

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي الأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
GOUICEM AYA

THÈME

ESPACES MÉTRIQUES

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

*Mr. Bougoutaia Amar
Mme. Abdelssalem Nawel
Mr. Belacel Amar*

*M.C.A
M.C.B
Professeur*

*Président
Examinatrice
Encadreur*

Année Universitaire 2021/2022

إهداء

إلى فيض الحب ووافر العطاء بلا إنتظار ولامقابل إلى من كان سندا لي في مخاض هذا العمل وميلاده زوجي العزيز يوكانة رضا، إلى أولادي ماهرو مفيدة الذين كانوا بمثابة تحدي لي هل أستمر أم أتوقف؟

إلى من أسسوني وربوني وكانو يدعمونني دائما والدي رحمهما الله وجعل قبريهما روضة من رياض الجنة متمنية بهذا العمل المتواضع ان يكونا فرحين به وهم في دار الحق إلى إخوتي و أخواتي الذين وقفوا معي وشجعوني دائما على الإستمرار

وأهديه أيضا إلى نفسي لأنه طالما كان حلما واليوم بفضل الله و كل هؤلاء والأساتذة الأكارم وصلت إليه.

شكر و عرفان

الحمد لله عز وجل الذي ألهمنا الصبر والثبات وأمدنا بالقوة والعزم على مواصلة مشوارنا الدراسي وتوفيقه لنا في إنجاز هذا العمل، فنحمدك اللهم ونشكرك على نعمتك وفضلك ومن العمل ما ترضى ونسألك البر والتقوى، والسلام على حبيبه وخليته الأمين عليه أزكى الصلاة والسلام.

نتقدم بجزيل الشكر والتقدير للأستاذ الفاضل: بلعسل عمر

لتفضله بالإشراف على هذا البحث وسعة صدره وعلى حرصه أن يكون هذا العمل في الصورة الكاملة لا يشوهه أي نقص، نسأل الله أن يجزيه عنا كل خير قبل الإشراف على هذا العمل البسيط، وعلى المجهودات التي بذلها من أجلنا، والنصائح والتوجيهات التي كان يضعها نصب أعيننا وهي تتبع هذا العمل بكل اهتمام وكذلك نشكر أعضاء اللجنة الأستاذ: بوقطاية عمر والأستاذة: عبد السلام نوال حفظهما الله وجعل ذلك في ميزان حسناتهم جميعا، وكذلك أتقدم بجزيل الشكر وخالص الامتنان الى الإدارة وأساتذة الكلية.

Notations

ssi	Abrégé de l'expression « si et seulement si ».
$:=$	Egalité par définition qu'on représente aussi parfois par le signe $\stackrel{\text{déf}}{=}$.
$\text{sgn}(f)$	Le signe d'une expression f .
\square	Symbole indiquant la fin d'une démonstration.
TD	Abrégé de l'expression « Travaux Dirigés ».
★ Exercice	Lorsqu'un exercice est précédé d'une étoile, cela veut dire qu'il sera traité au TD.
τ	Notation standard d'une topologie.
τ_{us}	La topologie usuelle de \mathbb{R} .
τ_{gros}	La topologie grossière d'un ensemble non vide donné.
τ_{dis}	La topologie discrète d'un ensemble non vide donné.
τ_{cof}	La topologie cofinie d'un ensemble non vide X . Si X est fini, on a $\tau_{\text{cof}} = \tau_{\text{dis}}$; pour cette raison, on ne parle (généralement) de la topologie cofinie que lorsque l'ensemble en question est infini.
$\mathcal{V}(x)$	L'ensemble de tous les voisinages d'un point x d'un espace topologique donné.
$\mathcal{V}(A)$	L'ensemble de tous les voisinages d'une partie A d'un espace topologique donné.
$\mathcal{B}(x)$	Une base de voisinages (appelée aussi « un système fondamental de voisinages ») d'un point x d'un espace topologique donné.
\mathcal{B}	Une base d'un espace topologique donné.
\overline{A}	L'adhérence d'une partie A d'un espace topologique donné.
$\overset{\circ}{A}$	L'intérieur d'une partie A d'un espace topologique donné.
$\text{Fr}(A)$	La frontière d'une partie A d'un espace topologique donné.
τ_A	La topologie induite sur A de la topologie de X (lorsque A est une partie d'un espace topologique X).
$\pi_i : X \rightarrow X_i$	La $i^{\text{ème}}$ projection canonique d'un espace topologique produit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).
d	Notation standard d'une distance.
d_{us}	La distance usuelle de \mathbb{R} .
X^F	L'ensemble de toutes les applications de F dans E (où E et F sont des ensembles non vides).
$\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Lorsqu'il est muni des deux lois de composition $+$ (addition usuelle des applications) et \cdot (multiplication d'un réel par une application), qui sont respectivement interne et externe, il devient un \mathbb{R} -espace vectoriel.
$\mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$	L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} (avec $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$).

$\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel (un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$).

d_1 C'est une distance définie sur \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n ou $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ entre autres.

— Sur \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n).$$

— Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :

$$d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$$

d_2 Elle désigne la distance euclidienne (sur \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n ou $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ entre autres).

— Sur \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n).$$

— Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :

$$d_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx} \quad (\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$$

d_p Elle désigne la distance de Hölder d'exposant p (sur \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n ou $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ entre autres), où $p \in \mathbb{N}^*$.

— Sur \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n).$$

— Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :

$$d_p(f, g) := \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$$

d_∞	<p>C'est une distance définie sur \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n ou $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ entre autres.</p> <p>— Sur \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :</p> $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} x_i - y_i \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n).$ <p>— Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :</p> $d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [a, b]} f(x) - g(x) \quad (\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$ <p>Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, cette distance d_∞ est connue sous le nom de « la distance de la convergence uniforme ». On peut montrer que l'on a : $d_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} d_p$ (que se soit sur \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n ou $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$).</p>
$B(a, r)$	La boule ouverte de centre a et de rayon r (où a est un point d'un espace métrique donné et $r \geq 0$).
$\overline{B}(a, r)$	La boule fermée de centre a et de rayon r (où a est un point d'un espace métrique donné et $r \geq 0$).
$S(a, r)$	La sphère de centre a et de rayon r (où a est un point d'un espace métrique donné et $r \geq 0$).
τ_d	La topologie associée à la distance d d'un espace métrique donné.
d_X	La distance considérée sur un ensemble X . Cette notation est utilisée lorsqu'on dispose de plusieurs espaces métriques X, Y, Z , etc. Les distances respectives de ces derniers sont alors (généralement) désignées par d_X, d_Y, d_Z , etc.
$d(x, A)$	La distance d'un point x par rapport à une partie A d'un espace métrique donné.
$d(A, B)$	La distance entre deux parties A et B d'un espace métrique donné.
$\delta(A)$	Le diamètre d'une partie A d'un espace métrique donné.
d_A	La distance induite sur A de la distance de X (lorsque A est une partie d'un espace métrique X).
$\text{cl}(x)$	C'est une notation utilisée exclusivement au chapitre 7. Elle désigne la composante connexe d'un point x d'un espace topologique donné. On montre que $\text{cl}(x)$ est la plus grande partie connexe, de l'espace topologique en question, qui contient x .
e.v.n	Abrégé de l'expression « espace vectoriel normé ».
0_X	Le vecteur nul d'un espace vectoriel E .
$\dim X$	La dimension d'un espace vectoriel E .
$\text{Ker } f$	Le noyau d'une application linéaire f d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel.
$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$	Le sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné, engendré par des vecteurs x_1, \dots, x_n de cet espace (où n est un entier strictement positif).
$\ \cdot \ $	Notation standard d'une norme sur un espace vectoriel donné, lequel est défini sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

 $\|\cdot\|_1$

C'est une importante norme qu'on peut définir sur plusieurs \mathbb{K} -espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) dont \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

— Sur le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

— Sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx \quad (\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$$

 $\|\cdot\|_2$

C'est la très importante « norme euclidienne » qu'on peut définir sur plusieurs \mathbb{K} -espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) dont \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

— Sur le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

— Sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \quad (\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$$

 $\|\cdot\|_p$

C'est l'importante « norme de Hölder » d'exposant p (où $p \in \mathbb{N}^*$) qu'on peut définir sur plusieurs \mathbb{K} -espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) dont \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

— Sur le \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$$

— Sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$$

$\ \cdot\ _\infty$	<p>C'est une importante norme qu'on peut définir sur plusieurs \mathbb{K}-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) dont \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n et $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.</p> <p>— Sur le \mathbb{K}-espace vectoriel \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}, $n \in \mathbb{N}^*$), elle est définie par :</p> $\ \mathbf{x}\ _\infty := \max_{1 \leq i \leq n} x_i \quad (\forall \mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n).$ <p>— Sur le \mathbb{R}-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), elle est définie par :</p> $\ f\ _\infty := \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad (\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})).$ <p>Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, cette norme $\ \cdot\ _\infty$ est connue sous le nom de « la norme de la convergence uniforme ». On peut montrer que l'on a : $\ \cdot\ _\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \ \cdot\ _p$ (que se soit sur \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n ou $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$).</p>
$\ \cdot\ _X$	<p>La norme considérée sur un \mathbb{K}-e.v.n E (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Cette notation est utilisée lorsqu'on dispose de plusieurs \mathbb{K}-e.v.n E, F, G, etc. Les normes respectives de ces derniers sont alors (généralement) désignées par $\ \cdot\ _E$, $\ \cdot\ _F$, $\ \cdot\ _G$, etc.</p>
$\mathcal{L}(E, F)$	<p>L'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}.</p>
$\mathcal{L}_c(E, F)$	<p>L'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels définis sur un même corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}. Ce \mathbb{K}-espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ est muni d'une importante norme (voir ci-dessous); c'est donc, à son tour, un \mathbb{K}-e.v.n.</p>
$\ f\ $	<p>Notation standard de la norme de $\mathcal{L}_c(E, F)$ (où E et F sont des espaces vectoriels normés définis sur un même corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), définie par :</p> $\ f\ := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\ f(x)\ _F}{\ x\ _E} \quad (\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F)).$ <p>Cette importante norme de $\mathcal{L}_c(E, F)$ est appelée « la norme subordonnée » aux normes $\ \cdot\ _E$ de E et $\ \cdot\ _F$ de F.</p>

Résumé

Ce mémoire de la deuxième année Master de Mathématiques que j'ai le privilège de diriger depuis l'année universitaire 2021-2022 à l'Université Amar Theliji Laghouat. Il est composé de 5 chapitres, j'ai commencé mon mémoire en introduisant en même temps les espaces métriques et les espaces topologiques ; ce qui a pour objectif de transmettre au lecteur l'idée intuitive de la construction axiomatique des espaces topologiques. Cette idée est d'ailleurs avancée dans l'introduction avant sa réalisation au mémoire. Ci-dessous sont décrits brièvement les contenus des chapitres :

Au 1^{er} chapitre, nous étudions quelques notions de base de Topologie générale comme intérieur, l'ouvert, voisinage, topologie induite etc. J'explicitier la topologie associée à une distance.

Au le 2^{ème} chapitre, nous abordons les espaces compacts. La définition générale de ces espaces très importants est abstraite ; elle se sert de la propriété dite de Borel-Lebesgue qui, intuitivement, est difficile à cerner. Cependant, c'est elle la clef de démonstration d'un grand nombre de théorèmes fondamentaux sur la compacité. Lorsqu'on se restreint aux espaces métriques, d'autres caractérisations plus cernables de la compacité sont possibles ; parmi celles-ci, on donne la caractérisation de Bolzano-Weierstrass (un espace métrique X est compact ssi toute suite de X possède une sous-suite convergente) et la caractérisation utilisant la notion d'espace métrique totalement borné (un espace métrique X est compact si et seulement s'il est complet et totalement borné). Il est très important de souligner que la compacité est une propriété intrinsèque (i.e., une partie compacte d'un espace topologique X reste compacte par rapport à n'importe quel autre sous-espace topologique de X qui la contient, et vice versa). Nous verrons par suite quelques théorèmes fondamentaux liant la compacité à la continuité. Parmi ceux là, le théorème selon lequel «la compacité se conserve par une application continue» et les deux théorèmes de Heine, déjà vus en 1^{ère} année dans le cas particulier correspondant à \mathbb{R} . On termine le chapitre en question par le théorème de Tychonov selon lequel «tout produit d'espaces topologiques compacts est compact». C'est important théorème, dont la démonstration fait appel à des arguments très raffinés de la théorie des ensembles, sera démontré uniquement dans son cas "facile" où le produit en question est fini. Quant aux espaces localement compacts, nous nous contentons de donner juste leur définition !

