

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : analyse fonctionnelle et applications

PAR :

ZIANI Fatma Zohra

Thème

PRODUIT D'OPÉRATEURS D'INTÉGRAL SINGULIÈRE TRONQUÉS.

Devant le jury composé de :

RAHMOUNE Abdelaziz	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
BELABBACI Chafika	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Examinateur
YAGOUB Ameer	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciements

*Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers **Allah** pour sa guidance et ses bénédictions qui m'ont accompagné tout au long de ce travail.*

*Je remercie chaleureusement mon directeur de mémoire, **Dr. YAGOUB Aneur**, pour son encadrement attentif, ses conseils avisés et son soutien constant.*

*Mes sincères remerciements vont également à monsieur **Dr. RAH-MOUNE Abdelaziz** pour ses précieux commentaires et sa contribution à l'avancement de ce travail de recherche.*

*Je tiens également à remercier **Dr. BELABBACI Chafika** pour avoir accepté d'examiner ce travail.*

ZIANI Fatma Zohra.

Dédicace :

Je dédie cet humble et modeste travail avec grand amour, sincérité et fierté :

A mes chers parents, source de tendresse, de noblesse et d'affection. Puisse cette étape constituer pour vous un motif de satisfaction.

Je vous exprime ma gratitude pour toutes vos efforts pour moi. Que Dieu vous préserve, vous protège et vous bénisse tout au long de votre vie.

Et je le dédie :

A mes frères et mes soeurs, en témoignage de la fraternité, avec mes souhaits de bonheur, de santé et de succès.

Et à tous les membres de Ma famille.

A tous mes amis, tous mes professeurs.

Et à tout qui compulse ce modeste travail.

ZIANI Fatma Zohra.

ملخص.

لتكن K_u, H^2 ، $(K_u \subset H^2)$ ، فضاء هاردي للدوال التحليلية على \mathbb{D} حيث مربع معاملات متتالية تايلور قابلة للتكامل و فضاء النموذج، مع دالة داخلية غير ثابتة. تعطى مؤثرات التوسيع لمؤثرات توييليتز و توييليتز المقطوعة على L^2 ، برموز $\alpha, \beta \in L^\infty$ بـ

$$S_{\alpha, \beta}(f) = \alpha P f + \beta Q f, \quad f \in L^2,$$

$$S_{\alpha, \beta}^u(f) = \alpha P_u f + \beta Q_u f, \quad f \in L^2,$$

حيث ان P_u ، Q ، P و Q_u هي الاسقاطات المتعامدة ل $L^2(T)$ على $K_u, (H^2)^\perp, H^2$ ، و $(K_u)^\perp$ على الترتيب .
الغرض من هذا العمل هو اجراء دراسة واسعة حول الخصائص الجبرية لمشغلي التوسيع لمشغلي توييليتز و توييليتز المقطوعة (الضرب ، التوحيد ، التناظر ، العادي ، ذاتي الترافق ، الموجب ، ...).
كلمات مفتاحية :

فضاءات هاردي و النموذج ، مشغلي التوسيع ، مشغلي توييليتز و توييليتز المقطوعة ، مؤثرات هانكل.

Abstract :

Let $H^2, K_u, (K_u \subset H^2)$, the Hardy space be holomorphic functions on \mathbb{D} for which the sequence of Taylor coefficients is square-summable and model space, with u is a non-constant inner function. The dilation of Toeplitz and truncated Toeplitz operators on L^2 , with symbols $\alpha, \beta \in L^\infty$, are defined, respectively, by :

$$S_{\alpha,\beta}(f) = \alpha Pf + \beta Qf, \quad f \in L^2,$$

$$S_{\alpha,\beta}^u(f) = \alpha P_u f + \beta Q_u f, \quad f \in L^2,$$

such as P, Q, P_u , and Q_u are the orthogonal projections of $L^2(\mathbb{T})$ onto $H^2, (H^2)^\perp, K_u$, and $(K_u)^\perp$ respectively.

In this work, we shall study the algebraic properties of dilation of Toeplitz and Truncated Toeplitz Operators (product, unitary, isometry, normal, self-adjoint, positive...).

Key words :

Hardy and model spaces, Toeplitz operators, Hankel operators, dilation operators.

Résumé :

Soient $H^2, K_u, (K_u \subset H^2)$, l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} pour lesquelles la suite de coefficients de Taylor est carré-sommable et l'espace modèle, avec u est une fonction intérieure non constante. Les opérateurs dilatations des opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués sur L^2 , des symboles $\alpha, \beta \in L^\infty$, sont définis, respectivement, par :

$$S_{\alpha,\beta}(f) = \alpha Pf + \beta Qf, \quad f \in L^2,$$

$$S_{\alpha,\beta}^u(f) = \alpha P_u f + \beta Q_u f, \quad f \in L^2,$$

tel que P, Q, P_u , et Q_u sont les projections orthogonales de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2, (H^2)^\perp, K_u$, et $(K_u)^\perp$ respectivement.

Le but de ce travail est de faire une étude large sur les propriétés algébrique d'opérateurs dilatations des opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués (produit, unitaire, isométrie, normal, auto-adjoint, positif . . .).

Mots clés :

Espaces de Hardy et modèle, opérateurs de Toeplitz, opérateurs de Hankel, opérateurs dilatations.

Table des matières

Notations	1
Introduction.	2
1 Préliminaires.	4
1.1 Espaces de Hilbert.	4
1.2 Espaces de Hardy.	7
1.3 Opérateurs linéaires bornés.	11
1.4 Espace Modèle.	15
1.5 Opérateurs complexes symétriques.	17
2 Opérateurs de Toeplitz et Hankel tronqués.	20
2.1 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.	20
2.2 Opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy.	21
2.3 Opérateurs de Toeplitz tronqués.	21
2.4 Opérateurs de Hankel tronqués.	27
3 Produit d'opérateurs dilatations d'opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tron-	
qués.	31
3.1 Produit de deux dilatations d'opérateurs de Toeplitz.	32
3.2 Produit de deux dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués.	42
3.2.1 Produit.	55
Bibliographie.	61

Notations.

\mathbb{C}	l'ensemble des nombres complexes.
\mathbb{T}	le cercle unité du plan complexe \mathbb{C} .
\mathbb{D}	le disque unité ouvert du plan complexe \mathbb{C} .
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe \mathbb{C} .
dm	la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.
dA	la mesure planaire de Lebesgue normalisé sur le disque unité \mathbb{D} .
$\mathcal{L}(E, F)$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F .
$\mathcal{L}(E)$	l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur l'espace E .
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$L^\infty(\mathbb{T})$	espace des fonctions bornées sur \mathbb{T} .
$\langle . \rangle$	le produit scalaire.
$\text{Hol}(\mathbb{D})$	espace des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} .
H^2	l'espace de Hardy.
H^∞	l'espace des fonctions analytiques bornées.
u	fonction intérieure.
K_u^2	l'espace modèle.
P	projection orthogonale de L^2 sur H^2 .
P_u	projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 .
Q	projection orthogonale de L^2 sur $(H^2)^\perp$.
Q_u	projection orthogonale de L^2 sur $(K_u^2)^\perp$.
$\widehat{f}(n)$	n-ème coefficient de Fourier de f .
f^*	la limite radiale de f sur \mathbb{T} .
k_λ	noyau reproduisant de H^2 .
k_λ^u	noyau reproduisant de K_u .
S	opérateur de Shift sur H^2 .
T_φ	opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ .
\widetilde{T}_φ	dual d'opérateur de Toeplitz avec le symbole φ .

H_φ	opérateur de Hankel sur $(H^2)^\perp$ de symbole φ .
\widetilde{H}_φ	dual d'opérateur de Hankel avec le symbole φ .
A_φ^u	opérateur de Toeplitz tronqué sur K_u^2 de symbole φ .
\widetilde{A}_φ^u	dual d'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ .
Γ_φ^u	opérateur de Hankel tronqué sur $(K_u^2)^\perp$ de symbole φ .
$\widetilde{\Gamma}_\varphi^u$	dual opérateur de Hankel tronqué de symbole φ .
S_u	opérateur de Shift sur K_u .
M_φ	opérateur de multiplication de symbole φ .
C	opérateur de conjugaison sur un espace de Hilbert.
\widetilde{f}	$= Cf$.
$f \otimes g$	opérateur de rang 1 sur un espace de Hilbert (produit tensoriel).
$\mathbf{B}(H)$	l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans H .
$\{e_n\}_n$	base orthonormée du espace de Hilbert.
D_u	ensemble de toutes les dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Introduction.

Ce mémoire se situe à l'interface entre l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs et l'analyse complexe. Il est dédié à l'étude de certains opérateurs sur l'espace fonctionnel L^2 . On note par \mathbb{T} le cercle unité du plan complexe. $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, et par $L^2 := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables sur le cercle unité \mathbb{T} . L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ tel le coefficient de Fourier négatives sont nulles.

$$H^2 = \{f \in L^2, \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}.$$

Soient H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et si T est un opérateur (linéaire) continu sur H , $T \neq 0$, s'il existe un sous-espace fermé M de H non trivial (i.e différent de H et de l'espace nul) tel que $T(M) \subset M$, on dit que M est un sous-espace invariant par T . Dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, les espaces modèles sont les compléments orthogonaux des sous-espaces invariants non triviaux de l'opérateur shift unilatéral $Sf = zf$ sur H^2 . Ces derniers sous-espaces ont été caractérisé comme uH^2 par Beurling dans son fameux article [3]. Ainsi, les espaces

$$K_u^2 := (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug \rangle = 0, \forall g \in H^2\},$$

sont des sous-espaces invariants par l'opérateur S^* adjoint de S défini par $S^*f = \frac{f-f(0)}{z}$ sur H^2 (pour plus de détails voir [11, 12, 23, 25]). Soient P, Q, P_u , et Q_u les projections orthogonales de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2, (H^2)^\perp, K_u$, et $(K_u)^\perp$ respectivement. Les opérateurs dilatations des opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués (on dit aussi opérateurs d'intégrale singulière et singulière tronqués) de symboles $\alpha, \beta \in L^\infty$ sur L^2 , sont définis, respectivement, par :

$$S_{\alpha, \beta}(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f), f \in L^2,$$

$$S_{\alpha,\beta}^u(f) = \alpha P_u(f) + \beta Q_u(f), f \in L^2.$$

Les opérateurs d'intégraux singuliers et les équations intégrales singulières ont également été largement étudiés dans la littérature. Les deux volumes [14, 15] de Gohberg et Krupnik sont des références classiques. Voir [21] de Mandal et Chakrabarti, qui traite des solutions analytiques et numériques des équations intégrales singulières et de leurs applications.

L'objectif de ce travail est consacré aux propriétés algébrique d'opérateurs $S_{\alpha,\beta}$ et $S_{\alpha,\beta}^u$, basés principalement sur une caractérisation spéciale pour connaître ces opérateurs.

Le mémoire se compose de trois chapitres. Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés concernant le cadre d'espaces et les opérateurs bornés dans le chapitre 1.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétés concernant les opérateurs de Toeplitz et de Hankel sur les espaces de Hardy et de Modèle.

Dans le troisième chapitre, on expose le but de notre travail, concernant les propriétés algébriques des opérateurs d'intégrale singulière et singulière tronqués sur L^2 . Nous donnons une caractérisation pour connaître les opérateurs d'intégrale singulière et singulière tronqués.

Chapitre 1

Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous présentons les éléments de la théorie des espaces de Hilbert et des opérateurs bornés, qui constituent le cadre de notre étude, notamment, espaces L^2 , espaces de Hardy, espaces modèle, et quelques opérateurs. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [1, 4, 6, 9, 11, 12, 19, 23].

1.1 Espaces de Hilbert.

Définition 1.1.1. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est également complet pour la norme induite par ce produit scalaire ie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. **Linéarité du produit scalaire :** *Pour tout x, y, z dans \mathcal{H} et tout α, β dans \mathbb{C} , on a*

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle.$$

2. **Symétrie :** *Pour tout x, y dans \mathcal{H} , on a*

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

3. **Positivité :** *Pour tout x dans \mathcal{H} , on a*

$$\langle x, x \rangle \geq 0,$$

et avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Théorème 1.1.1 (Théorème de représentation de Riesz). *Ce théorème établit une correspondance bijective entre un espace de Hilbert \mathcal{H} et son dual \mathcal{H}^* . Il affirme que tout fonctionnel linéaire continu sur \mathcal{H} peut être représenté de manière unique par un élément de \mathcal{H} .*

Théorème 1.1.2 (Théorème de densité de Schauder). *Ce théorème énonce que l'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions de base d'un espace de Hilbert est dense dans cet espace. Cela signifie que toute fonction dans l'espace de Hilbert peut être approchée de manière arbitraire par des combinaisons linéaires finies de ses fonctions de base.*

Espaces L^p .

Définition 1.1.2. *Soit (X, μ) un espace mesurable, où X est un ensemble et μ est une mesure. Pour $p \geq 1$, l'espace $L^p(X, \mu)$ est défini comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ telles que l'intégrale de la norme $|f|^p$ est finie :*

$$L^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Ici, f est une fonction mesurable, $|f(x)|$ est la valeur absolue de $f(x)$, $d\mu(x)$ est l'élément de mesure sur X , et l'intégrale est prise par rapport à μ .

Définition 1.1.3. *Sur $L^p(X, \mu)$, on peut définir une norme $\|\cdot\|_p$ appelée la norme sur $L^p(X, \mu)$ définie par :*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.1.1. — $L^p(X, \mu)$ est complet pour $p \geq 1$.

- L'espace $L^q(X, \mu)$ est inclus dans $L^p(X, \mu)$ si $p \leq q$, ce qui signifie que les fonctions intégrables au sens de $L^p(X, \mu)$ sont également intégrables au sens de $L^q(X, \mu)$ pour $q \geq p$.
- Soit $\mu(X) < \infty$ tels que $1 \leq p < q \leq \infty$. Alors, il existe C , ne dépendant que de p, q et $\mu(X)$ tel que

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q \text{ pour tout } f \in L^q(X, \mu).$$

Définition 1.1.4. *L'espace $L^\infty(X, \mu)$ est défini comme l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur un domaine donné. Autrement dit, une fonction f appartient à L^∞ si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$|f(x)| \leq M \text{ presque partout.}$$

Formellement, nous pouvons écrire :

$$L^\infty(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \quad : \|f\|_\infty = \text{ess sup}_x |f(x)| < \infty\},$$

Définition 1.1.5. L'espace $L^2(X, \mu)$ est défini comme suit :

$$L^2(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \quad \mid \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Cet espace est important dans divers domaines des mathématiques, de l'ingénierie et des sciences. Il constitue un espace de Hilbert complet avec le produit scalaire défini comme suit :

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

L'espace $L^2(X, \mu)$ a de nombreuses applications, notamment en analyse de Fourier, en théorie de l'information, en traitement du signal et en mécanique quantique. Il fournit une base mathématique solide pour l'étude de systèmes linéaires et pour la représentation et la manipulation de signaux et de données.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Riesz-Fischer). *Tout espace $L^p(X, \mu)$ pour $1 \leq p < \infty$ est un espace de Banach, mais $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert, ce qui signifie qu'il est complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.*

Théorème 1.1.4 (Théorème de Parseval). *Pour toute fonction f appartenant à $L^2(X, \mu)$, sa transformée de Fourier conserve la norme $L^2(X, \mu)$, c'est-à-dire que l'intégrale du carré du module de la transformée de Fourier est égale à l'intégrale du carré de la fonction originale alors la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(X, \mu)$ sur elle-même.*

Théorème 1.1.5 (Théorème de densité de C_c^∞ dans L^2). *L'ensemble des fonctions à support compact et à dérivées continues est dense dans l'espace $L^2(X, \mu)$. Cela signifie que toute fonction f de $L^2(X, \mu)$ peut être approchée arbitrairement bien par des fonctions continues à support compact.*

Théorème 1.1.6 (Théorème de convergence dominée). *Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$ une suite telle que :*

1. $f_n \rightarrow f$ pp,
2. $\exists F \in L^1$ telle que $|f_n| \leq F$ presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Alors, $f_n \rightarrow f$ dans L^p c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Théorème 1.1.7 (Théorème de Fatou). *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur un espace de mesure (X, μ) . Si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu < \infty$, alors*

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

1.2 Espaces de Hardy.

Notre objectif sera d'étudier des opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques classiques tel que l'espace de Hardy. Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe \mathbb{C} , $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité, $dm := dm(\theta) = d\theta/2\pi$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, $dA(z) = dx dy/\pi = r dr d\theta/\pi$, avec $z = x + iy = re^{i\theta}$, la mesure planaire de Lebesgue normalisée sur le disque unité \mathbb{D} , et par $L^2 = L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, dm)$ l'espace de Lebesgue usuel, il est bien connu que L^2 est muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dm.$$

L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2$ telles que les coefficients de Fourier négatifs sont nuls, c'est-à-dire

$$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \mid \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

et

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}) \mid \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

où

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Et on a si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $f \in H^2$ alors

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty,$$

puisque $H^2 \approx \ell^2$ alors

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ f, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

On identifie H^2 à sous espace des fonctions holomorphes $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ sur \mathbb{D} par

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_2 = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

et

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\},$$

où $\text{Hol}(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque unité \mathbb{D} . On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$ telles que

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_T |f(r\zeta)|^2 |d\zeta| < +\infty,$$

car l'application

$$\begin{aligned} \chi : H^2(\mathbb{D}) &\mapsto H^2(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique, où f^* est la limite radiale de f .

