الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـلـيــــةالـعـلــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
Mohammed Yassine Trigui

THEME

Résolution D'une Certaine Classe De Problème D'équations Différentielles Fractionnaires

---

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Dr: Abdelaziz Rahmoune	*M.C.A*	*Président*
Dr: Nawal Abdesselam	*M.C.B*	*Examinatrice*
Dr: Ahcene Boukehila	*M.C.A*	*Encadreur*

Année Universitaire 2021/2022

Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire du mon père(Que Dieu lui fasse miséricorde), à ma chère mère et à mes chères tantes, qui m'ont soutenu pendant la réalisation de ce travail qui est le fruit de leur amour leurs encouragements et sacrifices, à tous mes enseignants pour leurs conseils, leurs patiences, leur persévérance, à mes très chères sœurs et frères à toute ma famille, à tous mes amis et à toute personne qui a contribué à la réalisation de ce travail.

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour poursuivre ce travail.

Je tiens à remercier Mr. Ahcene Boukehila maître de conférence à l'université Amar Teliji Laghouat de m'avoir fait l'honneur D'examiner ce mémoire et d'en être rapporteur. Je tiens à le remercier aussi pour la pertinence de ses remarques et sa patience pendant ce travail. J'admire beaucoup ses travaux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.

J'adresse également de vifs remerciements à Mr. Abdelaziz Rahmoune maître de conférence à l'université Amar Teliji Laghouat, Je remercie d'avoir présidé le jury de soutenance, et lui adresse toute ma gratitude.

J'adresse mes remerciements à MD : Nawal Abdesselam maître de conférence à l'université Amar Teliji Laghouat qui m'a fait l'honneur de juger ce travail.

Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Notations

$L_p(\Omega)$:L'espace de Lebesgue des fonctions p-intégrables sur Ω .

$L_\infty(\Omega)$:L'espace de Lebesgue des fonctions uniformément bornées sur Ω .

$C^n(\Omega)$:L'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur Ω $(n \geq 0)$.

$C_\gamma(\Omega)$:L'espace des fonctions continues avec poids telles que :
$(x-a)^\gamma f(x) \in C(\Omega)$.

$C_\gamma^n(\Omega)$:L'espace des fonctions $(n-1)$ fois continûment différentiables sur Ω et
$f^{(n)}(x) \in C_\gamma(\Omega)$.

$AC^n(\Omega)$:L'espace des fonctions $(n-1)$ fois continûment différentiables sur Ω telles que :
$f^{(n-1)}(x) \in$ AC[a, b].

$AC_{\delta,\mu}^m(\Omega)$:L'espace des fonctions absolument continues telles que :
$(\delta^{n-1}[x^\mu g(x)]) \in AC[a,b], \quad \mu \in \mathbb{R}, \delta = x\frac{d}{dx}$.

$\Gamma(z)$:La fonction Gamma.

$B(z,w)$:La fonction Bêta.

$E_{\alpha,\beta}(z)$:La fonction Mittag-Leffler.

$I_{a+}^\alpha f, I_{b-}^\alpha f$:L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville(resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in C$ $(\Re(\alpha) > 0)$.

$D_{a+}^\alpha f, D_{b-}^\alpha f$:La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in C$ $(\Re(\alpha) > 0)$.

${}^C D_{a+}^\alpha f, {}^C D_{b-}^\alpha f$:La dérivée fractionnaire de Caputo (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in C$ $(\Re(\alpha) > 0)$.

ملخص

يتمحور موضوع هذه المذكرة حول دراسة وجود ووحدانية الحلول لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية في فضاء باناخ(فضاء لوبيغ و فضاء الدوال المستمرة).

الكلمات المفتاحية:

فضاء لوبيغ، فضاء الدوال المستمرة ، تكامل ريمان-ليوفيل، الاشتقاق بمفهوم ريمان-ليوفيل، الاشتقاق بمفهوم كابيتو ،مسالة كوشي، معادلة تفاضلية كسرية.

Abstract

This work is devoted to the study of the existence and uniqueness of the solutions of some fractional differential equations in the Banach space (the space of continuous functions and the Lebesgue space).

Key words :

Lebesgue space, Continuous function space, Riemann-Liouville operator, Caputo operator, Cauchy problem, Fractional differential equation.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du quelques équations différentielles fractionnaires dans l'espace de Banach (l'espace des fonctions continues et l'espace de Lebesgue).

Mots clés :

Espace de Lebesgue, Espace de fonction continue, L'opérateur de Riemann-Liouville, L'opérateur de Caputo, Problème de Cauchy,Équation Différentielle Fractionnaire.

Table des matières

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet près-que aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17-ième siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a conduit au calcul fractionnaire était : Est ce que la dérivée d'ordre entier $\frac{d^n f}{dx^n}$ peut être étendue à avoir un sens lorsque n est une fraction ? Plus tard, la question est devenue : n peut être n'importe quel nombre : Fractionnel, irrationnel ou complexe ? Parce-que cette dernière question a été répondu par l'affirmative, le calcul fractionnaire est devenu un terme mal approprié et pourrait mieux être appelé intégration et différenciation d'ordre fractionnaire.

Leibniz a introduit le symbole$\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée n-ième d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à L'Hôpital en 1695 , L'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Aujourd'hui, cette lettre est admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, (i.e. un nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie mathématique.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme. Des nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différentes types d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

J. L. Lagrange a contribué au calcul fractionnaire indirectement. En 1772, il a développé la loi des exposants (indices) pour les opérateurs différentiels d'ordre entier et a écrit :

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} f = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} f$$

Dans la notation moderne, le point est omis, car ce n'est pas la multiplication. Plus tard, lorsque la théorie du calcul fractionnaire est développée, les mathématiciens sont intéressés à savoir ce que les restrictions devaient être imposées à f(x) de sorte qu'une règle analogue était vraie pour m et n arbitraires.

En 1812, P. S. Laplace a défini une dérivée fractionnaire à l'aide d'une intégrale, en 1819, la première mention d'une dérivée d'ordre arbitraire apparaît dans un texte.

S. F. Lacroix a consacré moins de deux pages de ce texte de 700 pages a ce sujet. Il a développé un exercice mathématique simple généralisé a partir d' un cas d'ordre entier. En commençant par $f(x) = x^m$, (m est un entier positif), Lacroix a développé facilement la dérivée n-ième.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Grâce à l'utilisation du symbole de Legendre pour la factorielle généralisée (la fonction Gamma), il a obtenu
$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n$$
Il a donné alors l'exemple de $f(x) = x$ et $n = \frac{1}{2}$, et a obtenu :
$$\frac{d^{\frac{1}{2}} f}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peut plus de 30 ans, elle a été objet de quelques conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué a B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974 , et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué a K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

Des nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire ([12],[18]).

Au cours des dernières années un intérêt considérable est donné aux applications des dérivées fractionnaires dans plusieurs domaines. Nous citons maintenant quelques exemples sur ce sujet :

1. Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement à la viscoélasticité des matières.
2. Les problèmes électromagnétiques peuvent être décrits en utilisant les équations intégrodifférentielles fractionnaires.
3. Les échauffements de la conductance comme un processus dynamique peut être modéliser aussi par des modèles d'ordre fractionnaire .
4. En économie, quelques systèmes de finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire .
5. En biologie, il a été déduit que les membranes des cellules de l'organisme biologique ont la conductance électrique d'ordre fractionnaire .
6. En traitement du signal et le traitement d'image, clarifient parfaitement l'importance de considération et l'analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaire.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'étude de quelques équations différentiels fractionnaires , en utilisant plusieurs théorèmes du point fixe pour étudions l'existence et l'unicité de la solution de le problème à étudier.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la façon suivante :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous présentons quelques outils de base sur l'analyse fonctionnelle .

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré pour les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et Caputo et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires,et nous présentons quelques définitions des fonctions spéciales utiles tout au long de notre thèse telles que : la fonction gamma d'Euler, la fonction bêta, la fonction de Mittag-Leffler avec des exemples et quelques propriétés intéressantes.

Chapitre 3 : Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des quelques équations différentiels fractionnaires .

Chapitre 1

Quelques Notions D'analyse Fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et théorèmes de base en analyse fonctionnelle dont nous avons besoin dans ce mémoire et calcul fractionnaire en général, Pour plus de détails voir [3, 13, 14, 15, 16].

1.1 Espaces Fonctionnels

1.1.1 Les Espaces Lp

Définition.1.1

Une tribu sur $\mathbb{R}^n$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^n$contenant $(\emptyset, \mathbb{R})$ stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).

Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^n$,les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables. On dit que $(\mathbb{R}^n\ , \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Définition.1.2

Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^n$. Une mesure positive µ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

1. µ(∅) = 0,
2. Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} B_i\right) = \sum_1^\infty \mu\left(B_i\right)$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$est un espace mesuré.

Définition.1.3

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.

Définition.1.4

Soit $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini ou infini $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ de $\mathbb{R}$ muni d'un mesure μ,
► Si $1 \leq p < +\infty$,
On note par $L_p(\Omega)$ l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions μ-mesurables de puissance p-ième sommable(*intégrable*) sur Ω.
$f \in L_p(\Omega)$ si et seulement si f est μ-mesurable et $\int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx < \infty$,C'est-à-dire :

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}; f \; est \; mesurable \; et \qquad \int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx < \infty \right\}.$$

► Pour $p = \infty$, On note par $L_\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurables et essentiellement bornées presque partout sur Ω ,C'est-à-dire :

$$L_\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C}; f \; est \; mesurable \; et \; \exists C \geq 0; \quad \mid f(x) \mid \leq C \; p.p \; sur \; \Omega \}.$$

Proposition.1.1

$L_p(\Omega)$ est un espace vectoriel muni de la norme définie par

$$\| f \|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx \right)^{1/P} & 1 \leq p < +\infty \\ \|f\|_\infty = \text{ ess } \sup_\Omega |f(x)| & p = \infty \end{cases} \tag{1.1}$$

lorsque $\|f\|_\infty = \text{ ess } \sup_\Omega |f(x)| = Inf \{ M \geq 0; \mid f(x) \mid \leq M \quad p.p \; sur \Omega \}$.

Démonstration :voir [3](page 93) □

Théorème.1.1 (Fischer-Riesz)

L'espace $L_p(\Omega)$ muni de la norme (1.1) est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve :voir [3](pages 93,94) □

Théorème.1.2 (Théorème de Lebesgue de convergence bornée)

Soit $(f_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions intégrables de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .On fait les hypothèses suivantes :

1. la suite $(f_n)_{n \in N}$ converge presque partout vers une fonction f sur Ω .$\left(f_n \overset{p.p}{\to} f \right)$.
2. il existe une fonction positive g telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega : g \in L_1(\Omega) \text{ et } \mid f_n(x) \mid \leq g(x) \; p.p \; sur \; \Omega$$

Alors

$$f \in L_1(\Omega) \text{ et } \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x) \, dx = \int_\Omega f(x) \, dx.$$

Preuve :voir [13] (pages 34,35) □

Remarque.1.1 : voir [12] (pages 1,2)

En calcul fractionnaire, nous avons également besoin de l'espace $L_p(\Omega)$ modifiée notée par $X_c^p(\Omega)$ muni de la norme suivante :

$$\begin{cases} \| f \|_{X_c^p} = \left(\int_\Omega \mid t^c f(t) \mid^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \| f \|_{X_c^\infty} = \text{ ess } \sup_\Omega \left(t^c |f(x)| \right) & p = \infty \end{cases}$$

En particulier, si $c = 1/p$; *L'espace* $X_{1/p}^p(\Omega)$ *coïncide avec l'espace de Lebesgue.*
C'est-à-dire $X_{1/p}^p(\Omega) = L_p(\Omega)$.