Au chapitre 3, nous abordons les espaces complets qui sont quelque part les plus utiles de tous les espaces métriques. Ces espaces extrêmement importants et riches en applications réapparaîtront ultérieurement, un peu partout, dans le cursus d'un étudiant en Mathématiques; pour cette raison, celui-ci doit maîtriser parfaitement le contenu de ce chapitre. Trois théorèmes fondamentaux sont présentés : le théorème des fermés emboîtés de Cantor, le théorème du point fixe de Picard et le théorème de Baire.

Au le chapitre 4, nous abordons les espaces connexes. Intuitivement, une partie connexe d'un espace topologique est une partie d'un seul tenant (i.e., faite d'un seul morceau); ainsi, dans \mathbb{R} par exemple, les parties connexes sont simplement ses intervalles. Tout comme la compacité, la connexité est -elle aussi- une propriété intrinsèque (i.e., non relative). La liaison entre la connexité et la continuité est aussi un des sujets importants de ce chapitre. D'une part, tout comme la compacité, nous montrons que la connexité se conserve aussi par continuité, et d'autre part, nous généralisons le théorème des valeurs intermédiaires (vu en terminale et en 1ère année dans son cas particulier correspondant à \mathbb{R}). Nous enchaînons ensuite par l'importante notion de composante connexe d'un espace topologique, puis nous montrons qu'un produit fini d'espaces connexes est connexe. Nous terminons avec la notion de connexité par arc qui est un peu plus forte que la connexité (bien que dans les cas usuels, elle lui est équivalente).

Au le chapitre 5 et dernier chapitre, nous abordons les espaces vectoriels normés (*e.v.n* en abrégé) sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Dans ces espaces, qui constituent une sous-catégorie spéciale de la catégorie des espaces métriques, on dispose plus fortement d'une norme à la place d'une distance. Lorsque la complétude affecte ces espaces, ils deviennent encore plus riches en applications; on les appelle les espaces de Banach. Le cas des *e.v.n* de dimensions finies est totalement éclairci : on peut dire grosso- modo qu'on a affaire à \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Pour ces derniers, tout devient simple : toutes les normes sont équivalentes; une partie compacte n'est autre qu'une partie fermée et bornée; tous sont des espaces de Banach, etc. C'est par contre en dimension infinie que les choses deviennent plus compliquées; le cas des espaces fonctionnels (i.e., *e.v.n* où les vecteurs sont des fonctions) est particulièrement important et le module d'Analyse fonctionnelle est lui est entièrement consacré! Le plus important dans ce chapitre est l'étude des applications linéaires continues d'un *e.v.n* dans un autre *e.v.n*. Nous verrons que ces applications linéaires continues constituent à leur tour un *e.v.n* très remarquable et très riche en applications. Nous terminons le chapitre en question par l'important théorème de F. Riesz selon lequel « un *e.v.n* est de dimension finie ssi on a équivalence entre une partie compacte et une partie fermée et bornée de cet espace ».

Nous clôturons ce mémoire avec bibliographie d'importantes références

de espace métrique

Table des matières

Bibliography	1
1 Espaces topologiques	4
1.1 Comparaison entre deux topologies d'un même espace	4
1.2 L'ouvert	5
1.3 Voisinage	5
1.4 Système fondamentale	5
1.5 Intérieur	5
1.6 L'adhérence	5
1.7 Espace séparé	6
1.8 Topologie induite	6
1.9 Topologie produit	9
1.10 Suite convergentes	10
1.11 Applications continues	10
1.11.1 Continuité globale	10
1.11.2 Continuité uniforme	11
1.12 Homéomorphismes	11
1.13 Topologie d'un espace métrique	12
1.13.1 Caractérisation des voisinages et des ouverts d'un es- pace métrique	12
1.13.2 Distance	13
1.13.3 Boule	14
1.14 Espaces métrique séparable	15
2 Espaces Compacts	16
2.1 Espace topologique compact	16
2.1.1 La propriété de Borel-Lebesgue d'un espace topologique	16
2.1.2 La compacité d'un espace topologique	17
2.2 Caractérisation des espaces métriques compacts	19
2.3 Propriétés des espaces topologiques compacts	21
2.4 Espaces totalement bornés	23

2.5	Compacité et continuité	24
2.6	Applications continues sur un compacts	26
2.7	Espaces localement compacts	29
3	Espaces complets	30
3.1	Suites de Cauchy	30
3.1.1	Quelques propriétés simples des suites de Cauchy	30
3.2	Quelques propriétés des espaces complets	34
3.3	prolongement par continuité	35
3.4	Théorème du point fixe	36
4	Espaces connexes	40
4.1	Définitions et premières propriétés	40
4.2	Connexité et continuité	42
4.3	Produit d'espaces connexes	43
4.4	Espace localement connexe	44
4.5	Composantes connexes	44
5	Espaces vectoriels normés	46
5.1	Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe	46
5.2	Distance associée à une norme	47
5.2.1	Quelques exemples de notions sur un e.v.n découlant de sa structure métrique	47
5.3	Normes équivalentes et topologiquement équivalentes	48
5.3.1	Exemples de normes sur \mathbb{R} et \mathbb{C}	48
5.4	Produit fini d'espaces vectoriels normés	49
5.4.1	Exemples de normes sur un e.v.n de dimension infinie	50
	Bibliographie	52

Introduction

L'idée très intuitive avancée par M. Fréchet en 1906 consiste à munir X d'une distance (i.e., d'une application $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie certaines propriétés). On parle dans ce cas d'espace métrique. Dans les espaces métriques, la définition des notions de limite et de continuité sont évidentes :

1. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) converge vers un élément $x \in X$ si $d(x_n, x) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. Etant donnés X et Y deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application, on dit que f est continue en un point $x \in X$ si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X , convergeant vers x , la suite $(f(x_n))_n$ d'éléments de Y converge vers $f(x)$.

Les parties d'un espace métrique n'ont pas toutes la même importance ; certaines parties F , dites fermées, satisfont la remarquable propriété selon laquelle « toute suite d'éléments de F , qui converge dans X , a pour limite un élément de F ». Par exemple, dans \mathbb{R} , un intervalle fermé $[a, b]$ est une partie fermée alors que l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels ne l'est pas. Bien que les espaces métriques répondent pas mal à l'objectif initialement envisagé, ils restent insuffisants car on a remarqué qu'il existe des espaces importants (comme par exemples les produits cartésiens d'un nombre infini non dénombrable d'espaces métriques) qui ne sont pas métrisables (i.e., qu'on ne peut pas munir d'une distance qui rend continues certaines applications élémentaires¹). Il s'est avéré donc nécessaire d'étendre la notion d'espace métrique pour inclure ces derniers. C'est précisément l'étude des voisinages d'un point dans le plan (initiée par Hilbert) qui inspira à F. Hausdorff en 1914 une extension des espaces métriques aux espaces plus généraux, dits topologiques. Il semble que la théorie de Hausdorff satisfait pleinement les besoins de l'Analyse et même plus ; c'est pour cela qu'il est inutile d'en chercher davantage d'extensions ! Actuellement, les espaces topologiques interviennent de façon cruciale dans plusieurs branches de mathématiques dont le calcul différentiel, le calcul intégral, l'analyse complexe, l'analyse numérique, l'analyse fonctionnelle, la géométrie différentielle et la topologie algébrique.

1. Pour le cas d'un produit cartésien (infini non dénombrable) d'espaces métriques, les applications élémentaires dont il s'agit sont les projections canoniques.

Chapitre 1

Espaces topologiques

Soit X un ensemble non vide

Définition 1.1. Soient X un ensemble non vide et τ une famille de sous-ensembles de X . On dit que τ est une topologie sur X si elle satisfait les axiomes suivants :

- i) $\emptyset, X \in \tau$;
- ii) toute réunion quelconques d'ouverts est un ouvert ;
- iii) toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On dit alors que le couple (X, τ) est un espace topologique.

Exemple. 1) $\tau = \{\emptyset, X\}$ est la topologie grossière sur X .

2) $\tau = \mathcal{P}(X)$ (l'ensemble de partie de X) est la topologie discrète sur X .

3) la topologie usuelle sur \mathbb{R} est $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \cup_{a,b \in \mathbb{R}}]a, b[\}$

1.1 Comparaison entre deux topologies d'un même espace

Définition 1.2. Soient X un ensemble non vide et τ_1 et τ_2 deux topologies sur X . On dit que τ_1 est plus fine que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$; autrement dit, si tout ouvert de X par rapport à τ_2 est aussi un ouvert de X par rapport à τ_1 . Inversement, on dit que τ_1 est moins fine que τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$.

Exemple. Etant donné X un ensemble non vide, la topologie discrète est la plus fine de toutes les topologies de X et la topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies de X .

1.2 L'ouvert

Définition 1.3. Est un sous-ensemble d'un espace topologique qui ne contient aucun point de sa frontière. L'ouvert est l'élément de base d'un espace topologique

1.3 Voisinage

Soit (X, τ) un espace topologie et soit $x \in X$.

Définition 1.4. On appelle voisinage de x dans X , toute partie de X contenant un ouvert contenant x . on note ν_x l'ensemble des voisinage de x :

$$\nu_x = \{V \in P(X), \exists O \in \tau, x \in O \subset V\}$$

1.4 Système fondamentale

Définition 1.5. Système fondamentale de voisinage de x d'une famille ν_x de voisinage de x si tout voisinage ouvert W de x contient un élément $V \in \nu_x$

1.5 Intérieur

Définition 1.6. Dans un espace topologique, un point x est intérieur à A si A est un voisinage de x . On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A et on le note A° ou $int(A)$

1.6 L'adhérence

Définition 1.7. L'adhérence de A , notée \bar{A} , est l'ensemble des points adhérents à A . On l'appelle aussi fermeture.

Corollaire 1.7.1. Une partie A de X est fermée ssi $A = \bar{A}$.

Démonstration :

Soit A une partie de X .

\Rightarrow : Supposons que A est fermée. Alors, le plus petit fermé de X contenant A est, de toute évidence, A lui même ; c'est-à-dire qu'on a $\bar{A} = A$, comme il fallait le prouver.

\Leftarrow : Supposons qu'on a $\bar{A} = A$. Comme A est fermé alors $A (= \bar{A})$ est fermé,

comme il fallait le prouver. Le corollaire est démontré. La proposition suivante nous donne quelques propriétés de l'adhérence d'une partie d'un espace topologique.

□

Proposition 1.1. Soient A et B deux parties de X . Alors, on a :

1. $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.7 Espace séparé

Définition 1.8. on dit que X un espace séparé (au sens Hausdorff) si deux points distincts quelconques ont des voisinages disjoints c'est à dire :

$$\forall x, y \in X, (x \neq y), \exists V_x \in \nu_x, \exists V_y \in \nu_y : V_x \cap V_y = \emptyset$$

Exemple. L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle est un espace séparé. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \neq y$, en posant $a := \frac{|x-y|}{3}$, les deux intervalles ouverts $]x-a, x+a[$ et $]y-a, y+a[$ sont bien disjoints, le premier étant un voisinage de x et le second est un voisinage de y .

Plus généralement, on peut montrer que tout espace métrique est séparé

Note. Dans son ouvrage fondateur de 1914, F. Hausdorff a montré la grande importance des espaces séparés en établissant des généralisations de plusieurs théorèmes de base d'analyse réelle sur ces derniers.

1.8 Topologie induite

Soit $A \subset X$ quelconque.

Définition 1.9. On appelle topologie induite par τ sur A la topologie τ_A dont la famille d'ouverts est

$$\tau_A = \{A \cap U, U \in \tau\}$$

on dit que (A, τ_A) est un sous-espace topologique de (X, τ) . on appelle τ_A la trace de l'ouvert U sur A .

Proposition 1.2. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X . Alors, la famille τ_A de parties de A , définie par :

$$\tau_A := \{O \cap A, \quad \text{avec } O \in \tau\}$$

constitue une topologie sur A .

Démonstration :

Il s'agit de montrer que les axiomes de Hausdorff sont vérifiés pour le couple (A, τ_A) . On a :

1. Puisque $\emptyset, X \in \tau$ (car τ est une topologie sur X) alors $\emptyset \cap A = \emptyset \in \tau_A$ et $X \cap A = A \in \tau_A$. Le premier axiome de Hausdorff pour (A, τ_A) est ainsi vérifié.
2. Soient U_1 et U_2 deux parties de A sont la forme : $U_1 = O_1 \cap A$ et $U_2 = O_2 \cap A$, avec $O_1, O_2 \in \tau$. D'où :

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A)$$

appartenant à τ_A , et montrons que $U_1 \cap U_2 \in \tau_A$. Par définition même de τ_A , les parties U_1 et U_2 de A sont de la forme : $U_1 = O_1 \cap A$ et $U_2 = O_2 \cap A$, avec $O_1, O_2 \in \tau$. D'où :

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = (O_1 \cap O_2) \cap A \in \tau_A$$

(car $O_1 \cap O_2 \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur X). Le deuxième axiome de Hausdorff pour (A, τ_A) est ainsi vérifié.

3. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de A , appartenant à τ_A , et montrons que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_A$. Par définition même de τ_A , chaque $U_i (i \in I)$ s'écrit sous la forme : $U_i = O_i \cap A$, avec $O_i \in \tau$. D'où

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap A \in \tau_A$$

(car $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$, étant donné que τ est une topologie sur X). Le troisième axiome de Hausdorff pour (A, τ) est ainsi vérifié. pour (A, τ_A) est ainsi vérifié. En conclusion, τ_A constitue bien une topologie sur A . La proposition est démontrée. □

Définition 1.10. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X . La topologie τ_A de A , définie à la proposition 1.2, s'appelle la topologie induite sur A de la topologie de X . Le nouvel espace topologique (A, τ_A) s'appelle un sous-espace topologique de X .

Remarques. La topologie induite sur une partie non vide A d'un espace topologique (X, τ) n'est pas une topologie ordinaire sur A ; elle est construite spécialement pour rendre l'injection canonique $A \hookrightarrow X$ continue. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 1.3. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X . Alors l'injection canonique $i : A \hookrightarrow X$ est continue pour les topologies τ_A de A et τ de X . De plus, la topologie induite τ_A sur A est la topologie la moins finie sur A qui rend i continue.

Démonstration :

Montrons la première partie de la proposition; c'est-à-dire que i est continue. Cela revient à montrer que l'image réciproque par i de tout ouvert de X est un ouvert de A . Pour tout ouvert O de X , on a :

$$i^{-1}(O) = O \cap A$$

qui est bien un ouvert de A (par définition même de τ_A). D'où i est continue. Montrons la seconde partie de la proposition; à savoir que τ_A est la topologie la moins fine sur A qui rend i continue. Soit μ une topologie sur A pour laquelle i est continue et montrons que τ_A est moins fine que μ ; c'est-à-dire que $\tau_A \subset \mu$. La continuité de $i : (A, \mu) \rightarrow (X, \tau)$ entraîne qu'on a pour tout ouvert O de X : $i^{-1}(O) \in \mu$; c'est-à-dire $O \cap A \in \mu$. D'où $\mu \supset \{O \cap A, O \in \tau\} = \tau_A$, comme il fallait le prouver. Ceci achève la preuve de la proposition. \square

La proposition suivante caractérise les fermés et les voisinages d'un point d'un sous-espace topologique d'un espace topologique donné.

Proposition 1.4. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X . Une partie P de A est fermée dans le sous-espace topologique (A, τ_A) de (X, τ) ssi P s'écrit sous la forme $P = F \cap A$, avec F est un fermé de X . De même, une partie V de A est un voisinage d'un point a de A relativement au sous-espace topologique (A, τ) de (X, τ) ssi V s'écrit sous la forme $V = W \cap A$, avec W est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ) .

Démonstration :

Soit P une partie de A . On a :

$$\begin{aligned} P \text{ est un fermé de } (A, \tau_A) &\Leftrightarrow \mathcal{C}_A P \in \tau_A \\ &\Leftrightarrow \exists O \in \tau : \mathcal{C}_A P = O \cap A \\ &\Leftrightarrow \exists O \in \tau : A = \mathcal{C}_A(O \cap A). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}_A(O \cap A) = A \setminus (O \cap A) = A \setminus O = A \cap (\mathcal{C}_X O)$, il en résulte que :

$$\begin{aligned} p \text{ est un fermé de } (A, \tau_A) &\Leftrightarrow \exists O \in \tau : P = (\mathcal{C}_X O) \cap A \\ &\Leftrightarrow \exists F \text{ un fermé de } X \text{ tel que : } P = F \cap A \\ &\text{(en posant } F := \mathcal{C}_X O) \end{aligned}$$

comme il fallait le prouver.

Montrons maintenant la seconde assertion du théorème. Soient a un point de A et V une partie de A .

\Rightarrow : Supposons que V est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (A, τ_A) et montrons que V s'écrit sous la forme $V = W \cap A$, avec W est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ) . Comme, par hypothèse, $V \in \nu(a)|_{(A, \tau_A)}$, il existe $U \in \tau_A$ tel que $a \in U \subset V$. Mais (par définition même de τ_A) U s'écrit : $U = O \cap A$, avec $O \in \tau$. On a donc $a \in O \cap A \subset V$. On a par suite :

$$V = (O \cap A) \cup (V \setminus (O \cap A)) = (O \cup (V \setminus O)) \cap A$$

En posant $W := O \cup (V \setminus O)$, qui est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ) (car $a \in O \subset W$), on obtient $V = W \cap A$; ce qui est bien l'écriture requise pour V .

\Leftarrow : Inversement, supposons que V s'écrit sous la forme $V = W \cap A$, avec W est un voisinage de a relativement à l'espace topologique (X, τ) , et montrons que $V \in \nu(a)|_{(A, \tau_A)}$. Comme $W \in \nu(a)|_{(X, \tau)}$, il existe $O \in \tau$ tel que $a \in O \subset W$. On a par suite $a \in (O \cap A) \subset (W \cap A) = V$. Ce qui montre (puisque $O \cap A \in \tau_A$) que $V \in \nu(a)|_{(A, \tau_A)}$, comme il fallait le prouver. La proposition est démontrée. □

Remarques. Etant donné (X, τ) un espace topologique et A une partie non vide de X , on voit que les parties particulières du sous-espace topologique (A, τ_A) (ouverts, fermés, voisinages) s'obtiennent en coupant simplement par A les parties de l'espace topologique (X, τ) , de particularités analogues. Autrement dit, on prend les traces sur A .

1.9 Topologie produit

Définition 1.11. Soient (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) deux espaces topologiques. la topologie produit sur $X_1 \times X_2$ est la topologie ayant pour base les produits $U \times V$ d'ouvert U de X_1 et V de X_2 .

Exemple. la topologie usuelle sur \mathbb{R}^n est la topologie obtenue par le produit successif de la topologie de \mathbb{R} . la topologie produit sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , avec chacun facteurs \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m muni de sa topologie usuelle sur \mathbb{R}^{n+m} .

1.10 Suite convergentes

Définition 1.12. Soit $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite d'un espace topologique (X, τ) . On dit que cette suite converge vers $a \in X$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N, x_n \in V$$

1.11 Applications continues

Soit (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques.

Définition 1.13. On dit qu'une fonction $f : X \rightarrow Y$ est continue en tout point de X . on note $c^\circ(X, Y)$ ou $(c^\circ(X, \tau; Y, \tau'))$ (s'il est besoin de préciser les topologies) l'ensemble de tous les fonctions continues de X dans Y .

1.11.1 Continuité globale

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application.

On dit que f est continue sur X si elle est continue en tout point de X .

Le théorème suivant est fondamental ; il fournit une caractérisation simple de la continuité globale.

Théorème 1.1. (fondamental).

Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue sur X ssi l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X ; c'est-à-dire ssi :

$$\forall O \in \tau' : f^{-1}(O) \in \tau$$

.

Démonstration :

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application.

(\Rightarrow) : Supposons que f est continue sur X et soit O un ouvert quelconque de Y . Il s'agit de montrer que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X ; ce qui équivaut à montrer que $f^{-1}(O)$ est voisinage de chacun de ses points. Soit donc $x \in f^{-1}(O)$ et montrons que $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x . Comme O est un ouvert de Y et que $f(x) \in O$ (puisque $x \in f^{-1}(O)$) alors O est un voisinage de $f(x)$. Ce qui entraîne (puisque f est, en particulier, continue en x) que $f^{-1}(O)$ est un voisinage de x , comme il fallait le prouver.

(\Leftarrow) : Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un

ouvert de X et montrons que f est continue sur X . Soit donc x un point arbitraire de X et montrons que f est continue en x . Il s'agit de montrer que pour tout $W \in \mathcal{V}(f(x))$, on a $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$. Soit donc $W \in \mathcal{V}(f(x))$ et montrons que $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$. Le fait $W \in \mathcal{V}(f(x))$ équivaut à l'existence d'un ouvert O de Y tel que $f(x) \in O \subset W$. On a donc $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(W)$. Ce qui entraîne (puisque $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X , en vertu de l'hypothèse faite sur f que $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x , comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. \square

Corollaire 1.13.1. Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue sur X ssi l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X .

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et de la formule :

$$f^{-1}(C_X B) = C_X f^{-1}(B) \quad (\forall B \subset Y)$$

.

\square

1.11.2 Continuité uniforme

Définition 1.14. Une fonction $f : X \rightarrow X$ est continue au point $a \in X$ si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tous voisinage V de $f(a)$ est un voisinage de a . Cela s'écrit

$$\forall V' \in \mathcal{V}_{f(a)}, f^{-1}(V') \in \mathcal{V}_a$$

ou bien $\forall U' \in \tau', f(a) \in U', \exists U \in \tau, a \in U$ et $f(U) \subset U'$

1.12 Homéomorphismes

Définition 1.15. On dit qu'une fonction $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ est un homéomorphisme si f est bijective et bicontinue (f et f^{-1} sont continues). dans ce cas, on dit que (X, τ) et (Y, τ') sont homéomorphes.

Définition 1.16. Deux espaces topologiques (X, τ) et (Y, τ') sont dits homéomorphes s'il existe un **homéomorphisme** de X dans Y

Vocabulaire : Au lieu de dire que f et f^{-1} sont continues, on pourrait dire simplement que f est bicontinue.

Remarques. La relation “homéomorphe à” est une relation d’équivalence sur la catégorie de tous les espaces topologiques. En quotientant sur cette relation, on obtient une classification des espaces topologiques. Cette classification ne tient compte que de la nature topologique des parties d’un espace topologique. C’est d’ailleurs le sens de la définition suivante :

Définition 1.17. Une propriété concernant un espace topologique est appelée propriété topologique si elle se conserve par un homéomorphisme.

Exemple : La propriété de séparation est une propriété topologique.

1.13 Topologie d’un espace métrique

Tout espace métrique (X, d) est canoniquement muni d’une topologie, comme l’affirme le

Définition 1.18. Soit (X, d) un espace métrique. Alors

$$O = \{O \subset X : \forall x \in O, \exists r_x > 0, B(x, r_x) \subset O\}$$

est une topologie sur X .

1.13.1 Caractérisation des voisinages et des ouverts d’un espace métrique

Théorème 1.2. (fondamental) Soit (X, d) un espace métrique et soient x un point de X et V une partie de X . Alors, on a :

$$\begin{aligned} V \in v(x) &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset V \\ v \in \tau_d &\Leftrightarrow \forall y \in V, \exists \varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subset V \end{aligned}$$

Démonstration :

— Montrons la première équivalence du théorème. L’implication réciproque de cette équivalence est triviale. Montrons son implication directe. Soit donc $V \in v(x)$ et montrons qu’il existe $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$. L’hypothèse $V \in v(x)$ équivaut à l’existence de $O \in \tau_d$ tel que $x \in O \subset V$. Par définition même de τ_d on peut écrire O sous la forme $O = \cup_{i \in I} B(a_i, r_i)$. Ainsi, le fait $x \in O \subset V$ entraîne qu’il existe $i \in I$ tel que $x \in B(a_i, r_i) \subset V$. Il suffit alors de prendre $\varepsilon = r_i - d(a_i, x) > 0$ pour avoir $B(x, \varepsilon) \subset V$. En effet, pour tout $y \in B(x, \varepsilon)$ on a (en utilisant l’inégalité triangulaire) :

$$d(a_i, y) \leq d(a_i, x) + d(x, y) < d(a_i, x) + \varepsilon = r_i$$

D'où $d(a_i, y) < r_i$; ce qui montre que $y \in B(a_i, r_i)$. Mais puisque $B(a_i, r_i) \subset V$ alors $y \in V$. Ceci confirme l'inclusion requise $B(x, \varepsilon) \subset V$. L'implication directe de la première équivalence du théorème est ainsi démontrée; l'équivalence en question également.

- La seconde équivalence du théorème n'est rien d'autre qu'une conséquence immédiate de sa première équivalence et du théorème 1.2 selon lequel « Une partie V d'un espace topologique est un ouvert ssi V est voisinage de chacun de ses points ». Ceci complète la preuve du théorème. \square

Remarque importante : La seconde équivalence du théorème 1.2 est tellement pratique que plusieurs auteurs la prennent comme une définition de la topologie τ_d associée à une distance d d'un espace métrique. Dans la suite, nous l'utilisons abondamment pour démontrer d'importants résultats sur les espaces métriques. L'un de ces résultats est la proposition suivante qui nous informe de la nature topologique des boules fermées d'un espace métrique.

Proposition 1.5. Toute boule fermée d'un espace métrique est un fermé.

