Phi_l(X,Y) = \{A \in B(X,Y) : \alpha(A) < \infty \text{ et } R(A) \text{ est fermé et admet un complémentaire}\},$$

$$\Phi_r(X,Y) = \{A \in B(X,Y) : \beta(A) < \infty \text{ et } \ker(A) \text{ admet un complémentaire }\}.$$

En général, on a les inclusions suivantes.

$$\Phi(X,Y) \subseteq \Phi_l(X,Y) \subseteq \Phi_+(X,Y),$$
$$\Phi(X,Y) \subseteq \Phi_r(X,Y) \subseteq \Phi_-(X,Y).$$

Définition 1.2.5. *L'indice d'un opérateur $A \in B(X,Y)$, noté ind(A), est défini par*

$$\mathrm{ind}(A) = \dim\ker(A) - \mathrm{codim}\, R(A).$$

Définition 1.2.6. *L'ensemble des opérateurs de Weyl sur X, noté $\mathcal{W}(X)$, est défini par*

$$\mathcal{W}(X) = \{A \in B(X) \ : \ A \text{ est un opérateur de Fredholm tel que } \mathrm{ind}(A) = 0\}$$

Remarques 1.2.1.

1. Si A est un opérateur semi-Fredholm de $B(X,Y)$, alors $\mathrm{ind}(A) \in \mathbb{Z}_\infty$, où $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.
2. Si $A \in B(X,Y)$ a une image fermée, alors on a les équivalences suivantes
   — $A \in \Phi^+(X,Y) \setminus \Phi^-(X,Y) \iff \mathrm{ind}(A) = +\infty$,
   — $A \in \Phi^-(X,Y) \setminus \Phi^+(X,Y) \iff \mathrm{ind}(A) = -\infty$,
   — $A \in \Phi^+(X,Y) \cap \Phi^-(X,Y) \iff \mathrm{ind}(A) \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.2.1.
1. *L'opérateur nul* 0 *de $B(X)$ n'est pas un opérateur de Fredholm, car son noyau est* $\ker(0) = X$, *et puisque X est de dimension infinie, on a* $\dim(\ker(0)) = \infty$.
2. *L'opérateur identité est un opérateur de Fredholm d'indice nul. En effet,*
   — $\ker(I) = \{0\} \Rightarrow \dim(\ker(I)) = 0$.
   — $\mathrm{codim}(I) = X/X = \{0\} \Rightarrow \dim(\mathrm{codim}(I)) = 0$

Proposition 1.2.1. *Si $A \in B(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $R(A-\lambda)$ est fermé dans X et dim* $\ker(A-\lambda) = dim \ker(A-\lambda)^* < \infty$.

1.2.1 Propriétés et formules de Dualités

Théorème 1.2.1. *Soit $A \in B(X)$ un opérateur à image fermée. Alors*

$$\alpha(A^*) = \beta(A) \quad \text{et} \quad \beta(A^*) = \alpha(A).$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\beta(A) &= \dim Y/\mathrm{R}(A) = \dim(Y/\mathrm{R}(A))^* \\ &= \dim \mathrm{R}(A)^{\perp} = \dim\ker(A^*) = \alpha(A^*).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\alpha(A) &= \dim\ker(A) = \dim(\ker(A))^* \\ &= \dim X^*/(\ker(A))^{\perp} = \dim X^*/\mathrm{R}(A^*) = \beta(A^*).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.2. *Soit $A \in B(X,Y)$. Alors on a*

1. $A \in \Phi^+(X,Y) \iff A^* \in \Phi^-(Y^*,X^*)$,
2. $A \in \Phi^-(X,Y) \iff A^* \in \Phi^+(Y^*,X^*)$.
3. $A \in \Phi(X,Y) \iff A^* \in \Phi(Y^*,X^*)$.

Théorème 1.2.2. *Soient X, Y, et Z des espaces de Banach, $A \in B(X,Y)$ et $S \in B(Y,Z)$. Alors*

i) Si A et S sont semi-Fredholm inférieurs, alors SA est semi-Fredholm inférieur ;

ii Si A et S sont semi-Fredholm supérieurs, alors SA est semi-Fredholm supérieur ;

iii Si A et S sont Fredholm, alors SA est Fredholm.

Démonstration.

i) Soient $Y_0 \subset Y$ et $Z_0 \subset Z$ des sous-espaces de dimension finie tels que $\mathrm{R}(A)+Y_0 = Y$ et $\mathrm{R}(S) + Z_0 = Z$. Alors

$$Z = Z_0 + SY = Z_0 + S\mathrm{R}(A) + SY_0 = \mathrm{R}(SA) + (Z_0 + SY_0),$$

où $\dim(Z_0 + SY_0) < \infty$. Ainsi, $SA \in \Phi^-(X,Z)$.

ii) Si A, S sont semi-Fredholm supérieurs, alors A^*, S^* sont semi-Fredholm inférieurs et, par (i), A^*S^* est semi-Fredholm inférieur. Ainsi, SA est semi-Fredholm supérieur.

iii) Découle de (i) et (ii) . □

Théorème 1.2.3. *Soient X, Y et Z des espaces de Banach, $A \in B(X,Y)$ et $S \in B(Y,Z)$. Alors*

(i) Si SA est semi-Fredholm inférieur, alors S est semi-Fredholm inférieur ;

(ii) Si SA est semi-Fredholm supérieur, alors A est semi-Fredholm supérieur ;

(iii) Si SA est Fredholm, alors S est semi-Fredholm inférieur et A est semi-Fredholm supérieur.

Démonstration.

(i) Nous avons $\mathrm{R}(S) \supset \mathrm{R}(SA)$, donc $\operatorname{codim} \mathrm{R}(S) \leq \operatorname{codim} \mathrm{R}(SA) < \infty$.

(ii) Si SA est semi-Fredholm supérieur, alors son adjoint $(SA)^* = A^*S^*$ est semi-Fredholm inférieur, donc A^* est semi-Fredholm inférieur et A est semi-Fredholm supérieur.

(iii) Découle de (i) et (ii). □

Théorème 1.2.4. *Soient $A \in B(X,Y)$ et $K \in K(X,Y)$. Alors*
(i) $A \in \Phi^+(X,Y) \Rightarrow A + K \in \Phi^+(X,Y)$ *;*
(ii) $A \in \Phi^-(X,Y) \Rightarrow A + K \in \Phi^-(X,Y)$ *;*
(iii) $A \in \Phi(X,Y) \Rightarrow A + K \in \Phi(X,Y)$.

Démonstration.

(i) Soit $A \in \Phi^+(X,Y)$ et soit M_1 un sous-espace fermé de X tel que $\operatorname{codim} M_1 < \infty$ et $\inf Ax : x \in M_1, x = 1 = c > 0$. Comme K est compact, il existe un sous-espace fermé $M_2 \subset X$ avec $\operatorname{codim} M_2 < \infty$ et $\sup Ax : x \in M_2, x = 1 < c/2$. Posons $M = M_1 \cap M_2$. Alors $\operatorname{codim} M < \infty$ et :

$$\inf(A+K)x : x \in M, x = 1 \geq \frac{c}{2}.$$

Ainsi, $A + K \in \Phi^+(X,Y)$.

(ii) Si $A \in \Phi^-(X,Y)$ et $K \in K(X,Y)$, alors A^* est semi-Fredholm supérieur et K^* est compact. Par (i), $A^* + K^*$ est semi-Fredholm supérieur, et donc $A + K$ est semi-Fredholm inférieur.

(iii) Suit de (i) et (ii). □

Théorème 1.2.5. *Les ensembles $\Phi^+(X,Y)$, $\Phi^-(X,Y)$ et $\Phi(X,Y)$ sont ouverts. Plus précisément, si $A \in \Phi^+(X,Y) \cap \Phi^-(X,Y)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\alpha(A+S) \leq \alpha(A) \quad \textit{et} \quad \beta(A+S) \leq \beta(A) \quad \textit{pour tout } S \in B(X,Y) \textit{ avec } S < \epsilon.$$

En particulier, les fonctions $\alpha : \Phi^+(X,Y) \to (0,\infty)$ et $\beta : \Phi^-(X,Y) \to (0,\infty)$ sont semi-continues supérieures.

Démonstration. Soit $A \in \Phi^+(X,Y)$. Soit M un sous-espace fermé de X tel que $X = \ker A \oplus M$. Alors, la restriction $A|_M$ est bornée inférieurement. Si $S \in B(X,Y)$ vérifie $\|S\| < j(A|_M)$, alors $(A+S)|_M$ est bornée inférieurement, et donc $A + S \in \Phi^+(X,Y)$. Comme $\ker(A+S) \cap M = \{0\}$, on a

$$\alpha(A+S) = \dim\ker(A+S) \leq \operatorname{codim} M = \dim\ker A = \alpha(A).$$

En prenant les adjoints, on obtient les énoncés correspondants pour les opérateurs de Fredholm semi-inférieurs. Enfin, l'ensemble $\Phi(X,Y) = \Phi^+(X,Y) \cap \Phi^-(X,Y)$ est ouvert. □

Proposition 1.2.3. *Soit $A \in B(X,Y)$ tel que X et Y sont des espaces de Banach. Si A est bijectif, alors A est de Fredholm d'indice nul.*

Démonstration. Comme A est bijectif, on a $\ker A = \{0\}$, donc $\dim\ker A < +\infty$. De plus, $\mathrm{R}(A) = Y$ est fermé et $\mathrm{codim}(\mathrm{R}(A)) = 0$, donc A est un opérateur de Fredholm.

$$\mathrm{ind}(A) = \dim\ker A - \mathrm{codim}(\mathrm{R}(A)) = 0 - 0 = 0.$$

□

Proposition 1.2.4. *Soit $A \in B(X, Y)$ tel que X et Y sont des espaces de Banach. Si $\dim X < +\infty$ et $\dim Y < +\infty$, alors A est de Fredholm. Dans ce cas*

$$\mathrm{ind}(A) = \dim X - \dim Y.$$

Démonstration. Comme $\dim X < +\infty$ et $\dim Y < +\infty$, alors $\dim\ker A < +\infty$, $\mathrm{codim}(\mathrm{R}(A)) < +\infty$, et $\mathrm{R}(A)$ est fermé, donc A est de Fredholm.

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(A) &= \dim\ker A - \mathrm{codim}(\mathrm{R}(A)) \\ &= \dim\ker A - \dim Y + \dim \mathrm{R}(A) \\ &= \dim X - \dim Y.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.6. *Soient A et B deux opérateurs de Fredholm bornés sur X. Alors, $BA : X \to X$ est aussi un opérateur de Fredholm borné sur X d'indice*

$$\mathrm{ind}(BA) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B)$$

Démonstration. AB est évidemment borné sur X. On a $\ker(AB) = B^{-1}(\ker A)$, qui est de dimension finie puisque $\ker A$ est de dimension finie. Ainsi $R(AB)$ est fermé dans X.

Considérons l'application

$$\eta : \ker(AB)/\ker B \to R(B) \cap \ker A, \quad \tilde{x} \mapsto \eta(\tilde{x}) = Bx$$

η est bien définie car si $\tilde{x} = \tilde{y}$ alors $x, y \in \ker(AB)$ et $(x - y) \in \ker B$, donc $B(x - y) = B(x) - B(y) = 0$, par suite $\eta(\tilde{x}) = \eta(\tilde{y})$.