1.1.2 Espaces Des Fonctions Continues

Définition.1.5[12]

On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur Ω $(n \geq 0)$,
muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{C^m} = \sum_{k=0}^{m} \left\|f^{(k)}\right\|_C = \sum_{k=0}^{m} \max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Si n $= 0$;$C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{1.2}$$

Définition.1.6[12]

Soient $\Omega =$ [a, b] un intervalle fini et $\gamma \in \mathbb{C}\,(0 \leq \mathfrak{R}(\gamma) < 1)$.
On désigne par $C_\gamma(\Omega)$ L'espace des fonctions continues avec poids telles que :
$(x-a)^\gamma f(x) \in C(\Omega)$, et

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x-a)^\gamma f(x)\|_C\,, \quad C_0[a,b] = C[a,b]$$

Définition.1.7[12]

On note par $C_\gamma^n(\Omega)$ L'espace de Banach des fonctions $(n-1)$ fois continûment différentiables sur Ω $(Intervalle\ fini)$ et $f^{(n)}(x) \in C_\gamma(\Omega)$:

$$C_\gamma^n[a,b] = \left\{ f : \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|f^{(k)}\right\|_C + \left\|f^{(n)}\right\|_{C_\gamma} \right\}, \quad C_\gamma^0[a,b] = C_\gamma[a,b].$$

Lemme.1.1[9, 12]

L'espace $C_\gamma^n(\Omega)$ ne contient que des fonctions écrites sous la forme suivante :
soient $f \in C_\gamma^n(\Omega)$,$n \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in C\,(0 \leq \mathfrak{R}(\gamma) < 1)$;

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k \tag{1.3}$$

où $\varphi(t) = f^{(n)}(t) \in C_\gamma(\Omega)$et $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ des Constantes.
C'est-à-dire

$$f \in C_\gamma^n(\Omega) \Longrightarrow f(x) = \tfrac{1}{(n-1)!}\textstyle\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k$$

En particulier, si $\gamma = 0$ alors $C^n(\Omega)$ est l'espace des fonctions f qui peut être écrit sous la forme (1.3) où $\varphi(t) \in C(\Omega)$.

1.1.3 Espaces des fonctions absolument continues

Définition.1.8[14]

f est dite absolument continue sur Ω, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ,

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire

$$f(x) \in AC[a,b]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Théorème.1.3(Lebesgue)

La dérivée d'une fonction absolument continue donnée sur $\mathbf{\Omega}$, $f' = \varphi\ p.p$ est intégrable, on a pour tout $x \in \mathbf{\Omega}$; $\int_a^x \varphi(t)\, dt = f(x) - f(a)$

C'est-à-dire

$$f(x) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (\varphi(t) \in L(a,b)).$$

Preuve :voir [14](page 340) $\square$

Définition.1.9[12]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a,b]$ telles que :

$f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$, c'est-à-dire

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C}\text{et } \left[\left(D^{n-1} f \right)(x) \right] \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dx} \right) \right\}$$

Si $n = 1$, $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Lemme.1.2[10, 12]

L'espace $AC^n(\Omega)$ ne contient que des fonctions écrites sous la forme suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,$\forall f \in AC^n(\Omega)$ on a

$$f(x) = \left(I_{a+}^{n} \varphi \right)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

où $\varphi(t) = f^{(n)}(t) \in L(\Omega)$,$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ *des constantes* et

$$\left(I_{a+}^{n}\varphi\right)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

C'est-à-dire
$\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$f \in AC^n(\Omega) \Longrightarrow f(x) = \left(I_{a+}^{n}\varphi\right)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k$$

Définition.1.10[12]

pour $n \in \mathbb{N}^*$et $\mu \in \mathbb{R}$;
Notons par $AC_{\delta,\mu}^{n}(\Omega)$L'espace des fonctions absolument continues avec poids,défini par :

$$AC_{\delta,\mu}^{n}[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \left(\delta^{n-1}\left[x^{\mu}g(x)\right]\right) \in AC[a,b], \quad \mu \in \mathbb{R}, \delta = x\frac{d}{dx} \right\}$$

En particulier
Si $\mu = 0$ et $n = 1$; L'espace$AC_{\delta}^{1}(\Omega)$ coïncide avec $AC(\Omega)$.

Lemme.1.3[10, 12]

L'espace $AC_{\delta,\mu}^{n}[a,b]$ se consiste uniquement de fonctions écrites sous la forme suivante : pour $n \in N^*$ *et* $\mu \in R$,$\forall g \in AC_{\delta,\mu}^{n}[a,b]$:

$$g(x) = x^{\mu}\left[\tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\tfrac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)\tfrac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\left(\log\tfrac{x}{a}\right)^k\right].$$

où

$$\varphi(t) = \delta^{n-1}\left[x^{\mu}g(t)\right] \in L(\Omega)\,,\ d_k = \frac{\delta^k\left[x^{\mu}g(x)\right](a)}{k!}\ \textit{des constantes}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

C'est-à-dire

$$g \in AC_{\delta,\mu}^{n}[a,b] \Longrightarrow g(x) = x^{\mu}\left[\tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\tfrac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)\tfrac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\left(\log\tfrac{x}{a}\right)^k\right].$$

1.2 Théorèmes Fondamentaux

On considère E et F des espaces de Banach muni des normes $\|\ .\ \|_E$ et $\|\ .\ \|_F$ respectivement, $C(E,F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F muni de la norme uniforme :

$$\forall f \in C(E,F); \| f \|_{\infty} = \sup_{x\in E} \| f(x) \|_F\ .$$

Si $E = [a,b]$ et $F = \mathbb{R}$: $\forall f \in C([a,b],\mathbb{R})$;

$$\| f \|_{\infty} = \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid . \tag{1.4}$$

Théorème.1.4 (Théorème de Fubini)

Soit $f(x, y)$ une fonction sommable(intégrable) sur le produit des espaces mesurables (X, μ)et (Y, v).On a alors les assertions suivantes :

1. Pour µ-presque tous les $x \in X$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur Y et son intégrale sur Y est une fonction sommable sur X.
2. Pour v-presque tous les $y \in Y$, la fonction $f(x, y)$ est sommable sur X et son intégrale sur X est une fonction sommable sur Y .
3. On a

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times v)(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)dv(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) dv(y).$$

Preuve :

Pour la démonstration voir [13]. □

1.2.1 Théorème d'Arzelà-Ascoli

Définition.1.11(Equicontinue)

Soit M un sous-ensemble de $C(E, F)$.
• On dit que M est équicontinue en $u \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tels que pour tout $f \in M$ et tout $v \in E$:

$$\| u - v \|_E < \eta \Longrightarrow \| f(u) - f(v) \|_F < \varepsilon.$$

• On dit que M est équicontinue sur E, si M est équicontinue en tout $u \in E$.
Cas particulier,un sous ensemble M de $C([a, b], R)$ est équicontinue si :
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in M$ et tout $x, y \in [a, b]$
si $|x - y| < \delta$ on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Définition.1.12 (Uniformément Bornée)

Un sous ensemble M de $C([a, b])$ muni de la norme usuelle (1.4) est uniformément bornée s'il existe une constante $C > 0$ tel que :
$\| f(x) \|_\infty \leq C$ pour tout $f \in M$.

Définition.1.13 (Parties relativement compacts)

On dit que A est une partie relativement compact d'un espace métrique X si son adhérence est une partie compacte de X .

Théorème.1.5 (Arzelà-Ascoli)

Soit M un sous ensemble de $C([a, b], R)$ muni de la norme (1.4) ; alors, M est relativement compacte dans $C([a, b], R)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :
• L'ensemble M est uniformément borné.
• M est équicontinue.

Preuve : voir [14] □

1.2.2 Théorème du point fixe de Banach

Définition.1.14 (Application Lipschitzienne)

Soient (X, d) un espace métrique et T une application de X dans X.

On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive k telle que :

$$\forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

- Si $k < 1$, T est appelée contraction.

Proposition.1.2 [14]

Toute application lipschitzienne est continue.

Théorème.1.6 (Théorème du point fixe de Banach)[19]

Ce théorème est dit aussi le théorème de l'application contractante, c'est la base de la théorie du point fixe.

Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : M \subseteq E \to M$ une application contractante.

Alors T admet un point fixe unique $(Tx_0 = x_0 \in X)$,

et la suite $\{T^n y\}_n$converge vers le point fixe x_0 pour tout $y \in X$,

Autrement dit : $d(T^n y, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{\forall y\in X} 0.$

Preuve :

Existence :

Considérons la suite $(x_n)_{n\in N}$ définie par

$$\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}) & n \geq 1 \\ x_0 \in X \end{cases}$$

On démontre que (x_n)est une suite de Cauchy dans E, Pour m $<$ n, on a :

$$d(x_n, x_m) = d(x_{m+1}, x_m) + d(x_{m+2}, x_{m+1}) + ... + d(x_n, x_{n-1})$$

Puisque T est une contraction, alors :

$$d(x_{p+1}, x_p) = d(Tx_p, Tx_{p-1}) \leq kd(x_{p+1}, x_p)\,, pour\ p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité m fois, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \left(k^m + k^{m+1} + \ldots\ldots k^{n-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^m \left(1 + k + \ldots\ldots + k^{n-m-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow[m\to+\infty]{0<k<1} 0. \end{aligned}$$

On déduit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E.

Puisque T est continue, alors :

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} T\left(x_{n-1}\right) = T\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n-1}\right) = Tx$$

Donc, x est un point fixe de T.

Unicité :

Supposons que T x = x et T y = y. Alors :

$$d\left(x,y\right) = d\left(Tx,Ty\right) \leq kd\left(x,y\right)$$

puisque k < 1, on déduit que $d\left(x,y\right)=0$ c'est-à-dire x = y, d'où l'unicité du point fixe de T. □

Théorème.1.7 (Généralisation du point fixe de Banach)[19]

Le théorème du point fixe de Banach se généralise de la manière suivante :

Soit T une application sur (E,d) un espace métrique complet telle que T^n $(T^{n-1} \bigcirc T = T^n)$ soit une contraction sur E pour un entier positif n.

Alors T admet un point fixe unique.

Preuve :

Le théorème du point fixe de Banach implique qu'il existe un point fixe pour T^n . Appelons x_0 ce point fixe.