1.13.2 Distance

Soit X un ensemble non vide.

Définition 1.19. Une distance sur X est une application

$$d : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que, pour tous éléments x, y, z , de X , on ait :

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$;
- iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ donc d vérifie l'inégalité triangulaire.
On dit que (X, d) est un espace métrique.

Quelques remarques :

1. La propriété (ii) d'une distance d s'exprime littérairement en disant que d est symétrique.
2. L'inégalité de la propriété (iii) s'appelle l'inégalité triangulaire.

Exemple. 1. Distance discrète.

Tout ensemble X peut être muni de la distance, appelée distance discrète définie par :

$$\begin{cases} d(x, y) = 1 & \text{si } x \neq y \\ d(x, y) = 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

2. L'espace \mathbb{R}^n peut être muni de diverses distances bien connexes :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n)$$

a. distance euclidienne : $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

b. distance : $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

c. distance $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

Dans \mathbb{R} , ces trois distances se confondent à : $d(x, y) = |x - y|$.

Définition 1.20. Un espace métrique est un couple (X, d) constitué d'un ensemble non vide X et d'une distance d sur X . Lorsque d est seulement une semi-distance, (X, d) le couple est appelé espace semi-métrique.

Exemple. i. L'application $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$d(x, y) := |x - y| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$$

constitue une distance sur \mathbb{R} ; on l'appelle la distance usuelle de \mathbb{R} et on la désigne souvent

ii. L'application $d : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

constitue une distance sur \mathbb{C} ; on l'appelle la distance usuelle de \mathbb{C} et on la désigne souvent

1.13.3 Boule

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.21. Soit a un élément de X et r un nombre réel strictement positif.

_ l'ensemble des points

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

s'appelle la boule ouverte de centre a et de rayon r .

_ l'ensemble des points

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

s'appelle la boule fermée de centre a et de rayon r .

Exemple. 1) Dans \mathbb{R} , muni de sa distance usuelle, une boule ouverte de centre a ($a \in \mathbb{R}$) et de rayon r ($r > 0$) est l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$ et une boule fermée de centre a et de rayon r est l'intervalle fermé $[a - r, a + r]$. Puisque tout intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$ ($\alpha, \beta, \alpha < \beta$) peut s'écrire sous la forme $]a - r, a + r[$ (il suffit de prendre $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$ et $r = \frac{\beta - \alpha}{2}$), on en déduit que :

Les boules fermées de \mathbb{R} sont les intervalles fermés bornés.

- 2) Dans \mathbb{R}^2 , muni de sa distance euclidienne, une boule ouverte de centre a ($a \in \mathbb{R}^2$) et de rayon r ($r > 0$) est le disque ouvert de centre a et de rayon r et une boule fermée de centre a ($a \in \mathbb{R}^2$) et de rayon r ($r > 0$) est le disque fermé de centre a et de rayon r .
- 3) Soit X un ensemble non vide muni de sa distance discrète. Alors pour tout $a \in X$ et tout $r > 0$, on a :

$$\bar{B}(a, r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r < 1 \\ X & \text{si } r \geq 1 \end{cases} \quad B(a, r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Les boules (ouvertes ou fermées) de X sont donc les singletons de X et X lui même.

1.14 Espaces métrique séparable

Définition 1.22. Un espace métrique (X, d) est dit séparable s'il vérifie l'axiome suivante : " X contient une partie au plus dénombrable dense"

En d'autre terme : X est séparable si selement s'il existe une partie finie ou dénombrable A de X telle que l'adhérence \bar{A} est l'espace tous entier ($\bar{A} = X$).

Chapitre 2

Espaces Compacts

2.1 Espace topologique compact

Définition 2.1. On dit qu'un espace topologique (X, τ) est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts \mathbb{R} on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Proposition 2.1. Soient X_1, X_2 des espaces topologiques séparés avec X_1 compact.

1. un fermé $A \subset X$ dans un espace topologique compact, muni de la topologie induite, est compact ;
2. l'image $f(X_1) \subset X_2$, munie de la topologie induite, d'un espace topologique compact ;
3. si $f : X_1 \rightarrow X_2$ est une application continue et bijective, alors f est un homéomorphisme.

Remarques. Pour les anglo-saxons, l'axiome de séparation n'est pas inclus dans la définition de la compacité d'un espace topologique !

2.1.1 La propriété de Borel-Lebesgue d'un espace topologique

Définition 2.2. Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si : « De tout recouvrement ouvert de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini ». Autrement dit, si : $\forall (O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $\bigcup_{i \in I} O_i = X, \exists I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que $\bigcup_{i \in I_0} O_i = X$.

2.1.2 La compacité d'un espace topologique

Définition 2.3. Un espace topologique (X, τ) est dit compact s'il est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Proposition 2.2. (fondamentale)

Soient (X, τ) un espace topologique séparé et A une partie de X . Alors A est compacte ssi de toute famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X dont la réunion contient A , on peut extraire un nombre fini d'ouverts dont la réunion contient A .

Démonstration :

Comme (X, τ) est séparé alors tout sous-espace topologique de X est séparé ; en particulier (A, τ_A) est séparé. Par conséquent, A est compacte ssi le sous-espace topologique (A, τ_A) de (X, τ) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Il nous suffit donc de montrer que la propriété de Borel-Lebesgue pour (A, τ_A) est équivalente à la propriété énoncée dans la proposition.

(\Rightarrow) : Supposons que (A, τ_A) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue et soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $\cup_{i \in I} O_i \supset A$. Nous devons montrer qu'il existe $I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que $\cup_{i \in I_0} O_i \supset A$. La famille $(O_i \cap A)$ est constituée d'ouverts de (A, τ_A) (puisque les O_i sont des ouverts de (X, τ)) et vérifie :

$$\bigcup (O_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap A = A$$

(puisque $\cup_{i \in I} O_i \supset A$ par hypothèse). Cette famille $(O_i \cap A)_{i \in I}$ constitue donc un recouvrement ouvert de (A, τ_A) . Comme (par supposition) (A, τ_A) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire de ce recouvrement $(O_i \cap A)_{i \in I}$ de A un sous-recouvrement fini $(O_i \cap A)_{i \in I_0}$ ($I_0 \subset I$, I_0 fini). On a alors :

$$\bigcup_{i \in I_0} (O_i \cap A) = A,$$

c'est-à-dire :

$$\left(\bigcup_{i \in I_0} O_i \right) \cap A = A$$

D'où l'on déduit que :

$$\left(\bigcup_{i \in I_0} O_i \right) \supset \left(\bigcup_{i \in I_0} O_i \right) \cap A = A,$$

confirmant la propriété requise.

\Leftarrow : Supposons que de toute famille $(O_i)_{i \in I}$, d'ouverts de X dont la réunion contient A , on peut extraire un nombre fini d'ouverts de X dont la réunion contient A et montrons que le sous-espace topologique (A, τ_A) de (X, τ) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue. Soit donc $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de (A, τ_A) et montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Comme chaque $\Omega_i (i \in I)$ appartient à τ_A alors ω_i s'écrit : $\omega_i = O_i \cap A$, avec O_i est un ouvert de X . Par hypothèse, on a $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$, qui s'écrit donc $\bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = A$, ce qui équivaut à :

$$\bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = A$$

et montre qu'on a :

$$\bigcup_{i \in I} O_i \supset \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap A = A$$

. On dispose ainsi d'une famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X dont la réunion contient A . D'après notre supposition, on peut extraire de cette famille un nombre fini d'ouverts de X dont la réunion contient A ; autrement dit, $\exists I_0 \subset I, I_0$ fini, tel que :

$$\bigcup_{i \in I_0} O_i \supset A.$$

Ceci entraîne qu'on a :

$$\left(\bigcup_{i \in I_0} O_i \right) \cap A = A,$$

c'est-à-dire :

$$\bigcup_{i \in I_0} (O_i \cap A) = A.$$

Autrement dit :

$$\bigcup_{i \in I_0} \Omega_i = A.$$

Ce qui montre que la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A , qui est bien fini et extrait du recouvrement ouvert initial $(\Omega_i)_{i \in I}$ de (A, τ_A) . Ainsi l'on conclut que (A, τ_A) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue, comme il fallait le prouver. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Exemple. 1. Si X est un ensemble fini, muni de sa topologie discrète τ_{dis} , alors l'espace topologique (X, τ_{dis}) est compact. En effet, X est bien séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue (puisque'il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts de X , étant donné que X est fini).

2. L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , muni de sa topologie usuelle, n'est pas compact. En effet, la famille $(] - n, n[)_{n \in \mathbb{N}}$ constitue bien un recouvrement ouvert de \mathbb{R} mais on ne peut extraire d'elle aucun sous-recouvrement fini (car toute réunion finie d'intervalles ayant la forme $] - n, n[$ ($n \in \mathbb{N}$) donne un ensemble borné
3. Les ensemble fermés et bornés de \mathbb{R}^n , munis de la topologie induite, sont des espaces topologie compacts.

Remarques. Pour les anglo-saxons, l'axiome de séparation n'est pas inclus dans la définition de la compacité d'un espace topologique !

2.2 Caractérisation des espaces métriques compacts

La propriété de Bolzano-Weierstrass d'un espace métrique

Définition 2.4. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass si : « Toute suite de X possède une sous-suite convergente ».

Théorème 2.1. (la caractérisation de Bolzano-Weierstrass). Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact ssi X satisfait la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Remarques. Il y a la compacité à la Borel-Lebesgue (qui est plus générale puisqu'elle définit la compacité d'un espace topologique quelconque) et la compacité à la Bolzano-Weierstrass (qui est restreinte aux espaces métriques). La caractérisation de Bolzano-Weierstrass (du Théorème 2.1) est quelquefois prise comme définition des espaces métriques compacts (notamment pour les non mathématiciens). Elle est effectivement moins abstraite et plus cernable que la caractérisation en termes de recouvrements ouverts ; néanmoins, cette dernière est plus puissante et plus riche en applications. Pour démontrer le Théorème 2.1, on a besoin du lemme suivant :

Lemma 2.2.1. Soit (X, d) un espace métrique satisfaisant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Alors pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de X , il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, la boule ouverte $B(x, r)$ est incluse dans l'un au moins des ouverts O_i ($i \in I$).

Démonstration :

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . On procède par l'absurde en supposant que :

$$r > 0; \exists x \in X \quad \text{tel que} \quad \forall i \in I / B(x, r) \not\subseteq O_i$$

En prenant en particulier $r = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in X \quad \text{tel que} \quad \forall i \in I : B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq O_i$$

En fixant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un tel x_n , on obtient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de X . D'après la propriété de Bolzano-Weierstrass (supposée satisfaite par X), cette suite possède au moins une sous-suite convergente. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite convergente de $(x_n)_n$ et $\ell \in X$ sa limite. Comme $(O_i)_{i \in I}$ constitue un recouvrement de X , il existe $i_0 \in I$ tel que $\ell \in O_{i_0}$. Par suite, puisque O_{i_0} est un ouvert de X , il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $B(\ell, \varepsilon) \subset O_{i_0}$. Fixons en un tel ε . Maintenant, puisque $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > n_1 \Rightarrow d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.1)$$

Par ailleurs, puisque la suite réelle $(\frac{1}{\varphi(n)})_n$ converge vers 0 alors il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n > n_2 \Rightarrow \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.2)$$

En utilisant (2.1) et (2.2), on obtient que pour tout entier $n > \max(n_1, n_2)$ et tout $x \in (x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$

$$\begin{aligned} d(x, \ell) &\leq d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \ell) \\ &< \frac{1}{\varphi(n)} + d(x_{\varphi(n)}, \ell) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que l'on a pour tout $n > \max(n_1, n_2)$:

$$\forall x \in B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}, \quad x \in B(\ell, \varepsilon),$$

ce qui montre que $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(\ell, \varepsilon) (\forall n > \max(n_1, n_2))$ Mais puisque $B(\ell, \varepsilon) \subset O_{i_0}$, on en conclut que $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset O_{i_0} (\forall n > \max(n_1, n_2))$. ce qui est en contradiction apparente avec la propriété de base de la suite $(x_n)_n$, à savoir $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I : B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subseteq O_i$

2.3 Propriétés des espaces topologiques compacts

Théorème 2.2. Soit (X, τ) un espace topologique séparé. Alors toute partie compacte de X est fermée.

Démonstration :

Soit A une partie de X . Supposons que A est compacte et montrons qu'elle est fermée. Cela revient à montrer que $\mathbb{C}_X A$ est un ouvert. Ce qui revient encore à montrer que $\mathbb{C}_X A$ est voisinage de chacun de ses points. Soit donc $y \in \mathbb{C}_X A$ et montrons que $\mathbb{C}_X A$ est un voisinage de y .