D'autre part, si $\tilde{x} \in \ker(AB)/\ker B$ alors $x \in \ker(AB)$, donc $Bx \in \ker A$.

η est linéaire et surjective par construction. Elle est aussi injective : $\eta(\tilde{x}) = Bx = 0 \Rightarrow x \in \ker B \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{0}$.

η est alors un isomorphisme d'espace vectoriel, donc

$$\dim\ker(AB)/\ker B = \dim(R(B) \cap \ker A)$$

ou bien

$$\dim\ker(AB) = \dim\ker B + \dim(R(B) \cap \ker A) < +\infty$$

Soit N un supplémentaire de $R(B) \cap \ker A$ dans $\ker A$, c'est-à-dire

$$\ker A = (R(B) \cap \ker A) \oplus N$$

Alors
$$\dim\ker A = \dim(R(B)\cap\ker A) + n \quad \text{avec } n = \dim N$$
On a aussi $R(B)\cap N = \{0\}$, car si $y = Bx \in N \subset \ker A$, alors $Ay = ABx = 0$, donc $y \in (R(B)\cap\ker A)\cap N = \{0\}$.

Comme $R(B)$ est fermé dans X et $\dim N < +\infty$, alors $R(B)\oplus N$ est aussi fermé dans X.

D'après le lemme on peut aussi trouver un sous-espace vectoriel M de X de dimension finie qui complète $R(B)\oplus N$ dans X, c'est-à-dire
$$X = R(B)\oplus N\oplus M$$
Par conséquent
$$\operatorname{codim} R(B) = \dim(N\oplus M) = n + m < \infty, \quad \text{où } m = \dim M$$
Or
$$\ker A = (R(B)\cap\ker A)\oplus N \subset R(B)\oplus N$$
Ceci implique que A est injective sur M, et puisque $AN = \{0\}$ et $R(A) = A(R(B)\oplus A(M))$ (En général, si $X = U\oplus V$ où $\ker A \subset U$ et V est un sous-espace vectoriel de X, alors A est injective sur V et $R(A) = AU\oplus AV$).

D'autre part,
$$R(AB) = \{ABx : x\in X\} = A(R(B)) = R(\tilde{A}) \quad \text{où } \tilde{A} = A\circ R(B).$$
On a
$$\operatorname{codim}(R(AB)) = \dim(X/R(AB)) = \dim(X/R(\tilde{A})).$$
Comme $R(A) = R(\tilde{A})\oplus A(M)$, alors
$$\operatorname{codim}(R(AB)) = \operatorname{codim}(R(A)) + \dim A(M)$$
Comme A est injective sur M, alors $\dim A(M) = \dim M = m$.

Donc
$$\operatorname{codim}(R(AB)) = \operatorname{codim}(R(A)) + m < \infty$$
D'où, AB est de Fredholm sur X et on a
$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(AB) &= \dim\ker(AB) - \operatorname{codim}(R(AB))\\
&= \dim(\ker B) + \dim(R(B)\cap\ker A) - \operatorname{codim}(R(A)) - m\\
&= \dim(\ker B) + \dim(\ker A) - n - \operatorname{codim}(R(A)) - m\\
&= \dim(\ker B) - n - m + \operatorname{ind}(A)\\
&= \dim(\ker B) - \operatorname{codim}(R(B)) + \operatorname{ind}(A)\\
&= \operatorname{ind}(B) + \operatorname{ind}(A).
\end{aligned}$$
□

Définition 1.2.7. *Soit $A \in B(X)$ un opérateur borné. On dit que A est un opérateur de Browder s'il est Fredholm d'ascente et de descente finies.*

Notons par $\mathcal{B}r(X)$ l'ensemble des opérateurs de Browder dans X.

1.2.2 Algèbre de Calkin

L'algèbre de Calkin d'un espace de Banach X est le quotient $B(X)/\mathcal{K}(X)$ de l'algèbre de Banach $B(X)$ des opérateurs linéaires bornés sur X par l'idéal fermé $\mathcal{K}(X)$ des opérateurs compacts[4].

Les éléments de cette algèbre sont les classes $[A]$ définies par $A + \mathcal{K}(X)$, avec A un opérateur linéaire borné dans $B(X)$. Le produit dans $B(X)/\mathcal{K}(X)$ est défini par

$$[A] \times [B] = [AB].$$

La classe $[I]$ est l'élément unité dans $B(X)/\mathcal{K}(X)$.
La projection canonique de $B(X)$ sur $B(X)/\mathcal{K}(X)$ est appelée l'homomorphisme de Calkin. On la note par π et elle est définie par

$$\pi(A) = A + \mathcal{K}(X).$$

L'algèbre de Calkin $B(X)/\mathcal{K}(X)$, munie de la norme quotient

$$\|\pi(A)\| = \inf_{K \in \mathcal{K}(X)} \|A + K\|,$$

admet une structure d'algèbre de Banach.

Théorème 1.2.7 (Théorème d'Atkinson)**.** *[7] Soient X un espace de Banach et $A \in B(X)$. Alors on a*

$$A \text{ est Fredholm } \Leftrightarrow \pi(A) \text{ est inversible dans } B(X)/K(X).$$

Théorème 1.2.8. *[7] Soit $A \in B(X)$, alors*

$$\rho(\pi(A)) = \{\lambda : \lambda I - A \text{ est de Fredholm sur } X\}.$$

1.2.3 Perturbation de Fredholm

Définition 1.2.8. *Soit $F \in B(X,Y)$.*

1. *L'opérateur F est appelé une perturbation de Fredholm si $A + F \in \Phi(X,Y)$ pour tout $A \in \Phi(X,Y)$.*
2. *L'opérateur F est appelé une perturbation semi-Fredholm supérieure (respectivement, inférieure) si $A+F \in \Phi_+(X,Y)$ (respectivement, $A+F \in \Phi_-(X,Y)$) pour tout $A \in \Phi_+(X,Y)$ (respectivement, $A \in \Phi_-(X,Y)$).*
3. *L'opérateur F est appelé une perturbation de Fredholm à gauche (respectivement, à droite) si $A + F \in \Phi_l(X,Y)$ (respectivement, $A + F \in \Phi_r(X,Y)$) pour tout $A \in \Phi_l(X,Y)$ (respectivement, $A \in \Phi_r(X,Y)$).*

On note $\mathcal{F}(X,Y)$, $\mathcal{F}_+(X,Y)$, $\mathcal{F}_-(X,Y)$, $\mathcal{F}_l(X,Y)$ et $\mathcal{F}_r(X,Y)$ les ensembles de toutes les perturbations de Fredholm, semi-Fredholm supérieures, semi-Fredholm inférieures, de Fredholm à gauche et à droite respectivement.

En général, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_+(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y),$$
$$\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_-(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y),$$
$$\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_l(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y),$$
$$\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_r(X,Y) \subseteq \mathcal{F}(X,Y).$$

L'ensemble des perturbations de Fredholm $\mathcal{F}(X,Y)$ est un sous-ensemble fermé de $B(X,Y)$. Lorsque $X = Y$, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X,X)$ est un idéal bilatéral fermé de $B(X)$.

Théorème 1.2.9. *[13] Soit $F \in B(X)$, alors*

1. *$F \in \mathcal{F}_+(X)$ si et seulement si $\alpha(A-F) < \infty$ pour tout $A \in \Phi_+(X)$.*
2. *$F \in \mathcal{F}_-(X)$ si et seulement si $\beta(A-F) < \infty$ pour tout $A \in \Phi_-(X)$.*
3. *$F \in \mathcal{F}(X)$ si et seulement si $\alpha(A-F) < \infty$ ou $\beta(A-F) < \infty$ pour tout $A \in \Phi(X)$.*

Théorème 1.2.10. *Soient X, Y et Z trois espaces de Banach, alors*

1. *Si $F_1 \in \mathcal{F}(X,Y)$ et $A \in B(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}(X,Z)$.*
2. *Si $F_2 \in \mathcal{F}(Y,Z)$ et $B \in B(X,Y)$, alors $F_2B \in \mathcal{F}(X,Z)$.*

Les résultats suivants concernant les perturbations semi-Fredholm supérieures, inférieures, de Fredholm à gauche et à droite ont été démontrés dans A et .

Théorème 1.2.11. *[13]*

1. *Si l'ensemble $\Phi(Y,Z)$ n'est pas vide, alors*
   (a) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_+(X,Y)$ et $A \in \Phi(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_+(X,Z)$.*
   (b) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_-(X,Y)$ et $A \in \Phi(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_-(X,Z)$.*
   (c) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_l(X,Y)$ et $A \in \Phi(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_l(X,Z)$.*
   (d) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_r(X,Y)$ et $A \in \Phi(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_r(X,Z)$.*
2. *Si l'ensemble $\Phi(X,Y)$ n'est pas vide, alors*
   (a) *Si $F_2 \in \mathcal{F}_+(Y,Z)$ et $L \in \Phi(X,Y)$, alors $F_2L \in \mathcal{F}_+(X,Z)$.*
   (b) *Si $F_2 \in \mathcal{F}_-(Y,Z)$ et $L \in \Phi(X,Y)$, alors $F_2L \in \mathcal{F}_-(X,Z)$.*
   (c) *Si $F_2 \in \mathcal{F}_l(Y,Z)$ et $L \in \Phi(X,Y)$, alors $F_2L \in \mathcal{F}_l(X,Z)$.*
   (d) *Si $F_2 \in \mathcal{F}_r(Y,Z)$ et $L \in \Phi(X,Y)$, alors $F_2L \in \mathcal{F}_r(X,Z)$.*
3. *Si l'ensemble $\Phi(Y,Z)$ n'est pas vide, alors*
   (a) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_+(X,Y)$ et $A \in B(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_+(X,Z)$.*
   (b) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_-(X,Y)$ et $A \in B(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_-(X,Z)$.*
   (c) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_l(X,Y)$ et $A \in B(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_l(X,Z)$.*
   (d) *Si $F_1 \in \mathcal{F}_r(X,Y)$ et $A \in B(Y,Z)$, alors $AF_1 \in \mathcal{F}_r(X,Z)$.*

Le théorème suivant donne la stabilité des opérateurs de Fredholm sous les perturbations de Fredholm.