On a

$$T^n\left(x_0\right) = x_0$$

appliquant T dans les deux membres , on trouve

$$T\left(T^n\left(x_0\right)\right) = T\left(x_0\right)$$

$$T^n\left(T\left(x_0\right)\right) = T\left(x_0\right)$$

donc $T\left(x_0\right)$ est aussi un point fixe pour T^n , mais le théorème du point fixe de Banach assuré l'unicité du point fixe;

alors

$$T\left(x_0\right) = x_0$$

ceci implique que T admet x_0 un point fixe .

L'unicité est claire puisque un point fixe de T est également un point fixe pour T^n . □

1.2.3 Théorème du point fixe de Brouwer

Définition.1.15 (Parties ouvertes)

Soit E un espace métrique. Une partie A de E est appelée ouverte si, toutes les fois qu'elle contient un point de E, elle contient au moins une boule ouverte (de rayon > 0)ayant pour centre ce point. i.e : $\forall x \in A, \exists r > 0 : B_0(x,r) \subset A$.

Définition.1.16 (Parties fermées)

Un sous ensemble M de E est dit fermé si son complémentaire $M^c = \{x \in E\ , x \notin M\}$ est un ouvert de E.

Définition.1.17 (Parties convexes)

Soit M une partie de E. On dit que M est convexe dans E si, pour tout $x, y \in M$ et tout $t \in [0,1]$, on a$\{(1-t)x + ty\} \in M$.

Définition.1.18 (Opérateur compact)

Un opérateur compact est une application continue entre deux espaces vectoriels topologiques X et Y envoyant les parties bornées de X sur les parties relativement compactes de Y,

C'est à dire, l'ensemble $T(B_X)$ est relativement compact où T un opérateur compact et B_X une parties bornée de X .

Définition.1.19 [2, 19]

On dit qu'un espace topologique X à la propriété du point fixe si toute application continue $T : X \to X$ possède un point fixe.

Théorème.1.8 (Théorème du point fixe de Brouwer)

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ une partie convexe et compact, soit $f : M \longrightarrow M$ une fonction continue,

alors f possède un point fixe.

En particulier

Soit $B_p\,(0,p)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. La boule B_p à la propriété du point fixe pour tout $p \in N^*$.

Preuve : voir [19] (page 51) □

1.2.4 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie.

Théorème.1.9 (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit $(E; d)$ un espace métrique complet, soit M une partie convexe et fermée de E, et soit $T : M \longrightarrow M$ un opérateur compact,

Alors ,T possède au moins un point fixe.

Autrement dit

L'ensemble $Tx : x \in M$ est relativement compact dans E,donc T possède au moins un point fixe .

Preuve : voir[19] (page 56) □

Théorème.1.10 (Théorème du point fixe de Schaefer)[19]

Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu.

Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{x \in X; x = \lambda Ax \qquad avec\, 0 < \lambda < 1\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Chapitre 2

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous introduisons le concept d'intégration et de dérivation fractionnaire et leurs propriétés.

2.1 Fonctions Spéciales

La compréhension des définitions et l'utilisation du calcul fractionnaire seront facilitées en donnant quelques définitions mathématiques nécessaires de quelques fonctions utiles telles que les fonctions Gamma, Bêta d'Euler et La fonction Mittag-Leffler puis on introduit quelques propriétés liées à ces fonctions. Pour plus de détails voir [8, 17, 18].

2.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières.

Définition.2.1

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\mathit{\Gamma}\,(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}\boldsymbol{e}^{-x}dx\ ; z \in \mathbb{C}\ et\ \Re(z) > 0, \tag{2.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty, \Gamma(z)$ est une fonction décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Remarque.2.1

L'intégrale (2.1) converge absolument sur le demi-plan réel où $\Re(z)$ est strictement positive (Voir [8]).

On peut aussi définir la fonction gamma sous la forme d'une limite (Voir[18]), c'est une généralisation pour $z \in \mathbb{C}$ sauf pour les nombres $z = -n; n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (z \neq -n; n \in \mathbb{N})\,.$$

Exemple.2.1

Pour calculer la valeur $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ il faut définir l'intégrale de Gauss ,
Une intégrale de Gauss est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur $\mathbb{R}$ .i.e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

et comme $\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ est une fonction paire $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.
Maintenant,Calculons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{t}{2}} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\end{aligned}$$

posons $x = \sqrt{t}$ on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad ,(2xdx = dt) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ (d'après l'intégrale de Gauss)} \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Propriétés.2.1

Pour $\Re(z) > 0$ et $n \in N$; On a :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)\Gamma(z) = \Gamma(z)\prod\limits_{0\le j<n}(z+j)$.
3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{\pi}$.

Démonstration :

1. En effet, par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \left[-t^z e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

En déduire que :$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(k+1) = k!$

2. D'après la propriété 1 ; On a

$$\begin{aligned}\Gamma(z+n) &= \Gamma((z+n-1)+1) \\ &= (z+n-1)\Gamma(z+n-1) \\ &= z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z).\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\times 5\times 3\times 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\times 3\times 2}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots\times 4\times 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^n\left[2^n(n)(n-1)(n-2)...2.1\right]}\times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

De même manière, on trouve la relation suivante

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\dots(2n-1)}\sqrt{\pi}.$$

$\square$

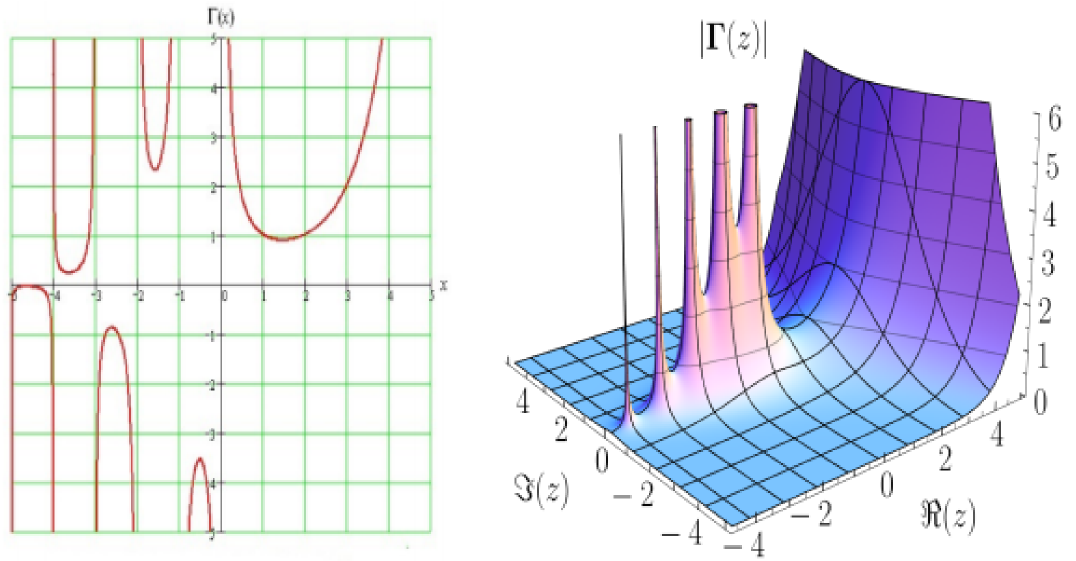

Figure 1.1 – La fonction gamma

2.1.2 La fonction Bêta

La fonction bêta , également appelée intégrale d'Euler du premier type, est une fonction spéciale étroitement liée à la fonction gamma.

Définition.2.2

La fonction Bêta est définie par l' intégrale suivante

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad (\Re(z)>0, \Re(w)>0)$$

Propriétés.2.2

Pour $\Re(z) > 0, \Re(w) > 0$;

1. La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta :

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}.$$

2. En déduire que $B(z,\omega) = B(\omega, z)$.
3. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$.

Pour la démonstration voir [8, 18].

2.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler, notée $E_{\alpha,\beta}$ qui tient son nom du mathématicien suédois Gosta Mittag-Leffler (1903), est une fonction spéciale, c'est-à-dire qui ne peut être calculée à partir d'équations rationnelles, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres complexes α et β. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle, et elle joue un rôle majeur dans le calcul fractionnaire.

Définition.2.3

Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{2.2}$$

Remarque.2.2

La série qui figure dans (2.2) est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta > 0$, ce qui rend la fonction $E_{\alpha,\beta}(z)$ bien définie.

Exemple.2.2

1. Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

$$E_{0,1}(z) = \frac{1}{1-z}, |z| < 1.$$

2. Pour $\alpha = \beta = 1$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

3. Pour $\alpha = 1$ et $\beta = p$ $(p \in \mathbb{N})$

$$E_{1,p}(z) = \frac{1}{z^{p-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{p-2} \frac{z^k}{k!} \right).$$

4. Pour $\alpha = \beta = 2$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z}.$$

5. Pour $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

$$E_{2,1}\left(z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

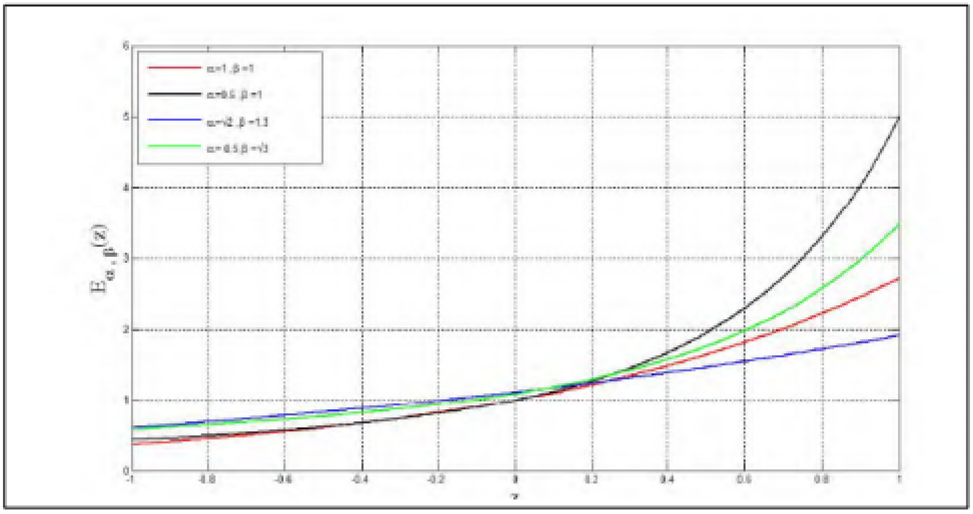

FIGURE 1.2 – La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

2.2 Intégrales Et Dérivées Fractionnaires

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires : l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, ainsi que la dérivée au sens de Caputo et quelques propriétés.