Pour tout $x \in A$, puisque $x \neq y$ (car $y \in \mathbb{C}_X A$), la séparation de X entraîne qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert $V_y^{(x)}$ de y tels que $V_x \cap V_y^{(x)} = \emptyset$. Maintenant, comme A est supposé compact et qu'on a de toute évidence :

$$\bigcup_{x \in A} V_x \supset A$$

alors on peut extraire de la famille d'ouverts $(V_x)_{x \in A}$ une sous-famille finie $(V_{x_i})_{i=1 \dots n}$ telle que $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supset A$. Par passage au complémentaires dans X , on obtient (compte tenu des formules de De Morgan) :

$$\bigcap_{i=1}^n (\mathbb{C}_X V_{x_i}) \subset \mathbb{C}_X A$$

Mais puisque $V_y^{(x)} \subset \mathbb{C}_X V_x$ pour tout $x \in A$ (car $V_x \cap V_y^{(x)} = \emptyset$), il s'ensuit que :

Enfin, comme

$$\bigcap_{i=1}^n V_y^{(x_i)} \subset \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{C}_X V_{x_i}) \subset \mathbb{C}_X A$$

$\bigcap_{i=1}^n V_y^{(x_i)}$ est un ouvert de X contenant y (car c'est une intersection finie d'ouverts de X contenant y), on en conclut que $\mathbb{C}_X A$ est bien un voisinage de y . Ce qui complète cette démonstration. □

Théorème 2.3. Soit (X, τ) un espace topologique compact. Alors toute partie fermée de X est compacte.

Démonstration :

Soit A une partie fermée de X et montrons que A est compacte. D'après la Proposition 2.3 cela revient à montrer que de toute famille de fermés (de X) d'intersection disjointe avec A , on peut extraire une sous-famille finie d'intersection disjointe avec A . Soit donc $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de X d'intersection disjointe avec A (i.e., $(\bigcap_{i \in I} F_i) \cap A = \emptyset$) et montrons qu'on peut extraire d'elle une sous-famille finie $(F_i)_{i \in I_0}$ ($I_0 \subset I, I_0$ fini) telle que l'intersection $\bigcap_{i \in I_0} F_i$ soit disjointe avec A (i.e., $(\bigcap_{i \in I_0} F_i) \cap A = \emptyset$). Comme A est supposée fermée, la famille $\{(F_i)_{i \in I}, A\}$ constituée des $F_i (i \in I)$ et de A est une famille de fermés de X d'intersection vide. La compacité de X entraîne alors qu'on peut extraire de cette famille une sous-famille finie d'intersection vide. Cette sous-famille est de l'une des deux formes suivantes :

$$(F_i)_{i \in I_0} \quad \text{ou} \quad \{(F_i)_{i \in I_0}, A\}$$

avec $I_0 \subset I, I_0$ fini. Dans les deux situations, on a :

Ce qui donne le résultat requis et achève cette démonstration. □

Remarque : En réunissant les deux Théorèmes 2.2 et 2.3, on voit que dans un espace topologique compact, on a équivalence entre « partie fermée » et « partie compacte ».

Corollaire 2.4.1. Soient X un espace topologique et A une partie compacte de X . Alors, toute partie fermée de X et incluse dans A est compacte.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le Théorème 2.3 au sous-espace topologique A de X . □

Le résultat de ce dernier corollaire peut s'exprimer littérairement comme ceci : Toute partie fermée incluse dans une partie compacte d'un espace topologique est, elle même, compacte.

Théorème 2.4. Dans un espace topologique séparé X , on a les deux propriétés suivantes :

- i) Toute réunion finie de parties compactes de X est un compact de X .
- ii) Toute intersection de parties compactes de X est un compact de X .

Théorème 2.5. Soit X un espace topologique compact. Alors toute suite de X possède au moins une valeur d'adhérence.

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X .

l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est égale à :

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k, \quad \text{avec} \quad F_k := \overline{\{x_n, n \geq k\}}.$$

Il s'agit donc de montrer que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$. Procédons par l'absurde en supposant que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \emptyset$. Alors, comme X est compact, on peut extraire de la famille de fermés d'intersection vide $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-famille finie $(F_{k_i})_{i=1 \dots r}$ d'intersection vide ; soit

$$F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_r} = \emptyset$$

. Mais d'un autre côté on a (puisque tout ensemble est contenu dans son adhérence) :

$$F_{k_1} \cap \dots \cap F_{k_r} \supset \bigcap_{i=1}^r \{x_n, n \geq k_i\} = \{x_n, n \geq \max(k_1, \dots, k_r)\} \neq \emptyset$$

ce qui contredit bien le fait établi juste au dessus. On a donc $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$. et la suite $(x_n)_n$ possède, par conséquent, au moins une valeurs d'adhérence. Le théorème est démontré. □

2.4 Espaces totalement bornés

Définition 2.5. Un espace métrique (X, d) est dit **totalement borné** (ou **précompact**) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X constitué de boules ouvertes de rayon ε . Ce qui s'exprime avec le symbolisme mathématique par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, \dots, x_n \in X : B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) = X$$

Définition 2.6. Un espace métrique (X, d) est dit **totalement borné** (ou **précompact**) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de parties de X , de diamètres $< \varepsilon$, qui recouvrent X . Ce qui s'exprime avec le symbolisme mathématique par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists A_1, \dots, A_n \subset X : A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X \quad \text{et} \quad \delta(A_i) < \varepsilon \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}).$$

La preuve de l'équivalence des deux définitions précédentes est facile et est laissée comme exercice au soin du lecteur.

Exercice : Montrer que tout espace métrique totalement borné est borné.

Théorème 2.6. (fondamental)

Un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et totalement borné.

Corollaire 2.6.1. (Heine-Borel)

Les parties compactes de \mathbb{R} (muni de sa distance usuelle) sont exactement ses parties fermées et bornées.

Démonstration :

Soit A une partie de \mathbb{R} .

(\Rightarrow) : Supposons que A compacte. Alors, d'après le Théorème 2.2, A est fermée. Et d'après le Théorème 2.6, l'espace métrique $(A, d_{us|_A})$ est totalement borné, donc borné (d'après le résultat de l'exercice ci-dessus). Ainsi, A est une partie fermée et bornée de \mathbb{R} .

(\Leftarrow) : Supposons que A est un fermé borné de \mathbb{R} . Montrer que A est compact équivaut à montrer (en vertu du Théorème 2.1) que toute suite d'éléments de A possède une sous-suite convergente dans A . Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A et montrons qu'elle possède une sous-suite convergente vers un élément de A . Comme A est supposée bornée alors $(x_n)_n$ est une suite réelle bornée. Il s'ensuit (en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass) que $(x_n)_n$ possède une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, disons vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite d'éléments de A (puisqu'elle est extraite d'une suite d'éléments de A) alors sa limite ℓ appartient à \bar{A} . Mais puisque A est supposée fermée, on a ; d'où $\ell \in A$. Ainsi $(x_{\varphi(n)})_n$ est une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers un élément de A . Ce qui donne le résultat requis et complète cette démonstration. □

2.5 Compacité et continuité

Soit $(X, \tau), (Y, \tau')$ deux espaces topologiques.

Théorème 2.7. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue d'un espace topologique compact X dans un espace topologique séparé Y . Alors $f(X)$ est une partie compacte de Y .

Démonstration :

Démonstration. Montrer que $f(X)$ est une partie compacte de Y revient à montrer (d'après la proposition 2.2) que de toute famille d'ouverts de Y

dont la réunion contient $f(X)$, on peut extraire une sous-famille finie dont la réunion contient $f(X)$. Soit donc $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y dont la réunion contient $f(X)$ et montrons qu'on peut en extraire une sous-famille finie dont la réunion contient $f(X)$. Par hypothèse, on a :

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \supset f(X)$$

Ce qui entraîne que :

$$f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right) \supset f^{-1}(f(X))$$

. Mais puisque $f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i)$
et que $f^{-1}(f(X)) = X$, il s'ensuit que :

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) \supset X;$$

c'est-à-dire (puisque l'on a aussi évidemment $\bigcup_{i \in I} (f^{-1}(\Omega_i) \cap X) \subset X$) :

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) = X.$$

Cette égalité ensembliste montre que la famille $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ constitue un recouvrement de X . De plus, comme f est continue et que les $\Omega_i (i \in I)$ sont tous des ouverts de Y , ce recouvrement est ouvert. Par suite, puisque X est compact, on peut alors extraire de $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ un sous-recouvrement fini de X . Autrement dit, il existe $I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que :

$$\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) = X.$$

Il s'ensuit de cela que :

$$f \left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) \right) = f(X)$$

Mais puisque $f \left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) \right) = \bigcup_{i \in I_0} f(f^{-1}(\Omega_i))$ et que $f(f^{-1}(\Omega_i)) \subset \Omega_i \quad (\forall i \in I_0)$, on a $f \left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) \right) \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$ et il en résulte, de ce fait, que :

$$\bigcup_{i \in I_0} \Omega_i \supset f(X)$$

, ce qui donne bien le résultat requis. Le théorème est démontré. □

2.6 Applications continues sur un compacts

Théorème 2.8. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue d'un espace topologique compact X dans un espace topologique séparé Y . Alors $f(X)$ est une partie compacte de Y .

Démonstration :

Montrer que $f(X)$ est une partie compacte de Y revient à montrer (d'après la Proposition 2.2) que de toute famille d'ouverts de Y dont la réunion contient $f(X)$, on peut extraire une sous-famille finie dont la réunion contient $f(X)$. Soit donc $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Y dont la réunion contient $f(X)$ et montrons qu'on peut en extraire une sous-famille finie dont la réunion contient $f(X)$. Par hypothèse, on a :

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \supset f(X)$$

Ce qui entraîne que :

$$f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right) \supset f^{-1}(f(X))$$

. Mais puisque $f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i)$ et que $f^{-1}(f(X)) = X$, il s'ensuit que :

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) \supset X$$

; c'est-à-dire (puisque'on a aussi évidemment $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\Omega_i) \subset X$) : Cette égalité ensembliste montre que la famille $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ constitue un recouvrement de X . De plus, comme f est continue et que les $\Omega_i (i \in I)$ sont tous des ouverts de Y , ce recouvrement est ouvert. Par suite, puisque X est compact, on peut alors extraire de $(f^{-1}(\Omega_i))_{i \in I}$ un sous-recouvrement fini de X . Autrement dit, il existe $I_0 \subset I$, avec I_0 fini, tel que :

$$\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) = X$$

Il s'ensuit de cela que :

$$f \left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i) \right) = f(X)$$

Mais puisque $f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i)\right) = \bigcup_{i \in I_0} f(f^{-1}(\Omega_i))$ et que $f(f^{-1}(\Omega_i)) \subset \Omega_i$ ($\forall i \in I_0$), on a $f\left(\bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(\Omega_i)\right) \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$ et il en résulte, de ce fait, que :

$$\bigcup_{i \in I_0} \Omega_i \supset f(X)$$

, ce qui donne bien le résultat requis. Le théorème est démontré. \square

Corollaire 2.6.2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue d'un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y et soit A une partie compacte de X . Alors $f(A)$ est une partie compacte de Y .

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le Théorème 2.8 à l'application $f|_A : A \rightarrow Y$ (la restriction de f à A).

Le résultat de ce dernier corollaire peut s'exprimer brièvement comme ceci : **L'image d'un compact par une application continue est un compact** (lorsque l'espace d'arrivée est séparé). \square

Corollaire 2.6.3. Toute bijection continue $f : X \rightarrow Y$ d'un espace topologique compact X dans un espace topologique séparé Y est un homéomorphisme.

Démonstration :

Il s'agit de montrer que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est continue. Ce qui revient à montrer que l'image réciproque par f^{-1} de tout fermé de X est un fermé de Y . Autrement dit, l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y . Comme X est compact, alors (en vertu du Théorème 2.3) tout fermé de X est un compact de X ; ce qui entraîne (en vertu du Corollaire 2.6.2) que son image par f est un compact de Y ; qui est par conséquent un fermé de Y (en vertu du Théorème 2.2). Ceci confirme le résultat requis et achève cette démonstration. \square

Théorème 2.9. (le premier théorème de Heine).

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue d'un espace topologique compact K dans \mathbb{R} . Alors f est bornée et atteint ses bornes. Dans la démonstration qui va suivre de ce théorème, on s'appuie sur le résultat de l'exercice suivant dont la solution est laissée au soin du lecteur !