Théorème 1.2.1. *Soient $A, F \in B(X,Y)$, alors*

1. *Si $A \in \Phi(X,Y)$ et $F \in \mathcal{F}(X,Y)$, alors $A+F \in \Phi(X,Y)$. De plus,*
$$ind(A+F) = ind(A).$$
2. *Si $A \in \Phi_+(X,Y)$ et $F \in \mathcal{F}_+(X,Y)$, alors $A+F \in \Phi_+(X,Y)$. De plus,*
$$ind(A+F) = ind(A).$$
3. *Si $A \in \Phi_-(X,Y)$ et $F \in \mathcal{F}_-(X,Y)$, alors $A+F \in \Phi_-(X,Y)$. De plus,*
$$ind(A+F) = ind(A).$$
4. *Si $A \in \Phi_\pm(X,Y)$ et $F \in \mathcal{F}_+(X,Y) \cap \mathcal{F}_-(X,Y)$, alors $A+F \in \Phi_\pm(X,Y)$.De plus,*
$$ind(A+F) = ind(A).$$

Théorème 1.2.2 (1.1.11)**.** *Soient $A \in B(X,Y)$ et $F \in \mathcal{F}(X,Y)$, alors*

1. *Si $A \in \Phi_l(X,Y)$, alors $A+F \in \Phi_l(X,Y)$ et $ind(A+F) = ind(A)$.*
2. *Si $A \in \Phi_r(X,Y)$, alors $A+F \in \Phi_r(X,Y)$ et $ind(A+F) = ind(A)$.*

1.3 Spectres essentiels

Si A est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Banach , son spectre essentiel est l'ensemble des points limites de son spectre, c'est-à-dire tous les points du spectre excepté les valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

Si A est un opérateur linéaire borné défini sur un espace de Banach X, on trouve plusieurs définitions du spectre essentiel, mais elles coïncident toutes pour un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert. On s'interesse les spectres essentiels suivants :

— Gustafson
$$\sigma_{e1}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \Phi^+(X)\},$$
— Weidman
$$\sigma_{e2}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \Phi^-(X)\},$$
— Kato
$$\sigma_{e3}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \Phi_\pm(X)\},$$
— Wolf
$$\sigma_{e4}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \Phi(X)\},$$
—
$$\sigma_{el}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \Phi_l(X)\},$$
—
$$\sigma_{e_r}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \Phi_r(X)\},$$

— Weyl

$$\sigma_{e5}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \mathcal{W}(X)\}.$$

— Browder

$$\beta_{\text{ess}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \notin \mathcal{B}r(X)\}.$$

En général, on a les inclusions suivantes

$$\sigma_{e3}(T) = \sigma_{e1}(T) \cap \sigma_{e2}(T) \subseteq \sigma_{e4}(T) \subseteq \sigma_{e5}(T) \subseteq \sigma_b(T).$$

Chapitre 2

Opérateurs de Riesz

Ce chapitre est consacré à l'étude des opérateurs de Riesz, une classe d'opérateurs dont la théorie spectrale présente des analogies importantes avec celle des opérateurs compacts. Nous proposons plusieurs caractérisations de ces opérateurs. Il est établi que, de façon générale, la somme ou le produit de deux opérateurs de Riesz ne donne pas nécessairement un opérateur de Riesz. Par ailleurs, il est montré que cette classe n'est pas fermée pour la norme des opérateurs. Une condition suffisante est fournie pour assurer que la limite d'une suite d'opérateurs de Riesz reste dans la même classe.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. *Un opérateur borné $A \in B(X)$ est dit de Riesz si pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est de Fredholm.*

L'ensemble des opérateurs de Riesz sur X est noté $\mathcal{R}(X)$.

Théorème 2.1.1. *Soit $A \in B(X)$ un opérateur de Riesz. Alors $R(I-A)$ a une codimension finie dans X et codim$(R(I-A)) = \dim(Ker(I-A))$.*

Démonstration. Si $1 \in \rho(A)$, le résultat est évident. Par conséquent, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $1 \in \sigma(A)$. Alors $(I-A)E(\lambda)X \subset E(\lambda)X$; de plus, $(I-A)(I-E(\lambda))X = (I-E(\lambda))X$, donc $R(I-A) = (I-A)E(\lambda)X \subset (I-A)(I-E(\lambda))X$. Cependant, $E(\lambda)X$ est de dimension finie, et donc $Ker((I-A)E(\lambda)X) = Ker(I-A)$. En conséquence, en appliquant la proposition (1) à l'opérateur $(I-A)E(\lambda)X$, nous voyons que la dimension de $Ker(I-A)$ est égale à la codimension de $(I-A)E(\lambda)X$ dans $E(\lambda)X$.

où $E(\lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres.

D'autre part il existe un sous-espace N de $E(\lambda)X$, de dimension égale à la codimension de $(I-A)E(\lambda)X$ dans $E(\lambda)X$, tel que $E(\lambda)X = (I-A)E(\lambda)X \oplus N$. Ainsi, $X = E(\lambda)X \oplus (I-E(\lambda))X = N \oplus (I-E(\lambda))X$. donc $R(I-A)$ a une codimension finie dans X et codim$(R(I-A)) = \dim(N) = \dim(Ker(I-A))$.

□

Proposition 2.1.1. *Soit $A \in B(X)$. Alors on a*

1. $A \in \mathcal{R}(X) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|[A]^n\|^{1/n} = 0$.
2. $A \in \mathcal{R}(X)$ *et* $K \in \mathcal{K}(X) \Rightarrow A + K \in \mathcal{R}(X)$.

Démonstration.

(1) $A \in \mathcal{R}(X)$ si et seulement si $\lambda I - A$ est de Fredholm pour tout $\lambda \neq 0$, D'apr'es le Théorème 1.2.7 ceci est vrai si et seulement si $\lambda \in \rho(\pi(A))$ pour tout $\lambda \neq 0$. Comme $r(\pi(A)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|[A]^n\|^{1/n}$, l'assertion (1) s'ensuit.

(2) Si $A \in \mathcal{R}(X)$ et $K \in \mathcal{K}(X)$, on a $[A+K] = [A]$, ce qui implique l'assertion (2). □

On rappelle ici que la quantité $r(\pi(A))$ est le rayon spectral de $[A]$.

Corollaire 2.1.1. *Soit $A \in B(H)$, alors $A \in \mathcal{R}(X) \Leftrightarrow r(\pi(A)) = 0$.*

Remarque 2.1.1. L'opérateur identité I sur X n'est pas de Riesz sauf si $\dim X < \infty$.

Définition 2.1.2. 1. *Un opérateur $A \in B(X)$ est dit quasi-nilpotent si*

$$\|A^n\|^{1/n} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

2. *Il est dit nilpotent si $A^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarques 2.1.2.

1. Les opérateurs nilpotents sont quasi-nilpotents.
2. Comme conséquence les opérateurs de Riesz sont les opérateurs quasi-nilpotents de $B(X)/\mathcal{K}(X)$.

En particulier, l'ensemble des opérateurs de Riesz regroupe les opérateurs compacts et les opérateurs qui s'expriment comme somme d'un opérateur compact et d'un opérateur quasi-nilpotent.

Théorème 2.1.2. *[7] Soit K un opérateur compact sur X et $Q \in B(X)$ un opérateur quasi-nilpotent. Alors $K + Q$ est un opérateur de Riesz.*

Théorème 2.1.3. *[1] Un opérateur $A \in B(X)$ est un opérateur de Riesz si et seulement si $\Pi(A)$ est quasinilpotant dans l'algèbre de Calkin.*

Définition 2.1.3. *Soient A et $B \in B(X)$, on dit que A commute avec B si*

$$AB = AB.$$

Théorème 2.1.4. *Si $A, B \in B(X)$ commutent, A est un opérateur de Fredholm et AB est un opérateur de Riesz, alors B est un opérateur de Riesz.*

Démonstration. Supposons que $AB = BA \in \mathcal{R}(X)$ et $A \in \Phi(X)$. Alors $\Pi(A)$ est inversible dans l'algèbre de Calkin $C(X)$ (cf. [4], Théorème 3.2.8), tandis que

$$\Pi(A)\Pi(B) = \Pi(AB)$$

est quasinilpotent dans $C(X)$ et $(\Pi(A))^{-1}$ commute avec $\Pi(B)$ et donc aussi avec $\Pi(A)\Pi(B)$. Il s'ensuit que

$$\Pi(B) = (\Pi(A))^{-1}\Pi(A)\Pi(B)$$

est quasinilpotent dans $C(X)$, donc $B \in \mathcal{R}(X)$. □

Remarque 2.1.3. Notons que l'assertion du théorème précédent est également vraie si la condition de commutativité des opérateurs A et B est remplacée par une condition plus faible selon laquelle

$$AB - BA \in \mathcal{F}(X).$$

2.1.1 Somme, produit et limite

Contrairement à $K(X)$, l'ensemble $\mathcal{R}(X)$ des opérateurs de Riesz n'est pas un idéal fermé de $B(X)$. La somme, le produit et la limite des opérateurs de Riesz ne sont pas de Riesz que si on suppose la commutativité dans $B(X)$.

Proposition 2.1.2. *Soient $A, B \in \mathcal{R}(X)$ tels que $AB = BA$. Alors $A + B$, AB et λA, $\lambda \in \mathbb{C}$, sont tous des opérateurs de Riesz.*

Démonstration.

Par hypothèse

$$r(\pi(A)) = r(\pi(B)) = 0, \quad \text{et} \quad \pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A).$$

D'où

$$r(\pi(A + B)) = r(\pi(A) + \pi(B)) = r(\pi(AB)) = 0.$$

Ce qui montre que $A + B, AB \in \mathcal{R}(X)$.

□

Remarque 2.1.4. Si I est un idéal dans $B(X)$ (par exemple $I = \mathcal{K}(X)$), on dit que A I-commute avec B si $AB - BA \in I$, c'est-à-dire que si les classes de Rayon spectral de A et de B commutent dans $B(X)/I$. Alors, la multiplication par un scalaire, la somme, le produit et la limite des opérateurs de Riesz I-commutent sont aussi des opérateurs de Riesz. De plus, la somme d'un opérateur de Riesz avec un opérateur arbitraire de I est un opérateur de Riesz.

Si $\dim X = \infty$, $\mathcal{R}(X)$ n'est pas un idéal.

Remarque 2.1.5. $\mathcal{R}(X)$ n'est pas fermé en général.

2.1.2 Restriction et adjoint

Théorème 2.1.5. *[3] Soit $A \in \mathcal{R}(X)$ et M un sous-espace fermé de X invariant par rapport à A (c'est-à-dire $AM \subset M$). Alors, $A|_M$ est un opérateur de Riesz sur M et on a*

$$\sigma(A|_M) \subset \sigma(A).$$

Proposition 2.1.3. *Soit $A \in B(X)$. Alors A est un opérateur de Riesz si et seulement si A^* l'est aussi.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{R}(X)$, alors $r(\pi(A^*)) \leq r(\pi(A))$, donc $r(\pi(A^*)) = 0$ et $A^* \in \mathcal{R}(X)$.

Inversement, on suppose que A^* est de Riesz. Comme la restriction de A^{**} sur le sous-espace fermé X du bi-dual X^{**} est A, il résulte que A est lui-même un opérateur de Riesz. □

Théorème 2.1.6. *[7] Soit A un opérateur de Riesz sur H. On a pour tout $\lambda \neq 0$*

1. *$\mathcal{R}(\lambda I - A)$ est fermée,*
2. *$p(\lambda I - A) = q(\lambda - A) < \infty$,*
3. *$\alpha(\lambda I - A) = \beta(\lambda I - A) < \infty$.*

Il résulte de ce théorème qu'un opérateur $A \in \mathcal{R}(X)$ est d'indice nul. Par conséquent, on obtient une autre définition équivalente d'un opérateur de Riesz.

Définition 2.1.4. *Un opérateur linéaire est appelé opérateur de Riesz si son spectre essentiel de Wolf est réduit à $\{0\}$.*

Remarques 2.1.6.