2.2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

Lemme.2.1[14]

Le résultat suivant peut-être une généralisation du théorème fondamental de l'analyse et peut s'avérer utile dans le calcul de certaines intégral réel.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$, et soient a et b deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si F est l'intégrale paramétrique généralisée définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt$$

alors F est dérivable et

$$F'(x) = b'(x) f(x, b(x)) - a'(x) f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt.$$

Lemme.2.2

Supposons que f est une fonction continue définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$,

On a l'opérateur intégrale définie par

$$\left(V^n f\right)(x) := \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f\left(t_n\right) dt_n$$

alors

$$\left(V^{n} f\right)(x)=\frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f(t)\, d t. \tag{2.3}$$

En particulier : si $n=0$

$$\left(V^{0} f\right)(x)=f(x)$$

si $n=1$

$$\left(V^{1} f\right)(x)=\int_{a}^{x} f(t)\, d t.$$

Preuve

pour $n=2$

$$\left(V^{2} f\right)(x)=\int_{a}^{x} \int_{a}^{t} f(s)\, d s\, d t.$$

on pose $g(t):=\int_{a}^{t} f(s)\, d s$, d'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned} V^{2} f(x) &=[t g(t)]_{a}^{x}-\int_{a}^{x} t f(t) d t \\ &=x g(x)-a g(a)-\int_{a}^{x} t f(t) d t \qquad (g(a)=0) \\ &=x \int_{a}^{x} f(t) d t-\int_{a}^{x} t f(t) d t \\ &=\int_{a}^{x}(x-t) f(t) d t. \end{aligned}$$

Donc, pour n^{ime} itération, on obtient :

$$\left(V^{n} f\right)(x)=\frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f(t)\, d t.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. □

Définition.2.4[12, 18]

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I_{a+}^{\alpha} f$ et $I_{b-}^{\alpha} f$ (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re(\alpha)>0)$ définie par :

soit Ω un intevalle fini de $\mathbb{R}$,Soit $f \in L_{1}[a, b]$:

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(t) d t}{(x-t)^{1-\alpha}}\ (x>a ; \Re(\alpha)>0) \tag{2.4}$$

et

$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{f(t) d t}{(t-x)^{1-\alpha}}\ (x<b ; \Re(\alpha)>0). \tag{2.5}$$

En particulier : Si $\alpha=n (n \in \mathbb{N})$les formes (2.4) et (2.5) coïncide avec l'opérateur intégral (2.3),

$$\begin{aligned} \left(I_{a+}^{n} f\right)(x) &=\int_{a}^{x} d t_{1} \int_{a}^{t_{1}} d t_{2} \cdots \int_{a}^{t_{n-1}} f\left(t_{n}\right) d t_{n} \\ &=\frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x}(x-t)^{n-1} f(t) d t \quad(n>0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(I_{b-}^{n} f\right)(x) &= \int_{x}^{b} dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{b} f\left(t_n\right) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x}^{b} (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (n>0).\end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit on va utiliser l'intégrale à gauche et on le note tout simplement I^{α}.

Théorème.2.1

Soient $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha)>0$ et $0 \leqq \Re(\gamma)<1$, $1 \leq p \leq +\infty$:

1. L'opérateur d'intégration fractionnaire I^{α} est linéaire et borné de l'espace $L_p[a,b]$ dans lui même, i.e :

$$\left\|I_{a+}^{\alpha} f\right\|_{p} \leq \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)|\Gamma(\alpha)|}\|f\|_{p}, \quad \forall f \in L_{p}[a, b].$$

2. L'opérateur d'intégration fractionnaire I^{α} est borné dans l'espace $C_{\gamma}[a,b]$, i.e :

$$\left\|I_{a+}^{\alpha} g\right\|_{C_{\gamma}} \leq (b-a)^{\Re(\alpha)} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\|g\|_{C_{\gamma}}, \quad \forall g \in C_{\gamma}[a, b].$$

Preuve :

Pour la démonstration voir [11] (pages (48,49,50,51,163)). □

Proposition 2.1[12]

Si $f \in L_1([a,b])$ et $\Re(\alpha)>0$, alors $I^{\alpha} f$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a $I^{\alpha} f \in L_1([a,b])$.

Propriétés.2.3

1. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est linéaire .
2. Soient $f \in L_1([a,b])$, $\Re(\alpha)>0$ et $\Re(\beta)>0$:
   $I^{a}\left[I^{\beta} f(t)\right]=I^{a+\beta} f(t)\ p.p\ sur\ [a,b]$. (Propriété de semi groupe).
   si $\Re(\alpha+\beta)>1$; La propriété est vrai pour tout l'intervalle [a,b].
3. $\frac{d}{dt}\left(I_{a}^{\alpha} f\right)(t)=\left(I_{a}^{\alpha-1} f\right)(t), \quad \Re(\alpha)>1.$
4. Pour $f \in L_1([a,b])$; $\lim_{\alpha \longrightarrow 0^{+}}\left(I_{a}^{\alpha} f\right)(t)=f(t), \quad p.p\ sur\ [a,b].$

Démonstration

1. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est linéaire d'après la linéarité de l'intégrale classique.
2. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\alpha}\left(\mathrm{I}^{\beta} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left(\mathrm{I}^{\beta} f(\tau)\right) \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1} \int_{a}^{\tau}(\tau-\xi)^{\beta-1} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\mathrm{I}^{\alpha}\left(\mathrm{I}^{\beta} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi) \mathrm{d}\xi \int_{\xi}^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}\, \mathrm{d}\tau$$

En faisant le changement de variable $\tau=\xi+z(t-\xi)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^{\alpha}\left(\mathrm{I}^{\beta} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi) \mathrm{d}\xi \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}(t-\xi)^{\alpha-1} z^{\beta-1}(t-\xi)^{\beta} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\xi) \mathrm{d}\xi \int_0^1 (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}(1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi) \mathrm{d}\xi \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\, \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\, \mathrm{d}z = \mathrm{B}(\beta,\alpha)=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^{\alpha}\left(\mathrm{I}^{\beta} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= \mathrm{I}^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}$$

3. On a d'après le lemme (2.1) ,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(I^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-x)^{\alpha-1} f(x)\right] dx \\
&= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-2} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-x)^{(\alpha-1)-1} f(x) dx \qquad (\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)) \\
&= \left(I_a^{\alpha-1} f\right)(t).
\end{aligned}$$

4. Voir [11](pages(51 et 52)). □

Application 1

Soients les fonctions $f(x)=c$ et $g(x)=(x-a)^{\beta}$; Calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour chaque fonction :

On a

$$\begin{aligned}
I^{\alpha} f(x) &= \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{1}{\alpha}(x-t)^{\alpha}\right]_a^x \\
I^{\alpha} C(x) &= \frac{c(x-a)}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (c=Constante).
\end{aligned}$$

et on a pour $\Re(\beta) > -1$;

$$\begin{aligned} I^a g(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} g(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta} dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t = a + (x-a)s$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I^\alpha g(x) &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\alpha+1)} \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$I^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\beta+\alpha}.$$

2.2.2 La dérivation au sens de Riemann-Liouville

Définition.2.5[12]

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville $D^\alpha_{a+} f$ et $D^\alpha_{b-} f$ (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(n-1 \leq \Re(\alpha) < n)$ définie par :

soit $f \in L_1([a,b])$, $n = [\Re(\alpha)] + 1$:

$$\begin{aligned} \left(D^\alpha_{a+} f\right)(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a+} f\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (x > a) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(D^\alpha_{b-} f\right)(x) &:= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{b-} f\right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (x < b), \end{aligned}$$

Où $[\Re(\alpha)]$: La partie entière de $\Re(\alpha)$.

En particulier ; si $\alpha = n$, l'opérateur D^α donne le même résultat que la dérivée usuelle d'ordre entier, tel que

$$\left(D^n_{a+} f\right)(x) = f^{(n)}(x) \quad \left[\left(D^0_{a+} f\right)(x) = \left(D^0_{b-} f\right)(x) = f(x)\right]$$

et

$$\left(D^n_{b-} f\right)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $\Re(\alpha) = \alpha$ et $n = [\alpha] + 1$ où $[\alpha]$ La partie entière de α.

Remarque.2.3[12]

Pour $\Re(\alpha) \geq 0$,On peut écrire :

$$\mathcal{D}^\alpha_{a+} f = I^{-\alpha}_{a+} f = \left(I^\alpha_{a+}\right)^{-1} f.$$

Application 2

Soient les fonctions $f(x) = c$ et $g(x) = (x-a)^{\beta}$,Calculons la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour chaque fonction :

On a pour $\Re(\beta) > \Re(\alpha) - 1 > 0$

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} &= D^n I^{n-\alpha}(x-a)^{\beta} \\
&= D^n \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(x-\alpha)^{\beta+n-\alpha)} \right) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)\,(\beta+n-\alpha-1)\,\cdots\,(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

et pour f , si $\Re(\alpha) > 0$:

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a+}f(x) &= D^n I^{n-\alpha} C(x) \\
&= D^n \left(\frac{C(x-\alpha)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \right) \\
&= \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1)\,\cdots\,(-\alpha+1)}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}(x-\alpha)^{-\alpha} \\
&= \frac{C}{\Gamma(-\alpha+1)}(x-\alpha)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Proposition.2.2

1. Soient $\Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$,Si $f \in AC^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire $D^{\alpha}f$ existe presque partout sur $[a,b]$, de plus elle est représentée sous la forme :

$$D^{\alpha}_{a+}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Cas particulier pour : $0 < \Re(\alpha) < 1$, $f \in AC^1([a,b])$;

$$D^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau.$$

2. Soient $\Re(\alpha) > 0$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$,on a l'équivalence suivante

$$D^{\alpha}_{a+}f(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t-a)^{\alpha-j}, \forall c_1, c_2, \ldots .c_n \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si $0 < \Re(\alpha) < 1$,alors ;

$$D^{\alpha}_{a+}f(t) = 0 \Longleftrightarrow f(t) = c(t-a)^{\alpha-1}, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Preuve :

1. Pour $f \in AC^n([a,b])$, On a d'après le lemme.3.1 la fonction f écrite sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Appliquons l'opérateur D^{α}_{a+} et d'après la linéarité de l'opérateur , on trouve

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x D^{\alpha}_{a+}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^k$$

et on a

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}(x-t)^{n-1} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-t)^{n-1-\alpha} \\ D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{k} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} \end{cases}$$

Donc d'où le résultat .