D'après le théorème de Fatou, la limite radiale de toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, qui est une fonction définie sur \mathbb{T} par :

$$f^*(\zeta) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

existe presque partout sur \mathbb{T} .

Puisque $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} |d\zeta|,$$

et muni de la norme

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}^2 = \int_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

Noyau reproduisant de l'espace de Hardy.

Soit X un ensemble arbitraire non vide et \mathcal{H} un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur X . On dit que \mathcal{H} est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si pour tout $x \in X$, la fonction d'évaluation

$$L_x : f \in \mathcal{H} \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$$

est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, la continuité de la forme linéaire $L_x(X)$ entraîne qu'il existe un unique élément $k_x \in \mathcal{H}$ tel que

$$L_x(f) = \langle f, k_x \rangle.$$

La fonction k_x est appelée le noyau reproduisant au point x de l'espace \mathcal{H} .

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et toute $f \in H^2$ c'est à dire $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |\lambda|^n \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\|f\|}{\sqrt{1 - |\lambda|^2}}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente montre que pour $\lambda \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction d'évaluation $f \mapsto f(\lambda)$ est une forme linéaire continue sur H^2 et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe dans H^2 une unique fonction, notée k_λ telle que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle, \quad f \in H^2.$$

La fonction k_λ ainsi définie est appelée le noyau de Cauchy ou le noyau de Cauchy-Szegö est donnée par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}z}$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$. Cette relation n'est autre que la formule intégrale de Cauchy de la fonction $f \in H^2$, c'est-à-dire

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} dm(\zeta)$$

pour toute fonction $f \in H^2$ et $z \in \mathbb{D}$. Sans oublier que la limite radiale f^* de $f \in H^2$ existe presque partout et est un élément de L^2 , ce qui nous assure que l'intégrale ci-dessus est bien définie. Donc la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 est donnée par :

$$Pf = \langle f, k_\lambda \rangle, \quad f \in L^2, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

L'opérateur P est donné par l'intégrale de Cauchy :

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}z} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Clairement, $\|Pf\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 1.2.1 (Théorème d'interpolation de Lagrange). *Soient $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ un ensemble fini de $n + 1$ points distincts dans le plan. Alors, il existe un unique polynôme $P(x)$ de degré au plus n tel que*

$$P(x_i) = y_i \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, n.$$

Proposition 1.2.1. *La famille $\{k_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$ est linéairement indépendante.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n points distincts de \mathbb{D} tels que $\sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j} = 0$. Montrons que $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Pour tout $f \in H^2$ on a

$$0 = \sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j}$$

donc

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle f, \sum_{j=1}^n a_j k_{\lambda_j} \right\rangle \\ &= \langle a_1 k_{\lambda_1}, f \rangle + \langle a_2 k_{\lambda_2}, f \rangle + \dots + \langle a_n k_{\lambda_n}, f \rangle \\ &= a_1 \langle k_{\lambda_1}, f \rangle + a_2 \langle k_{\lambda_2}, f \rangle + \dots + a_n \langle k_{\lambda_n}, f \rangle \\ &= \bar{a}_1 f(\lambda_1) + \bar{a}_2 f(\lambda_2) + \dots + \bar{a}_n f(\lambda_n). \end{aligned}$$

Maintenant il suffit de trouver un polynôme f tel que $f(\lambda_j) = a_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Le théorème d'interpolation de Lagrange assure l'existence d'un tel polynôme et la relation ci-dessus devient

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2 = 0.$$

Donc $a_j = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. □

1.3 Opérateurs linéaires bornés.

Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle un opérateur borné de E dans F toute application linéaire continue de E dans F . $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F . Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on note

$$\text{Ran}(T) = \{Tx \mid x \in E\} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(T) = \{x \in E \mid Tx = 0\}.$$

L'opérateur identité de E dans E sera noté par 1_E .

Définition 1.3.1. *Forme sesquilinéaire* est une fonction $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ où E est un espace vectoriel complexe, qui est linéaire dans une variable et semi-linéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport au conjugué complexe) dans l'autre. Plus précisément, φ satisfait les propriétés suivantes :

1. **Linéarité dans la première variable :**

$$\varphi(au + bv, w) = a\varphi(u, w) + b\varphi(v, w)$$

pour tous $u, v, w \in E$ et $a, b \in \mathbb{C}$.

2. **Semi-linéarité dans la seconde variable :**

$$\varphi(u, av + bw) = \bar{a}\varphi(u, v) + \bar{b}\varphi(u, w)$$

pour tous $u, v, w \in E$ et $a, b \in \mathbb{C}$, où \bar{a} représente le conjugué complexe de a .

Théorème 1.3.1. *Pour toute forme sesquilinéaire bornée f sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant*

$$f(x, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. L'application $x \mapsto f(x, y)$ est une forme linéaire continue sur \mathcal{H} . Par le Théorème de Riesz, il existe un unique $Ay \in \mathcal{H}$ tel que $f(x, y) = (x, Ay)$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. On vérifie facilement que l'application $y \mapsto Ay$ est linéaire, notée A . Comme

$$\|Ay\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, Ay)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x, y)|}{\|x\|} \leq c\|y\|,$$

$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et vérifie la propriété énoncée. L'unicité est une conséquence de l'équivalence $(x, Ay) = 0, \forall x, y \in \mathcal{H} \Leftrightarrow A = 0$. \square

On définit, en plus de la topologie uniforme sur $\mathcal{L}(E, F)$, deux autres topologies appelées topologie de la convergence forte et de la convergence faible en spécifiant la notion de convergence des suites généralisées sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1.3.2. *On dit que la suite généralisée $(T_i)_{i \in I}$ converge fortement (respectivement faiblement) vers T dans $\mathcal{L}(E, F)$, notée par $T_i \xrightarrow{s} T$ (respectivement $T_i \xrightarrow{w} T$) si $\lim_{i \in I} T_i x = Tx$ pour tout $x \in E$ (respectivement si $\lim_{i \in I} \langle T_i x, \varphi \rangle \rightarrow \langle Tx, \varphi \rangle$ pour tout $x \in E$ et $\varphi \in F^*$).*

Il ne faut pas confondre la topologie de convergence faible d'opérateurs et la convergence faible d'une suite de l'espace de Banach $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.3.2. *Soit E un espace de Banach réflexif. Si (T_n) est une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ la suite $(\langle T_n x, \varphi \rangle)$ converge, alors $T_n \xrightarrow{w} T$ pour un $T \in \mathcal{L}(E)$.*

Définition 1.3.3. *Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'adjoint de T , noté T^* , est l'opérateur borné de F^* dans E^* vérifiant*

$$(T^* \varphi)(x) = \langle \varphi, T(x) \rangle \quad \forall x \in E, \forall \varphi \in F^*.$$

Théorème 1.3.3. *Soient E et F deux espaces de Banach. L'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E^*, F^*)$ qui à T associe son adjoint T^* est isométrique (c'est-à-dire $\|T\| = \|T^*\|$ pour tout $T \in \mathcal{L}(E, F)$).*

Démonstration. On a

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \varphi, Tx \rangle| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \varphi, Tx \rangle| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T^* \varphi\| = \|T^*\|.$$

On a les relations d'orthogonalité suivantes. \square

Proposition 1.3.1. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors on a*

- $\text{Ker}(T) = \text{Ran}(T^*)^\perp$,
- $\text{Ker}(T^*) = \text{Ran}(T)^\perp$,
- $(\text{Ker}(T))^\perp \supseteq \text{Ran}(T^*)$,
- $(\text{Ker}(T^*))^\perp = \text{Ran}(T)$.

Opérateurs de multiplication.

Définition 1.3.4. Pour $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de multiplication par φ , noté M_φ , sur L^2 est l'opérateur défini par

$$M_\varphi f = \varphi f,$$

pour tout $f \in L^2$. La fonction φ est appelée le symbole de l'opérateur. On peut également définir l'opérateur de multiplication M_φ densément où $\varphi \in L^2$. En effet, notons $D(M_\varphi)$ le sous-ensemble de L^2 défini par

$$D(M_\varphi) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \varphi f \in L^2(\mathbb{T})\}.$$

$D(M_\varphi)$ contient l'ensemble des fonctions continues à support compact sur \mathbb{T} qui est dense dans $L^2(\mathbb{T})$, de sorte que l'opérateur M_φ est bien défini sur un domaine dense dans L^2 et l'opérateur de multiplication M_φ est défini sur $D(M_\varphi)$ par $M_\varphi f = \varphi f$.

Théorème 1.3.4. Soit M_φ un opérateur de multiplication. Alors les assertions suivantes :

1. $\alpha M_\varphi + \beta M_\psi = M_{\alpha\varphi + \beta\psi}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
2. Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
 - (c) M_φ est borné sur L^2 , et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.
3. $M_\varphi M_\psi = M_\psi M_\varphi = M_{\varphi\psi}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
4. $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$.
5. M_φ est normal (c'est-à-dire $M_\varphi M_\varphi^* = M_\varphi^* M_\varphi$).

Théorème 1.3.5. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors l'opérateur de multiplication M_φ est inversible sur $\mathcal{L}(L^2)$ si et seulement si φ est inversible sur $L^\infty(\mathbb{T})$. De plus,

$$M_\varphi^{-1} = M_{\varphi^{-1}}.$$

Fonction intérieure.

Définition 1.3.5. Une fonction u analytique sur \mathbb{D} , bornée est dite fonction intérieure si $|u(\zeta)| = 1$, presque partout $\zeta \in \mathbb{T}$.

Proposition 1.3.2. Soit f une fonction analytique sur \mathbb{D} . La fonction définie sur $]0; 1[$ par

$$r \mapsto \int_{\mathbb{T}} |f(r)|^2 dm(r);$$

est une fonction croissante.

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. On a

$$\int_{\mathbb{T}} |f(r)|^2 dm(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n};$$

le deuxième membre est une fonction croissante de r ; donc la fonction

$$r \mapsto \int_{\mathbb{T}} |f(r)|^2 dm(r)$$

est croissante sur $]0; 1[$. □

Proposition 1.3.3. Soit f une fonction intérieure. On a $|f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Produit tensoriel.

Définition 1.3.6. Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et $f, g \in \mathcal{H}$. Le produit tensoriel, noté $f \otimes g$, est l'opérateur de rang 1 défini sur \mathcal{H} par :

$$\begin{aligned} f \otimes g : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longrightarrow \langle h, g \rangle f. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.4. Pour tout $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on a

1. $A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ et $(f \otimes g)A = (f \otimes A^*g)$.
2. $(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g \rangle (f \otimes g_1)$.
3. $(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ et $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \bar{\alpha}(f \otimes g) + \bar{\beta}(f \otimes g_1)$.
4. $\text{Ker}(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^\perp$ et $\text{Im}(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.

5. $(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.
6. $(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ avec f, f_1, g, g_1 tous non nuls, si et seulement si il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ tels que $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ et $\bar{\lambda}\gamma = 1$.

1.4 Espace Modèle.

L'opérateur de shift unilatéral $S : H^2 \rightarrow H^2$ est défini par :

$$Sf(z) = zf(z), \quad f \in H^2,$$

ou, en termes de coefficients de Taylor, par :

$$\begin{aligned} S : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ S(a_0, a_1, \dots) &\longrightarrow (0, a_0, a_1, \dots). \end{aligned}$$

Autrement dit, le shift unilatéral S est une isométrie non surjective dont l'image est l'ensemble des suites de $\ell^2(\mathbb{N})$ de premier terme nul. Son adjoint $S^* : H^2 \rightarrow H^2$ est défini par :

$$S^*f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \quad f \in H^2,$$

ou, en termes de coefficients de Taylor, par :

$$\begin{aligned} S^* : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ S^*(a_0, a_1, \dots) &= (a_1, a_2, \dots). \end{aligned}$$

Soit $M \subset H^2$, M est dit un sous-espace invariant par S lorsque M est fermé et $SM \subset M$, et M est non trivial lorsque $\{0\} \subsetneq M \subsetneq H^2$. Nous allons maintenant considérer les sous-espaces fermés de H^2 qui sont invariants par le l'adjoint de shift, S, S^* . Ces sous-espaces sont connus sous le nom d'espaces modèles. Les résultats énoncés ici ainsi que leurs démonstrations viennent de [12, 23].

Théorème 1.4.1. *Un sous-espace fermé M de H^2 est invariant par le shift S si et seulement si M est de la forme :*

$$M = uH^2 = \{uf, f \in H^2\},$$

où u est une fonction intérieure.

Les sous-espaces fermés Y de H^2 invariants par S^* sont de la forme :

$$Y = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug \rangle = 0, \forall g \in H^2\},$$

où u est une fonction intérieure. Réciproquement, tous les espaces de la forme ci-dessus sont S^* -invariants. On désignera par K_u^2 le sous-espace modèle ($K_u^2 = H^2 \ominus uH^2$).

Proposition 1.4.1. *Pour chaque fonction intérieure u , l'espace modèle K_u^2 correspondant est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\bar{z}g$ presque partout sur \mathbb{T} où $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u^2 = H^2 \cap \overline{uzH^2}.$$

Noyau reproduisant de K_u^2 .

Rappelons que les noyaux $k_\lambda = (1 - \bar{\lambda}z)^{-1}$ sont les noyaux reproduisant de l'espace de Hardy. Le noyau reproduisant de K_u^2 est la projection orthogonale de k_λ de H^2 sur K_u^2 , il est donné par :

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

En effet, si $f = uh \in uH^2$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= u(\lambda)h(\lambda) = u(\lambda) \langle h, k_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda) \langle \bar{u}f, k_\lambda \rangle \\ &= \left\langle f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda \right\rangle, \end{aligned}$$

donc le noyau reproduisant de uH^2 est $\overline{u(\lambda)}u(z)k_\lambda$. Si $f \in K_u^2$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle f, k_\lambda \rangle \\ &= \langle f, k_\lambda \rangle - u(\lambda) \langle f, uk_\lambda \rangle \\ &= \left\langle f, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \right\rangle. \end{aligned}$$

De plus $(1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in K_u^2$, pour tout $h \in H^2$ car

$$\begin{aligned}
 \langle uh, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \rangle &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda) \langle uh, uk_\lambda \rangle \\
 &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda) \langle h, k_\lambda \rangle \\
 &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) = 0.
 \end{aligned}$$

On déduit que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle, \quad f \in K_u^2.$$

Soient M_u et $M_{\bar{u}}$ les opérateurs de multiplication par u et \bar{u} respectivement. La projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 , notée P_u , est donnée par :

$$P_u = P - M_u P M_{\bar{u}}.$$

Proposition 1.4.2. *Soit $f \in L^2$, alors*

$$P_u f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

Démonstration. Nous avons P_u est auto-adjoint, alors

$$\langle f, k_\lambda^u \rangle = \langle f, P_u k_\lambda^u \rangle = \langle P_u f, k_\lambda^u \rangle = P_u f(\lambda).$$

□

D'après l'égalité (1.1), l'opérateur P_u est donné par l'intégrale

$$(P_u f)(\lambda) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1 - \zeta\lambda} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

1.5 Opérateurs complexes symétriques.

Définition 1.5.1. *On dit qu'un opérateur C sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est un opérateur de conjugaison (ou simplement une conjugaison) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. C est opérateur antilinéaire, c'est-à-dire

$$C(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha} C f + \bar{\beta} C g$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}$.

2. $\langle Cf, Cg \rangle = \langle g, f \rangle$, pour tout $f, g \in \mathcal{H}$.
3. $C^2 = Id$.

Définition 1.5.2. Soit C un opérateur de conjugaison sur \mathcal{H} .

1. On dit qu'un opérateur linéaire A sur \mathcal{H} est C -symétrique (resp. C antisymétrique) si $A = CA^*C$ (resp. $-A = CA^*C$).
2. On dit qu'un opérateur linéaire A sur \mathcal{H} est complexe-symétrique s'il existe une conjugaison C sur \mathcal{H} telle que A est C -symétrique.

Définition 1.5.3. Chaque espace modèle K_u^2 admet un opérateur de conjugaison

$$C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2$$

défini par

$$Cf(z) = u(z)\overline{zf(z)}, \quad f \in K_u^2, \quad z \in \mathbb{T}. \quad (1.2)$$

On note par \tilde{f} le conjugué de f sur K_u^2 , c'est-à-dire $\tilde{f} = Cf$.