Exercice : Montrer que pour toute partie bornée A de \mathbb{R} , on a : $\inf A \in \bar{A}$ et $\sup A \in \bar{A}$:

Démonstration :

Le Théorème (2.8) assure que $f(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R} ; ce qui revient à dire que c'est une partie fermée et bornée de \mathbb{R} . Le fait que $f(K)$ est bornée équivaut à dire que f est bornée et entraîne par ailleurs (d'après le résultat de l'exercice précédent) que :

$$\inf f(K) \in \overline{f(K)} \quad \text{et} \quad \sup f(K) = \overline{f(K)}$$

. Mais puisque $f(K)$ est fermé, on a $\overline{f(K)} = f(K)$, ce qui conclut que :

$$\inf f(K) \in f(K) \quad \text{et} \quad \sup f(K) \in f(K)$$

.
Ce qui revient à dire que f atteint ses deux bornes inférieure et supérieure. Ceci complète la preuve du théorème. □

Théorème 2.10. (le second théorème de Heine - 1872)

Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue.

Démonstration :

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, avec X compact, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in X$:

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

.
Montrons cette propriété pour un $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement. Pour tout $x \in X$, il découle de la continuité de f en x , qu'il existe $\delta_x > 0$ tel que l'on ait pour tout $x' \in X$:

$$d_X(x, x') < \delta_x \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Par suite, comme la famille $(B(x, \frac{\delta_x}{2}))_{x \in X}$ constitue (de toute évidence) un recouvrement ouvert de X et que X est compact, alors on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini $(B(x, \frac{\delta_x}{2}))_{x \in I}$ ($I \subset X$, I est fini). Prenons

$$\delta := \min_{x \in I} \frac{\delta_x}{2} \quad (> 0)$$

On a par conséquent :

$$d_X(x_0, x_1) < \frac{\delta_{x_0}}{2} < \delta_{x_0}$$

et

$$d_X(x_0, x_1) \leq d_X(x_0, x_1) + d_X(x_1, x_2) < \frac{\delta_{x_0}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{x_0}}{2} + \frac{\delta_{x_0}}{2} = \delta_{x_0}$$

Il s'ensuit (en vertu de (*) qu'on utilise pour $(x, x') = (x, x_1)$ puis pour $(x, x') = (x_0, x_2)$) qu'on a :

$$d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d_Y(f(x_0), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où :

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), f(x_0)) + d_Y(f(x_0), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En récapitulant (depuis l'introduction des deux points x_1 et x_2 de X), on a :

$$x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon,$$

comme il fallait le prouver. Le théorème est démontré. □

Proposition 2.3. Soient (X, τ) un espace topologique séparé et A une partie de X . Alors A est compacte ssi de toute famille de fermés (de X) d'intersection disjointe avec A , on peut extraire une sous-famille finie d'intersection disjointe avec A

2.7 Espaces localement compacts

Définition 2.7. Un espace topologique X est dit localement compact si tout point de X possède un voisinage compact.

Exemple. Les espace \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont localement compacts. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la boule fermée $\bar{B}(x, 1)$ est fermée et bornée, donc compacte, et c'est un voisinage de x .

Chapitre 3

Espaces complets

3.1 Suites de Cauchy

Définition 3.1. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X est dite de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; p, q \in \mathbb{N} : p > q > N \Rightarrow d(X_p, X_q) < \varepsilon$$

.

3.1.1 Quelques propriétés simples des suites de Cauchy

Proposition 1 :

Toute suite de Cauchy d'un espace métrique est bornée.

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d) . Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p \leq q \leq N$: $d(X_p, X_q) < 1$. Ceci revient à dire que l'ensemble $\{x_n, n \leq N\}$ est borné (de diamètre ≤ 1). Par ailleurs, l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ est également borné (puisqu'il est fini). Il en résulte donc que l'ensemble

$$\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} = \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \cup \{x_n, n > N\}$$

est aussi borné (en tant que réunion de deux ensembles bornés). Autrement dit, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. La proposition est démontrée. □

Proposition 2 :

Toute suite convergente d'un espace métrique est de Cauchy.

Démonstration :

Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X . Supposons que $(x_n)_n$ est convergente (vers un certain $l \in X$) et montrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a (d'après l'inégalité triangulaire) :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, l) + d(x_q, l).$$

Mais puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N : d(x_n, l) < \frac{\epsilon}{2}$. Pour un tel N , en prenant donc $p > q > N$, on obtient : $d(x_n, l) < \frac{\epsilon}{2}$. Ce qui entraîne (d'après l'inégalité triangulaire de ci-dessus) : $d(x_n, l) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$. En récapitulant, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad p > q > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon$$

□

Quelques Remarques :

1. La réciproque de la Proposition 3.1.1 n'est pas toujours vraie. Autrement dit, une suite de Cauchy d'un espace métrique quelconque n'est pas toujours convergente. Pour s'en convaincre, traitons deux exemples :
 - a. Dans $X =]0, +\infty[$, muni de la distance induite de la distance usuelle de \mathbb{R} , la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est de Cauchy dans X (puisque $\lim_{p, q \rightarrow +\infty} |x_p - x_q| = 0$) mais elle n'est pas convergente dans X (car sa limite dans \mathbb{R} est égale à 0 et $0 \notin X$).
 - b. Dans $X = \mathbb{Q}$, muni de la distance induite de la distance usuelle de \mathbb{R} , la suite de terme général $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est de Cauchy (exercice) mais elle n'est pas convergente dans X (car sa limite dans \mathbb{R} vaut e et $e \notin \mathbb{Q}$).
2. Si X est un ensemble non vide et d et d' deux distances topologiquement équivalentes de X , une suite d'éléments de X peut être de Cauchy dans (X, d) et ne pas l'être dans (X, d') . Pour s'en convaincre, voici un exemple : X de la distance soit $X =]0, +\infty[$ et soient d la distance induite sur X de la distance usuelle de \mathbb{R} (ie., $d(x, y) := |x - y|, \forall x, y \in X$)

définie par : $d'(x, y) := \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ ($\forall x, y \in X$).

On a d et d' sont topologiquement équivalentes ; et pourtant la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est de Cauchy dans (X, d) mais elle n'est pas de Cauchy dans (X, d') . Ainsi, la propriété d'« être de Cauchy » pour une suite n'est pas une propriété topologique (i.e., elle n'est pas conservée par l'application d'un homéomorphisme) ; elle n'est donc pas généralisable aux espaces topologiques quelconques.

3. On verra plus loin que si X est un ensemble non vide et d et d' deux distances équivalentes sur X alors toute suite de Cauchy dans (X, d) est également une suite de Cauchy dans (X, d') .

Proposition 3 :

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Alors pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (X, d_X) , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (Y, d_Y) .

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d_X) et montrons que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (Y, d_Y) . . Etant donné $\epsilon > 0$, comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \eta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon \quad (3.1)$$

Fixons un tel η . Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy (dans (X, d_X)), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$, on a :

$$d_X(x_p, x_q) < \eta;$$

ce qui entraîne (en vertu de (3.1)) qu'on a :

$$d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \epsilon$$

. En récapitulant, on a : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$; avec $p > q > N$; on a : $d_Y(f(x_p), f(x_q)) < \epsilon$. Ce qui montre que la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans (Y, d_Y) . La proposition est démontrée. □

Corollaire

Soit X un ensemble non vide et soient d et d' deux distances équivalentes sur X . Alors toute suite de Cauchy dans (X, d) est également une suite de Cauchy dans (X, d') .

Démonstration :

Comme d et d' sont deux distance équivalentes de X , alors l'application identité $\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, d')$ est lipschitzienne et est donc uniformément continue. Il s'ensuit que l'image par id de toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de (X, d) (qui n'est rien d'autre que la suite $(x_n)_n$ elle-même) est une suite de Cauchy dans (X, d') . Autrement dit, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (X, d') . Le corollaire est démontré. \square

Proposition 4 :

Toute sous-suite d'une suite de Cauchy d'un espace métrique est elle-même de Cauchy.

Démonstration :

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d) et $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_n$ (où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs). Montrons que $(x_{n_k})_k$ est elle-même de Cauchy. Etant donné $\epsilon > 0$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$, on a : $d(x_p, x_q) < \epsilon$. Etant donné un tel N , puisque $(n_k)_k$ est une suite strictement croissante d'entiers positifs, on a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N : n_p > n_q \geq q > N$; d'où $d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \epsilon$ (d'après la propriété de Cauchy précédente vérifiée par $(x_n)_n$). En récapitulant, on a : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, avec $p > q > N$, on a : $d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \epsilon$. Ce qui montre que la sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ est de Cauchy. La proposition est démontrée. \square

Proposition 5 :

Si une suite de Cauchy d'un espace métrique possède une valeur d'adhérence alors elle converge vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique (X, d) . Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) et montrons que $(x_n)_n$ converge vers ℓ . Soit ϵ , avec $p > q > N : d(x_p, x_q) < \frac{\epsilon}{2}$. Fixons un tel N . Comme ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$, il existe $n_0 > N$ tel que $d(x_{n_0}, \ell) < \frac{\epsilon}{2}$. Par suite, en vertu de l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier positif $n > n_0$:

$$d(x_n, \ell) \geq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, \ell) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

En récapitulant, on a donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad : n > n_0 \Rightarrow d(x_n, \ell) < \epsilon$$

. Ce qui montre bien que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ . La proposition est démontrée. □

3.2 Quelques propriétés des espaces complets

Complétude d'un espace métrique produit

Proposition 3.1. Soient (X_1, d) et (X_2, d) deux espaces métriques et soit $X := X_1 \times X_2$ muni des distances produit définies au (on munit par exemple X de la distance $d = \max(d_1, d_2)$ des espaces. Alors l'espace métrique produit (X, d) est complet ssi chacun des deux espaces métriques (X_1, d) et (X_2, d) est complet.

Démonstration :

(\Rightarrow): Supposons que l'espace produit (X, d) est complet et montrons (en faisant d'une pierre deux coups) que chacun des deux espaces (X_1, d) et (X_2, d) l'est aussi. Soient alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de (X_1, d) et (X_2, d) respectivement et montrons qu'elles sont toutes les deux convergentes. Par hypothèse, on a : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p > q > N &\Rightarrow d_1(x_p, x_q) < \epsilon \quad \text{et} \quad d_2(y_p, y_q) < \epsilon; \\ &\Leftrightarrow \max(d_1(x_p, x_q), d_2(y_p, y_q)) < \epsilon; \\ &\Leftrightarrow d((x_p, y_p), (x_q, y_q)) < \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $((x_n, y_n))$ d'éléments de X est de Cauchy dans (X, d) et puisque (X, d) est supposé complet, on en déduit que $((x_n, y_n))$ est convergente dans (X, d) . En désignant par $(\ell_1, \ell_2) \in X$ sa limite, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow d((x_n, y_n), (\ell_1, \ell_2)) < \epsilon; \\ &\Leftrightarrow \max(d_1(x_n, \ell_1), d_2(y_n, \ell_2)) < \epsilon; \\ &\Leftrightarrow d_1(x_n, \ell_1), d_2(y_n, \ell_2) < \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ_1 (dans X_1, d_1) et la suite $(y_n)_n$ converge vers ℓ_2 (dans X_2, d_2). D'où la complétude de chacun des espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) .

(\Leftarrow) : Supposons que les deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont complets et montrons que l'espace produit (X, d) l'est également. Soit donc $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) et montrons qu'elle est convergente. Par hypothèse, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p > q > N &\Rightarrow d((x_p, y_p), (x_q, y_q)) < \varepsilon; \\ &\Leftrightarrow \max(d_1(x_p, x_q), d_2(y_p, y_q)) < \varepsilon; \\ &\Leftrightarrow d_1(x_p, x_q) < \varepsilon \text{ et } d_2(y_p, y_q) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que chacune des deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de (X_1, d_1) et (X_2, d_2) respectivement, est de Cauchy. Comme chacun des deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) est supposé complet, il s'ensuit que chacune de ces deux suites est convergente dans l'espace où elle est définie. En désignant par $\ell_1 \in X_1$ la limite de la suite $(x_n)_n$ et par $\ell_2 \in X_2$ la limite de la suite $(y_n)_n$, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow d_1(x_n, \ell_1) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \max(d_1(x_n, \ell_1), d_2(y_n, \ell_2)) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow d((x_n, y_n), (\ell_1, \ell_2)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $((x_n, y_n))_n$ de (X, d) converge vers $(\ell_1, \ell_2) \in X$. L'espace métrique (X, d) est ainsi complet. La proposition est démontrée. \square

3.3 prolongement par continuité

Le problème est le suivant :

Soient :

1. X, Y deux espaces métriques
2. A une partie partout dense de X ($\bar{A} = X$)
3. f une application de A dans Y continue sur A .

Peut-on prolonger f en une application $g : X \rightarrow Y$ continue sur X ?

Avant de résoudre ce problème, nous allons établir quelques résultats préliminaires.

3.4 Théorème du point fixe

Définition 3.2. (1) On dit que $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ est lipschitzienne et de rapport $k > 0$ si pour tout x et $y \in X$, on a

$$d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

(2) On dit que $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ est une contraction si f est lipschitzienne et de rapport $k < 1$ (on dit aussi que f est contractante).