2. Afin de prouver la propriété, le premier et deuxième implication doivent être prouvés :
   a) $(\Leftarrow)$ On a d'après l'application 2

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} &= \frac{\Gamma(\alpha-j)}{\Gamma(\alpha-j-\alpha+1)}(x-a)^{-j} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-j)}{\Gamma(-j+1)}(x-a)^{-j} \underset{\Gamma(-n)\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ . \end{aligned}$$

   b) $(\Rightarrow)$ Voir [12] page 72. □

Propriété.2.4

Dans les deux premières propriétés nous présentons la composition entre l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

1. Si $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$; pour $f \in L_p([a,b])$

$$\left(D^{\beta}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = I^{\alpha-\beta}_{a+}f(x) \quad p.p\ sur\ \ [a,b] \,.$$

Si $f \in C_{\gamma}([a,b])$ et $0 < \Re(\gamma) < 1$;cette relation est vrai pour tout $[a,b]$.
En particulier : si $\alpha = \beta$,

$$\left(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = f(x) \quad p.p\ sur\ \ [a,b] \,.$$

si $\beta = k$ et $\Re(\alpha) > k$;

$$\left(D^{k}I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = I^{\alpha-k}_{a+}f(x) \quad p.p\ sur\ \ [a,b] \,.$$

2. Soit $\Re(\alpha) > 0$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$:
   a) Si $1 \leqq p \leqq \infty$ et $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_p)$,

$$\left(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = f(x)$$

   où

$$I^{\alpha}_{a+}(L_p) := \left\{f : f = I^{\alpha}_{a+}\varphi, \quad \varphi \in L_p(a,b)\right\}.$$

   b) Si $f \in L_1([a,b])$ et $\left(I^{n-\alpha}_{a+}f\right) \in AC^n([a,b])$;

$$\left(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\left(I^{n-\alpha}_{a+}f\right)^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}. \tag{2.6}$$

   Presque partout sur $[a,b]$.
   Si $f \in C_{\gamma}([a,b])$, $\left(I^{n-\alpha}_{a+}f\right) \in C^n_{\gamma}([a,b])$ et $0 < \Re(\gamma) < 1$; la relation (2.6) vrai pour tout $[a,b]$.

Particulièrement , si $\alpha = n$;

$$\left(I^n_{a+}D^n_{a+}f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

En général , les opérateurs de l'intégration et de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville ne commutent pas .

3. Soient $\Re(\alpha) > 0$ et $\Re(\beta) > 0$ Tel que $n = [\Re(\alpha)]+1$ et $m = [\Re(\beta)]+1$ et $\Re(\alpha)+\Re(\beta) < n$, soient $f \in L_1([a,b])$ et $(I^{n-\alpha}f) \in AC^m([a,b])$:

$$\left(D^\alpha_{a+}D^\beta_{a+}f\right)(x) = \left(D^{\alpha+\beta}_{a+}f\right)(x) - \sum_{j=1}^{m}\left(D^{\beta-j}_{a+}f\right)(a)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}.$$

En particulier,Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\Re(\alpha) \geq 0$, si $D^\beta_{a+}f$ et $D^{\beta+k}_{a+}f$ existe ,alors

$$\left(D^k D^\beta_{a+}f\right)(x) = \left(D^{\beta+k}_{a+}f\right)(x).$$

4. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est linéaire .

Preuve :

1. Si $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$; pour $f \in Lp([a,b])$, On a

$$\begin{aligned}\left(D^\beta I^\alpha f\right)(x) &= \left(D^n I^{n-\beta}I^\alpha f\right)(x)\\ &= \left(D^n I^{n-\beta+\alpha}f\right)(x)\\ &= D^{\beta-\alpha}f(x)\\ &= I^{\alpha-\beta}f(x).\end{aligned}$$

2. Pour $\Re(\alpha) > 0$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$:
   a) On a

$$\begin{aligned}\left(I^\alpha_{a+}D^\alpha_{a+}f\right)(x) &= \left(I^\alpha_{a+}D^n I^{n-\alpha}_{a+}f\right)(x)\\ &= \left(I^\alpha_{a+}D^n I^{n-\alpha}_{a+}I^\alpha_{a+}\varphi\right)(x)\\ &= \left(I^\alpha_{a+}D^n I^n_{a+}\varphi\right)(x)\\ &= I^\alpha_{a+}\varphi(x) = f(x).\end{aligned}$$

   b) Voir [11] page 45.

3. Pour $\Re(\alpha+\beta) < n$ et on a par définition et par la propriété de semi groupe

$$\left(D^\alpha_{a+}D^\beta_{a+}f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(I^{n-\alpha}_{a+}D^\beta_{a+}f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(I^{n-\alpha-\beta}_{a+}\left[I^\beta_{a+}D^\beta_{a+}f\right]\right)(x)$$

et comme $f \in L_1([a,b])$ et $\left(I^{n-\alpha}_{a+}f\right) \in AC^n([a,b])$ on utilise la formule (2.6)

$$\left(I^\beta_{a+}D^\beta_{a+}f\right)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{\left(I^{m-\beta}_{a+}f\right)^{(m-j)}(a+)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}.$$

Elle est clair que $\left(I_{a+}^{m-\beta}f\right)^{(m-j)} = I_{a+}^{j-\beta}f = D_{a+}^{\beta-j}f$,

$$\left(I_{a+}^{\beta}D_{a+}^{\beta}f\right)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m}\frac{\left(D_{a+}^{\beta-j}f\right)(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}.$$

D'après la linéarité de l'opérateur de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on trouve ;

$$\begin{aligned}
\left(D_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\beta}f\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{a+}^{n-\alpha-\beta}\left[f - \sum_{j=1}^{m}\frac{\left(D_{a+}^{\beta-j}f\right)(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}\right]\right)(x)\\
&= \left(I_{a+}^{-\alpha-\beta}\left[f - \sum_{j=1}^{m}\frac{\left(D_{a+}^{\beta-j}f\right)(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}\right]\right)(x)\\
&= \left(I_{a+}^{-\alpha-\beta}f - I_{a+}^{-\alpha-\beta}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(D_{a+}^{\beta-j}f\right)(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}\right)\right)(x)\\
&= \left(I_{a+}^{-\alpha-\beta}f - \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(D_{a+}^{\beta-j}f\right)(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}I_{a+}^{-\alpha-\beta}(x-a)^{\beta-j}\right)\right)(x)
\end{aligned}$$

et on a d'après l'application 1

$$I_{a+}^{-\alpha-\beta}(x-a)^{\beta-J} = \frac{\Gamma(\beta-J+1)}{\Gamma(1-\alpha-J)}(x-a)^{-\alpha-j}.$$

et comme $I_{a+}^{-\alpha-\beta}f = D_{a+}^{\alpha+\beta}f$, donc d'où le résultat .

4. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est linéaire d'après la linéarité de l'opérateur I_{a+}^{α} et de la dérivée classique . $\square$

2.2.3 La dérivation au sens de Caputo

Définition.2.6[12]

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f$ et ${}^{C}D_{b-}^{\alpha}f$ (resp à gauche et à droite) d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}\,(\Re(\alpha) > 0)$ définie par :

Pour $f \in C^{n}([a,b])$

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^{k}\right]\right)(x)$$

et

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}f\right)(x) := \left(D_{b-}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}\right]\right)(x)$$

avec

$$\begin{cases} n = [\Re(\alpha)] + 1 & \alpha \notin \mathbb{N} \\ n = \alpha & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Théorème.2.2

Pour $\Re(\alpha) > 0$, si $f \in AC^n([a,b])$,Alors la dérivée fractionnaire de caputo est existe Presque partout sur l'intervalle $[a,b]$,tel que

1. si $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := \left(I_{a+}^{n-\alpha} D^n f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}.$$

et

$$\left({}^C D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := (-1)^n \left(I_{b-}^{n-\alpha} D^n f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}.$$

respectivement, où $D = d/dx$ et $n = [\Re(\alpha)] + 1$.

2. si $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = f^{(n)}(x)$$

et

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = (-1)^{(n)} f^{(n)}(x).$$

où $n = \alpha$.

Preuve :

On prouve l'équivalence entre la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo et le théorème.2.2 :

On a pour $\Re(\alpha) > 0$, et $f \in AC^n([a,b])$:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i\right]\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-\alpha+1)}(x-a)^{i-\alpha}$$

si $\alpha \in \mathbb{N}$; $\alpha = n > k$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i-n+1)}(x-a)^{i-n} = 0.$$

donc

$$\left(D^n\left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i\right]\right)(x) = \left(D^n f\right)(x) = f^{(n)}(x).$$

si $\alpha \notin \mathbb{N}$, Posons $g(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i$ on a

$$\begin{aligned}
\left({}^C D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(D_{a+}^{\alpha} g\right)(x) \\
&= \left(D^n I^{n-\alpha} g\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} D^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t)dt.
\end{aligned}$$

En intégrant par partie n fois on trouve

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D^{n}\left(\left[-\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}g(t)\right]_{a}^{x}+\int_{\alpha}^{x}\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}g'(t)dt\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D^{n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left[-\frac{(x-t)^{n+k-\alpha}}{n+k-\alpha}g^{(k)}(t)\right]_{a}^{x}+\int_{a}^{x}\frac{(x-t)^{2n-1-\alpha}g^{(n)}(t)\,dt}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)...(2n-\alpha-1)}\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D^{n}\left(\int_{a}^{x}\frac{(x-t)^{2n-1-\alpha}}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)...(2n-\alpha-1)}g^{(n)}(t)\,dt\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{D^{n}\left[(x-t)^{2n-1-\alpha}\right]}{(n-\alpha)(n-\alpha+1)...(2n-\alpha-1)}g^{(n)}(t)\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{n-1-\alpha}g^{(n)}(t)\,dt\\
&= \left(I_{a+}^{n-\alpha}D^{n}f\right)(x).
\end{aligned}$$

d'où le résultat . $\square$

Lemme.2.3[12]

Pour $\Re(\alpha)>0$, si $f\in C^{n}([a,b])$, alors ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f$ et ${}^{C}D_{b-}^{\alpha}f$ sont existent et continues sur $[a,b]$, de plus
pour $\alpha\notin\mathbb{N}$

$$\left|\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)\right|\leqq\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{C}}{|\Gamma(n-\alpha)|[n-\mathfrak{R}(\alpha)+1]}(x-a)^{n-\Re(\alpha)}$$

et

$$\left|\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}f\right)(x)\right|\leqq\frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{C}}{|\Gamma(n-\alpha)|[n-\Re(\alpha)+1]}(b-x)^{n-\Re(\alpha)}$$

avec ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f(a)={}^{C}D_{b-}^{\alpha}f(b)=0.$

Proposition.2.3

Pour $\Re(\alpha)\geq 0$, si $f\in C^{n}([a,b])$ alors l'opérateur de la dérivée de caputo est borné :

$$\left\|{}^{C}D_{a+}^{\alpha}f\right\|_{C}\leqq k_{\alpha}\|f\|_{C^{n}}$$

et

$$\left\|{}^{C}D_{b-}^{\alpha}f\right\|_{C}\leqq k_{\alpha}\|f\|_{C^{n}}$$

où

$$k_{\alpha}=\begin{cases}\frac{(b-a)^{n-\Re(\alpha)}}{|\Gamma(n-\alpha)|[n-\Re(\alpha)+1]} & \alpha\notin\mathbb{N}\\ 1 & \alpha\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

avec ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f(a)={}^{C}D_{b-}^{\alpha}f(b)=0$, pour $\alpha\notin\mathbb{N}$.