Lemme 1.5.1. 1. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a

$$\tilde{k}_\lambda^u(z) = \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}.$$

En particulier,

$$\tilde{k}_0^u(z) = \frac{u(z) - u(0)}{z} = S^*u.$$

$$2. \tilde{f}(\lambda) = \left\langle \tilde{k}_\lambda^u, f \right\rangle, \quad f \in K_u^2.$$

Démonstration. 1. Puisque $|u| = 1$ p.p sur \mathbb{T} , pour tout $z \in \mathbb{T}$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\lambda^u(z) &= u(z)\overline{zk_\lambda^u(z)} \\ &= u(z)\bar{z}\frac{1 - u(\lambda)\overline{u(z)}}{1 - \lambda\bar{z}} \\ &= \bar{z}\frac{u(z) - u(\lambda)}{1 - \bar{z}\lambda} \\ &= \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}. \end{aligned}$$

2. Nous avons les égalités suivantes :

$$\langle \tilde{k}_\lambda^u, f \rangle = \langle Ck_\lambda^u, f \rangle = \langle Ck_\lambda^u, C^2f \rangle = \langle Cf, k_\lambda^u \rangle = \langle \tilde{f}, k_\lambda^u \rangle = \tilde{f}(\lambda).$$

□

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz et Hankel tronqués.

Dans ce chapitre, nous allons aborder plusieurs opérateurs largement étudiés sur les espaces de Hardy H^2 et les espaces modèles K_u^2 . Vous pouvez consulter les références suivantes [5, 7, 8, 12, 13, 17, 23, 24, 25].

2.1 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.

Définition 2.1.1. Soit $\varphi \in L^\infty$,

1. L'opérateur de Toeplitz avec le symbole φ est l'opérateur T_φ défini par

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\longmapsto H^2 \\ f &\longmapsto T_\varphi f = P(\varphi f), \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de L^2 sur H^2 .

2. L'opérateur \widetilde{T}_φ est défini sur $(H^2)^\perp$ par

$$\widetilde{T}_\varphi f = Q(\varphi f), f \in (H^2)^\perp,$$

où Q est la projection orthogonale de L^2 sur $(H^2)^\perp$ et $(H^2)^\perp = \overline{zH^2}$ avec $Q = I - P$.

Proposition 2.1.1. Soient φ et $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors,

1. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a : $T_{\alpha\varphi + \beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.
2. $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

3. L'opérateur identité I de $H^2(\mathbb{T})$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi = 1$, et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole 0 .
4. $T_\varphi^* = T_{\bar{\varphi}}$.
5. Pour tous $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, on a : $\langle M_\varphi f, g \rangle = \langle T_\varphi f, g \rangle$.
6. T_φ est positif si et seulement si M_φ est positif.
7. T_φ est auto-adjoint si et seulement si son symbole est à valeur réelle presque partout sur \mathbb{T} .
8. L'opérateur de Toeplitz T_φ est une compression de l'opérateur de multiplication M_φ sur l'espace H^2 .

2.2 Opérateurs de Hankel sur l'espace de Hardy.

Définition 2.2.1. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$,

1. L'opérateur de Hankel avec le symbole φ est l'opérateur H_φ défini par

$$\begin{aligned} H_\varphi : H^2 &\longrightarrow (H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2 \\ f &\longmapsto H_\varphi f = Q(\varphi f). \end{aligned}$$

2. Soit l'opérateur $\widetilde{H}_\varphi : (H^2)^\perp \longrightarrow H^2$ défini par

$$\widetilde{H}_\varphi f = P(\varphi f), f \in (H^2)^\perp.$$

Proposition 2.2.1. 1. L'opérateur H_φ est borné si et seulement s'il a un symbole borné ($\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$).

2. L'opérateur de Hankel H_φ est une compression de l'opérateur de multiplication M_φ sur l'espace $(H^2)^\perp$.

2.3 Opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans cette section on étudiera les propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz tronqués qui sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u^2 . Ils ont été formellement introduits par Sarason dans [25]. Dans toute la suite, u désignera une fonction intérieure non constante. les compressions de S et S^* sur K_u^2 sont notées respectivement par S_u et S_u^* c'est-à-dire :

$$S_u = S/K_u, \quad S_u^* = S^*/K_u.$$

Comme chaque noyau reproduisant de K_u^2 est analytique borné et $\text{span} \{k_\lambda^u, \lambda \in \mathbb{D}\}$ (le sous-espace vectoriel fermé engendré par k_λ^u) est dense dans K_u^2 , il s'ensuit que $K_u^2 \cap H^\infty := K_u^\infty$ est dense dans K_u^2 .

Définition 2.3.1. *L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^∞ est défini par :*

$$\begin{aligned} A_\varphi^u : K_u^\infty &\longrightarrow K_u^\infty \\ f &\longmapsto A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \end{aligned}$$

avec P_u est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 . Pour $\varphi \in L^2$ et $f \in K_u^2$, on définit par densité l'expression

$$A_\varphi^u f = P_u(\varphi f) \quad \text{sur} \quad K_u^2,$$

c'est-à-dire si $f \in K_u^2$, on peut trouver $(f_n)_n \subset K_u^\infty$ tel que $f_n \rightarrow f$ quand n tend vers l'infini et $P_u(\varphi f) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_u(\varphi f_n)$.

Exemple 2.3.1. *Les opérateurs S_u et S_u^* sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif z et \bar{z} . c'est-à-dire,*

$$S_u = A_z^u \quad \text{et} \quad S_u^* = A_{\bar{z}}^u.$$

Lemme 2.3.1. *Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont C -symétriques.*

Démonstration. Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et A_φ^u un opérateur de Toeplitz tronqués borné. Pour $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$ on a

$$\begin{aligned} \langle CA_\varphi^u Cf, g \rangle &= \langle Cg, A_\varphi^u Cf \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta) \zeta \overline{g(\zeta)} \varphi(\zeta) u(\zeta) \zeta f(\zeta) dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} dm(\zeta) \\ &= \langle A_\varphi^u f, g \rangle \\ &= \langle (A_\varphi^u)^* f, g \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.2. *Si $\lambda \in \mathbb{D}$, alors*

$$S_u^* k_\lambda^u = \bar{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \tilde{k}_0^u, \quad S_u \tilde{k}_\lambda^u = \lambda \tilde{k}_\lambda^u - u(\lambda) k_0^u.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Pour la première égalité, nous avons

$$S^* k_\lambda(z) = \frac{k_\lambda(z) - k_\lambda(0)}{z} = \bar{\lambda} k_\lambda(z),$$

et

$$S^*(1 - \overline{u(\lambda)} u(z)) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)} u(z) - 1 + \overline{u(\lambda)} u(0)}{z} = -\overline{u(\lambda)} S^* u(z).$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_u^* k_\lambda^u &= S^* k_\lambda^u = S^*(1 - \overline{u(\lambda)} u) k_\lambda \\ &= (1 - \overline{u(\lambda)} u) S^* k_\lambda + k_\lambda(0) S^*(1 - \overline{u(\lambda)} u) \\ &= \bar{\lambda} (1 - \overline{u(\lambda)} u) k_\lambda(z) - \overline{u(\lambda)} S^* u \\ &= \bar{\lambda} k_\lambda^u(z) - \overline{u(\lambda)} \tilde{k}_0^u. \end{aligned}$$

L'opérateur S_u est un opérateur de Toeplitz tronqué C -symétrique, donc nous obtenons la deuxième égalité en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$\begin{aligned} S_u \tilde{k}_\lambda^u &= C S_u^* C C k_\lambda^u \\ &= C S_u^* k_\lambda^u \\ &= \lambda \tilde{k}_\lambda^u - u(\lambda) k_0^u. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.3. *Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure. Alors*

$$a) I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u,$$

$$b) I - S_u^* S_u = \tilde{k}_0^u \otimes \tilde{k}_0^u.$$

Démonstration. Pour la première égalité, soit $f \in K_u \cap (k_0^u)^\perp$, c'est-à-dire $\langle f, k_0^u \rangle = f(0) = 0$, nous avons $S_u^* = S^*/K_u$, donc

$$(I - S_u S_u^*) f = f - S_u \left(\frac{f}{z} \right) = 0,$$

d'où $I - S_u S_u^*$ est un opérateur de rang 1, et comme $I - S_u S_u^*$ est un opérateur auto-adjoint alors $I - S_u S_u^* = c(k_0^u \otimes k_0^u)$. Pour déterminer le scalaire, on va appliquer le lemme 2.3.2 avec ($\lambda = 0$) :

$$\begin{aligned}
 (I - S_u S_u^*) k_0^u &= k_0^u + \overline{u(0)} S_u \tilde{k}_0^u \\
 &= (1 - |u(0)|^2) k_0^u \\
 &= \|k_0^u\|^2 k_0^u \\
 &= \langle k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u \\
 &= (k_0^u \otimes k_0^u) k_0^u.
 \end{aligned}$$

D'où le scalaire est 1.

Nous obtenons la deuxième égalité en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$\begin{aligned}
 C(I - S_u S_u^*)C &= k_0^u \otimes k_0^u \Leftrightarrow C^2 - CS_u S_u^* C = Ck_0^u \otimes C^* k_0^u \\
 &\Leftrightarrow I - CS_u C C S_u^* C = \tilde{k}_0^u \otimes \tilde{k}_0^u \\
 &\Leftrightarrow I - S_u^* S_u = \tilde{k}_0^u \otimes \tilde{k}_0^u.
 \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.1. (Théorème de Sarason) Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$. Alors

$$A_\varphi^u = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2$.

On suppose que $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$, alors il existe $\psi, \chi \in H^2$ telles que :

$$\varphi = u\psi + \overline{u}\chi.$$

Pour tout $f \in K_u^\infty$ on a :

$$\varphi f = u\psi f + \overline{u}\chi f,$$

qui est orthogonale à K_u^2 car $uK_u^\infty \subset uH^\infty$ et $\overline{u}K_u^\infty \subset \overline{zH^\infty}$.

Donc $A_\varphi^u = 0$ pour tout $f \in K_u^\infty$ et ainsi $A_\varphi^u = 0$ (car K_u^∞ est dense dans K_u^2).

Réciproquement, on suppose que $A_\varphi^u = 0$, et $\varphi = \psi + \bar{\chi}$ avec $\psi, \chi \in H^2$. Donc

$$A_\psi^u = -A_\chi^u.$$

Les opérateurs $A_{\bar{\chi}}^u$ et S_u^* commutent, ainsi que les opérateurs A_{ψ}^u et S_u . Donc

$$A_{\psi}^u (I - S_u S_u^*) = (I - S_u S_u^*) A_{\psi}^u,$$

et

$$A_{\psi}^u (I - S_u S_u^*) k_0^u = (I - S_u S_u^*) A_{\psi}^u k_0^u. \quad (2.1)$$

En appliquant le lemme 2.3.3 on obtient :

$$\begin{aligned} A_{\psi}^u (I - S_u S_u^*) k_0^u &= A_{\psi}^u (k_0^u \otimes k_0^u) k_0^u \\ &= [(A_{\psi}^u k_0^u) \otimes k_0^u] k_0^u \\ &= \langle k_0^u, k_0^u \rangle A_{\psi}^u k_0^u, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} (I - S_u S_u^*) A_{\psi}^u k_0^u &= (k_0^u \otimes k_0^u) A_{\psi}^u k_0^u \\ &= \langle A_{\psi}^u k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u. \end{aligned}$$

Donc l'équation 2.1 devient :

$$\langle k_0^u, k_0^u \rangle A_{\psi}^u k_0^u = \langle A_{\psi}^u k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u.$$

D'où $A_{\psi}^u k_0^u$ est un multiple de k_0^u , c'est-à-dire il existe un scalaire $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A_{\psi}^u k_0^u = c k_0^u.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &= (A_{\psi}^u - cI) k_0^u = P_u[(\psi - c)(1 - \overline{u(0)}u)] \\ &= P_u(\psi - c), \end{aligned}$$

car $(\psi - c)(-\overline{u(0)}u) \in uH^2$, donc

$$P_u[(\psi - c)(-\overline{u(0)}u)] = 0.$$

Ce qui implique que

$$\psi - c \in uH^2,$$

alors

$$A_{\psi-c} = 0,$$

et de plus on a :

$$A_{\psi}^u = cI.$$

Comme $A_{\psi}^u = -A_{\bar{\chi}}^u$ alors

$$A_{\bar{\chi}}^u = -cI.$$

En répétant le même raisonnement ci-dessus, on trouve que $\chi + \bar{c} \in uH^2$ donc

$$\bar{\chi} + c \in \overline{uH^2}.$$

D'où

$$\varphi = \psi - c + \bar{\chi} + c \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

□

Proposition 2.3.1. *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $A_{\varphi}^u, A_{\psi}^u$ sont deux opérateurs de Toeplitz tronqués. Alors*

1. *Pour tous nombres complexes a et b , $A_{a\varphi+b\psi}^u = aA_{\varphi}^u + bA_{\psi}^u$.*

2. $(A_{\varphi}^u)^* = A_{\bar{\varphi}}^u$.

Dual d'opérateur de Toeplitz tronqué.

Définition 2.3.2. *Soient $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ et u une fonction intérieure. Le dual de l'opérateur de Toeplitz tronqués, noté $\widetilde{A}_{\varphi}^u$, est l'opérateur défini par densité sur l'espace $(K_u^2)^{\perp}$ par*

$$\widetilde{A}_{\varphi}^u = Q_u(\varphi f), f \in (K_u^2)^{\perp}$$

avec Q_u est la projection orthogonale de L^2 sur $(K_u^2)^{\perp}$ et $Q_u = I - P_u$.

Proposition 2.3.2. *Les assertions suivantes sont vraies.*

1. *Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, alors $\widetilde{A}_{\varphi}^u$ est borné sur $(K_u^2)^{\perp}$ si et seulement si $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$.*

2. *Si $\widetilde{A}_{\varphi}^u$ est borné, alors $\|\widetilde{A}_{\varphi}^u\| = \|\varphi\|$.*

3. *Pour $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T})$, $\widetilde{A}_{\varphi}^u = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.*

Démonstration. 1. Puisque $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, pour un polynôme $f \in H^2$, $uf \in uH^2 \subseteq (K_u^2)^{\perp}$ et $\widetilde{A}_{\varphi}^u(uf) \in (K_u^2)^{\perp}$. Il est clair que $Q_u = M_u P M_{\bar{u}} + (I - P)$, alors

$$\left\| \widetilde{A}_{\varphi}^u(uf) \right\|^2 = \|M_u P M_{\bar{u}}(\varphi uf)\|^2 + \|(I - P)(\varphi uf)\|^2.$$

Donc

$$\|T_\varphi f\|^2 = \|M_u P M_{\bar{u}}(\varphi u f)\|^2 \leq \left\| \widetilde{A}_\varphi^u(u f) \right\|^2.$$

Si \widetilde{A}_φ^u est borné alors T_φ est aussi borné, alors $\varphi \in L^\infty$ et $\|\varphi\|_\infty = \|T_\varphi\| \leq \left\| \widetilde{A}_\varphi^u \right\|$.

D'autre part, Si $\varphi \in L^\infty$ alors

$$\left\| \widetilde{A}_\varphi^u f \right\| = \|Q_u \varphi f\| \leq \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|,$$

pour tout $f \in (K_u^2)^\perp$. Donc $\left\| \widetilde{A}_\varphi^u \right\| \leq \|\varphi\|_\infty$.

2. Si \widetilde{A}_φ^u est borné, alors d'après (1) : $\|\varphi\|_\infty \leq \left\| \widetilde{A}_\varphi^u \right\|$ et $\left\| \widetilde{A}_\varphi^u \right\| \leq \|\varphi\|_\infty$ donc $\left\| \widetilde{A}_\varphi^u \right\| = \|\varphi\|$.

3. d'après (1) et (2) alors $\left\| \widetilde{A}_\varphi^u \right\| = \|\varphi\|$ donc $\widetilde{A}_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

□

2.4 Opérateurs de Hankel tronqués.

Définition 2.4.1. Soit $\varphi \in L^\infty, u$ une fonction intérieure et on a K_u^∞ est dense dans $K_u^2 (K_u^\infty = K_u^2 \cap L^\infty)$.

1. L'opérateur de Hankel tronqués $\Gamma_\varphi^u : K_u^2 \rightarrow (K_u^2)^\perp$ est l'opérateur défini par densité sur l'espace K_u^2 par

$$\Gamma_\varphi^u f = Q_u(\varphi f), f \in K_u^2.$$

2. L'opérateur $\widetilde{\Gamma}_\varphi^u : (K_u^2)^\perp \rightarrow K_u^2$ est défini par densité sur l'espace $(K_u^2)^\perp$ par

$$\widetilde{\Gamma}_\varphi^u f = P_u(\varphi f), f \in (K_u^2)^\perp.$$

Proposition 2.4.1. 1. $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.