— D'après cette dernière définition, on voit que A est un opérateur de Riesz si et seulement si le spectre essentiel de Weyl est réduit à zéro.

— De même, A est un opérateur de Riesz si et seulement si le spectre essentiel de Browder est réduit à zéro.

2.2 Spectre et calcul fonctionnel d'un opérateur de Riesz

On donne dans cette section quelques propriétés sur la distribution du spectre d'un opérateur de Riesz. Le spectre d'un opérateur de Riesz est au plus dénombrable et n'a pas de point d'accumulation non nul. Chaque élément non nul du spectre est une valeur propre. De plus, les sous-espaces spectraux associés aux éléments non nuls du spectre sont de dimension finie [8].

Définition 2.2.1 (Projection de Riesz)**.** *Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X, et soit γ un contour fermé rectifiable dans le plan complexe $\mathbb{C}$, orienté positivement, tel que $\gamma \subset \rho(A)$ (le résolvant de A) et que l'intérieur de γ contienne une partie du spectre $\sigma(A)$, disons un ensemble compact isolé $\sigma_0 \subset \sigma(A)$.*

Alors, la projection de Riesz *associée à σ_0 est définie par :*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI - A)^{-1}\, dz$$

Théorème 2.2.1. *[7] Soit $A \in \mathcal{R}(X)$. Alors on a*

1. *Les valeurs propres de A ont au plus un point d'accumulation en 0.*
2. *$\sigma(A)$ est dénombrable et n'a aucun point d'accumulation sauf éventuellement 0. Tout élément non nul de $\sigma(A)$ est une valeur propre de A et un pôle de la résolvante de A.*
3. *Soit $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, et $\nu(A)$ l'ordre du pôle en λ. Pour tout entier positif n, $ker((\lambda I - A)^n)$ est de dimension finie. De plus,*

   $$ker((\lambda I - A)^m) = ker((\lambda I - A)^{m+1}), \quad \textit{pour tout } m \geq \nu(A),$$

   et $\mathrm{p}(A) = \nu(A)$.
4. *Pour tout entier positif n, l'image $R((\lambda I - A)^n)$ est fermée dans X. De plus,*

   $$R((\lambda I - A)^m) = R((\lambda I - A)^{m+1}), \quad \textit{pour tout } m \geq \nu(A),$$

   et $\mathrm{q}(A) = \nu(A)$.
5. *La projection spectrale $E(\lambda)$ est telle que $\mathrm{R}(E(\lambda)) = ker((\lambda - A)^{\nu(A)})$ de dimension non nulle. L'espace noyau est $ker(E(\lambda)) = R((\lambda I - A)^{\nu(A)})$, et*

   $$1 \leq \nu(A) \leq \dim ker((\lambda I - A)^{\nu(A)}).$$

Où $E(\lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres.

2.2.1 Opérateurs de Riesz à spectre fini

Ce paragraphe est consacré à la caractérisation d'un opérateur de Riesz dont le spectre est fini sous certaines conditions sur son ascension et sa descente.

Théorème 2.2.2. *Soit $A \in \mathcal{R}(X)$ avec $p(A)$ et $q(A)$ finies, alors $\sigma(A)$ est un ensemble fini.*

Démonstration. Supposons que $p(A) = q(A) = p$, alors $X = M \oplus N$ avec $M = R(A^p)$ et $N = Ker(A^p)$, où M est fermé. On a $\sigma(A) = \sigma(A|_M) \cup \{0\}$ car $A|_N$ est nilpotent. D'après le théorème 2.2.1, $A|_M$ est un opérateur de Riesz bijectif, donc $0 \notin \sigma(A|_M)$. Ainsi, 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(A)$. D'où, $\sigma(A)$ est un ensemble fini. $\square$

2.2.2 Calcul fonctionnel holomorphe

Notons par $H(A)$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes sur un disque ouvert contenant le spectre $\sigma(A)$ de A. Dans la proposition qui suit, on va construire un calcul fonctionnel holomorphe pour les opérateurs de Riesz.

Proposition 2.2.1. *Soient $A \in \mathcal{R}(X)$ et $f \in H(A)$ avec $f(0) = 0$, alors $f(A) \in \mathcal{R}(X)$. Inversement, si f ne s'annule que pour 0, alors $f(A) \in \mathcal{R}(X)$ implique $A \in \mathcal{R}(X)$.*
En particulier, si $A^n \in \mathcal{R}(X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A \in \mathcal{R}(X)$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{R}(X)$. Comme $f(0) = 0$, alors $f(x) = xg(x)$ avec $g \in H(A)$ et $f(A) = Ag(A)$. Vu que A commute avec $g(A)$, il résulte d'après la Remarque (2.1.3) que $f(A) \in \mathcal{R}(X)$.

Inversement, soit $f(A) \in \mathcal{R}(X)$ et supposons que f s'annule uniquement en 0. Alors il existe $h \in H(A)$ et un entier naturel m tels que pour tout x dans le domaine de définition de f, on a $f(x) = x^m h(x)$ et $h(x) = 0$. Par conséquent, $f(A) = A^m h(A)$ et $h(A)$ est inversible dans $B(X)$. Ainsi, $A^m = f(A)h(A)^{-1} \in \mathcal{R}(X)$ car $f(A)$ et $h(A)^{-1}$ commutent. Alors, $r(\pi(A^m)) = (r(\pi(A)))^m = 0$ implique que $r(\pi(A)) = 0$ et $A \in \mathcal{R}(X)$. $\square$

Corollaire 2.2.1.

$$A \in \mathcal{R}(X) \iff A^n \in \mathcal{R}(X) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.2.3. *[6] Pour chaque entier positif n, soit $A_n \in B(X)$ un opérateur de Riesz. Supposons que la suite $\{A_n\}$ converge dans la norme de $B(X)$ vers A. Supposons aussi que A commute avec chaque A_n. Alors A est un opérateur de Riesz.*

Démonstration.

1. Par hypothèse

   $$r(\pi(A)) = r(\pi(B)) = 0, \quad \text{et} \quad \pi(A)\pi(B) = \pi(AB) = \pi(BA) = \pi(B)\pi(A).$$

   D'où

   $$r(\pi(A+B)) = r(\pi(A) + \pi(B)) = r(\pi(AB)) = 0.$$

   Ce qui montre que $A + B, AB \in \mathcal{R}(X)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \|A_k - A\| < \varepsilon/3$, et $l \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\|A_k^n\|^{1/n} C < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour } n > l.$$

   Alors, comme A_k commute avec $(A - A_k)$, on obtient

   $$\begin{aligned} A^n &= [A_k + (A - A_k)]^n \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{l} \binom{n}{j} A_k^j (A - A_k)^{n-j} + \sum_{j=l+1}^{n} \binom{n}{j} A_k^j (A - A_k)^{n-j}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|A_n\|_C &\leq \sum_{j=0}^{l} C_j^n \|A_k\|^j \|A_-A_k\|^{n-j} + \sum_{j=l+1}^{n} C_j^n A_k^j C \|A_-A_k\|^{n-j} \\ &= \|A - A_k\|^n \sum_{j=0}^{l} C_j^n \left(\frac{\|A_k\|}{\|A - A_k\|}\right)^j + \sum_{j=l+1}^{n} C_j^n A_k^j C \|A - A_k\|^{n-j}.\end{aligned}$$

La somme $\sum_{j=0}^{l} C_j^n \left(\frac{\|A_k\|}{\|A - A_k\|}\right)^j$ est un polynôme en n, il existe donc une constante positive M telle que

$$\sum_{j=0}^{l} C_j^n \left(\frac{\|A_k\|}{\|A - A_k\|}\right)^j < 2nM, \text{ lorsque } n \text{ est suffisamment grand.}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|A_n\|_C &< 2nM \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n + \sum_{j=l+1}^{n} C_j^n \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^n \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-j} \\ &\leq (M+1) \cdot 2 \left(\tfrac{\varepsilon}{3}\right)^n < \varepsilon^n,\end{aligned}$$

lorsque n est suffisamment grand. Alors $A \in \mathcal{R}(X)$.

□

Définition 2.2.2. *Soit $A \in B(X)$. Un* point de Riesz *pour A est un point $\lambda \in \sigma(A)$ tel que :*

(i) λ est isolé dans $\sigma(A)$,

(ii) X est la somme directe d'un sous-espace fermé $F(\lambda) \subset X$ et d'un sous-espace de dimension finie $Ker(\lambda) \subset X$ tels que A laisse ces deux sous-espaces invariants, la restriction de $\lambda I - A$ à $F(\lambda)$ est un homéomorphisme linéaire, et la restriction de $\lambda I - A$ à $Ker(\lambda)$ est nilpotente.

Théorème 2.2.4. *Soit $A \in B(X)$. Alors A est un opérateur de Riesz si et seulement si chaque point non nul de $\sigma(A)$ est un point de Riesz pour A.*

Démonstration. Si A est un opérateur de Riesz, alors tout point non nul λ de $\sigma(A)$ est un point de Riesz pour A.

Pour le voir, posons $Ker(\lambda)X = E(\lambda)X$ et $F(\lambda)X = (I - E(\lambda))X$. la conjonction avec le résultat que $\lambda \in \rho(A|_{F(\lambda)X})$, ce qui découle du Théorème 1.39 [3].

Réciproquement, supposons que tout point non nul de $\sigma(A)$ soit un point de Riesz pour A.

Si E désigne la projection sur $Ker(\lambda)X$, alors $EA = AE$. On a $\{\lambda\} = \sigma(A|_{EX})$ et $\lambda \in \rho(A|_{(I-E)X})$.

on a $E = E(\lambda)$. Il existe un plus petit entier positif m tel que

$$(\lambda I - A)^m E(\lambda) = 0.$$

Par conséquent,

$$(\lambda I - A)^{m-1} E(\lambda) \neq 0,$$

et donc λ est un pôle de la résolvante de A.

Donc A est un opérateur de Riesz. $\square$

Théorème 2.2.5. *[11] Soit $A \in B(X)$ un opérateur de Riesz et soit Y un sous-espace fermé de X invariant par A. Alors A_Y, l'opérateur induit par A sur l'espace quotient X/Y, est un opérateur de Riesz.*

Théorème 2.2.6. *[15] Soit $A \in B(X)$ un opérateur de Riesz. Les noyaux $Ker(I-A)$ et $Ker(I^* - A^*)$ ont la même dimension.*

2.2.3 Spectre essentiels et opérateurs de Riesz

Dans le théorème suivant, on étudie la stabilité des opérateurs semi Fredholm à droite et à gauche en utilisant les opérateurs de Riesz.

Théorème 2.2.7. *Soient $A \in \mathcal{B}(X)$ et $E \in \mathcal{R}(X)$, alors*
(i) Si $A \in \Phi^l(X)$ et $AE - EA \in \mathcal{F}(X)$, alors $A + E \in \Phi^l(X)$.
(ii) Si $A \in \Phi^r(X)$ et $AE - EA \in \mathcal{F}(X)$, alors $A + E \in \Phi^r(X)$.