(3) Soit $f : X \rightarrow X$. On dit que a est un point fixe pour f si $f(a) = a$.

Remarques. Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue sur X .

Exemple. 1.) Si f est la fonction identité, alors tout point est un point fixe.

2.) Si f est l'application définie par $f(x) = x + 1$, alors f n'a pas de point fixe.

Théorème 3.1.

Toute contraction f d'un espace métrique complet (X, d) admet un point fixe.

Démonstration :

— Existence. Considérons la suite (x_n) définie par

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

La suite (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, nous avons

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1})$$

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq kd(x_{n-1}, x_{n-2})$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$d(x_2, x_1) \leq kd(x_1, x_0)$$

n multiplie membre à membre, on a $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$

Soit $p \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq [k^{n+p-1} + \dots + k^n]d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Entre crochets, on a une progression géométrique de raison k , dont on connaît la somme, ce qui donne

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n(1 - k^p)}{1 - k} d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0)$$

Comme $k < 1$, la série est convergente et $d(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, donc la suite est de Cauchy.

La suite (x_n) est de Cauchy dans X complet (x_n) converge vers a et avec $x_n = f(x_{n-1})$, quand $x \rightarrow a$, on obtient $a = f(a)$ (car f est continue), c'est-à-dire que a est un point fixe pour f . a est un point fixe pour f .

— Unicité. Soit a' un point fixe quelconque de f . On a

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq kd(a, a')$$

(car f est contractante), et donc $(1 - k)d(a, a') \leq 0$. Comme $k < 1$, alors $1 - k > 0$ et donc $d(a, a') \leq 0$ qui n'est possible que si $a = a'$. □

Remarques. 1.) Si $k = 1$ le théorème est faux; il n'y a ni existence, ni unicité. A titre d'exemples :

— Considérer dans $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x + 1$. Alors

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x - y| = d(x, y)$$

et il n'existe pas de point fixe.

— Si on considère $X = \mathbb{R}$ et la fonction $f(x) = x$, alors tous les points sont fixes.

2.) Si pour tout x et $y \in X$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, alors il y a unicité mais il n'y a pas existence. A titre de contre-exemple, considérer $f(x) = \log(1 + e^x)$.

Alors il n'existe pas de point fixe; si-non on aurait $\log(1 + e^x) = x$ qui donne $1 + e^x = e^x$ c'est-à-dire $1 = 0$.

3.) Le théorème est faux si (X, d) est non complet. A titre de contre-exemple, considérer $X =]0, 1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$.

4.) Il existe d'autres énoncés du théorème du point fixe (sorte de généralisation), donnés ci-dessous.

Théorème 3.2. Théorème de Brouwer¹

Si X est la boule unité dans \mathbb{R}^n ($X = B^f(0, 1)$) et si f est une application continue de X dans X alors f admet un point fixe.

1. Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Mathématicien néerlandais, 1881-1966

Théorème 3.3. Théorème Tychonov²

Si X compact est convexe dans X (e.v.t. localement convexe) et si f est continue $X \rightarrow X$, alors f admet un point fixe (non nécessairement unique). Le théorème de Brouwer peut être vu comme un cas particulier du théorème de Tychonov (avec $X = B^f(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$).

Théorème 3.4. Théorème de Baire³ Dans un espace métrique complet X , tout ouvert θ non vide est non maigre.

Démonstration :

- Remarquons qu'une partie A est rare si $\bar{A}^\circ = \emptyset$ dans X . Alors il existe une boule fermée $B^f \subset \theta$ et disjointe de A (sinon $A \cap B^f \neq \emptyset \Rightarrow A \cap \theta \neq \emptyset$ c'est-à-dire A partout dense, donc non rare).
- Supposon au contraire qu'il existe un ouvert non vide θ tel que $\theta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où les A_n sont rares.
 - (i) Comme A_0 est rare, alors il existe $B_0^f \subset \theta$ de rayon $r_0 \leq 1$ tel que $B_0^f \cap A_0 = \emptyset$.
 - (ii) En remplaçant θ par B_0 et A_0 par A_1 , on voit qu'il existe une boule fermée $B_1^f \subset B_0 \subset B_0^f$ de rayon $r_1 \leq 1$ et telle que $B_1^f \cap A_1 = \emptyset$.
 - (iii) Etc. Par récurrence.
 - (iv) Pour tout $n \geq 0$, il existe une boule fermée $B_n^f \subset B_{n-1} \subset B_{n-1}^f$ de rayon $r_n \leq \frac{1}{n}$ et tel que $B_n^f \cap A_n = \emptyset$.
 (B_n^f) est une suite décroissante de fermés non vides dans (X, d) complet, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(B_n^f) = 0$ (car $\delta(B_n^f) \leq \frac{2}{n}$). Son intersection est réduite à un point a de θ . Par ailleurs a n'appartient à aucun A_n , puisque $B_n^f \cap A_n = \emptyset$, d'où la contradiction.

□

Remarques. Le théorème reste vrai pour tout espace topologique X (pas forcément métrisable) mais localement compact.

Corollaire 3.2.1. Tout espace métrique complet est non maigre.

Démonstration :

Pour la démonstration, il suýt de prendre $\theta = X$.

2. Andreï Nikolaïevich Tychonov, Mathématicien russe, 1906-1993

3. René Baire, Mathématicien français, 1874-1932

Exemple. \mathbb{R} est non maigre. Par conséquent \mathbb{R} est non dénombrable, car sinon il serait réunion d'ensembles rares, c'est-à-dire maigre.

Corollaire 3.2.2. Dans un espace métrique complet X , si M est maigre alors \mathcal{C}_M est non maigre et partout dense.

Démonstration :

- Si \mathcal{C}_M était maigre, alors $X = M \cup \mathcal{C}_M$ serait maigre.
- \mathcal{C}_M est partout dense, sinon il existerait un ouvert $\theta \neq \emptyset$ tel que $\mathcal{C}_M \cap \theta = \emptyset$. Par conséquent $\theta \subset M$ donc θ est maigre ; ce qui est en contradiction avec le théorème de Baire.

□

Remarques. 1.) On appelle espace de Baire tout espace topologique dans lequel tout ouvert non vide est maigre.

- Un espace métrique complet est donc un espace de Baire.
 - On démontre que tout espace topologique localement compact est un espace de Baire.
- 2.) Le théorème de Baire permet de montrer parfois l'existence d'éléments d'un espace métrique X complet vérifiant une propriété P apparemment exceptionnelle (par exemple : fonction continue et dérivable en aucun point, série de Fourier d'une fonction continue qui diverge en tous les points d'un ensemble dénombrable, . . .)
- 3.) Les applications les plus importantes sont dans la théorie des espaces vectoriels topologiques (evt).

Chapitre 4

Espaces connexes

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4.1. Un espace topologique (X, τ) est dit connexe s'il n'existe pas de partition de X , constituée de deux ouverts. Autrement dit, X est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire sous la forme :

$$X = O \cup O'; \quad \text{avec } O, O' \in \tau, O \neq \phi \quad \text{et} \quad O \cap O' = \phi.$$

Définition 4.2. Un espace topologique (X, τ) est connexe s'il n'existe pas de partition de X , constituée de deux fermés. Autrement dit, X est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire sous la forme : $X = F \cup F'$; avec F, F' des fermés de X ; $F \neq \phi, F' \neq \phi$ et $F \cap F' = \phi$

Définition 4.3. Un espace topologique (X, τ) est connexe si les seules parties de X qui sont ouvertes et fermées à la fois sont X et ϕ . L'équivalence de ces trois définitions est facile à prouver et est laissée au soin du lecteur.

Définition 4.4. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie de X . On dit que A est connexe si le sous-espace topologique (A, τ_A) de X est connexe.

Définition 4.5. Soit X un ensemble non vide, posons $U = \{0, 1\}$, on appelle qu'à toute partie A de X on peut associer (de façon bijective) sa fonction caractéristique $\gamma_A : X \rightarrow U$ définie par :

$$\gamma_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{C}_A \end{cases}$$

U sera également muni de la distance discrète, il n'est donc pas connexe.

Exemple. L'ensemble \mathbb{R} muni de sa topologie usuelle est connexe .

Théorème 4.1. Il y a équivalence entre :

1. X est connexe
2. il n'existe aucune application continue de X sur U .

Démonstration :

1) \rightarrow 2) X connexe, s'il existe une surjection continue

$f : X \rightarrow U, f(X) = U$ serait connexe.

2) \rightarrow 1) Supposons X non connexe : il existe un ouvert fermé de A avec

$A \neq \emptyset, A \neq X$, la fonction γ_A est alors surjective . En outre γ_A est continue :

$\gamma_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \gamma_A^{-1}(\{1\}) = A,$

$\gamma_A^{-1}(0) = \mathbb{C}^A, \gamma_A^{-1}(U) = X$: ce sont tous des ouverts de X .se qui est contradictoire.

□

N.B.Autrement dit, X est connexe si et seulement si les seules applications continues de X dans U sont applications constantes.

La proposition suivante peut être également considérée comme une caractérisation des espaces topologiques connexes. Elle constitue aussi un outil pratique pour prouver d'intéressantes propriétés de connexité.

Proposition 4.1. Un espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ (où l'ensemble $\{0, 1\}$ est muni de sa topologie discrète) est constante.

Démonstration :

Soit X un espace topologique.

(\Rightarrow) : Supposons que X est connexe et soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Puisque la partie $\{0\}$ de l'espace topologique discret $\{0, 1\}$ est à la fois ouverte et fermée, alors (vu que f est continue) son image réciproque $f^{-1}(\{0\})$ par f est une partie à la fois ouverte et fermée de X . Mais puisque X est connexe, on en déduit qu'on a : ou bien $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, ou bien $f^{-1}(\{0\}) = X$. Si alors f est constamment égale à 1 sur X et si $f^{-1}(\{0\}) = X$ alors f est constamment nulle sur X . Dans les deux cas, f est bien constante, comme il fallait le prouver.

(\Leftarrow) : Nous allons montrer la contraposée de l'implication inverse. Supposons que X n'est pas connexe (donc il existe deux ouverts non vides et disjoints

U et V de X tels que $U \cup V = X$) et montrons l'existence d'une application continue et non constante de X dans $\{0, 1\}$. Soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases} \quad (\forall x \in X)$$

Cette application f est continue sur X puisque l'image réciproque de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est un ouvert de X (en effet $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = U, f^{-1}(\{1\}) = V$ et $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ sont tous des ouverts de X) et elle n'est pas constante. Ainsi, f est bien l'une des applications requises. Ceci complète la preuve de la proposition. □

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 4.2. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie de X . Alors A est une partie connexe de X si et seulement s'il n'existe pas deux ouverts de X dont la réunion contient A , l'intersection est disjointe avec A et tels que chacun d'entre eux rencontre A . Autrement dit, A est connexe si et seulement s'il n'existe pas d'ouverts U et V de X tels que :

$$U \cup V \supset A, U \cap A = \emptyset, U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$$

□

Exemple. 1. La partie \mathbb{Z} de \mathbb{R} n'est pas connexe car les deux ouverts

$$U =]-\infty, \frac{1}{2}[\quad , \quad V =]\frac{1}{2}, +\infty[$$

de \mathbb{R} vérifient :

$$U \cup V \supset \mathbb{Z}, U \cap V \cap \mathbb{Z} = \emptyset \quad \text{et} \quad V \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$$

2. La partie \mathbb{Q} de \mathbb{R} n'est pas connexe non plus car les deux ouverts $\Omega_1 =]-\infty, \sqrt{2}[$ et $\Omega_2 =]\sqrt{2}, +\infty[$ de \mathbb{R} vérifient : $\Omega_1 \cup \Omega_2 \supset \mathbb{Q}, \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \mathbb{Q} = \emptyset, \Omega_1 \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $\Omega_2 \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Théorème 4.2. L'ensemble \mathbb{R} (muni de sa topologie usuelle) est connexe.

4.2 Connexité et continuité

Soient deux espaces métriques $(X, d), (Y, d')$ et une application $f : X \rightarrow Y$

Théorème 4.3. Si A est une parti connexe de X et si f est continue sur A , alors $f(A)$ est connexe.

Démonstration :

Supposons $f(A)$ non connexe.

$f(A) = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \neq \Phi, \Omega_2 \neq \Phi, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \Phi, \Omega_1, \Omega_2$ ouverts sur $f(A)$

Posons $\Omega'_1 = A \cap f^{-1}(\Omega_1), \Omega'_2 = A \cap f^{-1}(\Omega_2)$

Ω'_1 et Ω'_2 sont ouverts sur A (f application de A sur $f(A)$).