2. $\widetilde{\Gamma}_\varphi^u = (\Gamma_{\bar{\varphi}}^u)^*$.

Lemme 2.4.1. Si $\varphi \in L^\infty \setminus zH^\infty$ et $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$ pour une fonction intérieure non constante u , alors $\varphi \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Si $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$, alors

$$\varphi(uH^2) = P(\varphi(uH^2)) + (I - P)(\varphi(uH^2)) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$$

où P désigne la projection orthogonale de L^2 sur H^2 , d'où

$$\varphi(uH^2) = N_1 + N_2$$

où $N_1 \subset uH^2$ et $N_2 \subset \overline{zH^2}$. Donc

$$H^\infty \varphi(uH^2) = \varphi(uH^2) = H^\infty N_1 + H^\infty N_2$$

Comme $H^\infty N_1 \subset uH^2$ et $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$, nous obtenons que $P(H^\infty N_2) \perp K_u^2$. Donc $H^\infty N_2 \perp K_u^2$ et $\overline{N_2} K_u^2 \perp H^\infty$. Donc $\overline{N_2} K_u^2 \subset \overline{zH^1} \cap H^1 = 0$. Puisque $K_u^2 \neq 0$, $N_2 = 0$ et ainsi $\varphi(uH^2) \subset uH^2$. Ceci montre $\varphi \in \mathbb{C}$. \square

Lemme 2.4.2. *Soit $\varphi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante. Alors les propriétés suivantes sont valides.*

1. Si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $\varphi \in \mathbb{C}$.
2. Si $\varphi (K_u^2)^\perp \subset (K_u^2)^\perp$, alors $\varphi \in \mathbb{C}$.

Démonstration. 1. Soit $\varphi \in H^\infty$. Si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $T_\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ où T_φ est un opérateur de Toeplitz. Donc

$$T_\varphi(uH^2) \subset uH^2.$$

Par le lemme 2.4.1, nous avons $\bar{\varphi} \in \mathbb{C}$. Donc, il suffit de montrer que si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $\varphi \in H^\infty$. Si f est une fonction non nulle sur K_u^2 , alors $f = gh$ où g est une fonction intérieure et h est une fonction extérieure. Puisque $gh \perp uH^2$, il s'ensuit que $gh \perp ugH^2$ et donc $h \perp uH^2$. Alors $h \in K_u^2$. Si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$, alors $\varphi h \in K_u^2$ et $\varphi h = k$ pour certain $k \in K_u^2$. Donc $\varphi = \frac{k}{h} \in H^\infty$.

2. Si $\varphi(uH^2 + \overline{zH^2}) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$, alors

$$\varphi(uH^2) \subset uH^2 + \overline{zH^2},$$

et

$$\varphi(\overline{zH^2}) \subset uH^2 + \overline{zH^2}.$$

La première inclusion signifie que $T_\varphi(uH^2) \subset uH^2$. De plus, la deuxième inclusion montre que $T_{\bar{\varphi}}(uH^2) \subset uH^2$. Puisque $\bar{\varphi}(zH^2) \subset \overline{uH^2} + zH^2$, multipliant les deux côtés par $u\bar{z}$, nous avons $\bar{\varphi}(uH^2) \subset uH^2 + \overline{zH^2}$. D'où $T_{\bar{\varphi}}(uH^2) \subset uH^2$. D'après le lemme 2.4.1 nous avons $\varphi \in \mathbb{C}$. □

Lemme 2.4.3. *Soit $\varphi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante. Alors les assertions suivantes sont valables.*

1. $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.
2. $\widetilde{\Gamma}_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.

Démonstration. 1. Pour $\varphi \in L^\infty$, $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et par le lemme 2.4.2, $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.

2. Pour $\varphi \in L^\infty$, $\widetilde{\Gamma}_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi (K_u^2)^\perp \subset (K_u^2)^\perp$. Donc par lemme 2.4.2, $\widetilde{\Gamma}_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$. □

Nous considérons dans la proposition suivante le cas où l'opérateur de Hankel tronqué Γ_φ^u est de rang un.

Proposition 2.4.2. *Supposons que $\dim K_u^2 \geq 1$. Soit Γ_φ^u de rang un. Alors les propriétés suivantes sont correctes.*

1. Il existe $F_0 \in K_u^2$ et $f_0 \in (K_u^2)^\perp$ telles que

$$\Gamma_\varphi^u = f_0 \otimes F_0 \quad \text{et} \quad \ker \Gamma_\varphi^u \oplus \langle F_0 \rangle = K_u^2,$$

où $\langle F_0 \rangle := \{aF_0, a \in \mathbb{C}\}$.

2. Si $\dim K_u^2 \geq 2$, alors il existe $h \in \ker \Gamma_\varphi^u$ et $k \in K_u^2$ tel que

$$\varphi = \frac{k}{h} = g_1 g_2 l,$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions intérieures et l est une fonction extérieure de H^∞ .

3. Il existe $s \in K_u^2$ tel que $f_0 = \varphi F_0 - s$.
4. Si $\varphi \in H^\infty$, alors $f_0 \in uH^2$.
5. Soit $u(0) = 0$. Si $\varphi \in \overline{zH^\infty}$, alors $f_0 \in \overline{zH^\infty}$.

$$6. (\Gamma_\varphi^u)^* \Gamma_\varphi^u = \langle f_0, f_0 \rangle (F_0 \otimes F_0).$$

Démonstration. Les propriétés 1, 3 et 4 sont clairs par définition.

2. Soit $\varphi h \in K_u^2$ pour une fonction non nulle $h \in \ker \Gamma_\varphi^u$, alors $\varphi = \frac{k}{h}$ pour une fonction $k \in K_u^2$. Soit $h = g_1 k_1$ et $k = g_2 k_2$ où g_1 et g_2 sont des fonctions intérieures et k_1 et k_2 sont extérieurs. Alors $\varphi = \overline{g_1} g_2 l$ où g_1 et g_2 sont des fonctions intérieures et $l = \frac{k_2}{k_1}$ est une fonction extérieur sur H^∞ .

5. Soit $u(0) = 0$ et $\varphi \in \overline{zH^\infty}$. Puisque $\varphi \in L^\infty$ et $1 \in K_u^2$, il s'ensuit que $\varphi 1 = c f_0 + t$ pour $c \in \mathbb{C}$, $f_0 \in (K_u^2)^\perp$ et $t \in K_u^2$, $\Gamma_\varphi^u K_u^2 = \langle f_0 \rangle$. Donc

$$\varphi - c f_0 = t \in K_u^2 \cap (K_u^2)^\perp = \emptyset.$$

6. Si $\Gamma_\varphi^u = f_0 \otimes F_0$, alors $(\Gamma_\varphi^u)^* = F_0 \otimes f_0$ et ainsi

$$\ker \Gamma_\varphi^u \oplus \langle F_0 \rangle = K_u^2 \quad \text{et} \quad \varphi K_u^2 \subseteq K_u^2 \oplus \langle f_0 \rangle.$$

Donc $(\Gamma_\varphi^u)^* \Gamma_\varphi^u = \langle f_0, f_0 \rangle (F_0 \otimes F_0)$. □

Chapitre 3

Produit d'opérateurs dilatations d'opérateurs de Toeplitz et Toeplitz tronqués.

Dans ce chapitre, nous exposons l'objectif de notre travail, en nous concentrant sur les propriétés algébriques des opérateurs d'intégrale singulière et des opérateurs d'intégrale singulière tronqués sur L^2 . La plupart des preuves et caractéristiques étudiées dans ce sujet sont issues des références suivantes [2, 16, 18, 20, 22].

Définition 3.0.1. *Soit \mathcal{H} un sous espace fermé d'un espace de Hilbert \mathcal{M} , et soient $R : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ deux opérateurs bornés et $X = I - T$ et P c'est la projection orthogonale de \mathcal{M} sur \mathcal{H} . On dit que R est une dilatation de T ou bien T est une compression de R si $Tf = PRf$ pour tout $f \in \mathcal{H}$. Selon $\mathcal{M} = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H})^\perp$, l'opérateur R est une dilatation de T si et seulement si l'opérateur R a la représentation matricielle suivante*

$$R = \begin{pmatrix} T & \tilde{X} \\ X & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

où

$$\tilde{T} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp,$$

$$\tilde{X} : \mathcal{H}^\perp \mapsto \mathcal{H}.$$

3.1 Produit de deux dilatations d'opérateurs de Toeplitz.

Définition 3.1.1. Soient $\alpha, \beta \in L^\infty$, un opérateur intégral singulier de Cauchy (ou opérateur dilatation d'opérateur de Toeplitz) $S_{\alpha, \beta} : L^2 \rightarrow L^2$ est défini par

$$S_{\alpha, \beta}(f) = \alpha Pf + \beta Qf, \quad f \in L^2.$$

Où P et $Q = I - P$ désignent les projections orthogonales de L^2 sur H^2 et $(H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2$ respectivement. On a $S_{1,1} = I$, $S_{1,0} = P$ et $S_{0,1} = Q$.

Remarque 3.1.1. Sachant que $\|P\| = \|Q\| = 1$, alors pour toute fonction $f \in L^2$, nous avons

$$\|S_{\alpha, \beta}(f)\| \leq \|\alpha Pf\| + \|\beta Qf\| \leq \|\alpha\|_\infty \|Pf\| + \|\beta\|_\infty \|Qf\| \leq (\|\alpha\|_\infty + \|\beta\|_\infty) \|f\|,$$

Par conséquent, l'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ est un opérateur borné sur L^2 .

Récemment, Nakazi et Yamamoto dans [22] montrent que l'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ a une connexion étroite avec les opérateurs Toeplitz et Hankel par une représentation matricielle dans $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$.

Lemme 3.1.1. Soit $\alpha, \beta \in L^\infty$. Alors les opérateurs $S_{\alpha, \beta}$ et $S_{\alpha, \beta}^*$ ont les représentations matricielles suivantes :

$$S_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} T_\alpha & \tilde{H}_\beta \\ H_\alpha & \tilde{T}_\beta \end{pmatrix},$$

$$S_{\alpha, \beta}^* = \begin{pmatrix} T_{\bar{\alpha}} & \tilde{H}_{\bar{\alpha}} \\ H_{\bar{\beta}} & \tilde{T}_{\bar{\beta}} \end{pmatrix},$$

dans $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$.

Démonstration. Toute fonction f de L^2 peut être exprimée de manière unique par $f = g + h$ où $g \in H^2$, $h \in (H^2)^\perp$. Alors

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta} f &= \alpha g + \beta h \\ &= (P\alpha g + P\beta h) + (Q\alpha g + Q\beta h) \\ &= (T_\alpha g + \tilde{H}_\beta h) + (H_\alpha g + \tilde{T}_\beta h) \\ &= \begin{pmatrix} T_\alpha & \tilde{H}_\beta \\ H_\alpha & \tilde{T}_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de $S_{\alpha,\beta}^*$ découle immédiatement de la matrice de $S_{\alpha,\beta}$. \square

Pour cette raison, l'opérateur $S_{\alpha,\beta}$ est appelée dilatation d'opérateur de Toeplitz T_α . Soit $B(L^2)$ l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés sur L^2 . Soit S_d l'ensemble de tous les opérateurs intégraux singuliers défini comme

$$S_d = \{S_{\alpha,\beta} \in B(L^2), \alpha, \beta \in L^\infty\}.$$

Notez que $S_{\alpha,\alpha} = M_\alpha$ et $S_{\alpha,\beta} = M_\beta + S_{\alpha-\beta,0}$.

Soit $e_n = z^n$ et $e_{-n} = z^{-n} = \overline{z^n}$ pour $n \geq 0$ où $z = e^{i\theta}$. Pour $f \in L^2$, la série de Fourier de f est

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

Ainsi, f_{-1} désigne le coefficient de Fourier correspondant au terme e_{-1} .

Pour deux opérateurs $C, D \in B(L^2)$, soit $[C, D] = CD - DC$ le commutateur de C et D . L'ensemble des opérateurs de multiplication sur L^2 est l'ensemble de tous les opérateurs de L^2 qui commutent avec l'opérateur M_z , défini comme

$$\begin{aligned} M &= \{M_\alpha \in B(L^2), \alpha \in L^\infty\} \\ &= \{A \in B(L^2), M_z A = A M_z\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. *Soit $A \in B(L^2)$. Alors $A \in S_d$ si et seulement s'il existe une $\psi \in L^\infty$ tel que*

$$[A, M_z] = \psi \otimes e_{-1}. \quad (3.1)$$

Dans ce cas, $A = S_{\psi+\beta,\beta}$ pour certains $\beta \in L^\infty$.

Démonstration. Soit $A = S_{\alpha,\beta}$ pour deux fonctions $\alpha, \beta \in L^\infty$. Soit $f \in L^\infty$, $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$, alors nous avons

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} M_z(f) &= \alpha P[zf] + \beta Q[zf] \\ &= \alpha[zPf + f_{-1}] + \beta[zQf - f_{-1}] \\ &= z\alpha Pf + z\beta Qf + (\alpha - \beta)f_{-1} \\ &= M_z S_{\alpha,\beta}(f) + [(\alpha - \beta) \otimes e_{-1}](f). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons démontré l'égalité (3.1) avec $\psi = (\alpha - \beta) \in L^\infty$. Maintenant, supposons que $A \in B(L^2)$ et que l'égalité (3.1) soit atteinte. Alors

$$S_{\psi,0}M_z - M_zS_{\psi,0} = \psi \otimes e_{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (A - S_{\psi,0})M_z - M_z(A - S_{\psi,0}) &= (AM_z - AM_z) - (S_{\psi,0}M_z - S_{\psi,0}M_z) \\ &= \psi \otimes e_{-1} - \psi \otimes e_{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$(A - S_{\psi,0})M_z = M_z(A - S_{\psi,0}).$$

Les deux opérateurs $A - S_{\psi,0}$ et M_z commutent. Alors l'opérateur $A - S_{\psi,0}$ est un opérateur de multiplication. De plus, $A - S_{\psi,0} = M_\beta = S_{\beta,\beta}$ pour certaine $\beta \in L^\infty$. Alors

$$A = S_{\psi,0} + S_{\beta,\beta} = S_{\psi+\beta,\beta}.$$

□

Proposition 3.1.2. [16] *L'opérateur $S_{\alpha,\beta}^* \in S_d$ si et seulement si $(\alpha - \beta) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, $S_{\alpha,\beta}^* = S_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$.*

Lemme 3.1.2. *Soient $S_{\alpha_1,\beta_1}, S_{\alpha_2,\beta_2} \in S_d$. Alors*

1. $[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] = (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S_{\alpha_2,\beta_2}^*e_{-1} + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1}$.
2. $[S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}^*, M_z] = \alpha_1 \otimes \bar{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \bar{z}\beta_2$.
3. $[S_{\alpha_2,\beta_2}^*S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z] = e_0 \otimes S_{\alpha_1,\beta_1}^*\bar{z}(\alpha_2 - \beta_2) + S_{\alpha_2,\beta_2}^*(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} [S_{\alpha_1,\beta_1}S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] &= [S_{\alpha_1,\beta_1}, M_z]S_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}[S_{\alpha_2,\beta_2}, M_z] \\ &= [(\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}]S_{\alpha_2,\beta_2} + S_{\alpha_1,\beta_1}[(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1}] \\ &= (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S_{\alpha_2,\beta_2}^*e_{-1} + S_{\alpha_1,\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}^*, M_z] &= [S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] S_{\alpha_2, \beta_2}^* + S_{\alpha_1, \beta_1} [S_{\alpha_2, \beta_2}^*, M_z] \\
&= [S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] S_{\alpha_2, \beta_2}^* + S_{\alpha_1, \beta_1} M_z [S_{\alpha_2, \beta_2}, M_z]^* M_z \\
&= (\alpha_1 - \beta_1) \otimes \bar{z} \beta_2 + \alpha_1 \otimes \bar{z} (\alpha_2 - \beta_2) \\
&= \alpha_1 \otimes \bar{z} \alpha_2 - \beta_1 \otimes \bar{z} \beta_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] &= [S_{\alpha_2, \beta_2}^*, M_z] S_{\alpha_1, \beta_1} + S_{\alpha_2, \beta_2}^* [S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] \\
&= M_z [S_{\alpha_2, \beta_2}, M_z]^* M_z S_{\alpha_1, \beta_1} + S_{\alpha_2, \beta_2}^* [S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] \\
&= e_0 \otimes S_{\alpha_1, \beta_1}^* \bar{z} (\alpha_2 - \beta_2) + S_{\alpha_2, \beta_2}^* (\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.1.1. [16] Soit $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$. Supposons que S_{α_1, β_1} n'est pas dans M . Alors $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$ si et seulement si $\alpha_2 \in H^\infty, \beta_2 \in \overline{H^\infty}$, dans ce cas

$$S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = S_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2}.$$