Théorème 2.2.8. *Soient $A, B \in B(X)$. Supposons que $\lambda_0 \in \rho_S(A) \cap \rho_I(B)$ et que $(\lambda_0 I - A)^{-1} - (\lambda_0 I - B)^{-1} \in \mathcal{R}(X)$.*

Si

$$(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 I - B)^{-1} - (\lambda_0 I - B)^{-1}(\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathcal{F}(X),$$

alors

$$\sigma_{ei}(A) = \sigma_{ei}(B), \quad i = l, r.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda = 0$. Alors $0 \in \rho_I(A) \cap \rho_I(B)$, et $R = A^{-1} - B^{-1} \in \mathcal{R}(X)$, donc

$$RB^{-1} - B^{-1}R = A^{-1}B^{-1} - B^{-1}A^{-1}.$$

Comme $A^{-1}B^{-1} - B^{-1}A^{-1} \in \mathcal{F}(X)$, on en déduit que $RB^{-1} - B^{-1}R \in \mathcal{F}(X)$.

D'après l'assertion (i) du Théorème 2.2.7 , on en déduit que

$$\Phi^l_{A^{-1}} = \Phi^l_{B^{-1}},$$

On conclut que

$$\sigma_{el}(A) = \sigma_{el}(B).$$

$\square$

Théorème 2.2.9. *Soient $A \in B(X)$ tels que $E \in \mathcal{R}(X)$ tels que $AE - EA \in \mathcal{F}(X)$. Alors*

(i) $\sigma_{e\ell}(A) = \sigma_{e\ell}(A + E)$.

(ii) $\sigma_{er}(A) = \sigma_{er}(A + E)$.

Démonstration. Soit $\lambda \notin \sigma_{e\ell}(A+E)$, alors $\lambda I - A \in \Phi^l(X)$. L'opérateur $(\lambda I - A)E - E(\lambda I - A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{array}{rcl}(\lambda I - A)E - E(\lambda I - A) & = & EA + \lambda IE - \lambda EI - AE \\ & = & EA - AE + \lambda(IE - EI).\end{array}$$

Puisque $AE - EA \in \mathcal{F}(X)$ et $IE - EI \in \mathcal{F}(X)$, alors d'après l'assertion (i) du Théorème 2.2.7, il s'ensuit que $\lambda I - (E + A) \in \Phi^l(X)$, donc $\lambda \notin \sigma_{e\ell,I}(A)$. Par conséquent,

$$\sigma_{e\ell,I}(A + E) \subseteq \sigma_{e\ell,I}(A). \tag{2.1}$$

Pour prouver l'inclusion inverse de l'équation (2.1), il suffit de remplacer A par $A + E$ et E par $-E$.
La démonstration du point (ii) est analogue à la précédente.

$\square$

Théorème 2.2.10. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ et $E \in \mathcal{F}(X)$. Alors*

(i) $\sigma_{el,I}(A) = \sigma_{el,I}(A + E)$.

(ii) $\sigma_{er,I}(A) = \sigma_{er,I}(A + E)$.

(iii) $\sigma_{ewl,I}(A) = \sigma_{ewl,I}(A + E)$.

Chapitre 3

Opérateur de Riesz polynomial

Une extension naturelle de la classe des opérateurs de Riesz est celle des *opérateurs de Riesz polynomiaux*. Étudions tous d'abord quelles que propriétés des opérateurs de Riesz généralisé et les opérateurs polynomialement compacts. Les ouvrages utilisés dans ce chapitres sont[7] .

Définition 3.0.1. *Soit $A \in B(X)$. On dit que A est un opérateur polynomialement compact s'il existe un polynôme à coefficients complexes, $P(z)$, non nul tel que $P(A)$ soit compact.*

Notons par $\mathcal{PK}(X)$, l'ensemble des opérateurs polynomialement compacts dans X.

Définition 3.0.2. *(Correspondance spectrale) Soient $A \in B(X)$ un opérateur borné sur un espace de Banach X et P un polynôme complexe. On dit qu'il y a correspondance spectrale entre A et $P(A)$ si :*

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)),$$

où $\sigma(A)$ désigne le spectre de A et $P(\sigma(A)) = \{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Autrement dit, le spectre de l'image d'un opérateur par un polynôme est exactement l'image du spectre de l'opérateur par ce polynôme.

Définition 3.0.3. *Un opérateur $A \in B(X)$ est dit* Riesz généralisé *s'il existe un ensemble fini $E \subset \mathbb{C}$ tel que :*

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$, $A - \lambda$ est un opérateur de Fredholm ;

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$, $A - \lambda$ a une montée et une descente finies ;

(iii) Tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus E$ est une valeur propre de multiplicité finie, sans point d'accumulation sauf peut-être dans E.

Théorème 3.0.1. *[2] Soit $A \in B(X)$. Alors A est Riesz généralisé si et seulement si A possède un spectre essentiel de Browder fini.*

Théorème 3.0.2. *Soient $A \in \mathcal{PK}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ tel que $P(\lambda) \neq 0$ et posons $F := \lambda I - A$. Alors F est un opérateur de Fredholm sur X avec montée et descente finies.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ tel que $P(\lambda) = 0$. On a :

$$P(\lambda)I - P(A) = \sum_{k=1}^{p} a_k(\lambda^k I - A^k)$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$\lambda^k I - A^k = (\lambda I - A) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} A^i$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$P(\lambda)I - P(A) = (\lambda I - A)Q(A) = Q(A)(\lambda I - A)$$

où

$$Q(A) = \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} A^i$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, en utilisant (3.1), on obtient

$$(P(\lambda)I - P(A))^n = (\lambda I - A)^n Q(A)^n = Q(A)^n (\lambda I - A)^n$$

D'où

$$\ker((\lambda I - A)^n) \subset \ker((P(\lambda)I - P(A))^n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R}((\lambda I - A)^n) \supset \mathcal{R}((P(\lambda)I - P(A))^n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

Ce qui implique

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker((\lambda I - A)^n) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker((P(\lambda)I - P(A))^n)$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}((\lambda I - A)^n) \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}((P(\lambda)I - P(A))^n)$$

D'autre part, comme $P(\lambda) = 0$ et $P(A) \in \mathcal{K}(X)$, il résulte que $P(\lambda)I - P(A)$ est un opérateur de Fredholm sur X avec montée et descente finies. Ainsi, les membres de droite de (3.2) et (3.3) sont en fait des réunions et intersections finies. Il découle de la Proposition 2.1 que :

$$p(P(\lambda)I - P(A)) = q(P(\lambda)I - P(A)) = n_0$$

Puisque $P(\lambda)I$ commute avec $P(A)$, la formule du binôme de Newton donne :

$$(P(\lambda)I - P(A))^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} (-1)^k \binom{n_0}{k} (P(\lambda))^{n_0-k} P(A)^k = (P(\lambda))^{n_0} I - S$$

où

$$S = \sum_{k=1}^{n_0} (-1)^{k-1} \binom{n_0}{k} (P(\lambda))^{n_0-k} P(A)^{k-1}$$

est un opérateur compact sur X. Comme $P(\lambda) = 0$ et S est un opérateur de Riesz, alors :

$$\dim \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker((P(\lambda)I - P(A))^n) \right) = \dim \ker((P(\lambda)I - P(A))^{n_0}) < \infty$$

$$\operatorname{codim} \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}((P(\lambda)I - P(A))^n) \right) = \operatorname{codim} \mathcal{R}((P(\lambda)I - P(A))^{n_0}) < \infty$$

En utilisant les équations (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\dim \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker((\lambda I - A)^n) \right) < \infty, \quad \operatorname{codim} \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}((\lambda I - A)^n) \right) < \infty$$

Cela implique que :

$$p(\lambda I - A) < \infty, \quad q(\lambda I - A) < \infty$$

et aussi :

$$\dim \ker(\lambda I - A) < \infty, \quad \operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda I - A) < \infty$$

Pour montrer que $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ est fermé, on peut supposer que $\lambda I - A$ est injectif. Sinon, l'espace de dimension finie $\ker(\lambda I - A)$ admet un complément fermé $M \subset X$, et on a :

$$X = \ker(\lambda I - A) \oplus M$$

Définissons l'opérateur $S : M \to X$ par $S := (\lambda I - A)|_M$, la restriction de $\lambda I - A$ à M. Comme $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(\lambda I - A)$ et S est injectif, on peut remplacer $\lambda I - A$ par S dans ce qui suit.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite telle que

$$(\lambda I - A)(x_n) \to y \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

En utilisant les équations (3.1) et (3.4), on déduit

$$[P(\lambda)I - P(A)](x_n) \to Q(A)y \quad \text{lorsque } n \to \infty \tag{3.4}$$

Nous affirmons que la suite (x_n) n'est pas bornée. Supposons par l'absurde qu'elle ne l'est pas. Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k}) \subset X \setminus \{0\}$ telle que :

$$\|x_{n_k}\| \to \infty$$

Posons

$$\tilde{x}_k := \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{x}_k\| = 1 \tag{3.6}$$

En utilisant les équations (3.4) et (3.6), on a

$$(\lambda I - A)(\tilde{x}_k) \to 0 \quad \text{lorsque } k \to \infty$$

En utilisant les équations (3.1) et (3.7), on a

$$[P(\lambda)I - P(A)](\tilde{x}_k) \to 0 \quad \text{lorsque } k \to \infty \tag{3.7}$$

Comme $P(A) \in \mathcal{K}(X)$, la suite $(P(A)\tilde{x}_k)$ admet une sous-suite convergente. Il en résulte que $(\tilde{x}_k)$ possède une sous-suite $(\tilde{x}_{k_\ell})$ convergente vers un élément $\tilde{z} \in X$, tel que

$$\|\tilde{z}\| = 1, \quad (\lambda I - A)(\tilde{z}) = 0$$

Ce qui signifie que $\tilde{z} \in \ker(\lambda I - A)$, en contradiction avec l'injectivité supposée.

Ainsi, (x_n) est nécessairement bornée.

Puisque $P(A) \in \mathcal{K}(X)$ et (x_n) est bornée, Il existe une sous-suite $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de (x_n). Soit $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de (x_n) telle que

$$P(A)(x_n^*) \to z \in X \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Donc, il découle de l'équation (3.5) que

$$x_n^* \to \frac{1}{P(\lambda)}(z - Q(A)y) \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Et d'après l'équation (3.4), on a :

$$y = (\lambda I - A)^{-1}\left(\frac{1}{P(\lambda)}(z - Q(A)y)\right)$$

Cela prouve que $y \in \mathcal{R}(\lambda I - A)$ et complète la démonstration.

□

Théorème 3.0.3. *Soit X un espace normé et soit $A \in \mathcal{PK}(X)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme complexe non nul*

$$P(z) = \sum_{r=0}^{p} a_r z^r$$

tel que $P(A) \in \mathcal{K}(X)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) \neq 0$, et posons $F := I - A$. Si F est injectif, alors l'opérateur inverse

$$F^{-1} = (I - A)^{-1} : X \to X$$

existe et est borné.