Preuve :voir [12] (page 94). $\square$

Application 3

Soient les fonctions $f(x)=c$ et $g(x)=(x-a)^{\beta}$,Calculons la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville pour chaque fonction :
on a pour $\Re(\beta)\geq n>0$;

$$\begin{aligned}
\left({}^C D_{a+}^{\alpha} g\right)(x) &= {}^C D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} \\
&= I^{n-\alpha} D^n (x-a)^{\beta} \\
&= I^{n-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{T(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I^{n-\alpha}(x-a)^{\beta-n} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} = \left(D_{a+}^{\alpha} g\right)(x).
\end{aligned}$$

Si $\beta = k < n$

$$ {}^C D_{a+}^{\alpha}(x-a)^k = 0.$$

et elle est clair que $\left({}^C D_{a+}^{\alpha} C\right)(x) = \left(I^{n-\alpha} D^n C\right)(x) = 0.$

Propriété.2.5

Dans les deux premières propriétés nous présentons la composition entre l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo :

1. Soient $\Re(\alpha) > 0$ et $f \in C([a,b])$:
   a) Si $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors
   $$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \text{ et } \left({}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = f(x).$$
   b) Si $\Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{Im}(\alpha) \neq 0$, alors
   $$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \frac{\left(I_{a+}^{\alpha+1-n} f\right)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}$$
   et
   $${}^C D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f(x) = f(x) - \frac{\left(I_{b-}^{\alpha+1-n} f\right)(b)}{\Gamma(n-\alpha)}(b-x)^{n-\alpha}.$$
2. Si $f \in C^n([a,b])$, alors
   $$\left(I_{a+}^{\alpha}\, {}^C D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
   et
   $$\left(I_{b-}^{\alpha}\, {}^C D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k.$$
3. La dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire .

Preuve :

1. Pour $\Re(\alpha) > 0$ et $f \in C([a,b])$:
   a) on a
   $$\begin{aligned}
   \left({}^C D^{\alpha} I^{\alpha} f\right)(x) &= D^{\alpha}\left[I^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(I^{\alpha} f\right)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \\
   &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(I^{\alpha} f\right)^{k}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.
   \end{aligned}$$

si $\alpha = n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I^\alpha f)^k (a)}{\Gamma(k-n+1)}(x-a)^{k-n} \underset{\Gamma(-i)\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\left({}^C D^\alpha I^\alpha f\right)(x) = f(x).$$

Si $\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ on a D'après le lemme.2.3

$$\left|\left(I_{a+}^{\alpha-k} f\right)(x)\right| \leqq \frac{\|f\|_C}{|\Gamma(k-\alpha)|[k-\Re(\alpha)+1]}(x-a)^{\Re(\alpha)-k}$$

pour $x = a$;

$$\left(I_{a+}^{\alpha-k} f\right)(a) = 0$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I^\alpha f)^k (a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} = 0.$$

b) On a $\alpha = m + i\theta$ avec $\theta \neq 0$ et $n = m + 1$:
D'après le lemme.2.3

$$\left|\left(I_{a+}^{m+i\theta-k} D^n y\right)(x)\right| \leqq \frac{\|y\|_C}{|\Gamma(m+i\theta-k)|(m-k)}(x-a)^{m-k}$$

pour $x = a$;

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)^{(k)}(a+) = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-2).$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I^\alpha f)^k (a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} = \frac{(I^\alpha f)^{n-1}(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-1-\alpha}$$

donc

$$\left({}^C D^\alpha I^\alpha f\right)(x) = f(x) - \frac{(I^{\alpha-n+1} f)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-1-\alpha}.$$

2. Si $f \in C^n([a,b])$, D'après la proposition.2.3, on a pour $\alpha \notin \mathbb{N}$:

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\, {}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) = \left(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} y\right)(x)$$

et

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\, {}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) = (-1)^n \left(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{n-\alpha} D^n y\right)(x) = \left(I_{b-}^{n} D_{b-}^{n} y\right)(x)$$

et on a

$$\left(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Si $\alpha = n$;

$$\left(I_{a+}^{n}\, {}^C D_{a+}^{n} y\right)(x) = \left(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} y\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

3. La dérivée fractionnaire de Caputo est linéaire d'après la linéarité de la dérivée classique et de l'opérateur I_{a+}^{α} . $\square$

Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

1. L'avantage de la dérivée fractionnaire de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme que celles des équations différentielles d'ordre entier.
2. En plus la dérivée fractionnaire de Caputo d'un constante est nul .

Chapitre 3

Études De Certains Problèmes Fractionnaires

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions du quelques problèmes de Cauchy.

Une équation différentielle ordinaire d'ordre fractionnaire est une équation qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F\left(x, y(x), \mathcal{D}_{a_1}^{\alpha_1}\omega_1(x)y(x), \mathcal{D}_{a_2}^{\alpha_2}\omega_2(x)y(x), \ldots, \mathcal{D}_{a_n}^{\alpha_n}\omega_n(x)y(x)\right) = g(x).$$

où $\mathcal{D}_{a_i}^{\alpha_i}$ sont les dérivées fractionnaires au n'importe quel sens par exemple au sens de (Caputo,Riemann-Liouville,Grünwald–Letnikov,...etc),

F , $\omega_i(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions connues , $y(x)$ une fonction inconnue est la solution de l'équation différentielle fractionnaire (EDF).

3.1 Problème De Cauchy Pour Des Équations Différentielles D'ordre Fractionnaire

Dans cette section nous considérons la question de l'existence et de l'unicité de solutions des problèmes de type Cauchy généralisées, pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel dans les espaces des fonctions sommable et des fonctions continues.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x), \cdots, \left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha_l}y\right)(x)\right] & \Re(\alpha) > 0 \\ b_k = \begin{cases} \left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+) & ; \mathscr{D}_{a+}^{\alpha} = D_{a+}^{\alpha}, (k = 1, \cdots, n) \\ y^{(k)}(a+) & ; \mathscr{D}_{a+}^{\alpha} = {}^{C}D_{a+}^{\alpha}, (k = 0, \cdots, n-1) \end{cases} & b_k \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}y$ représente la dérivée fractionnaire de Caputo ou de Riemann-Liouville .
Particulièrement si $l = 0$,

$$\begin{cases} \left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f\left[x, y(x)\right] & \Re(\alpha) > 0 \\ b_k = \begin{cases} \left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+) & ; \mathscr{D}_{a+}^{\alpha} = D_{a+}^{\alpha}, (k = 1, \cdots, n) \\ y^{(k)}(a+) & ; \mathscr{D}_{a+}^{\alpha} = {}^{C}D_{a+}^{\alpha}, (k = 0, \cdots, n-1) \end{cases} & b_k \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1.1 L'équivalence Entre Le Problème De Cauchy Et L'équation Intégrale De Volterra

Définition.3.1 (Équation Intégrale De Volterra)[14]

On appelle équation intégrale de Volterra, une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration, elle est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K\left[x, t, \varphi(t)\right] dt \qquad , x \in [a, b] .$$

où f et K des fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Théorème.3.1

L'équivalence entre le problème de Cauchy avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville dans l'espace des fonctions sommables et l'équation intégrale de Volterra .

Pour $\Re(\alpha) > 0, n = -[-\Re(\alpha)]$,Soient $l \in \mathbb{N}$,G un ouvert de $\mathbb{C}^{l+1}$ et $\alpha_j \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots , l)$ tel que

$$0 = \alpha_0 < \Re\left(\alpha_1\right) < \cdots < \Re\left(\alpha_l\right) < \Re(\alpha)$$

$f : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$ tel que $f\left[x, y, y_1, \cdots , y_l\right] \in L(a, b)$ pour tout $(y, y_1, \cdots , y_l) \in G$;

Si $y(x) \in L(a, b)$, puis $y(x)$ est une solution de le Problème de Cauchy (2.7) p.p, si et seulement si

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \cdots , \left(D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(t)\right] dt}{(x - t)^{1-\alpha}} \; p.p$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \cdots , \left(D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(x)\right] & \Re(\alpha) > 0 \\ \left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k & b_k \in \mathbb{C}(k = 1, \cdots , n) \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \cdots , \left(D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(t)\right] dt}{(x - t)^{1-\alpha}}.$$

où $D_{a+}^{\alpha} y$ représente la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

En particulier si $l = 0$,

$$\begin{cases} \left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x)\right] & \Re(\alpha) > 0 \\ \left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k & b_k \in \mathbb{C}(k = 1, \cdots , n) \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t)\right] dt}{(x - t)^{1-\alpha}}.$$

Preuve :

1. $\Rightarrow)$

   on a

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \cdots , \left(D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(x)\right]$$

Appliquant I^{α} et d'après (2.6) On trouve

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(D^{\alpha_1}_{a+}y\right)(x), \cdots, \left(D^{\alpha_l}_{a+}y\right)(x)\right]$$

$$\left(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(I^{n-\alpha}_{a+}y\right)^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

D'autre part

$$\left(I^{n-\alpha}_{a+}y\right)^{(n-j)}(a) = \left(I^{j-\alpha}_{a+}y\right)(a) = D^{\alpha-j}_{a+}y(a) = b_k.$$

$$\left(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

Afin de faciliter l'écriture, posons $\left(D^{\alpha_1}_{a+}y(x), \cdots, D^{\alpha_l}_{a+}y(x)\right) = (D)(x)$ et comme $f\left[x, y(x), (D)(x)\right] \in L(a,b)$ donc $I^{\alpha}_{a+}\left(f\left[x, y(x), (D)(x)\right]\right) \in L(a,b)$ existe ;

$$I^{\alpha}_{a+}\left(f\left[x, y(x), (D)(x)\right]\right) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + I^{\alpha}_{a+}\left(f\left[x, y(x), (D)(x)\right]\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

2. $\Leftarrow$) On a

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}(x > a).$$

Appliquant D^{α} ;

$$\left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\alpha-j} + D^{\alpha}_{a+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \left(D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) &= D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\left(f\left[t, y(t), (D)(t)\right]\right)(x) \\ &= f\left[x, y(x), (D)(x)\right] \\ &= f\left[x, y(x), \left(D^{\alpha_1}_{a+}y\right)(x), \cdots, \left(D^{\alpha_l}_{a+}y\right)(x)\right]. \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\alpha-j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j\Gamma(\alpha - j + 1)}{\Gamma(\alpha - j + 1)\Gamma(-j+1)}(x-a)^{-j} \xrightarrow{\Gamma(-j+1)\to\infty} 0.$$

Maintenant calculons $D^{\alpha-k}y(a)$;

$$\begin{aligned} \left(D^{\alpha-k}_{a+}y\right)(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}\left(D^{\alpha-k}_{a+}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) + \left(D^{\alpha-k}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f\left[t, y(t), (D)(t)\right]\right)(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)}(x-a)^{k-j} + I^{k}_{a+}f\left[t, y(t), (D)(t)\right](x). \end{aligned}$$

donc

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_j}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f\left[t,y(t),(D)(t)\right]dt.$$

pour $x\to a+$;

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a)=b_k.$$

D'où le résultat $\square$

Théorème.3.2

L'équivalence entre le problème de Cauchy avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville dans l'espace des fonctions continues et l'équation intégrale de Volterra .