Démonstration. D'après la proposition 3.1.1 $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}, M_z] = \psi \otimes e_{-1}. \quad (3.2)$$

Pour un certain $\psi \in L^\infty$, d'après le lemme 3.1.2

$$[S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}, M_z] = (\alpha_1 - \beta_1) \otimes S_{\alpha_2, \beta_2}^* e_{-1} + S_{\alpha_1, \beta_1} (\alpha_2 - \beta_2) \otimes e_{-1} = \psi \otimes e_{-1}.$$

Par hypothèse $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$, alors il existe un nombre complexe λ tel que

$$S_{\alpha_2, \beta_2}^* e_{-1} = \bar{\lambda} e_{-1}. \quad (3.3)$$

$$S_{\alpha_1, \beta_1} (\alpha_2 - \beta_2) = -\lambda (\alpha_1 - \beta_1) + \psi. \quad (3.4)$$

Remarquons que $S_{\alpha_2, \beta_2}^*(f) = P[\bar{\alpha}_2 f] + Q[\bar{\beta}_2 f]$, on a de (3.3)

$$P[\bar{\alpha}_2 e_{-1}] + Q[\bar{\beta}_2 e_{-1}] = \bar{\lambda} \bar{z},$$

ce qui implique que $\alpha_2 \in H^\infty$ et $\beta_2 = \lambda + \sum_{-\infty}^{-1} \beta_{2n} z^n \in \overline{H^\infty}$. Pour (3.4), on a

$$\begin{aligned}\alpha_1 P[\alpha_2 - \beta_2] + \beta_1 Q[\alpha_2 - \beta_2] &= -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi, \\ \alpha_1(\alpha_2 - \lambda) + \beta_1(-\beta_2 + \lambda) &= -\lambda(\alpha_1 - \beta_1) + \psi,\end{aligned}$$

donc

$$\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2 + \psi. \quad (3.5)$$

Puisque $\alpha_2 \in H^\infty$ et $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$

$$\begin{aligned}S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} f &= S_{\alpha_1, \beta_1} (\alpha_2 P f + \beta_2 Q f) \\ &= \alpha_1 P[\alpha_2 P f + \beta_2 Q f] + \beta_1 Q[\alpha_2 P f + \beta_2 Q f] \\ &= \alpha_1 \alpha_2 P f + \beta_1 \beta_2 Q f \\ &= S_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} f \\ &= S_{\alpha_1 \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 - \psi} f \\ &= S_{\beta_1 \beta_2 + \psi, \beta_1 \beta_2} f.\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.2. (a) Si $S_{\alpha_1, \beta_1} = M_{\alpha_1}$, alors $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$ pour tout S_{α_2, β_2} et

$$S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = M_{\alpha_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = S_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2}.$$

(b) Supposons que $S_{\alpha_1, \beta_1} \notin M$ et $S_{\alpha_2, \beta_2} = M_{\alpha_2}$. Si $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$, alors d'après le théorème 3.1.1, α_2 est constante,

$$S_{\alpha_2, \beta_2} = \alpha_2 I, \text{ et } S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = S_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2}.$$

(c) Si $\alpha_2 \in H^\infty$, $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$, alors

$$S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = S_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2}.$$

Corollaire 3.1.1. Soit $S_{\alpha, \beta} \in S_d$ pour un certains $\alpha, \beta \in L^\infty$. Supposons que $S_{\alpha, \beta} \notin M$. Alors $S_{\alpha, \beta}$ est inversible et $S_{\alpha, \beta}^{-1} \in S_d$ si et seulement si $\alpha, \bar{\beta} \in H^\infty$ et $\alpha, \bar{\beta}$ sont inversibles dans H^∞ . Dans ce cas

$$S_{\alpha, \beta}^{-1} = S_{\alpha^{-1}, \bar{\beta}^{-1}}.$$

Démonstration. Si S_{α_1, β_1} est l'inverse de $S_{\alpha, \beta}$ alors

$$S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha, \beta} = S_{\alpha_1 \alpha, \beta_1 \beta} = I \in S_d$$

comme $S_{\alpha_1, \beta_1} \notin M$ (sinon $S_{\alpha, \beta} \in M$), d'après théorème 3.1.1 $\alpha, \bar{\beta} \in H^\infty$ et $\alpha_1 \alpha = \beta_1 \beta = 1$. □

Corollaire 3.1.2. Soient $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$. Supposons que $S_{\alpha_1, \beta_1} \notin M$. Alors $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} \in M$ si et seulement si $\alpha_2 \in H^\infty$, $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$ et $\alpha_1 \alpha_2 = \beta_1 \beta_2$. Dans ce cas,

$$S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = M_{\beta_1 \beta_2}.$$

Le résultat suivant caractérise quand $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = 0$.

Corollaire 3.1.3. Soient $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$. Supposons que $S_{\alpha_1, \beta_1} \notin M$ et $S_{\alpha_2, \beta_2} \neq 0$, alors $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2} = 0$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 \in \overline{H^\infty}$.

(ii) $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ et $\alpha_2 \in H^\infty$.

Nous identifions maintenant quelques sous-algèbres de S_d qui sont apparentées aux sous-algèbres de H^∞ .

Corollaire 3.1.4. La plus grande sous-algèbre K de S_d qui n'est pas contenue dans M est :

$$K = \{S_{\alpha, \beta} \mid \alpha \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}\}.$$

Démonstration. Soit K une sous-algèbre de S_d qui n'est pas dans M . Soit $S_{\alpha, \beta} \in S_d$ mais $S_{\alpha, \beta} \notin M$. D'après le théorème 3.1.1, $S_{\alpha, \beta}^* \in K \subset S_d$ implique que $\alpha \in H^\infty$, $\beta \in \overline{H^\infty}$.

Soit S_{α_1, β_1} un élément arbitraire de K , alors $S_{\alpha, \beta} S_{\alpha_1, \beta_1} \in K \subset S_d$ implique que $\alpha \in H^\infty$, $\beta_1 \in \overline{H^\infty}$.

Si $S_{\alpha, \beta} \in K$, alors $S_{\alpha, \beta}^* \notin S_d$ sauf si α, β sont constants. Pour deux fonctions intérieures fixées θ_1, θ_2 , l'ensemble suivant K_{θ_1, θ_2} est une sous-algèbre de S_d :

$$K_{\theta_1, \theta_2} = \{S_{\theta_1 \alpha, \overline{\theta_2} \beta} \mid \alpha \in H^\infty, \beta \in \overline{H^\infty}\} = S_{\theta_1, \overline{\theta_2}} K.$$

Maintenant, nous montrons quand $S_{\alpha_1, \beta_1}^* S_{\alpha_2, \beta_2}$ appartient à S_d . □

Proposition 3.1.3. Soient $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$. Alors $S_{\alpha_1, \beta_1}^* S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$ si et seulement si $\alpha_1(\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}), \overline{\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2) \in H^\infty$. Dans ce cas,

$$S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} = S_{\overline{\alpha_2} \alpha_1, \overline{\beta_2} \beta_1}.$$

Démonstration. D'après proposition 3.1.1 $S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} \in S_d$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] = \psi \otimes e_{-1},$$

pour un certains $\psi \in L^\infty$. D'après le lemme 3.1.2

$$\begin{aligned} [S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1}, M_z] &= e_0 \otimes S_{\alpha_1, \beta_1}^* \bar{z} (\alpha_2 - \beta_2) + S_{\alpha_2, \beta_2}^* (\alpha_1 - \beta_1) \otimes e_{-1} \\ &= \psi \otimes e_{-1}. \end{aligned}$$

Alors il existe un nombre complexe λ tel que

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1, \beta_1}^* \bar{z} (\alpha_2 - \beta_2) &= \bar{\lambda} e_{-1}. \\ \lambda e_0 + S_{\alpha_2, \beta_2}^* (\alpha_1 - \beta_1) &= \psi. \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} P [\overline{\alpha_1} \bar{z} (\alpha_2 - \beta_2)] + Q [\overline{\beta_1} \bar{z} (\alpha_2 - \beta_2)] &= \bar{\lambda} \bar{z} \\ \lambda + P [\overline{\alpha_2} (\alpha_1 - \beta_1)] + Q [\overline{\beta_2} (\alpha_1 - \beta_1)] &= \psi. \end{aligned}$$

Alors $\overline{\alpha_1} (\alpha_2 - \beta_2) = \overline{h_1}$ et $\overline{\beta_1} (\alpha_2 - \beta_2) = \bar{\lambda} + zh_2$ pour deux fonctions $h_1, h_2 \in H^\infty$.

Maintenant

$$\begin{aligned} S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} f &= P [\overline{\alpha_2} \alpha_1 P f + \overline{\alpha_2} \beta_1 Q f] + Q [\overline{\beta_2} \alpha_1 P f + \overline{\beta_2} \beta_1 Q f] \\ &= P [\alpha_1 (\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}) P f + \beta_1 (\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}) Q f] + \overline{\beta_2} \alpha_1 P f + \overline{\beta_2} \beta_1 Q f \\ &= \alpha_1 (\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}) P f + \overline{\beta_2} \alpha_1 P f + \overline{\beta_2} \beta_1 Q f \\ &= \overline{\alpha_2} \alpha_1 P f + \overline{\beta_2} \beta_1 Q f \\ &= S_{\overline{\alpha_2} \alpha_1, \overline{\beta_2} \beta_1} f. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.5. Soient $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$. Alors

1. $S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} \in M$ si et seulement si $\alpha_1 (\overline{\alpha_2} - \overline{\beta_2}), \overline{\beta_2} (\alpha_2 - \beta_2) \in H^\infty$ et $\overline{\alpha_2} \alpha_1 = \overline{\beta_2} \beta_1$, dans ce cas $S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} = M_{\overline{\alpha_2} \alpha_1}$.
2. Si $S_{\alpha_1, \beta_1} \neq 0$ et $S_{\alpha_2, \beta_2} \neq 0$, alors $S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} = 0$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite

(a) $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \beta_1 = 0, \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 \overline{\beta_2} \in H^\infty$.

(b) $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \alpha_1 = 0, \beta_2 = 0$ et $\overline{\beta_1} \alpha_2 \in H^\infty$.

Démonstration. L'assertion (1) découle de la preuve du proposition 3.1.3. Nous prouvons maintenant (2). Si $S_{\alpha_2, \beta_2}^* S_{\alpha_1, \beta_1} = 0$, alors $\overline{\alpha_2} \alpha_1 = \overline{\beta_2} \beta_1 = 0$. Puisque $\alpha_1 \overline{\beta_2} \in H^\infty$, alors ou bien $\alpha_1 \overline{\beta_2} = 0$ ou bien $\alpha_1 \overline{\beta_2} \neq 0$ presque partout sur \mathbb{T} . Donc si les deux α_1, β_2 ne sont pas des fonctions nulles, alors

$$\overline{\alpha_2} \alpha_1 = \overline{\beta_2} \beta_1 = 0$$

implique que α_1, β_2 sont des fonctions nulles, ce qui prouve (a). La preuve de (b) est similaire. \square

Corollaire 3.1.6. *L'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ est une isométrie si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha = \theta \beta$ pour une fonction intérieure θ .*

L'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ est un opérateur unitaire si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha = \lambda \beta$ pour une constante λ .

Démonstration. L'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ est une isométrie si et seulement si

$$S_{\alpha, \beta}^* S_{\alpha, \beta} = I.$$

Par corollaire 3.1.5 $\overline{\alpha} \alpha = \overline{\beta} \beta = 0$. La fonction $\alpha(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) = 1 - \alpha \overline{\beta} \in H^\infty$ implique que $\alpha \overline{\beta} \in H^\infty$. Mais $|\alpha \overline{\beta}| = 1$, alors $\alpha \overline{\beta} = \beta \in H^\infty$ est une fonction intérieure. Donc $\alpha = \alpha \overline{\beta} \beta = \theta \beta$.

Si $S_{\alpha, \beta} = S_{\theta \beta, \beta}$ est un opérateur unitaire, alors

$$\begin{aligned} \beta &= S_{\theta \beta, \beta} S_{\theta \beta, \beta}^* \\ &= S_{\theta \beta, \beta} [P(\overline{\theta \beta} \beta) + Q(\overline{\beta} \beta)] \\ &= S_{\theta \beta, \beta} P(\overline{\beta}) \\ &= \theta \beta P(\overline{\beta}). \end{aligned}$$

Donc $\theta P(\overline{\beta}) = 1$ puisque $|\beta| = 1$. Donc θ est une constante de module un. \square

Proposition 3.1.4. *Soit $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2} \in S_d$. Supposons que $S_{\alpha_1, \beta_1} \neq 0$. Alors $S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}^* \in S_d$ si et seulement si l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée.*

1. $\alpha_1 = 0$ et β_2 est une constante.
2. $\beta_1 = 0$ et α_2 est une constante.

3. α_2 et β_2 sont des constantes.

4. $\beta_1 = \bar{\lambda}\alpha_1, \alpha_2 = \lambda\beta_2 + \mu$ pour deux constantes λ et μ .

Dans tous les cas,

$$S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}^* = S_{\alpha_1 \bar{\alpha}_2, \beta_1 \bar{\beta}_2}.$$

Démonstration. Par la proposition 3.1.1, $S_{\alpha_1, \beta_1}, S_{\alpha_2, \beta_2}^* \in S_d$ si et seulement si

$$[S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}^*, M_z] = \psi \otimes e_{-1}$$

pour une fonction $\psi \in L^\infty$. Par la proposition 3.1.4

$$[S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}^*, M_z] = \alpha_1 \otimes \bar{z}\alpha_2 - \beta_1 \otimes \bar{z}\beta_2 \quad (3.6)$$

$$= \psi \otimes e_{-1}. \quad (3.7)$$

Il y a deux cas. α_2 et β_2 sont linéairement dépendants ou α_1 et β_1 sont linéairement dépendants.

Supposons que α_2 et β_2 sont linéairement dépendants. Si $\beta_2 = 0$ et $\psi = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ (supposons que $\alpha_2 = 0$). Pour 1) avec $\beta_2 = 0$. Si $\beta_2 = 0$ et $\psi \neq 0$, alors par (3.6), α_2 est une constante. Pour 3) avec $\beta_2 = 0$. Si $\beta_2 = 0$, alors

$$\alpha_2 = \lambda\beta_2 \quad (3.8)$$

pour une constante λ . Maintenant l'équation (3.6) devient

$$(\bar{\lambda}\alpha_1 - \beta_1) \otimes \bar{z}\beta_2 = \psi \otimes e_{-1}.$$

Si $\psi = 0$, alors $\bar{\lambda}\alpha_1 - \beta_1 = 0$. Cela conduit à la déclaration (iv) avec $\mu = 0$.

Si $\psi \neq 0$, $\bar{z}\beta_2 = \mu e_{-1}$ pour une constante μ , donc β_2 est une constante. Donc, on a la condition 2).

Supposons maintenant que α_1 et β_1 dépendent linéairement, mais que α_2 et β_2 sont linéairement indépendants. Si $\beta_1 = 0$, alors 3.6 implique que α_2 est une constante (en supposant que $\alpha_1 = 0$). Donc, on a la condition 2). Si $\beta_1 \neq 0$, alors

$$\alpha_1 = \lambda\beta_1. \quad (3.9)$$

Maintenant l'équation (3.6) devient

$$\beta_1 \otimes \bar{z} (\bar{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = \psi \otimes e_{-1}.$$

Si $\psi = 0$, alors $\bar{\lambda}\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ce qui est impossible. Si $\psi \neq 0$, il existe une constante $\mu = 0$ tel que

$$(\bar{\lambda}\alpha_2 - \beta_2) = -\mu, \bar{\mu}\beta_1 = \psi. \quad (3.10)$$

Si $\lambda = 0$, alors par (3.9) et (3.10), $\alpha_1 = 0$ et β_2 est une constante. Donc, on a la condition 1). Si $\lambda \neq 0$, cela conduit à la déclaration 4). Dans ce cas, par (3.5) et (3.10),

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1, \beta_1} S_{\alpha_2, \beta_2}^* f &= S_{\alpha_1, \beta_1} [P[\bar{\alpha}_2 f] + Q[\bar{\beta}_2 f]] \\ &= \alpha_1 P[\bar{\alpha}_2 f] + \beta_1 Q[\bar{\beta}_2 f] \\ &= \lambda \beta_1 P[\bar{\alpha}_2 f] + \beta_1 Q[(\lambda \bar{\alpha}_2 + \bar{\mu}) f] \\ &= \lambda \beta_1 \bar{\alpha}_2 f + \beta_1 \bar{\mu} Q[f] \\ &= S_{\lambda \beta_1 \bar{\alpha}_2, \lambda \beta_1 \bar{\alpha}_2 + \bar{\mu} \beta_1} \\ &= S_{\alpha_1 \bar{\alpha}_2, \beta_1 \bar{\beta}_2}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.7. *L'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ est un co-isométrie si et seulement si $S_{\alpha, \beta}$ est un opérateur unitaire.*

Démonstration. L'opérateur $S_{\alpha, \beta}$ est un co-isométrie si et seulement si

$$S_{\alpha, \beta} S_{\alpha, \beta}^* = I.$$

Selon la proposition 3.1.4,

$$S_{\alpha, \beta} S_{\alpha, \beta}^* = S_{\alpha \bar{\alpha}, \beta \bar{\beta}} = I,$$

donc $|\alpha| = |\beta| = 1$.