Démonstration. Par hypothèse, l'opérateur F est injectif, c'est-à-dire $N(F) = \{0\}$. Donc, $\mathrm{p}(F) = 0$, on déduit que $F(X) = X$, c'est-à-dire que l'opérateur F est surjectif. Ainsi, l'opérateur inverse $F^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} : X \to X$ existe. Supposons que F^{-1} n'est pas borné. Alors, il existe une suite $(f_n)_n$ telle que $\|f_n\| = 1$ et que la suite $\varphi_n := F^{-1} f_n$ n'est pas bornée. On définit :

$$g_n := \frac{f_n}{\|\varphi_n\|}, \quad \psi_n := \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors $g_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, et $\|\psi_n\| = 1$. Puisque

$$\lambda \psi_n - A\psi_n = g_n \tag{3.9}$$

alors,

$$P(A)\psi_n = P(\lambda)\psi_n - \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i A^{k-1-i} g_n \right). \tag{3.10}$$

Puisque $P(A)$ est compact, on peut extraire une sous-suite $(\psi_{n(k)})_k$ telle que

$$\left(P(A)\psi_{n(k)}\right)_k \to \psi \in X \quad \text{lorsque } k \to \infty.$$

En utilisant l'équation (3.10), on observe que…

$$\psi_{n(k)} \to \frac{\psi}{P(\lambda)}, \quad \text{lorsque } k \to \infty.$$

Cela implique que $\|\psi\| = |P(\lambda)|$. L'équation (3.9) implique que $\psi \in N(F)$. Donc, $\psi = 0$, ce qui contredit $P(\lambda) \neq 0$. □

□

Proposition 3.0.1. *Soit $A \in PK(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $P(\lambda) = 0$ et posons $F := I - A$. Si l'équation homogène*

$$Fx = 0$$

n'a que la solution triviale $x = 0$, alors pour tout $f \in X$, l'équation non homogène

$$Fx = f$$

admet une unique solution $x \in X$ qui dépend continûment de f [7].

Théorème 3.0.4. *Soit $A \in PK(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $P(\lambda) = 0$ et supposons que $I - A$ n'est pas injectif. Alors le noyau*

$$\ker(I - A)$$

est de dimension finie et l'image

$$R(I - A)(X) = X$$

est un sous-espace fermé propre de X.

Démonstration. Puisque $I-A$ n'est pas injectif, on a $\ker(I-A) \neq \{0\}$. Cela signifie que $\mathrm{p}(I-A) > 0$ alors on conclut que

$$R(I-A)(X) = X.$$

$\square$

Théorème 3.0.5. *Soit $A \in PK(X)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme complexe non nul*

$$Q(z) = \sum_{r=0}^{p} a_r z^r$$

tel que $Q(A) \in K(X)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Q(\lambda) = 0$ et posons $F := I - A$. Alors la projection $P : X \to N_F^{\mathrm{p}}(F)$ définie par la décomposition

$$X = \ker_F^{\mathrm{p}}(F) \oplus M_F^{\mathrm{p}}(F)(X)$$

est compacte, et l'opérateur $F - P = I - A - P$ est bijectif.
où L'expression $M_F^p(F)(X)$ désigne un sous-espace supplémentaire (ou un complémentaire topologique) de $\ker^p(F)$ dans X, c'est-à-dire :

$$X = \ker^p(F) \oplus M_F^p(F)(X)$$

Démonstration. Soit $n_0 := \mathrm{p}(F)$, alors $F^{n_0} \in B(X)$, puisque $F \in B(X)$, donc l'espace nul

$$\ker(F^{n_0})$$

est de dimension finie. Il est facile de vérifier que

$$\|x\|_{n_0} := \inf_{y \in F^{n_0}(X)} \{\|x+y\|\}$$

définit une norme sur $\ker(F^{n_0})$. En particulier, on conclut de $\|x\|_{n_0} = 0$ que $x = 0$, puisque l'image $F^{n_0}(X)$ est fermée,Puisque sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, il existe un nombre positif c tel que

$$\|x\| \leq c \inf_{y \in F^{n_0}(X)} \{\|x+y\|\}$$

pour tout $x \in \ker(F^{n_0})$. Donc, pour tout $x \in X$, on a $Px \in N(F^{n_0})$ et par conséquent

$$\|Px\| \leq c \inf_{y \in F^{n_0}(X)} \{\|Px+y\|\} \leq c\|x\|,$$

puisque $x - Px \in F^{n_0}(X)$. Ainsi, P est bornée, de plus P est un opérateur compact, car son image $P(X) = \ker(F^{n_0})$ est de dimension finie. D'autre part, l'opérateur $A + P \in PK(X)$, puisque $A \in PK(X)$ et $P \in K(X)$.

Soit $x \in \ker(F-P)$, c'est-à-dire

$$(F-P)x = 0.$$

Alors, $F^{n_0+1}x = 0$, puisque $Px \in \ker(F^{n_0})$. Par conséquent,

$$x \in \ker(F^{n_0+1}) = \ker(F^{n_0}), \quad Px = x,$$

ce qui implique

$$Fx = x.$$

Par itération, on obtient

$$x = F^{n_0}x = 0.$$

Donc, $\ker(F - P) = \{0\}$, on conclut que $F - P$ est surjectif. Ceci achève la démonstration.

$\square$

Théorème 3.0.6. *Soit $P(\cdot)$ un polynôme complexe non nul,*

$$P(z) = \sum_{r=0}^{p} a_r z^r$$

et $z_1, \ldots, z_p$ ses racines. Si $(\lambda_n)_n$ est une suite de nombres complexes telle que $(P(\lambda_n))_n$ converge vers zéro, alors on peut choisir une sous-suite $(\lambda_{n_k})_k$ de $(\lambda_n)_n$ qui converge vers z_i pour un certain $i \in \{1, \ldots, p\}$ [9].

Définition 3.0.4. *Pour un opérateur polynômialement compact A, le polynôme complexe non nul $P(\cdot)$ de plus bas degré tel que $P(A)$ soit compact sera appelé le polynôme minimal de A.*

Théorème 3.0.7. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie et soit $A \in PK(X)$ avec $P(\cdot)$ le polynôme minimal de A. Soit*

$$P(z) = \sum_{r=0}^{p} a_r z^r$$

et $z_1, \ldots, z_p$ ses racines. Alors $\sigma := \{z_1, \ldots, z_p\}$ appartient au spectre de A et $\sigma(A) \setminus \{z_1, \ldots, z_p\}$ consiste en un ensemble au plus dénombrable de valeurs propres sans point d'accumulation, excepté éventuellement $\sigma = \{z_1, \ldots, z_p\}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $z_i \notin \sigma(A)$. Alors $(z_iI - A)^{-1}$ existe et est borné. D'autre part, on peut écrire

$$P(A) = a_p(z_1I - A) \cdots (z_pI - A).$$

Considérons le polynôme

$$Q(z) = a_p(z_1 - z) \cdots (z_{i-1} - z)(z_{i+1} - z) \cdots (z_p - z).$$

Alors
$$Q(A) = (z_i I - A)^{-1} P(A).$$
Comme $P(A) \in K(X)$ (opérateur compact) et $(z_i I - A)^{-1}$ est borné, alors $Q(A) \in K(X)$. Ceci contredit le fait que P est le polynôme minimal de A. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $z_i \in \sigma(A)$.

Si $\sigma = \{z_1, \ldots, z_p\}$, deux cas se présentent

— soit $\ker(I - A) = \{0\}$,

— soit $\ker(I - A) \neq \{0\}$.

Dans le premier cas, d'après le Théorème 3.0.3, l'opérateur $(I - A)^{-1}$ existe et est borné.

Dans le second cas, λ est une valeur propre. Ainsi, chaque $\lambda \in \sigma = \{z_1, \ldots, z_p\}$ est soit dans le domaine de résolvante de A, soit une valeur propre de A.

Il reste à montrer que pour tout $R > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs propres dans
$$\bigcup_{k=1}^{p} D(z_k, R),$$
où $D(z_k, R)$ désigne le disque de centre z_k et de rayon R.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de valeurs propres distinctes telle que
$$\lambda_n \in \bigcup_{k=1}^{p} D(z_k, R).$$
Choisissons des vecteurs propres x_n tels que $Ax_n = \lambda_n x_n$ et définissons les sous-espaces vectoriels de dimension finie
$$U_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}.$$
Il est facile de vérifier que les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. Par conséquent, on a
$$U_{n-1} \subsetneq U_n.$$
Et, par le lemme de Riesz, on peut choisir une suite $(x_n)_n$ d'éléments tels que
$$x_n \in U_n \quad \text{et} \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \|x_n - y\| \geq \frac{1}{2}$$
pour tout $y \in U_{n-1}$. En écrivant
$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,$$
nous obtenons
$$P(\lambda_n)x_n - P(A)x_n = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_n)\alpha_k \varphi_k - P(A)x_n.$$

Par conséquent, pour m nous avons

$$P(A)x_n - P(A)x_m = P(\lambda_n)x_n\big(P(\lambda_n)x_n - P(A)x_n + P(A)x_m\big) = P(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda_m),$$

où

$$P(\lambda_n)x_n - P(A)x_n + P(A)x_m := P(\lambda_n).$$

D'où

$$x_m \in U_{n-1}, \quad \|P(A)x_n - P(A)x_m\| = |P(\lambda_n)| \cdot \|x_n - x_m\| \geq |P(\lambda_n)|\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}\inf|P(\lambda_n)|.$$

Le fait que $|\lambda_n - z_i| > r$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, nous concluons que $\inf|P(\lambda_n)| > 0$, et la suite $(P(A)x_n)_n$ ne contient pas de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de $P(A)$.

□

Pour $A \in B(X)$, on définit $\ker^\infty(A) = \bigcup_n \ker(A^n)$ comme l'hyper-noyau de A et $R^\infty(A) = \bigcap_n R(A^n)$ comme l'hyper-image de A. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, la dimension de $\ker^\infty(A - \lambda)$ est appelée la multiplicité algébrique et est notée par $\mathrm{mult}(A; \lambda)$.

Remarque 3.0.1. Soit $A \in PK(X)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme complexe non nul

$$P(z) = \sum_{r=0}^{p} a_r z^r$$

tel que $P(A) \in K(X)$, et soit $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $P(\lambda) = 0$. Alors, en utilisant l'Équation (3.2), on a

$$\mathrm{mult}(A; \lambda) \leq \mathrm{mult}(P(A); P(\lambda)) < 1.$$

Théorème 3.0.8. *Soit $A \in B(X)$ et supposons qu'il existent $A_1, A_2 \in B(X)$ et $F_1, F_2 \in PK(X)$, c'est-à-dire qu'il existent deux polynômes complexes non nuls*

$$P(z) = \sum_{r=0}^{n} a_r z^r \quad et \quad Q(z) = \sum_{r=0}^{n} b_r z^r,$$

tels que $P(F_1)$ et $Q(F_2)$ sont compacts. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(\lambda) = 0 \quad et \quad Q(\mu) = 0,$$

et tels que

$$A_1 A = I - F_1 \quad sur\ X \quad et \quad AA_2 = I - F_2 \quad sur\ X.$$

Alors $A_2(X) = X$.