Pour $\Re(\alpha)>0, n=-[-\Re(\alpha)]$,Soient $l\in\mathbb{N}$,G un ouvert de $\mathbb{C}^{l+1}$ et $\alpha_j\in\mathbb{C}(j=1,\cdots,l)$ tel que

$$0=\alpha_0<\Re(\alpha_1)<\cdots<\Re(\alpha_l)<\Re(\alpha)$$

Une fonction $f:(a,b]\times G\to\mathbb{C}$ tel que $f[x,y,y_1,\cdots,y_l]\in C_{n-\alpha}(a,b)$ pour tout $(y,y_1,\cdots,y_l)\in G$;

Si $y(x)\in C_{n-\alpha}(a,b)$, puis $y(x)$ est une solution de le Problème de Cauchy (2.7), si et seulement si

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\left[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\cdots,\left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}(x>a).$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases}\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f\left[x,y(x),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x),\cdots,\left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(x)\right] & \Re(\alpha)>0\\ \left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k & b_k\in\mathbb{C}(k=1,\cdots,n)\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\left[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\cdots,\left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

où $D_{a+}^{\alpha}y$ représente la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

Preuve :

1. $\Rightarrow$)

   On a

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f\left[x,y(x),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x),\cdots,\left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(x)\right]$$

   Si $y(x)\in C_{n-\alpha}(a,b)$ et $I_{a+}^{n-\alpha}y(x)\in C_{n-\alpha}^{n}(a,b)$,et comme $0<\Re(n-\alpha)<1$;
   Appliquant I^{α} et d'après (2.6) On trouve

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f\left[x,y(x),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x),\cdots,\left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(x)\right]$$

$$\left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=y(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

   D'autre part

$$\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)^{(n-j)}(a) = \left(I_{a+}^{j-\alpha}y\right)(a) = D_{a+}^{\alpha-j}y(a) = b_k.$$

$$\left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

Afin de faciliter l'écriture, posons $(D_{a+}^{\alpha_1}y(x), \cdots, D_{a+}^{\alpha_l}y(x)) = (D)(x)$ et comme $f[x, y(x), (D)(x)] \in C_{n-\alpha}(a,b)$ donc $D_{a+}^{\alpha}y(x) \in C_{n-\alpha}(a,b)$ existe ;

$$I_{a+}^{\alpha}\left(f[x, y(x), (D)(x)]\right) = y(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + I_{a+}^{\alpha}\left(f[x, y(x), (D)(x)]\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t, y(t), (D)(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

2. $\Leftarrow$) On a

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t, y(t), (D)(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}(x > a).$$

Si $y(x) \in C_{n-\alpha}(a,b)$,et comme $0 < \Re(n-\alpha) < 1$;
Appliquant D^{α} ;

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} + D_{a+}^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t, y(t), (D)(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) &= D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}\left(f[t, y(t), (D)(t)]\right)(x) \\ &= f[x, y(x), (D)(x)] \\ &= f\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x), \cdots, \left(D_{a+}^{\alpha_l}y\right)(x)\right]. \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\alpha-j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(-j+1)}(x-a)^{-j} \xrightarrow{\Gamma(-j+1)\to\infty} 0.$$

Maintenant calculons $D^{\alpha-k}y(a)$;

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(D_{a+}^{\alpha-k}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) + \left(D_{a+}^{\alpha-k}I_{a+}^{\alpha}f[t, y(t), (D)(t)]\right)(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)}(x-a)^{k-j} + I_{a+}^{k}f[t, y(t), (D)(t)](x). \end{aligned}$$

donc

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{k}\frac{b_j}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f[t, y(t), (D)(t)]\,dt.$$

pour $x \to a+$;

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a) = b_k.$$

D'où le résultat $\square$

Théorème.3.3

L'équivalence entre le problème de Cauchy avec la dérivée fractionnaire de Caputo dans l'espace des fonctions continues et l'équation intégrale de Volterra .

Pour $\Re(\alpha) > 0, n = -[-\Re(\alpha)]$,Soient $l \in \mathbb{N}$,G un ouvert de $\mathbb{C}^{l+1}$ et $\alpha_j \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, l)$ tel que

$$0 = \alpha_0 < \mathfrak{R}(\alpha_1) < \cdots < \mathfrak{R}(\alpha_l) < \mathfrak{R}(\alpha)$$

$f : (a, b] \times G \to \mathbb{C}$ tel que $f[x, y, y_1, \cdots, y_l] \in C_\gamma(a, b)$ pour tout $(y, y_1, \cdots, y_l) \in G$; avec $0 \leq \mathfrak{R}(\gamma) < 1 \, et \, \mathfrak{R}(\gamma) < \mathfrak{R}(\alpha)$.

Soit $r = \begin{cases} n & \alpha \in \mathbb{N} \\ n-1 & \alpha \notin \mathbb{N} \end{cases}$; Si $y(x) \in C^r(a, b)$, puis $y(x)$ est une solution de le Problème de Cauchy (2.7), si et seulement si

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left({}^C D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \cdots, \left({}^C D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \; (x > a).$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left({}^C D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \cdots, \left({}^C D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(x)\right] & \mathfrak{R}(\alpha) > 0 \\ y^{(k)}(a+) = b_k & b_k \in \mathbb{C}(k = 0, \cdots, n-1) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left({}^C D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \cdots, \left({}^C D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

où ${}^C D_{a+}^{\alpha} y$ représente la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche.

En particulier si $l = 0$,

$$\begin{cases} \left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] & \mathfrak{R}(\alpha) > 0 \\ y^{(k)}(a+) = b_k & b_k \in \mathbb{C}(k = 0, \cdots, n-1) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] \, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Preuve :

1. $\Rightarrow$)

   a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$; si $y(x) \in C^{n-1}(a, b)$

   On a

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left({}^C D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \cdots, \left({}^C D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(x)\right]$$

   et d'après la définition

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x)$$

Appliquant I^{α} ; On trouve

$$\begin{aligned}
\left(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) &= \left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} \underbrace{\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right]}_{I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} y} \right)(x) \\
&= \left[\left(I_{a+}^{\alpha} \left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{n} \right) \right) D_{a+}^{n} y \right](x) \\
&= I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} y(x) \\
&= y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .
\end{aligned}$$

Afin de faciliter l'écriture, posons $\left(\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \cdots, \left({}^{C}D_{a+}^{\alpha_l} y\right)(t)\right) = (D)(x)$

D'autre part on a $f\left[x, y, (D)(x)\right] \in C_{\gamma}(a,b)$ et $\mathfrak{R}(\gamma) < \mathfrak{R}(\alpha)$,donc $I_{a+}^{\alpha} f \in C(a,b)$;

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + I_{a+}^{\alpha} f\left[x, y, (D)(x)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} .
\end{aligned}$$

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$; si $y(x) \in C^{n}(a,b)$: On a $\alpha = n$,

$$\left({}^{C}D_{a+}^{n} y\right)(x) := \left(D_{a+}^{n} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x)$$

Appliquant l'opérateur I_{a+}^{n},

$$\begin{aligned}
\left(I_{a+}^{n}\, {}^{C}D_{a+}^{n} y\right)(x) &= I_{a+}^{n} D^{n} y(x) \\
&= y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k . \\
y(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

2. $\Leftarrow$) On a

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

a) Si $\alpha \in \mathbb{N}$; si $y(x) \in C^{n}(a,b)$: On a $\alpha = n$,
Appliquant l'opérateur ${}^{C}D_{a+}^{j}$, $j = 1, \cdots, n-1$;

$$\begin{aligned}
\left({}^{C}D_{a+}^{j} y\right)(x) &= y^{(j)}(x) \\
&= \sum_{k=j}^{n-1} \frac{b_k}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} + \frac{1}{(n-k)!} \int_a^x (x-t)^{n-k-1} f\left[t, y(t), (D)(t)\right] dt
\end{aligned}$$

On dérive n fois, et on obtient le résultat .
C'est clair que si $x \longrightarrow a+$ alors $y^{(k)}(a+) = b_k$.

b) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$; si $y(x) \in C^{n-1}(a,b)$; Appliquant l'opérateur D^{α}_{a+}

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} {}^{C}D^{\alpha}_{a+}(x-a)^k}_{0} + {}^{C}D^{\alpha}_{a+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, y(t), (D)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= f\left[x, y(x), (D)(x)\right] \\ &= f\left[x, y(x), \left({}^{C}D^{\alpha_1}_{a+}y\right)(x), \cdots, \left({}^{C}D^{\alpha_l}_{a+}y\right)(x)\right].\end{aligned}$$

C'est clair que si $x \longrightarrow a+$ alors $y^{(k)}(a+) = b_k$.
D'où le résultat . □

3.1.2 Existence Et Unicité De Solution De Problème De Cauchy Fractionnaire

Théorème.3.4

Pour $\Re(\alpha) > 0, n = -[-\Re(\alpha)]$,Soient $l \in \mathbb{N}$,G un ouvert de $\mathbb{C}^{l+1}$ et $\alpha_j \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, l)$ tel que $0 = \alpha_0 < \Re(\alpha_1) < \cdots < \Re(\alpha_l) < \Re(\alpha)$,
et $\left(D^{\alpha_j - k_j}_{a+}y\right)(a+) = b_{k_j}$, $b_{k_j} \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, n_j)$ tel que $\begin{cases} n_j = [\Re(\alpha_j)] + 1 & \alpha_j \notin \mathbb{N} \\ n_j = \alpha_j & \alpha_j \in \mathbb{N}\end{cases}$.
Si les deux conditions suivantes vérifier :

1. $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction tel que $f[x, y, y_1, \cdots, y_l] \in L(a,b)$ pour tout $(y, y_1, \cdots, y_l) \in G$.
2. $f[x, y, y_1, \cdots, y_l]$ Une fonction lipschitzienne par rapport les variables $(y, y_1, \cdots, y_l)$, Autrement dit

$$\mid f[x, y, y_1, \cdots, y_l] - f[x, Y, Y_1, \cdots, Y_l] \mid \leq A_l \sum_{j=0}^{l} \mid y_j - Y_j \mid$$

Avec

$$A\sum_{j=0}^{l}\left[\frac{(b-a)^{\Re(\alpha-\alpha_j)}}{\Re(\alpha-\alpha_j)\left|\Gamma(\alpha-\alpha_j)\right|}\right] < 1.$$

Alors le problème de Cauchy (2.7) admis une solution unique $y(x) \in L^{\alpha}(a,b)$,avec

$$L^{\alpha}(a,b) = \left\{y(x) \in L(a,b) : D^{\alpha}_{a+}y \in L(a,b)\right\}.$$

Preuve :

On a la subdivision suivante $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i \leq b; i = 0, 1, \cdots, L$.
Définissons l'opérateur $T : L_1(a, x_i) \to L_1(a, x_i)$ tel que

$$(Ty)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left(D^{\alpha_1}_{a+}y\right)(t), \cdots, \left(D^{\alpha_l}_{a+}y\right)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