Si la condition 3) de la proposition 3.1.4 est vérifiée, alors $S_{\alpha, \beta}$ est un multiple de l'identité, donc $S_{\alpha, \beta}$ est un opérateur unitaire.

Si la condition 4) de la proposition 3.1.4 est vérifiée, alors $\alpha = \lambda \beta$ pour une constante γ et $S_{\alpha, \beta}$ est un opérateur unitaire. □

3.2 Produit de deux dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les propriétés des opérateurs intégrale singulier – ceux qui pouvaient être vus comme dilatation d’opérateurs de Toeplitz – étaient étroitement liées aux opérateurs de multiplication. C’est-à-dire, un opérateur intégral singulier - ou dilatation d’opérateur de Toeplitz - pouvait être caractérisé par l’équation d’opérateurs suivante

$$[S_{\alpha,\beta}, M_z] = (\alpha - \beta) \otimes e_{-1}.$$

Selon la décomposition orthogonale $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^\perp$, il a également une représentation sous la forme

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} T_\alpha & \widetilde{H}_\beta \\ H_\alpha & \widetilde{T}_\beta \end{pmatrix}.$$

Nous nous intéressons à une nouvelle classe d’opérateurs S_u appelée dilatations d’opérateurs de Toeplitz tronquées $S_{\varphi,\psi}^u$. Cette classe a été introduite en 2015 par Ko et Lee . Il a été observé que, selon la décomposition orthogonale $L^2 = K_u^2 \oplus (K_u^2)^\perp$,

$$S_{\varphi,\psi}^u = \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma}_\psi^u \\ \Gamma_\varphi^u & \widetilde{A}_\psi^u \end{pmatrix}.$$

Récemment, Gu et Kang donnent une caractérisation complète lorsque $S_{\varphi,\psi}^u$ est un opérateur auto-adjoint, isométrique, co-isométrique et normal, en utilisant leur observation clé qui est $S_{\varphi,\psi}^u$ satisfait l’équation suivante

$$S_{\varphi,\psi}^u - M_z S_{\varphi,\psi}^u M_z^* = (\varphi - \psi) \otimes e_0 - (\varphi - \psi)u \otimes ue_0.$$

Définition 3.2.1. *Pour $\varphi, \psi \in L^\infty$ et u une fonction intérieure, la dilatation d’opérateur de Toeplitz tronqué $S_{\varphi,\psi}^u : L^2 \rightarrow L^2$ est définie par*

$$S_{\varphi,\psi}^u(f) = \varphi P_u(f) + \psi Q_u(f), \quad f \in L^2$$

où $P_u = P - M_u P M_{\bar{u}}$ désigne la projection orthogonale de L^2 sur K_u^2 et $Q_u = I - P_u$ désigne la projection orthogonale de L^2 sur $(K_u^2)^\perp = L^2 \ominus K_u^2 = \overline{zH^2} \oplus uH^2$.

Il est facile de voir que

$$S_{\varphi,\psi}^u = M_\psi + S_{\varphi-\psi,0}^u,$$

et

$$S_{\varphi,\varphi}^u = M_\varphi.$$

Remarque 3.2.1. L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est un opérateur borné si et seulement si $\varphi, \psi \in L^\infty$, tel que

$$\begin{aligned} \|S_{\varphi,\psi}^u(f)\| &\leq \|\varphi P_u(f)\| + \|\psi Q_u(f)\| \\ &\leq (\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty) \|f\|_2, \quad (f \in L^2). \end{aligned}$$

Pour tout $f \in L^2$, nous avons

$$\begin{aligned} S_{\varphi,\psi}^u f &= \varphi P_u f + \psi Q_u f \\ &= \varphi P_u f + \psi [f - P_u f] \\ &= (\varphi - \psi) P_u f + \psi f. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$. Alors pour tout $f, g \in L^2$ nous avons,

$$\begin{aligned} \langle S_{\varphi,\psi}^u f, g \rangle &= \langle \varphi P_u(f) + \psi Q_u(f), g \rangle \\ &= \langle f, P_u(\overline{\varphi}g) \rangle + \langle f, Q_u(\overline{\psi}g) \rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$(S_{\varphi,\psi}^u)^* f = P_u(\overline{\varphi}f) + Q_u(\overline{\psi}f), \quad f \in L^2.$$

Lemme 3.2.1. Soit $A \in B(L^2)$. Alors $A = 0$ si et seulement si

$$[A, M_z] = 0 \quad \text{et} \quad Ae_0 = 0.$$

Démonstration. Si $[A, M_z] = 0$ alors $A = M_\varphi$ pour certaine $\varphi \in L^\infty$, et $Ae_0 = 0$ signifie que $\varphi = 0$. Alors $A = 0$. □

Lemme 3.2.2. Soient φ et ψ deux fonctions de L^∞ et u une fonction intérieure non constante, nous avons :

1. $[S_{\varphi,0}^u, M_z] = \varphi \otimes e_{-1} - \varphi u \otimes ue_{-1}$.
2. $[S_{\varphi,\psi}^u, M_z] = (\varphi - \psi) \otimes e_{-1} - (\varphi - \psi)u \otimes ue_{-1}$.
3. $[(S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z] = e_0 \otimes (\varphi - \psi)e_{-1} - u \otimes (\varphi - \psi)ue_{-1}$.

Démonstration. 1. Soit $f = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{L}^2$, alors

$$\begin{aligned} S_{\varphi,0}^u M_z f &= \varphi(Pzf - uP\bar{u}zf) \\ &= \varphi(zPf + f_{-1}) - \varphi u(zP\bar{u}f + (\bar{u}f)_{-1}) \\ &= z\varphi Pf - z\varphi uP\bar{u}f + \varphi f_{-1} - \varphi u(uf)_{-1} \\ &= M_z S_{\varphi,0} f + [\varphi \otimes e_{-1}]f - [\varphi u \otimes ue_{-1}]f. \end{aligned}$$

2. La deuxième formule découle du fait que $S_{\varphi,\psi} = \varphi P_u + \psi(I - P_u)$ et $[M_\psi, M_z] = 0$.

3. Pour la troisième formule, notez que

$$\begin{aligned} [(S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z] &= (S_{\varphi,\psi}^u)^* M_z - M_z (S_{\varphi,\psi}^u)^* \\ &= M_z (M_z^* (S_{\varphi,\psi}^u)^* - (S_{\varphi,\psi}^u)^* M_z^*) M_z \\ &= M_z [S_{\varphi,\psi}^u, M_z]^* M_z \\ &= M_z [e_{-1} \otimes (\varphi - \psi) - ue_{-1} \otimes (\varphi - \psi)u] M_z \\ &= e_0 \otimes (\varphi - \psi)e_{-1} - u \otimes (\varphi - \psi)ue_{-1}. \end{aligned}$$

□

Auto adjoint, positif

Nous étudions les conditions sous lesquelles la dilatation d'opérateur de Toeplitz tronquée est un opérateur auto-adjoint et positif.

Théorème 3.2.1. L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est auto-adjoint si et seulement si φ et ψ sont des fonctions à valeur réelle et

$$(\varphi - \psi) = \lambda, (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. D'après le lemme 3.2.1 et le lemme 3.2.2, $S_{\varphi,\psi}^u$ est auto adjoint si et seulement si

$$\begin{aligned} (\varphi - \psi) \otimes e_{-1} - (\varphi - \psi)u \otimes ue_{-1} &= e_0 \otimes (\varphi - \psi)e_{-1} - u \otimes (\varphi - \psi)ue_{-1} \\ &= ((S_{\varphi,\psi}^u)^* - S_{\varphi,\psi}^u)e_0. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{bmatrix} (\varphi - \psi) \\ -(\varphi - \psi)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ -u \end{bmatrix},$$

pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Donc

$$-(ae_0 - bu)u = ce_0 - du,$$

$$b = c = 0, \quad d = a.$$

Donc

$$ae_0 \otimes e_{-1} - au \otimes ue_{-1} = \bar{a}e_0 \otimes e_{-1} - \bar{a}u \otimes ue_{-1}.$$

Nous avons

$$(a - \bar{a})e_0 \otimes e_{-1} = (a - \bar{a})u \otimes ue_{-1}.$$

Cette équation donne $(a - \bar{a}) = 0$ et $(\varphi - \psi) = 0$. D'autre part, notez que

$$S_{\varphi,\psi}^u e_0 = (S_{a,0}^u + M_\psi)e_0 = aP_u e_0 + \psi,$$

et

$$(S_{\varphi,\psi}^u)^* e_0 = (P_u(\bar{\varphi} - \bar{\psi})e_0 + M_{\bar{\psi}})e_0 = aP_u e_0 + \bar{\psi}.$$

Donc, $\psi - \bar{\psi} = 0$ et ψ est une fonction à valeur réelle. □

Ensuite, nous donnons quelques conditions nécessaires ou suffisantes pour que $S_{\varphi,\psi}^u$ soit un opérateur positif.

Lemme 3.2.3. *Soit $f \in L^2$. Si*

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)|h(z)|^2 dm(z) \geq 0$$

pour tout $h \in H^2$, alors $f(z) \geq 0$ dans \mathbb{T} .

Théorème 3.2.2. *Les assertions suivantes sont satisfaites*

1. Si $S_{\varphi,\psi}^u \geq 0$, alors $\psi(e^{i\theta}) \geq 0$ dans \mathbb{T} et $\varphi = \lambda + \psi$ où λ est un nombre réel.
2. Si $\varphi = \lambda + \psi$ pour un certain nombre réel λ et si $\varphi(e^{i\theta}) \geq 0$ et $\psi(e^{i\theta}) \geq 0$, alors $S_{\varphi,\psi}^u \geq 0$.

Démonstration. Supposons que $S_{\varphi,\psi}^u \geq 0$, l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est auto adjoint si et seulement si $\varphi = \lambda + \psi$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $g = uh \in \text{Im } Q_u$, $h \in H^2$, alors nous avons

$$\langle S_{\varphi,\psi}^u g, g \rangle = \langle \psi g, g \rangle = \langle \psi h, h \rangle \geq 0.$$

$\psi(e^{i\theta}) \geq 0$ dans \mathbb{T} d'après le lemme 3.2.3.

Supposons que $\varphi(e^{i\theta}) \geq 0$ et $\psi(e^{i\theta}) \geq 0$ et $\varphi = \lambda + \psi$ pour un certain nombre réel λ . Soit $f \in L^2$, si $\lambda \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} \langle S_{\varphi,\psi}^u f, f \rangle &= \langle \lambda P_u f + \psi f, f \rangle \\ &= \lambda \langle P_u f, P_u f \rangle + \langle \psi f, f \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, puisque $\langle P_u f, P_u f \rangle \leq \langle f, f \rangle$, alors

$$\begin{aligned} \langle S_{\varphi,\psi}^u f, f \rangle &= \lambda \langle P_u f, P_u f \rangle + \langle \psi f, f \rangle \\ &\geq \lambda \langle f, f \rangle + \langle \psi f, f \rangle \\ &= \langle \varphi f, f \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Isométrie, unitaire.

Dans cette section, nous caractérisons la dilatations d'opérateur de Toeplitz tronqué isométrique, co-isométrique et unitaire. Pour discuter ce problème, nous décrivons $[(S_{\varphi,\psi}^u)^* S_{\varphi,\psi}^u, M_z]$ et $[S_{\varphi,\psi}^u (S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z]$ comme des opérateurs de rang fini .

$$\begin{aligned} [(S_{\varphi,\psi}^u)^* S_{\varphi,\psi}^u, M_z] &= [(S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z] S_{\varphi,\psi}^u + (S_{\varphi,\psi}^u)^* [S_{\varphi,\psi}^u, M_z] \\ &= e_0 \otimes (S_{\varphi,\psi}^u)^* [(\varphi - \psi)e_{-1}] - u \otimes (S_{\varphi,\psi}^u)^* [(\varphi - \psi)ue_{-1}] \\ &\quad + (S_{\varphi,\psi}^u)^* (\varphi - \psi) \otimes e_{-1} - (S_{\varphi,\psi}^u)^* (\varphi - \psi)u \otimes ue_{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_{\varphi,\psi}^u (S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z] &= [S_{\varphi,\psi}^u, M_z] (S_{\varphi,\psi}^u)^* + S_{\varphi,\psi}^u [(S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z] \\
&= (\varphi - \psi) \otimes S_{\varphi,\psi}^u e_{-1} - [(\varphi - \psi)u] \otimes S_{\varphi,\psi}^u (ue_{-1}) \\
&\quad + S_{\varphi,\psi}^u e_0 \otimes [(\varphi - \psi)e_{-1}] - S_{\varphi,\psi}^u u \otimes [(\varphi - \psi)ue_{-1}]. \\
P_u e_0 &= e_0 - \overline{u(0)}u = k_0^u. \\
Q_u e_0 &= e_0 - k_0^u = \overline{u(0)}u. \\
S_{\varphi,\psi}^u e_0 &= \varphi k_0^u + \psi \overline{u(0)}u \\
&= \varphi + (\psi - \varphi) \overline{u(0)}u. \\
S_{\varphi,\psi}^u e_{-1} &= \psi e_{-1}, S_{\varphi,\psi}^u u = \psi u. \\
S_{\varphi,\psi}^u (ue_{-1}) &= \varphi P_u (ue_{-1}) + \psi Q_u (ue_{-1}) \\
&= \varphi(u - u(0))e_{-1} + \psi u(0)e_{-1} \\
&= \varphi u e_{-1} + (\psi - \varphi)u(0)e_{-1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$[S_{\varphi,\psi}^u (S_{\varphi,\psi}^u)^*, M_z] = \varphi \otimes \varphi e_{-1} - \psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1} - \varphi u \otimes \varphi u e_{-1}. \quad (3.11)$$

Théorème 3.2.3. *L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est un co-isométrie si et seulement si $|\varphi| = |\psi| = 1$ et $\psi = \lambda\varphi$ pour une certaine constante $|\lambda| = 1$.*

Démonstration. Posons $T = S_{\varphi,\psi}^u (S_{\varphi,\psi}^u)^*$. Il est clair que T est un opérateur de multiplication sur L^2 si et seulement si T commute avec M_z . L'opérateur d'identité I sur H^2 est un opérateur de multiplication par la fonction constante 1. Donc, l'opérateur T est un opérateur d'identité si et seulement s'il commute avec l'opérateur M_z de plus $T e_0 = e_0$. Donc, en utilisant l'équation 3.11 $S_{\varphi,\psi}^u$ est un co-isométrie si et seulement si

$$\varphi \otimes \varphi e_{-1} - \psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1} - \varphi u \otimes \varphi u e_{-1} = 0. \quad (3.12)$$

et

$$S_{\varphi,\psi}^u (S_{\varphi,\psi}^u)^* e_0 = e_0.$$

Nous avons

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \psi u \end{bmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, c'est à dire

$$\varphi = (a + bu)\psi, \varphi u = (c + du)\psi.$$

Alors

$$\psi u(a + bu) = \psi(c + du).$$

Si $\psi = 0$ alors $\varphi = 0$ et $\varphi = \psi$. Si $\psi(z) \neq 0$, alors nous avons

$$u(a + bu) = (c + du),$$

ce qui implique que $b = c = 0$ et $a = d$. Donc $\varphi = a\psi$. À partir de l'équation 3.12 nous avons

$$|a|^2 (\psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1}) = (\psi \otimes \psi e_{-1} + \psi u \otimes \psi u e_{-1}).$$

Donc $|a| = 1$. En utilisant $\varphi = a\psi$ et $|a| = 1$,

$$\begin{aligned} S_{\varphi, \psi}^u (S_{\varphi, \psi}^u)^* e_0 &= S_{\varphi, \psi}^u [P_u \bar{\varphi} + Q_u a \bar{\varphi}] \\ &= \varphi P_u \bar{\varphi} + \psi Q_u a \bar{\varphi} = \varphi P_u \bar{\varphi} + \varphi Q_u \bar{\varphi} \\ &= \varphi [P_u \bar{\varphi} + Q_u \bar{\varphi}] = |\varphi|^2 \\ &= e_0. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.4. *L'opérateur $S_{\varphi, \psi}^u$ est un co-isométrique si et seulement s'il est un opérateur unitaire.*

Démonstration. Si $S_{\varphi, \psi}^u$ est un co-isométrique, il suffit de vérifier que $(S_{\varphi, \psi}^u)^* S_{\varphi, \psi}^u = I$. Soit $f \in L^2$. D'après le théorème précédent, $|\varphi| = |\psi| = 1$ et $\psi = \lambda\varphi$ pour une certaine constante $|\lambda| = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
 (S_{\varphi,\psi}^u)^* S_{\varphi,\psi}^u f &= (S_{\varphi,\psi}^u)^* (\varphi P_u f + \lambda \varphi Q_u f) \\
 &= P_u [\overline{\varphi} (\varphi P_u f + \lambda \varphi Q_u f)] + Q_u [\overline{\lambda \varphi} (\varphi P_u f + \lambda \varphi Q_u f)] \\
 &= P_u f + |\lambda|^2 Q_u f \\
 &= f.
 \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.4. 1. Soit $g \in L^2$ une fonction à valeur réel. Si $Q_u g = 0$, alors g est une constante. Si $Q_u g e_{-1} = 0$, alors $g = 0$.