Démonstration. En utilisant le fait que

$$\ker(A) \subseteq \ker(A_1 A),$$

on déduit que
$$\alpha(A) \leq \alpha(I - F_1).$$
D'autre part,
$$R(A) \supseteq R(AA_2) = R(I - F_2).$$
On a
$$\alpha(A) < \infty \quad \text{et} \quad \beta(A) < \infty.$$
Pour compléter la Démonstration, il suffit de montrer que $R(A)$ est fermé . $\square$

Théorème 3.0.9. *[7] Soit $F \in B(X)$. Si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*
(i) $\operatorname{ind}(F) = 0$ *et* $r(F) < 1$.
(ii) $\operatorname{ind}(F) = 0$ *et* $r_0(F) < 1$.
Alors, il existe un entier $n \geq 1$, un opérateur $U \in B(X)$ et un opérateur $A \in PK(X)$, ainsi qu'un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$, pour lesquels on a
$$UF^n = F^nU = I - A.$$
où $r_0(F)$ le rayon spectral essentiel de l'opérateur F, , est défini par :
$$r_0(F) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(F)\}$$

Dans cette section, nous présentons quelques résultats sur les multiplicités et la localisation des valeurs propres des opérateurs polynomialement compacts.

Proposition 3.0.2. *Soit $A \in PK(X)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme complexe non nul*
$$P(z) = \sum_{r=0}^{p} a_r z^r$$
tel que $P(A) \in K(X)$. La multiplicité d'une valeur propre non nulle de $P(A)$ satisfait
$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{mult}(A, \lambda) = \operatorname{mult}(P(A), \mu) = m,$$
et pour tout $\lambda \in \sigma(A)$ avec $P(\lambda) = 0$, on a
$$\operatorname{mult}(A, \lambda) = \operatorname{mult}(A_0, \lambda).$$

Démonstration. Soit $\mu \in \sigma(P(A)) \setminus \{0\}$, on a
$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)),$$
donc on peut trouver $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $P(\lambda) = \mu$, on obtient
$$\operatorname{mult}(P(A), \mu) < \infty \quad \text{et} \quad \operatorname{mult}(A, \lambda) < \infty.$$

Cependant, les valeurs propres distinctes telles que $P(\lambda) = \mu$ sont en nombre fini. Alors nous avons

$$\bigcup_{\lambda\in\sigma(A),P(\lambda)=\mu}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ker\big((I - A/\lambda)^n\big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ker\big((I - P(A)/\mu)^n\big).$$

Sachant que $\mu = P(\lambda) = 0$ et on a

$$\mathrm{p}(I - A/\lambda) < \infty,$$

et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ker\big((I - A/\lambda)^n\big) = ker\big((I - A/\lambda)^m\big),$$

pour $m = \mathrm{p}(I - A/\lambda)$. En utilisant les équations (3.1) et (3.2), on obtient

$$\bigcup_{\lambda\in\sigma(A),P(\lambda)=\mu} ker\big((I - A/\lambda)^m\big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ker\big((I - P(A)/\mu)^n\big).$$

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors

$$ker\big((I - A/\lambda_1)^{m_1}\big) \cap ker\big((I - A/\lambda_2)^{m_2}\big) = \{0\}.$$

Donc, l'équation (3.3) implique

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A),P(\lambda)=\mu} \mathrm{mult}(A, \lambda) = \mathrm{mult}(P(A), \mu).$$

Puisque $\mathrm{mult}(P(A), \mu) < \infty$, alors $\mathrm{p}(I - P(A)/\mu) < \infty$. Posons $n_0 = \mathrm{p}(I - P(A)/\mu)$ et

$$Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ker\big((I - P(A)/\mu)^n\big) = ker\big((I - P(A)/\mu)^{n_0}\big).$$

On définit $A_0 := A|_Y : Y \to Y$ la restriction de A à Y. Soit $\lambda_0 \in \sigma(A_0)$ une valeur propre de A_0 et choisissons $y \in Y$ un vecteur propre associé à λ_0, c'est-à-dire

$$(I - P(A)/\mu)^{n_0} y = 0 \quad \text{et} \quad Ay = \lambda_0 y.$$

Puisque $P(A)$ et $P(\lambda_0)I$ commutent, nous avons

$$[P(\lambda_0)]^{n_0} y = \left([P(\lambda_0)I - P(A)] + P(A)I\right)^{n_0} y = \dots$$

Ainsi, $P(0) = 0$, donc $P(0) = 0$ puisque $y = 0$. Puisque Y est un espace de dimension finie, d'après le théorème de décomposition de Jordan, on a

$$Y = L_2(A_0) \oplus ker((I - A_0)^p)$$

où p désigne la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique de A_0. On peut en déduire

$$Y = L_2(A) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} ker((I-A)^n)$$

puisque chaque $L_2(A_0) \subset L_2(A)$ et satisfait $P(\lambda) = 0$. On en conclut que

$$\text{mult}(P(A); \lambda) = \sum \text{mult}(A; \lambda)$$

Cela prouve

$$\text{mult}(P(A); \lambda) = \sum \text{mult}(A; \lambda)$$

Il reste à prouver que

$$\text{mult}(A; \lambda) = \text{mult}(A_0; \lambda)$$

pour $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Soit $p = \text{p}(I-A)$, l'opérateur $(I-A)^p$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Donc

$$\text{mult}(A; \lambda) = \dim Ker((I-A)^p) = \text{codim}\, R((I-A)^p) =$$

$$\dim Ker((I-A_0)^p) = \text{mult}(A_0; \lambda)$$

Cela complète la démonstration.

□

Remarque 3.0.2.

(i) Soit A un opérateur de Riesz généralisé et soit $\sigma(A) \subset E$

Soit

$$Y := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Ker((I-A)^n).$$

Si on considère $P(z) = z$ dans l'équation (3.4), on obtient

$$(A/Y) = \{0\}.$$

(ii) Soit A un opérateur de Riesz généralisé. On note $(\lambda_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de A. Alors elle peut être ordonnée de la manière suivante : les valeurs propres sont non croissantes en valeur absolue, c'est-à-dire

$$|\lambda_n(A)| \geq |\lambda_{n+1}(A)|$$

et chaque valeur propre est répétée autant que sa multiplicité. Pour $k \in \mathbb{N}$, si il y a moins de k valeurs propres dans $\sigma(A) \subset E$, on pose

$$\lambda_k(A) = \lambda_{k+1}(A) = \cdots = 0.$$

L'ordre peut ne pas être unique ; on choisit un ordre fixe de ce type.

Définition 3.0.5. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Deux opérateurs $A \in B(X)$ et $B \in B(Y)$ sont dits reliés s'il existent deux opérateurs $S \in B(X,Y)$ et $T \in B(Y,X)$ tels que*

$$A = TS \quad \text{et} \quad B = ST.$$

Théorème 3.0.10. *Soit $A \in PK(X)$ et soit*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$$

le polynôme minimal de A, avec $z_1, \ldots, z_p$ ses racines. Soit $B \in B(Y)$ tel que A et B soient reliés. Alors $B \in PK(Y)$ et

$$\{0, z_1, \ldots, z_p\} = \{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$$

Proposition 3.0.3. *Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie. Soit $A \in PK(X)$ et*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$$

le polynôme minimal de A, avec $z_1, \ldots, z_p$ ses racines. Soit $B \in B(Y)$ tel que A et B soient reliés. Alors A et B sont des opérateurs de Riesz tels que

$$\sigma(A) \cap \{0, z_1, \ldots, z_p\} = \sigma(B) \cap \{0, z_1, \ldots, z_p\}$$

et pour tout $\lambda \in \sigma(A) \cap \{0, z_1, \ldots, z_p\}$, on a

$$\mathrm{mult}(A; \lambda) = \mathrm{mult}(B; \lambda).$$

3.0.1 Opérateurs polynomialement de Riesz

Définition 3.0.6. *Un opérateur $A \in B(X)$ est dit de Riesz polynomial (resp perturbation de Fredholm polynômialement) s'il existe un polynôme complexe non nul P tel que $P(A)$ soit un opérateur de Riesz.*

Une définition équivalente au spectre essentiel de Browder est donné par

Définition 3.0.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur borné sur un espace de Banach X.*

$$\beta_{ess}(A) = \sigma_{e4}(A) \cup \mathrm{acc}(\sigma(A)),$$

où $\mathrm{acc}(\sigma(A))$ est l'ensemble des points d'accumulation de $\sigma(A)$.

Théorème 3.0.11. *Soit $A \in B(X)$. Alors A est polynômialement de Riesz si et seulement si $\beta_{\mathrm{ess}}(A)$ est fini et dans ce cas,*

$$\beta_{\mathrm{ess}}(A) = \pi_A^{-1}(0),$$

où π_A est le polynôme minimal de A.

Démonstration. Supposons que A est polynômialement de Riesz . Alors $\pi_A(A) \in \mathcal{R}(X)$, il suit que

$$\pi_A(\beta_{\text{ess}}(A)) = \beta_{\text{ess}}(\pi_A(A)) = \{0\},$$

et par conséquent,

$$\beta_{\text{ess}}(A) \subset \pi_A^{-1}(0). \tag{3.1}$$

Pour prouver l'inverse, supposons que $\beta_{\text{ess}}(A)$ est fini et soit $\beta_{\text{ess}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Pour

$$p(z) = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n),$$

on a

$$\{0\} = p(\beta_{\text{ess}}(A)) = \beta_{\text{ess}}(p(A)),$$

et donc d'après la remarque (2.1.2), $p(A) \in \mathcal{R}(X)$.

Soit A un opérateur polynômialement de Riesz et soit λ une racine du polynôme minimal π_A. Alors $\pi_A(z) = (z - \lambda)q(z)$ et donc,

$$\pi_A(A) = (A - \lambda)q(A) = q(A)(A - \lambda) \in \mathcal{R}(X). \tag{3.2}$$

Montrons que $\lambda \in \sigma_{e4}(A)$. Si $\lambda \notin \sigma_{e4(A)}$, alors $A-\lambda$ est de Fredholm, et d'après le Théorème 2.1.4 il suit que $q(A) \in \mathcal{R}(X)$, ce qui contredit le fait que π_A est minimal. Par conséquent,

$$\pi_A^{-1}(0) \subset \sigma_{e4}(A),$$

ce qui, avec (3.1), donne

$$\sigma_{e4}(A) = \beta_{\text{ess}}(A) = \pi_A^{-1}(0).$$

$\square$

Proposition 3.0.4. *Si A est polynômialement de Riesz, alors $\sigma(A)$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. l'ensemble $\sigma(A) \setminus \beta_{\text{ess}}(A)$ est constitué des points isolés de $\sigma(A)$ et donc est au plus dénombrable. Comme, d'après le Théorème (3.0.11), $\beta_{\text{ess}}(A)$ est fini, il en résulte que $\sigma(A)$ est au plus dénombrable. $\square$

Proposition 3.0.5. *Soit $A \in B(X)$. Alors A est Riesz généralisé si et seulement si A est polynomialement de Riesz.*

Théorème 3.0.12. *Soit A un opérateur polynômialement de Riesz et considérons $\mu \in \sigma(\pi_A(A)) \setminus \{0\}$. Alors*

$$\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A),\, \pi_A(\lambda) = \mu} \ker^\infty(\lambda - A) = \ker^\infty(\mu - \pi_A(A)),$$

et

$$\text{mult}(\pi_A(A), \mu) = \sum_{\lambda \in \sigma(A); \pi_A(\lambda) = \mu} \text{mult}(A, \lambda).$$

Théorème 3.0.13. *Soit $A \in B(X)$. Alors A est un opérateur polynômialement de Riesz si et seulement si A^* est polynômialement de Riesz et le polynôme minimal de A est égal au polynôme minimal de A^*.*

De plus, si A est polynômialement de Riesz, alors pour tout $\lambda \in \sigma(A) \setminus \pi_A^{-1}(0)$, on a

$$mult(A, \lambda) = mult(A^*, \lambda).$$

Démonstration. Pour un polynôme complexe non nul $p(z)$ et on a $p(A) \in \mathcal{R}(X)$ si et seulement si $p(A^*) = p(A)^* \in \mathcal{R}(X^*)$. Par conséquent,

A est polynômialement de Riesz si et seulement si A^* est polynômialement de Riesz et $\pi_A = \pi_{A^*}$.