Soient $y \in \Omega_1, y \in f(A)$ donc, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, alors $x \in f^{-1}(\Omega_1)$.

Donc $\Omega'_1 \neq \Phi$ De même $\Omega'_2 \neq \Phi$.

$\Omega'_1 \cup \Omega'_2 = A \cap (f^{-1}(\Omega_1) \cup f^{-1}(\Omega_2)) = A \cap f^{-1}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = A \cap f^{-1}(f(A)) = A$.
($A \subset f^{-1}(f(A))$)

$\Omega'_1 \cap \Omega'_2 = A \cap (f^{-1}(\Omega_1) \cap f^{-1}(\Omega_2)) = A \cap f^{-1}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \Phi$

Ceci contredit la connexité de A .

4.3 Produit d'espaces connexes

Nous raisonnons sur deux espaces métriques X_1, X_2 (par recurrence, ce sera vrai pour tout produit fini), soit $X = X_1 \times X_2$ l'espaces produit.

Théorème 4.4. Il y a équivalence entre :

- 1) X est connexe
- 2) X_1 et X_2 sont connexe.

Démonstration :

1) \rightarrow 2) car $X_1 = Pr_1(X), X_2 = Pr_2(X)$ et Pr_1, Pr_2 sont continue sur X .

2) \rightarrow 1) Soient f une application continue de X dans U .

Fixons $x = (x_1, x_2) \in X$ et considérons l'application partielle en x :

$$f_{x_1}(y_2) = f(x_1, y_2) \quad X_2 \rightarrow U$$

Nous savons que f_{x_1} est continue , donc elle est constante :

$$f_{x_1}(y_2) = f_{x_1}(x_2)$$

Donc $f(x_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ pour tout $y_2 \in X_2$

De même $f(y_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ pour tout $y_1 \in X_1$ (x_1, x_2) étant arbitraire, il en resulte :

$$f(y_1, y_2) = f(y_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

donc f est constante : X est connexe.

□

4.4 Espace localement connexe

Un espace X est dit localement connexe si pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x , il existe un voisinage connexe W de x tel que $V \supset W$

Exemple. Un espace discret est localement connexe.

N.B. un espace peut être connexe sans être localement connexe.

4.5 Composantes connexes

Soit X un espace métrique quelconque, si $x \in X$, soit $\mathcal{C}_{(x)}$ la famille des parties connexes contenant x , (il y a au moins $\{x\}$). $\bigcap_{A \in \mathcal{C}_{(x)}} A \neq \emptyset$ (car elle contient au moins x). Donc $\bigcup_{A \in \mathcal{C}_{(x)}} A = c(x)$ est connexe, c'est la plus grande partie contenant x , on l'appelle la composante connexe de x .

Proposition 4.3. 1) X connexe signifie : $c(x) = X$ pour tout x .

- 2) si pour tout $x, c(x) = \{x\}$, on dit que X est totalement discontinu (c'est le cas des espaces discrets, mais il y en a d'autres).
- 3) $c(x)$ toujours fermé, car $\overline{c(x)}$ est connexe, donc $\overline{c(x)} = c(x)$
- 4) si $y \in c(x)$, alors $c(y) \supset c(x)$ alors $x \in c(y)$, donc $c(y) \subset c(x)$ donc $c(y) = c(x)$.
- 5) La relation $y \in c(x)$, i.e., $c(x) = c(y)$ est une relation d'équivalence sur X et les classes d'équivalence sont les composantes connexes.
- 6) Si A est un ouvert fermé et si $x \in A : c(x) \subset A$. En effet : $c(x) \neq \emptyset$, supposons $c(x) \cap \mathcal{C}_A \neq \emptyset$
Alors $c(x) \cap Fr(A) \neq \emptyset$. Or $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{\mathcal{C}_A} = A \cap \mathcal{C}_A = \emptyset$ ce qui est une contradiction
- 7) si X est localement connexe, $c(x)$ est toujours un ouvert fermé :
 $c(x)$ est fermé
Soit $y \in c(x), c(y) = c(x), y$ possède un voisinage connexe V , donc $V \subset c(y) = c(x)$ donc $c(x)$ est un voisinage de y .

Exemple. 1) \mathbb{R} est à la fois connexe et localement connexe.

- 2) $\overline{\mathbb{R}}$ est également connexe, et localement connexe (homéomorphe à $[-1, 1]$).
- 3) \mathbb{Q} n'est pas connexe en outre il est totalement discontinu (sans être discret).
- 4) Si f est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , l'image d'un intervalle est un intervalle, autrement dit : si $a, b \in \mathbb{R}$ alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

- 5) Les espaces \mathbb{R}^n sont connexes (pour la distance produit, ou toute autre distance topologiquement équivalente, comme la distance euclidienne).
- 6) Les espaces \mathbb{R}^n sont localement connexes, car les pavés (produit d'intervalles sont connexes).

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

Pour tout ce qui suit, \mathbb{K} désigne l'un des deux corps commutatifs \mathbb{R} ou \mathbb{C} et la notation $|\cdot|$ représente la valeur absolue ou le module selon les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. (car elle contenant au moins x).

5.1 Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe

Définition et propriétés immédiates

Définition 5.1. Soit X un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle norme sur X , toute application $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;
- (ii) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (iii) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarques. — Un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé; une expression qu'on désigne pour toute la suite par l'abréviation e.v.n.

- Dans la propriété (i), l'équivalence peut être remplacée par l'implication directe (\Rightarrow) , car implication inverse peut s'obtenir comme conséquence de la propriété (ii) en prenant $\lambda = 0$.
- Si X est un \mathbb{K} -e.v.n, on a toujours $\|0_X\|$ (ceci provient de la propriété (i) ou de la propriété (ii) en prenant $\lambda = 0$).
- L'inégalité de la propriété (iii) est connue sous le nom de l'inégalité triangulaire.

- Si X est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une application vérifiant seulement les deux propriétés (ii) et (iii), on dit que $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur X . Evidemment, toute norme est (à fortiori) une semi-norme.

Exemples de normes

Dans \mathbb{R}^n , avec la structure vectoriel usuelle, si $x = (x_1, \dots, x_n)$

- norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$;
- norme : $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- norme : $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Dans \mathbb{R} : $\|x\| = |x|$.

Ces normes engendrent respectivement les distances citées précédemment en exemples.

5.2 Distance associée à une norme

Définition 5.2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n. On définit :

$$d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+(x, y) \rightarrow d(x, y) := \|x - y\|$$

On vérifie aisément que d est une distance sur X . Cette distance est appelée la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ de X .

- Remarques.**
- Grâce à la notion de « la distance associée à une norme », un e.v.n est vu comme un cas particulier d'un espace métrique ; qui est à son tour (comme on le sait) un cas particulier d'un espace topologique.
 - Les définitions de boule ouverte, boule fermée, sphère, ouvert, fermé, voisinage, intérieur, adhérence, limite, continuité, etc dans un e.v.n sont simplement celles relatives à la distance associée à sa norme.
 - Il existe des distances parfaitement naturelles qui ne sont induites par aucune norme sur un espace vectoriel ambiant. Par exemple, la distance naturelle sur la terre n'est induite par aucune norme de l'espace, étant donné que la terre n'est pas plate.

5.2.1 Quelques exemples de notions sur un e.v.n découlant de sa structure métrique

- Soient $(X, \|\cdot\|)$ un e.v.n et $(x_n)_n$ une suite de vecteurs de X . On dit que $(x_n)_n$ converge vers un vecteur x de X si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, N > n \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon$$

2. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux e.v.n (sur un même corps commutatif \mathbb{K}) et $f : X \rightarrow Y$ une application. Soient aussi $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$.

— On dit que $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 (et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x) = y_0$) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in X : \|x - x_0\|_X < \eta \Rightarrow \|f(x) - y_0\|_Y < \epsilon$$

— On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; c'est-à-dire si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall x \in X : \|x - x_0\|_X < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \epsilon$$

5.3 Normes équivalentes et topologiquement équivalentes

Définition 5.3. Soient X un \mathbb{K} -espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur X .

- On dit que N_1 et N_2 sont topologiquement équivalentes si les distances associées sont topologiquement équivalentes; c'est-à-dire si les topologies associées sont identiques.
- On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si les distances associées sont équivalentes; c'est-à-dire s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$$

5.3.1 Exemples de normes sur \mathbb{R} et \mathbb{C}

- i) Sur \mathbb{R} (considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel), la norme usuelle est la valeur absolue. Sur \mathbb{C} (considéré comme \mathbb{C} -espace vectoriel), la norme usuelle est le module.
- ii) Étant donné $n \geq 2$ un entier, on peut définir sur \mathbb{R}^n (considéré comme \mathbb{R} -espace vectoriel) plusieurs normes dont $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_p$ (où p est un entier strictement positif) et $\|\cdot\|_\infty$. Ces normes sont les plus utilisées sur \mathbb{R}^n et sont définies par : $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ii) Étant donné $n \geq 2$ un entier, on peut munir \mathbb{C} (considéré comme \mathbb{C} -espace vectoriel) de plusieurs normes dont $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_p$ (où p est un entier strictement positif) et $\|\cdot\|_\infty$ qu'on obtient par les mêmes formules de ci-dessus, en prenant juste le symbole $|\cdot|$ comme module (plutôt que valeur absolue). Pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$, on a :

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\|_1 := \sum_{i=1}^n |z_i|$$

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$$

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$$

Aussi bien dans \mathbb{R}^n que dans \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}^*$), la norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle la norme euclidienne et la norme $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ donné) s'appelle la norme de Hölder d'exposant p . On peut montrer aussi que l'on a : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$. Par ailleurs, il est facile de montrer que ces normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\|\cdot\|_\infty$ (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) sont toutes équivalentes. On montrera plus loin un résultat plus général que celui-ci qui énonce que :

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

5.4 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Soient $(X_1, N_1), (X_2, N_2), \dots, (X_k, N_k)$ ($k \geq 2$) ; des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés et soit $X := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$. On peut définir sur X plusieurs normes, s'exprimant en fonction de $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, dont les suivantes :

1. $\|\cdot\|_1 : \forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X :$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_1 := \sum_{i=1}^k N_i(x_i)$$

2. $\|\cdot\|_2 : \forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X :$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^k N_i(x_i)^2}$$

3. $\|\cdot\|_p$ (où p est un entier strictement positif) : $\forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X :$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_p := \left(\sum_{i=1}^k N_i(x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

4. $\|\cdot\|_\infty : \forall (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X :$ On peut montrer que toutes ces normes $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\|\cdot\|_\infty$ de X sont équivalentes et que la topologie (commune) qu'elles engendrent sur X est simplement la topologie produit de X . Ce qui nous permet d'affirmer qu'un produit (topologique) d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés est un espace vectoriel normé¹. l'affirmation qu'on vient de voir pour un produit fini d'e.v.n est en général fausse pour un produit infini d'e.v.n. Autrement dit, un produit infini d'e.v.n, muni de sa topologie produit, n'est pas en général un e.v.n.

5.4.1 Exemples de normes sur un e.v.n de dimension infinie

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Le \mathbb{R} -espace vectoriel $X := \mathfrak{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ (constitué des fonctions réelles continues sur $[a, b]$) peut être muni de plusieurs normes importantes dont $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $\|\cdot\|_\infty$, qui sont définies comme suit $\forall f \in X :$

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$$

1. Evidemment, les e.v.n en question doivent être pris sur un même corps commutatif \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

La norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle la norme euclidienne ; la norme $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$ donné) s'appelle la norme de Hölder d'exposant p et la norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle la norme de la convergence uniforme sur $\mathfrak{S}([a, b], \mathbb{R})$. On peut montrer aussi que l'on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$. Enfin, il est important.

Bibliographie

- [Bak] FARHI Bakir. Polycopié de topologie générale 2016-2017. Université Béjaia
- [Bou07] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [CP11] Matias Carrasco Piaggio. *Jauge conforme des espaces métriques compacts*. PhD thesis, Aix-Marseille 1, 2011.
- [Eté09] Fidèle Ayissi Etémé. *Introduction à la topologie générale : cours d'algèbre et topologie générale à l'usage des licences de mathématiques et d'informatique*. Hermann, 2009.
- [Lin26] Adolphe Lindebaum. Contributions à l'étude de l'espace métrique i. *Fundamenta Mathematicae*, 1(8) :209–222, 1926.
- [Pia11] Matías Carrasco Piaggio. *Jauge conforme des espaces métriques compacts*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2011.
- [Son] Daniel Sondaz. Bien maîtriser les mathématiques. compacité, connexité. introduction à la topologie. l3, masters, capes, agrégation. exercices corrigés avec rappels de cours.
- [Sun75] Christian Sunyach. Une classe de chaînes de markov récurrentes sur un espace métrique complet. In *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, volume 11, pages 325–343, 1975.