2. Soit $g \in L^2$, si $Q_u g = 0$ alors $g \in K_u^2$ et $P_u \bar{g} = \lambda k_0^u$ pour une certaine constante λ .

Démonstration. 1. Pour $h \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, supposons que

$$\begin{aligned}
 g &= zh(z) + \overline{zh(z)} + \lambda \\
 g e_{-1} &= h(z) + \overline{z^2 h(z)} + \lambda \bar{z}.
 \end{aligned}$$

Il est clair que

$$Q_u g = \overline{zh(z)} + Q_u(zh(z) + \lambda) = 0,$$

implique que $\overline{zh(z)} = 0$ et g est une constante. De la même manière,

$$Q_u g e_{-1} = \overline{z^2 h(z)} + \lambda \bar{z} + Q_u(h(z)) = 0,$$

implique que $\overline{z^2 h(z)} + \lambda \bar{z} = 0$ et $g = 0$.

2. Il est clair que si $Q_u g = 0$ alors $g \in K_u^2$.

Posons $g = g(0) + z g_1$ où $g_1 \in H^2$, alors

$$P_u \bar{g} = P_u P \left(\overline{g(0) + z g_1} \right) = \lambda k_0^u,$$

où $\lambda = \overline{g(0)}$.

□

Théorème 3.2.5. [18] L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est une isométrie si et seulement s'il est un opérateur unitaire.

Normal.

Lemme 3.2.5. *L'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ et son adjoint $(S_{\varphi,\psi}^u)^*$ ont les représentations matricielles suivantes*

$$S_{\varphi,\psi}^u = \begin{pmatrix} A_{\varphi}^u & \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u \\ \Gamma_{\varphi}^u & \widetilde{A}_{\psi}^u \end{pmatrix}, (S_{\varphi,\psi}^u)^* = \begin{pmatrix} A_{\varphi}^u & \widetilde{\Gamma}_{\varphi}^u \\ \Gamma_{\psi}^u & \widetilde{A}_{\psi}^u \end{pmatrix}$$

dans $L^2 = K_u^2 \oplus (K_u^2)^{\perp}$.

Démonstration. Comme tout $f \in L^2$ peut s'écrire uniquement comme $f = g + h$, où $g \in K_u^2$ et $h \in (K_u^2)^{\perp}$, il assure que pour tout $\varphi, \psi \in L^{\infty}$,

$$\begin{aligned} S_{\varphi,\psi}^u f &= \varphi P_u f + \psi Q_u f = \varphi g + \psi h \\ &= P_u \varphi g + Q_u \varphi g + P_u \psi h + Q_u \psi h \\ &= (P_u \varphi g + P_u \psi h) + (Q_u \varphi g + Q_u \psi h) \\ &= \begin{pmatrix} A_{\varphi}^u g + \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u h \\ \Gamma_{\varphi}^u g + \widetilde{A}_{\psi}^u h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{\varphi}^u & \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u \\ \Gamma_{\varphi}^u & \widetilde{A}_{\psi}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $(\widetilde{\Gamma}_{\psi}^u)^* = \Gamma_{\psi}^u$, alors $\widetilde{\Gamma}_{\psi}^u = (\Gamma_{\psi}^u)^*$ et $(\Gamma_{\psi}^u)^* = \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u$.

Puisque $(A_{\varphi}^u)^* = A_{\varphi}^u$ et $(\widetilde{A}_{\psi}^u)^* = \widetilde{A}_{\psi}^u$, nous obtenons la forme de la matrice de $(S_{\varphi,\psi}^u)^*$. \square

Lemme 3.2.6. *Soit $\varphi, \psi \in L^{\infty}$. Alors l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si*

$$\widetilde{\Gamma}_{\varphi}^u \Gamma_{\varphi}^u = \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u \Gamma_{\psi}^u, \Gamma_{\psi}^u \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u = \Gamma_{\varphi}^u \widetilde{\Gamma}_{\varphi}^u$$

et

$$\widetilde{A}_{\varphi-\psi}^u \Gamma_{\psi}^u = \Gamma_{\varphi}^u A_{\varphi-\psi}^u.$$

Théorème 3.2.6. *Soient $\varphi \in L^{\infty}$ et $\psi \in L^{\infty}$ et $\varphi - \lambda\psi \in \mathbb{C}$ où $|\lambda| = 1$. Alors l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si $\Gamma_{\Phi}^u = 0$ où $\Phi = (\lambda - 1)|\varphi|^2 + c\bar{\varphi} - \bar{c}\lambda\varphi$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi - \lambda\psi = c$ où $|\lambda| = 1$ et $c \in \mathbb{C}$. Puisque $\Gamma_c^u = \widetilde{\Gamma}_c^u = 0$ et $|\lambda| = 1$, il s'ensuit que

$$\widetilde{\Gamma}_{\varphi}^u \Gamma_{\varphi}^u = |\lambda|^2 \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u \Gamma_{\psi}^u = \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u \Gamma_{\psi}^u,$$

et

$$\Gamma_{\psi}^u \widetilde{\Gamma}_{\psi}^u = \Gamma_{\varphi}^u \widetilde{\Gamma}_{\varphi}^u.$$

En outre, puisque $P_u + Q_u = I$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \widetilde{A_{\varphi-\psi}^u} \Gamma_{\bar{\psi}}^u - \Gamma_{\varphi}^u A_{\varphi-\psi}^u &= Q_u(\varphi - \psi)Q_u\bar{\psi}P_u - Q_u\varphi P_u(\bar{\varphi} - \bar{\psi})P_u \\
 &= Q_u(\lambda\psi + c - \psi)Q_u\bar{\psi}P_u - Q_u\lambda\psi P_u(\overline{\lambda\psi + c - \psi})P_u \\
 &= Q_u((\lambda - 1)\psi + c)Q_u\bar{\psi}P_u + Q_u\lambda\psi P_u((1 - \bar{\lambda})\bar{\psi} - \bar{c}) \\
 &= (\lambda - 1)Q_u\psi Q_u\bar{\psi}P_u + cQ_u\bar{\psi}P_u + (\lambda - 1)Q_u\psi P_u\bar{\psi}P_u \\
 &\quad - \lambda\bar{c}Q_u\psi P_u.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\widetilde{A_{\varphi-\psi}^u} \Gamma_{\bar{\psi}}^u - \Gamma_{\varphi}^u A_{\varphi-\psi}^u = Q_u [(\lambda - 1)|\psi|^2 + c\bar{\psi} - \bar{c}\lambda\psi] P_u. \quad (3.13)$$

Puisque $\varphi = \lambda\psi + c$, nous avons

$$(\lambda - 1)|\psi|^2 + c\bar{\psi} - \bar{c}\lambda\psi = (\lambda - 1)|\varphi|^2 + c\bar{\varphi} - \bar{c}\lambda\varphi + |c|^2. \quad (3.14)$$

Par conséquent, de (3.13) et (3.14) nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 \left(\widetilde{A_{\varphi-\psi}^u} \Gamma_{\bar{\psi}}^u - \Gamma_{\varphi}^u A_{\varphi-\psi}^u \right) P_u &= Q_u [(\lambda - 1)|\psi|^2 + c\bar{\psi} - \bar{c}\lambda\psi] P_u \\
 &= Q_u [(\lambda - 1)|\varphi|^2 + c\bar{\varphi} - \bar{c}\lambda\varphi + |c|^2] P_u \\
 &= Q_u [\Phi + |c|^2] P_u \\
 &= \Gamma_{\Phi}^u P_u + |c|^2 Q_u P_u \\
 &= \Gamma_{\Phi}^u P_u,
 \end{aligned}$$

où $\Phi = (\lambda - 1)|\varphi|^2 + c\bar{\varphi} - \bar{c}\lambda\varphi + |c|^2$. Donc

$$\widetilde{A_{\varphi-\psi}^u} \Gamma_{\bar{\psi}}^u - \Gamma_{\varphi}^u A_{\varphi-\psi}^u = \Gamma_{\Phi}^u.$$

Si $\Gamma_{\Phi}^u = 0$, d'après le lemme 3.2.6, $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si $\Gamma_{\Phi}^u = 0$. \square

Théorème 3.2.7. *Soit $\varphi \in L^\infty$ tel que $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et $\psi \in L^\infty$. Alors $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal si et seulement si A_φ^u et $\widetilde{A_\psi^u}$ sont des opérateurs normaux, et*

$$S_{\varphi,\psi}^u = A_\varphi^u \oplus \widetilde{A_\psi^u}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in L^\infty$ tel que $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$. Alors $\Gamma_\varphi^u = 0$ d'après les lemmes 2.4.2 et 2.4.3. Donc l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ a la forme suivante :

$$S_{\varphi,\psi}^u = \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma}_\psi^u \\ 0 & \widetilde{A}_\psi^u \end{pmatrix}.$$

Si $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal, alors

$$A_{\bar{\varphi}}^u A_\varphi^u - A_\varphi^u A_{\bar{\varphi}}^u = \widetilde{\Gamma}_\psi^u \Gamma_\psi^u, \quad A_{\bar{\varphi}}^u \widetilde{\Gamma}_\psi^u = \widetilde{\Gamma}_\psi^u \widetilde{A}_\psi^u, \quad \text{et} \quad \Gamma_\psi^u \widetilde{\Gamma}_\psi^u + \widetilde{A}_\psi^u \widetilde{A}_\psi^u = \widetilde{A}_\psi^u \widetilde{A}_\psi^u \quad (3.15)$$

Si $\Gamma_\psi^u \neq 0$, alors par l'équation (3.15) l'opérateur A_φ^u n'est pas normal. Puisque $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal, il en résulte que A_φ^u est sous-normal. Sachant que A_φ^u est un opérateur de Toeplitz tronqué qui est un opérateur complexe symétrique, alors A_φ^u est normal. C'est une contradiction. Donc $\Gamma_\psi^u = 0$. Par conséquent, à partir de (3.15),

$$A_{\bar{\varphi}}^u A_\varphi^u = A_\varphi^u A_{\bar{\varphi}}^u \quad \text{et} \quad \widetilde{A}_\psi^u \widetilde{A}_\psi^u = \widetilde{A}_\psi^u \widetilde{A}_\psi^u.$$

D'où, les opérateurs $A_\varphi^u, \widetilde{A}_\psi^u$ sont normaux, et

$$S_{\varphi,\psi}^u = A_\varphi^u \oplus \widetilde{A}_\psi^u.$$

L'implication inverse est triviale. □

Corollaire 3.2.1. *Soit $\varphi, \bar{\psi} \in L^\infty$ tels que $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et $\bar{\psi} K_u^2 \subset K_u^2$. Alors*

$$S_{\varphi,\psi}^u = A_\varphi^u \oplus \widetilde{A}_\psi^u.$$

Démonstration. Si $\varphi, \bar{\psi} \in L^\infty$ tels que $\varphi K_u^2 \subset K_u^2$ et $\bar{\psi} K_u^2 \subset K_u^2$. Alors, à partir du théorème 3.2.7, $\Gamma_\varphi^u = 0$ et $(\widetilde{\Gamma}_\psi^u)^* = \Gamma_{\bar{\psi}}^u = 0$. Donc

$$S_{\varphi,\psi}^u = A_\varphi^u \oplus \widetilde{A}_\psi^u.$$

□

Il est difficile de décrire les symboles φ et ψ lorsque $S_{\varphi,\psi}^u$ est normal. Ainsi, les auteurs, dans [9], ont d'abord étudié le problème dans un cas particulier, c'est-à-dire lorsque Γ_φ^u est de rang fini n pour $n \geq 0$.

Lemme 3.2.7. Soit $\Gamma_\varphi^u = f_0 \otimes F_0$ et $\Gamma_\psi^u = f_1 \otimes F_1$ où $F_0, F_1 \in K_u^2$ et $f_0, f_1 \in (K_u^2)^\perp$. Alors $S_{\varphi, \psi}^u$ est normal si et seulement si

$$\begin{aligned}\Gamma_{\bar{\psi}}^u &= \overline{\alpha_0} g_0 \otimes F_0, \Gamma_{\bar{\psi}}^u = \alpha_1 f_1 \otimes G_1. \\ |\alpha_0|^2 \langle f_0, f_0 \rangle &= \langle g_0, g_0 \rangle, |\alpha_1|^2 \langle F_1, F_1 \rangle = \langle G_1, G_1 \rangle. \\ \widetilde{A}_v^u g_0 &= \zeta_0 f_1,\end{aligned}$$

et

$$A_v^u F_1 = \zeta_1 G_0,$$

où $v = \varphi - \psi$, $\alpha_0, \alpha_1, \zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{C}$ et $g_0, g_1 \in (K_u^2)^\perp$.

Démonstration. Supposons que $S_{\varphi, \psi}^u$ est normal. Comme les opérateurs $\Gamma_{\bar{\psi}}^u$ et Γ_ψ^u sont de rang 1. La proposition 2.4.2 s'assure que $\Gamma_{\bar{\psi}}^u = g_0 \otimes G_0$, $\Gamma_\psi^u = g_1 \otimes G_1$ où $G_0, G_1 \in K_u^2$ et $g_0, g_1 \in (K_u^2)^\perp$. Par le lemme 3.2.6, on obtient

$$\begin{aligned}\langle g_0, g_0 \rangle G_0 \otimes G_0 &= \langle f_0, f_0 \rangle F_0 \otimes F_0, \\ \langle G_1, G_1 \rangle g_1 \otimes g_1 &= \langle F_1, F_1 \rangle f_1 \otimes f_1,\end{aligned}$$

et

$$\widetilde{A}_v^u g_0 \otimes G_0 = f_1 \otimes A_v^u F_1.$$

Donc

$$G_0 = \alpha_0 F_0, g_0 = \alpha_1 f_1,$$

pour deux nombres complexes $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$, et

$$\langle f_0, f_0 \rangle = |\alpha_0|^2 \langle g_0, g_0 \rangle, \langle F_1, F_1 \rangle = |\alpha_1|^2 \langle G_1, G_1 \rangle,$$

et

$$\widetilde{A}_v^u g_0 = \zeta_0 f_1, A_v^u F_1 = \zeta_1 G_1,$$

où $v = \varphi - \psi$, $\alpha_0, \alpha_1, \zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{C}$ et $g_0, g_1 \in (K_u^2)^\perp$. L'implication inverse est évidente. \square

Théorème 3.2.8. Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$. Alors les assertions suivantes sont correctes.

1. Si $\Gamma_\varphi^u = 0$, alors $S_{\varphi, \psi}^u$ est normal si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$ et $\psi \in \mathbb{C}$.
2. Supposons que $\dim K_u^2 = 1$. Alors $S_{\varphi, \psi}^u$ est normal si et seulement s'il existe une fonction non constante $F \in L^\infty$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|F| = 1$, $a \neq 0$, $\varphi = \lambda a F + b$ et $\psi = a F + b$ où $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$.

Démonstration. 1. La preuve est claire par le lemme 2.4.3.

2. Supposons que $\dim K_u^2 = 1$, c'est à dire

$$K_u^2 = \left\langle \frac{1}{1 - \bar{a}z} \right\rangle$$

où $|a| < 1$. Si $S_{\varphi, \psi}^u$ est normal, alors par le lemme 3.2.6 nous avons

$$\Gamma_{\psi}^u \widetilde{\Gamma}_{\bar{u}}^u f = \Gamma_{\varphi}^u \widetilde{\Gamma}_{\bar{u}}^u f$$

pour tout $f \in zH^2 + \overline{zH^2}$. Donc

$$Q_u(\psi P_u \bar{\psi}) f = Q_u(\varphi P_u \bar{\varphi}) f, f \in zH^2 + \overline{zH^2}.$$

Donc

$$\psi P_u \bar{\psi} f - \varphi P_u \bar{\varphi} f = \frac{c(f)}{1 - \bar{a}z}.$$

Nous mettons

$$P_u \bar{\psi} f = \frac{a(f)}{1 - \bar{a}z},$$

et

$$P_u \bar{\varphi} f = \frac{b(f)}{1 - \bar{a}z}.$$

Alors

$$\frac{a(f)}{1 - \bar{a}z} \psi - \frac{b(f)}{1 - \bar{a}z} \varphi = \frac{c(f)}{1 - \bar{a}z}, f \in zH^2 + \overline{zH^2}.$$

Si $a(f) = 0$ et $b(f) \neq 0$, alors $\varphi \in \mathbb{C}$ et ainsi $\psi \in \mathbb{C}$ par le lemme 3.2.6.