Soit A un opérateur polynômialement de Riesz et soit $\lambda \in \sigma(A) \setminus \pi_A^{-1}(0)$. D'après le Théorème (3.0.11), on a $\lambda \in \sigma(A) \setminus \beta_{\text{ess}}(A)$, donc $A - \lambda$ est un opérateur de Browder et λ est une valeur propre de A. Par conséquent,

$$\ker^\infty(A - \lambda) = \ker((A - \lambda)^p)$$

$$\ker^\infty(A^* - \lambda) = \ker((A^* - \lambda)^p),$$

où $p = \text{p}(A - \lambda) = \text{p}(A^* - \lambda)$.

Puisque $A - \lambda$ est un opérateur de Weyl, il s'ensuit que $(A - \lambda)^p$ est de Weyl , on obtient

$$\begin{aligned} \text{mult}(A, \lambda) &= \dim \ker((A - \lambda)^p) = \alpha((A - \lambda)^p) \\ &= \beta((A - \lambda)^p) = \alpha((A^* - \lambda)^p) = \dim \ker((A^* - \lambda)^p) \\ &= \text{mult}(A^*, \lambda). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.0.14. *Soit $A \in B(X)$ et soit $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, où chaque X_i est un sous-espace fermé A-invariant de X, et $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, où A_i est la réduction de A sur X_i, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors*

$$\sigma_{e4}(A) = \sigma_{e4}(A_1) \bigcup \cdots \bigcup \sigma_{e4}(A_n),$$

et A est de Riesz si et seulement si $A_1, \ldots, A_n$ sont de Riesz.

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\ker(A - \lambda) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(A_i - \lambda), \quad R(A - \lambda) = \bigoplus_{i=1}^{n} R(A_i - \lambda).$$

Il en résulte que $A - \lambda$ est de Fredholm si et seulement si chaque $A_i - \lambda$ est de Fredholm. Par conséquent, $\sigma_{e4}(A) = \{0\}$ si et seulement si $\sigma_{e4}(A_i) = \{0\}$, ce qui montre que A est de Riesz si et seulement si chaque A_i l'est. □

Théorème 3.0.15. *[7] Soit A un opérateur polynômialement de Riesz . Alors chaque $\lambda \in \pi_A^{-1}(0)$ est soit la limite des valeurs propres de A, soit il existe un sous-espace fermé A-invariant $X_\lambda \subset X$, de dimension infinie, tel que*

$$\sigma(A_\lambda) = \{\lambda\},$$

où A_λ est la réduction de A sur X_λ.

Théorème 3.0.16. *[5] Soient $A \in B(X,Y)$ et $B \in B(Y,X)$. Alors*

$$BA \text{ est polynômialement de Riesz} \iff AB \text{ est polynômialement de Riesz.}$$

Définition 3.0.8 (Décomposition de Smyth)**.** *Soit X un espace de Banach et $R \in B(X)$ un opérateur de Riesz. On dit que R admet une* décomposition de Smyth *s'il existe une décomposition :*

$$R = F + Q,$$

où

— F *est un* opérateur Fredholm
— Q *est un* opérateur quasi-nilpotent
— F *et* Q *commutent.*

Définition 3.0.9. *Soit X un espace de Banach. On dit que X est un espace de Banach de Smyth si pour tout $R \in \mathcal{R}(X)$, R admet une décomposition de Smyth.*

Proposition 3.0.6. *Soit X un espace de Banach de Smyth. Alors un opérateur $A \in B(X)$ est* polynomialement de Riesz *si et seulement si $\mathcal{W}(A)$ est un ensemble fini.*

Dans ce cas, l'opérateur A se décompose comme une somme directe finie :

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} (F_i + Q_i + \lambda_i I)$$

avec

(i) F_i sont des perturbations de Fredholm ;
(ii) Q_i sont des opérateurs quasi-nilpotents ;
(iii) $\mathcal{W}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Notons par Poly $= C[z]$ pour l'algèbre des polynômes complexes.

Définition 3.0.10. *Si $S \subset A$ est un ensemble arbitraire, on dit que $a \in Poly^{-1}(S)$ s'il existe un polynôme complexe non nul $p(z)$ tel que $p(a) \in S$.*

Proposition 3.0.7. *Si $S \subseteq A$ est un idéal commutatif l'ensemble*

$$P_a^S = \{p \in Poly : p(a) \in S\}$$

des polynômes p tels que $p(a) \in S$ est un idéal de l'algèbre Poly.

Comme les entiers naturels sont bien ordonnés, il existe un polynôme unique p de degré minimal, dont le coefficient dominant est égal à 1, appartenant à P_a^S, que l'on appelle le **polynôme minimal de** a. Nous l'écrivons $p = \pi_a \equiv \pi_a^S$.

Théorème 3.0.17. *Soit X un espace de Banach et soit $A \in B(X)$ tel qu'il existe un polynôme complexe non constant P pour lequel l'ensemble $\sigma_{e4}(P(A))$ a un intérieur vide. Alors l'intérieur de $\sigma_{e4}(A)$ est également vide.*

De plus, si A est un opérateur polynomialement de Riesz, alors $\sigma_{e4}(A) = \mathcal{W}(A)$ est fini.

Enfin, si A est un opérateur de Riesz, alors A est une perturbation de Fredholm polynomialement si et seulement si A^n est une perturbation de Fredholm pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Si l'ensemble $\sigma_{e4}(P(A))$ a un intérieur vide, alors, par le théorème de correspondance spectrale, on a

$$P(\mathrm{Int}(\sigma_{e4}(A))) = \mathrm{Int}(\sigma_{e4}(P(A))) = \varnothing.$$

avec Int désigne l'intérieur.
Or, comme P est une fonction analytique non constante, c'est une application ouverte. Ainsi, si $\mathrm{Int}(\sigma_{e4}(A)) \neq \varnothing$, alors $\mathrm{Int}(P(\sigma_{e4}(A)))$ serait non vide, ce qui est une contradiction. Cela prouve la première assertion.

Supposons maintenant que $P(A)$ est un opérateur de Riesz pour un polynôme non nul P. Alors

$$P(\sigma_{e4}(A)) = \sigma_{e4}(P(A)) = \{0\},$$

ce qui implique que $\sigma_{e4}(A)$ est fini.

Pour montrer que $\sigma_{e4}(A) = \mathcal{W}(A)$, il suffit de prouver que $\mathbb{C}\backslash\sigma_{e4}(A) \subset \mathbb{C}\backslash\mathcal{W}(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{e4}(A)$. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \sigma_{e4}(A)$ est connexe et contient en particulier l'ensemble résolvant de A. La stabilité de l'indice sur les composantes connexes implique que $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{W}(A)$, ce qui conclut la démonstration de la deuxième assertion.

Supposons que P est un polynôme non nul tel que $P(A)$ soit une perturbation de Fredholm. Écrivons

$$P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_m),$$

alors

$$a_0(A - \lambda_1 I)\cdots(A - \lambda_m I) = F,$$

où F est une perturbation de Fredholm.

Comme A est un opérateur de Riesz, $A - \lambda_i I$ est un opérateur de Fredholm pour tout $\lambda_i \neq 0$. Il existe donc au moins un $\lambda_i = 0$ (sinon F serait à la fois une perturbation de Fredholm et un opérateur de Fredholm, ce qui est impossible dans un espace de dimension infinie).

Il en résulte que, pour un certain $1 \leq n \leq m$, on a

$$a_0 A^n S = F,$$

avec $S \in \Phi(X)$. Puisque $S \in \Phi(X)$, alors d'après le théorème d'Atkinson il existe $K_1 \in \mathcal{K}(X)$ et $A_0 \in B(X)$ tels que

$$SA_0 = I - K_1.$$

Par conséquent,

$$a_0 A^n S A_0 = F A_0 \Rightarrow a_0 A^n (I - K_1) = F A_0,$$

ce qui implique

$$a_0 A^n = F A_0 + a_0 A^n K_1.$$

Comme $F \in \mathcal{F}(X)$ et $K_1 \in \mathcal{K}(X)$, on en déduit que $A^n \in \mathcal{F}(X)$, ce qui achève la démonstration.

La réciproque est triviale. $\square$

Conclusion

En conclusion, ce mémoire a permis d'approfondir notre compréhension des opérateurs de Riesz dans les espaces de Banach. Nous avons établi les propriétés fondamentales de ces opérateurs et examiné les caractéristiques principales de ces opérateurs et leurs relations avec d'autres types d'opérateurs linéaires (Fredholm, compact, quasinilpotent,...) ; tout en soulignant leur rôle central dans le développement de la théorie spectrale.

Les résultats montrent que les opérateurs de Riesz sont importants en analyse fonctionnelle et peuvent être utilisés dans diverses applications mathématiques.

Bibliographie

[1] Pietro Aiena. Fredholm and local spectral theory ii with application to weyl-type theorems preface, 2018.

[2] M. Berkani. *Generalized Fredholm Operators in Banach Spaces.* Birkhäuser, 2007.

[3] Earl R Berkson. Hr dowson, spectral theory of linear operators. pages 77–90, 1979.

[4] J. W. Calkin. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in hilbert space. *Annals of Mathematics*, 42(4) :839–873, 1941.

[5] Santanu Dash and Deba Prasad Sukumar. On polynomially riesz operators. *Mathematica Slovaca*, 57(2) :145–154, 2007. Propriété de stabilité des opérateurs polynomialement de Riesz sous produits.

[6] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Opérateurs linéaires. TomeI : Théorie générale.* Interscience/Wiley, NewYork, 1958.

[7] I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek. *Classes of Linear Operators Vol. I.* Operator Theory : Advances and Applications. Birkhäuser, 1990.

[8] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Classics in Mathematics. Springer, Berlin, reprint of the 1980 edition edition, 1995.

[9] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1995.

[10] Kari Laursen and Michael M. Neumann. An introduction to local spectral theory, 2000.

[11] K.B. Laursen and M.M. Neumann. *An Introduction to Local Spectral Theory.* Oxford University Press, Oxford, 2000.

[12] Osmin Monsalve. Some characterizations of riesz operators by means of invariant subspaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 48:431–442, 1999.

[13] Vladimir Müller. *Spectral theory of linear operators : and spectral systems in Banach algebras*, volume 139. Springer Science & Business Media, 2007.

[14] Walter Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[15] Martin Schechter. *Principles of Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1971.