Si $a(f) \neq 0$ et $b(f) = 0$, alors $\psi \in \mathbb{C}$ et ainsi $\varphi \in \mathbb{C}$ par le lemme 3.2.6.

Si $a(f) \neq 0$ et $b(f) \neq 0$, alors $\varphi - \frac{a(f)}{b(f)} \psi \in \mathbb{C}$. Par le lemme 3.2.6,

$$\widetilde{\Gamma}_{\bar{u}}^{\psi} \Gamma_{\psi}^u = \left| \frac{a(f)}{b(f)} \right|^2 \Gamma_{\psi}^u \widetilde{\Gamma}_{\bar{u}}^u = \Gamma_{\varphi}^u \widetilde{\Gamma}_{\bar{u}}^{\varphi}.$$

Si $a(f) = 0$ et $b(f) = 0$ pour tout $f \in zH^2 + \overline{zH^2}$, alors $\widetilde{A}_{\psi}^u = \widetilde{A}_{\varphi}^u = 0$. Par la proposition 2.3.2, $\varphi = \psi = 0$. Donc il existent une fonction non constante $F \in L^{\infty}$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|F| = 1, a \neq 0, \varphi = \lambda a F + b$ et $\psi = a F + b$ où $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$.

□

3.2.1 Produit.

Soit le lemme important suivant :

Lemme 3.2.8. *Soit $\varphi \in L^\infty$. Alors*

1. $A_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}$.
2. $\widetilde{A}_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.
3. $\Gamma_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.
4. $\widetilde{\Gamma}_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C}$.

Définition 3.2.2. *Soit $B(L^2)$ l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés sur L^2 . Pour une fonction intérieure $u \in H^2$, on désigne l'ensemble de toutes les dilatations des opérateurs de Toeplitz tronqués sur L^2 , par D_u :*

$$D_u = \{S_{\varphi,\psi}^u \in B(L^2), \varphi, \psi \in L^\infty\}.$$

Proposition 3.2.1. *Soit u une fonction intérieure, $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in L^\infty$. Soit $S_{\varphi_1, \psi_1}^u, S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$, les assertions suivantes sont satisfaites*

1. $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ si et seulement si $M_{\varphi_1 - \psi_1} S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$.
2. Si $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞ alors $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ si et seulement si $S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$.

Démonstration. 1. Il est clair que

$$\begin{aligned} S_{\varphi_1, \psi_1}^u &= M_{\psi_1} + S_{\varphi_1 - \psi_1, 0}^u \\ &= M_{\psi_1} + M_{\varphi_1 - \psi_1} S_{1,0}^u. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u &= (M_{\psi_1} + M_{\varphi_1 - \psi_1} S_{1,0}^u) S_{\varphi_2, \psi_2}^u \\ &= S_{\varphi_2 \psi_1, \psi_2 \psi_1}^u + M_{\varphi_1 - \psi_1} S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u. \end{aligned}$$

Nous concluons que $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ si et seulement si $M_{\varphi_1 - \psi_1} S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$.

2. De ce qui précède, nous obtenons

$$M_{\varphi_1 - \psi_1} S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u - S_{\varphi_2 \psi_1, \psi_2 \psi_1}^u.$$

Si $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible, alors

$$S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = M_{(\varphi_1 - \psi_1)^{-1}} \left(S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u - S_{\varphi_2 \psi_1, \psi_2 \psi_1}^u \right).$$

Donc, nous en déduisons que $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ si et seulement si $S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$. \square

Théorème 3.2.9. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty$ et soit u une fonction intérieure non constante alors $S_{1,0}^u S_{\varphi, \psi}^u \in D_u$ si et seulement si $\varphi \in \mathbb{C} + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$, $\psi \in \mathbb{C}$. Dans ce cas*

$$S_{1,0}^u S_{\varphi, \psi}^u = c S_{1,0}^u \quad c \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Par la représentation

$$S_{\varphi, \psi}^u = \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma}_\psi^u \\ \Gamma_\varphi^u & \widetilde{A}_\psi^u \end{pmatrix}$$

et

$$S_{1,0}^u = \begin{pmatrix} A_1^u & \widetilde{\Gamma}_0^u \\ \Gamma_1^u & \widetilde{A}_0^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$S_{1,0}^u S_{\varphi, \psi}^u = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma}_\psi^u \\ \Gamma_\varphi^u & \widetilde{A}_\psi^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\varphi^u & \widetilde{\Gamma}_\psi^u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour toutes $\Phi, \Psi \in L^\infty$, nous mettons

$$S_{1,0}^u S_{\varphi, \psi}^u = S_{\Phi, \Psi}^u = \begin{pmatrix} A_\Phi^u & \widetilde{\Gamma}_\Psi^u \\ \Gamma_\Phi^u & \widetilde{A}_\Psi^u \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi - \varphi}^u & \widetilde{\Gamma}_{\Psi - \psi}^u \\ \Gamma_\Phi^u & \widetilde{A}_\Psi^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$A_{\Phi - \varphi}^u = 0, \widetilde{A}_\Psi^u = 0, \Gamma_\Phi^u = 0, \widetilde{\Gamma}_{\Psi - \psi}^u = 0.$$

Puisque $A_{\Phi-\varphi}^u = 0$ et $\widetilde{A}_{\Psi}^u = 0$, il découle du Lemme 3.2.8 que $\Phi - \varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}$ et $\Psi = 0$. De la même manière, puisque $\Gamma_{\Phi}^u = 0$ et $\widetilde{\Gamma}_{\Psi-\psi}^u = 0$ et étant donné que

$$0 = \widetilde{\Gamma}_{\Psi-\psi}^u = \left(\Gamma_{\Psi-\psi}^u \right)^*.$$

est équivalente à $\Gamma_{\Psi-\psi}^u = 0$, il résulte du Lemme 3.2.8 que $\Phi \in \mathbb{C}$ et $\overline{\Psi - \psi} \in K_u^\infty$. De ce qui précède, nous concluons que

$$\varphi = \Phi + \varphi_1,$$

pour $\Phi \in \mathbb{C}$ et $\varphi_1 \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}$, et

$$\psi \in \mathbb{C}.$$

En conclusion, on a

$$\varphi \in \mathbb{C} + uH^\infty + \overline{uH^\infty}, \psi \in \mathbb{C}, \Phi \in \mathbb{C}, \text{ et } \Psi = 0.$$

Notez que $\Phi = \frac{P_u \varphi}{k_u} \in \mathbb{C}$ et $\Psi = 0$. Dans cette vue,

$$S_{1,0}^u S_{\varphi,\psi}^u = S_{\Phi,\Psi}^u = S_{\frac{P_u \varphi}{k_u}, 0}^u = c S_{1,0}^u \quad c \in \mathbb{C}.$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

Corollaire 3.2.2. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in L^\infty$ telle que $\varphi_1 - \psi_1$ est une fonction inversible dans L^∞ . Soient $S_{\varphi_1, \psi_1}^u, S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ alors $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ si et seulement si $\varphi_2 \in \mathbb{C} + uH^\infty + \overline{uH^\infty}$ et $\psi_2 \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Le résultat découle facilement de Proposition 3.2.1 et Théorème 3.2.9. □

Remarque 3.2.3. 1. Si S_{φ_1, ψ_1}^u est un opérateur de multiplication $S_{\varphi_1, \psi_1}^u = M_{\varphi_1}$, alors

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u \text{ pour tout } S_{\varphi_2, \psi_2}^u \text{ et } S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\varphi_1 \varphi_2, \varphi_1 \psi_2}^u.$$

2. Soit $\varphi_1, \psi_1 \in L^\infty$ telle que $\varphi_1 - \psi_1$ est une fonction inversible dans L^∞ . Si S_{φ_1, ψ_1}^u n'est pas un opérateur de multiplication et $S_{\varphi_2, \psi_2}^u = M_{\varphi_2}$. Si $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in D_u$ alors, par Théorème 3.2.9, nous avons

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u M_{\varphi_2} = S_{\varphi_2 \varphi_1, \varphi_2 \psi_1}^u.$$

Pour étudier des cas particuliers du produit de dilatation des opérateurs de Toeplitz tronqués, nous devons construire les sous-ensembles K_1 et K_2 décrit ci-dessous

$$K_1 = \{S_{\varphi,\psi}^u \in D_u, \varphi, \psi \in \mathbb{C}\}.$$

$$K_2 = \{S_{\varphi,\psi}^u \in D_u, \varphi \in uH^\infty + \overline{uH^\infty}, \psi \in \mathbb{C}\}.$$

Proposition 3.2.2. *Soit $\varphi_1, \psi_1 \in L^\infty$ telle que $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞ . Pour tout $S_{\varphi_1, \psi_1}^u \in D_u$, nous avons les cas suivants*

(a) Si $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_1$ alors

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\varphi_1 \varphi_2, \psi_1 \psi_2}^u.$$

(b) Si $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_2$ alors

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\psi_1 \varphi_2, \psi_1 \psi_2}^u.$$

Démonstration. (a) Si $\varphi, \psi \in \mathbb{C}$ par le Théorème 3.2.9 nous avons,

$$S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\varphi_2, 0}^u.$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u &= S_{\psi_1 \varphi_2 + (\varphi_1 - \psi_1) \varphi_2, \psi_1 \psi_2}^u \\ &= S_{\varphi_1 \varphi_2, \psi_1 \psi_2}^u. \end{aligned}$$

(b) Par le Théorème 3.2.9 nous avons,

$$S_{1,0}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = 0.$$

Donc,

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\psi_1 \varphi_2, \psi_1 \psi_2}^u.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de donner une condition suffisante dans laquelle l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u \in D_u$ devient inversible et dont l'inverse est également en D_u . Dans tous les résultats suivants, nous supposons que la fonction $\varphi_1 - \psi_1$ est inversible dans L^∞ .

Corollaire 3.2.3. *Supposons que l'opérateur $S_{\varphi,\psi}^u$ n'est pas un opérateur de multiplication. Si $S_{\varphi,\psi}^u \in K_1$ et $\varphi \neq 0, \psi \neq 0$ alors $S_{\varphi,\psi}^u$ est un opérateur inversible. Dans ce cas*

$$(S_{\varphi,\psi}^u)^{-1} = S_{\varphi^{-1}, \psi^{-1}}^u.$$

Démonstration. Soit $S_{\varphi_1, \psi_1}^u \in D_u$ l'inverse de l'opérateur $S_{\varphi, \psi}^u$. Alors $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi, \psi}^u = S_{1,1}^u$. Supposons que $\varphi \neq 0, \psi \neq 0$, alors par la proposition 3.2.2 nous avons,

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi, \psi}^u = S_{\varphi_1 \varphi, \psi_1 \psi}^u = S_{1,1}^u.$$

Donc $\varphi_1 = \varphi^{-1}$ et $\psi_1 = \psi^{-1}$. □

Corollaire 3.2.4. *Supposons que $S_{\varphi_1, \psi_1}^u \in D_u$ n'est pas un opérateur de multiplication, alors nous avons les deux cas suivants*

1. *Si $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_1$ alors l'opérateur $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u$ est un opérateur de multiplication si et seulement si $\varphi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2$. Dans ce cas,*

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = M_{\varphi_1 \varphi_2} = M_{\psi_1 \psi_2}.$$

2. *Si $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_2$ alors l'opérateur $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u$ est un opérateur de multiplication si et seulement si $\psi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2$. Dans ce cas,*

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = M_{\psi_1 \varphi_2} = M_{\psi_1 \psi_2}.$$

Le corollaire suivant nous dit quand $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = 0$.

Corollaire 3.2.5. *Supposons que $S_{\varphi_1, \psi_1}^u \in D_u$ n'est pas un opérateur de multiplication alors nous avons*

1. *Si $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_1$ et $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \neq 0$ alors*

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = 0.$$

si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiée.

- (a) $\varphi_1 \neq 0, \psi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 \in \mathbb{C}$.
- (b) $\psi_1 \neq 0, \varphi_1 = 0, \psi_2 = 0, \varphi_2 \in \mathbb{C}$.

2. *Si $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_2$ et $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \neq 0$ alors*

$$S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = 0.$$

si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est valable.

- (a) $\psi_1 = 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_2 \neq 0$.

(b) $\psi_1 \neq 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0$.

Démonstration. 1. Puisque $S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_1$, il découle de la proposition 3.2.2 que, $\varphi_2 \in \mathbb{C}$ et $\psi_2 \in \mathbb{C}$ et l'équation $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = 0$ est équivalente à $\varphi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2 = 0$.

2. Encore une fois en utilisant la proposition 3.2.2, on obtient que l'équation $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = 0$ est équivalente à $\psi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2 = 0$.

□

Le corollaire suivant montre quand l'opérateur S_{φ_1, ψ_1}^u commute avec S_{φ_2, ψ_2}^u .

Corollaire 3.2.6. *Les assertions suivantes sont valables.*

1. Soient $S_{\varphi_1, \psi_1}^u, S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_1$ alors $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\varphi_2, \psi_2}^u S_{\varphi_1, \psi_1}^u$.

2. Soient $S_{\varphi_1, \psi_1}^u, S_{\varphi_2, \psi_2}^u \in K_2$ alors $S_{\varphi_1, \psi_1}^u S_{\varphi_2, \psi_2}^u = S_{\varphi_2, \psi_2}^u S_{\varphi_1, \psi_1}^u$ si et seulement $\psi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \psi_2$.

Bibliographie

- [1] R.A. M. Avendano, P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math., vol. 237, Springer, New York, 2007.
- [2] Z. Bendaoud, N. Saouli, On the product of dilation of truncated Toeplitz operators, Turkish Journal of Mathematics : Vol. 44 : No. 1, Article 10,2020.
- [3] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) : 239-255, 1948.
- [4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson(1983).
- [5] A. Brown , P. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew; Math.213 : 89-102, 1963.
- [6] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [7] C.C. Cowen, Hyponormality of toeplitz operators. Proc. Amer. Math. Soc. 103, 809–812 (1988).
- [8] X. Ding , Y. Sang, Dual Truncated Toeplitz Operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications; 461 (1) : 929-946,2018.
- [9] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.
- [10] P. A. Fuhrmann, Linear systems and operators in Hilbert space, McGraw-Hill 1981.
- [11] S. Garcia, Conjugation, the backward shift and Toeplitz kernels. J. Op. Th., 54(2) :239-250, 2005.
- [12] S. Garcia, J. E. Mashreghi, W. Ross, Introduction to Model Spaces and their Operators, Cambridge University Press, 2016.
- [13] S. Garcia, W. Ross, Recent progress on truncated Toeplitz operators. In : Blaschke Products and Their Applications, Fields Inst. Commun. vol. 65, pp. 275–319, Springer, New York (2013)

-
- [14] I. Gohberg, N. Krupnik, One-dimensional Linear Singular Integral Equations, Volume I, Operator Theory : Advances and Applications, vol. 53. Birkhauser, Basel (1992)
- [15] I. Gohberg, N. Krupnik, One-Dimensional Linear Singular Integral Equations, Volume II, Operator Theory : Advances and Applications, vol. 54. Birkhauser, Basel (1993).
- [16] C. Gu, Algebraic properties of Cauchy singular integral operators on the unit circle. *Taiwanese Journal of Mathematics*; 20 (1),2016.
- [17] C. Gu, When is the product of Hankel operators also a Hankel operator. *J. Oper. Theory* 49, 347–362 (2003).
- [18] C. Gu , DO. Kang, A commutator approach to truncated singular integral operators. *Integral Equations and Operator Theory*; 90 : 16,2018.
- [19] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space, Chelsea Publishing Company, Kew York, 1957.
- [20] Ko, E., Lee, J.E. : On the Dilation of truncated Toeplitz operators. *Complex Anal. Oper. Theory* 10, 815–817 (2016).
- [21] B.N. Mandal, A. Chakrabarti, Applied Singular Integral Equations. CRC Press, Boca Raton (2011)
- [22] T. Nakazi, T. Yamamoto, Normal singular integral operators with Cauchy kernel on L_2 . *Integr. Equ. Oper. Theory* 78(2), 233–248 (2014).
- [23] N. K. Nikolskii, Treatise on the shift operator : spectral function theory. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin, 1986.
- [24] V. Peller, Hankel Operators and Their Applications Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York (2003).
- [25] D. Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. *Operators And Matrices*, 1(4) : 491-526, 2007.