Choisissons $x_1 \in (a,b)$ tel que

$$A\sum_{j=0}^{l}\left[\frac{(x_1-a)^{\Re(\alpha-\alpha_j)}}{\Re(\alpha-\alpha_j)\left|\Gamma(\alpha-\alpha_j)\right|}\right] < 1$$

Afin de faciliter l'écriture, posons $(D_{a+}^{\alpha_1}y(x), \cdots, D_{a+}^{\alpha_l}y(x)) = (\mathcal{D})(x)$

on a

$$\|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_{L(a,x_1)} \leqq \left\| \left| \left(I_{a+}^{\alpha}\left\{f\left[x, y_1, \mathcal{D}_1\right] - f\left[x, y_2, \mathcal{D}_2\right]\right\}\right)(x) \right| \right\|_{L(a,x_1)}$$

Comme f une fonction lipschitzienne et d'après (2.6) on trouve ,

$$\begin{aligned}
\left|\left(I_{a+}^{\alpha}\left\{f\left[x, y_1, \mathcal{D}_1\right] - f\left[x, y_2, \mathcal{D}_2\right]\right\}\right)(x)\right| &\leqq \left(I_{a+}^{\Re(\alpha)}\left|f\left[x, y_1, \mathcal{D}_1\right] - f\left[x, y_2, \mathcal{D}_2\right]\right|\right)(x) \\
&\leqq A\left(I_{a+}^{\Re(\alpha)}\left|\sum_{j=0}^{l} D_{a+}^{\alpha_j}\left(y_1 - y_2\right)\right|\right)(x) \\
&= A\sum_{j=0}^{l}\left(I_{a+}^{\Re(\alpha-\alpha_j)}\left|I_{a+}^{\alpha_j}D_{a+}^{\alpha_j}\left(y_1 - y_2\right)\right|\right)(x) \\
&= A\sum_{j=0}^{l} I_{a+}^{\Re(\alpha-\alpha_j)}\ \left|\ \left[\left(y_1 - y_2\right)(t) - F(x)\right]\ \right|\ (x)
\end{aligned}$$

Par hypothèse $\left(D_{a+}^{\alpha_j-k_j}y_1\right)(a+) = \left(D_{a+}^{\alpha_j-k_j}y_2\right)(a+)$, on a

$$F(x) = \sum_{k_j=1}^{n_j} \frac{\left(D_{a+}^{\alpha_j-k_j}\left[y_1 - y_2\right]\right)(a+)}{\Gamma\left(\alpha_j - k_j + 1\right)}(x-a)^{\alpha_j-k_j} = 0$$

Et d'après le Théorème.2.1 ,

$$\begin{aligned}
\|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_{L(a,x_1)} &\leqq \left\| A\sum_{j=0}^{l} I_{a+}^{\Re(\alpha-\alpha_j)}\left|y_1 - y_2\right|(t)\right\|_{L(a,x_1)} \\
&\leqq A\sum_{j=0}^{l}\left[\frac{\left(x_1 - a\right)^{\Re(\alpha-\alpha_j)}}{\Re\left(\alpha - \alpha_j\right)\left|\Gamma\left(\alpha - \alpha_j\right)\right|}\right]\|y_1 - y_2\|_{L(a,x_1)} \\
&\leqq \omega\,\|y_1 - y_2\|_{L(a,x_1)}
\end{aligned}$$

Donc l'application T est contractante, alors d'après le théorème du point fixe de Banach T admet un point fixe unique $y^*(x) \in L_1(a, x_1)$ est la solution de l'équation intégral de Volterra sur l'intervalle (a, x_1), et en répétant ce processus sur tout les intervalles (x_{i-1}, x_i) , nous concluons qu'il existe $y^*(x) \in L_1(a, b)$ une solution unique de l'équation intégral de Volterra tel que $y^*(x) = y_i^*(x)$ avec $y_i^*(x) \in L_1(x_{i-1}, x_i)$.

On a d'après le théorème du point fixe de Banach

$$\lim_{m\to\infty} \|T^m y_0^* - y^*\|_{L(a,b)} = 0,$$

où $y_0^*(x) \in L_1(a, b)$,

Si $\exists b_k \neq 0$,on peut prendre $y_0^*(x) = y_0(x)$;

$(T^m y_0^*)(x)$ est défini par la formules de récurrence

$$(T^m y_0^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, (T^{m-1}y_0^*)(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

On pose $y_m(x) = (T^m y_0^*)(x)$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y_{m-1}(t)\right] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} (m \in \mathbb{N})$$

donc

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m - y^*\|_{L(a,b)} = 0$$

avec le choix de certains y_m sur chaque $[a, x_1], \cdots, [x_{L-1}, b]$.

$$\left\|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\right\|_1 = \|f\left[x, y_m\right] - f[x,y]\|_1 \leqq A \|y_m - y\|_1 .$$

$$\lim_{m\to\infty} \left\|D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\right\|_1 = 0,$$

donc $y(x) \in L_1(a,b)$ et $D_{a+}^{\alpha} y(x) \in L_1(a,b)$.
D'où le résultat . □

Théorème.3.5

Pour $\Re(\alpha) > 0, n = -[-\Re(\alpha)]$,Soient $l \in \mathbb{N}$,G un ouvert de $\mathbb{C}^{l+1}$ et
$\alpha_j \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, l)$ tel que $0 = \alpha_0 < \mathfrak{R}(\alpha_1) < \cdots < \mathfrak{R}(\alpha_l) < \mathfrak{R}(\alpha)$,
et $\left(D_{a+}^{\alpha_j - k_j} y\right)(a+) = b_{k_j}$, $b_{k_j} \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, n_j)$ tel que $\begin{cases} n_j = [\mathfrak{R}(\alpha_j)] + 1 & \alpha_j \notin \mathbb{N} \\ n_j = \alpha_j & \alpha_j \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Si les deux conditions suivantes vérifier :

1. $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction tel que $f[x, y, y_1, \cdots, y_l] \in C_{n-\alpha}(a,b)$ pour tout $(y, y_1, \cdots, y_l) \in G$.
2. $f[x, y, y_1, \cdots, y_l]$ Une fonction lipschitzienne par rapport les variables $(y, y_1, \cdots, y_l)$, Autrement dit

$$\mid f\left[x, y, y_1, \cdots, y_l\right] - f\left[x, Y, Y_1, \cdots, Y_l\right] \mid \leq A_l \sum_{j=0}^{l} \mid y_j - Y_j \mid$$

Avec

$$A \sum_{j=0}^{l} \left[\frac{(b-a)^{\Re(\alpha-\alpha_j)}\, \Gamma(\alpha - n + 1)}{|\Gamma(2\alpha - \alpha_j - n + 1)|} \right] < 1.$$

Alors le problème de Cauchy (2.7) admis une solution unique $y(x) \in \mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b]$,avec

$$\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b] = \left\{ y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b] : D_{a+}^{\alpha} y \in C_{n-\alpha}[a,b] \right\}.$$

Preuve :voir [12](pages :165,166 et 167).

Théorème.3.6

Pour $\Re(\alpha) > 0, n = -[-\Re(\alpha)]$,Soient $l \in \mathbb{N}$,G un ouvert de $\mathbb{C}^{l+1}$ et
$\alpha_j \in \mathbb{C}(j = 1, \cdots, l)$ tel que $0 = \alpha_0 < \mathfrak{R}(\alpha_1) < \cdots < \mathfrak{R}(\alpha_l) < \mathfrak{R}(\alpha)$,
et $y^{(k_j)}(a+) = b_{k_j}$, $b_{k_j} \in \mathbb{C}(j = 0, \cdots, n_j - 1)$ tel que $\begin{cases} n_j = [\mathfrak{R}(\alpha_j)] + 1 & \alpha_j \notin \mathbb{N} \\ n_j = \alpha_j & \alpha_j \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Si les deux conditions suivantes vérifier :

1. $f : (a,b] \times G \to \mathbb{C}$ une fonction tel que $f[x,y,y_1,\cdots,y_l] \in C_\gamma(a,b)$ pour tout $(y,y_1,\cdots,y_l) \in G$.
2. $f[x,y,y_1,\cdots,y_l]$ Une fonction lipschitzienne par rapport les variables $(y,y_1,\cdots,y_l)$, Autrement dit

$$| f[x,y,y_1,\cdots,y_l] - f[x,Y,Y_1,\cdots,Y_l] | \leq A_l \sum_{j=0}^{l} | y_j - Y_j |$$

Avec

$$A \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l} \left[\frac{(b-a)^{\Re(\alpha-\alpha_j)-k}\,\Gamma(1-\gamma)}{|\Gamma(\alpha-\alpha_j-k+\gamma+1)|} \right] < 1.$$

Alors le problème de Cauchy (2.7) admis une solution unique $y(x) \in \begin{cases} \mathbf{C}_\gamma^{\alpha,n-1}[a,b] & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \mathbf{C}_\gamma^{n}[a,b] & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$, avec

$$\mathbf{C}_\gamma^{\alpha,n-1}[a,b] := \left\{ y(x) \in \mathbf{C}^{n-1}[a,b] : {}^C D_{a+}^{\alpha} y \in \mathbf{C}_\gamma[a,b] \right\}.$$

Preuve :voir [12](pages :202,203 et 204).

Applications

Cette application explique la méthode de la résolution à l'aide de la théorème d'existence et d'unicité .

1. On a le problème de Cauchy suivant :
   $f(x) \in C_\gamma[a,b](0 \leqq \gamma < 1)$;$a \leq x \leqq b; \alpha > 0;k = 1,\cdots,n = -[-\alpha]$:

$$\begin{cases} \left(D_{a+y}^{\alpha} y\right)(x) - \lambda y(x) = f(x) & \lambda \in \mathbb{R} \\ \left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k & b_k \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

D'après Théorème.3.2 ;

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{[f(t)+\lambda y(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Nous appliquons la méthode des approximations successives pour résoudre cette équation intégrale ,
on a la relation de récurrence

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}, \\ y_m(x) &= y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y_{m-1}(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m \in N_0). \end{aligned}$$

Calculons y_1,

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0(x) + \lambda\left(I^{\alpha}_{a+}y_0\right)(x) + \left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\alpha-j} + \left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(2\alpha-j+1)}(x-a)^{2\alpha-j} + \left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda^{k-1}(x-a)^{\alpha k-j}}{\Gamma(\alpha k-j+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt
\end{aligned}$$

De la même manière pour $y_2(x)$,

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_0(x) + \lambda\left(I^{\alpha}_{a+}y_1\right)(x) + \left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x)\\
y_2(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}\\
&+ \lambda\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k-j+1)}\left(I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha k-j}\right)(x) + \left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(x) + \left(I^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f\right)(x)\\
&= \sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{3}\frac{\lambda^{k-1}(x-a)^{ak-j}}{\Gamma(\alpha k-j+1)} + \int_a^x\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)}(x-t)^{\alpha k-1}\right]f(t)dt
\end{aligned}$$

En poursuivant ce processus, nous obtenons la relation suivante pour $y_{\mathrm{m}}(x)(m\in\mathbb{N})$;

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{m+1}\frac{\lambda^{k-1}(x-a)^{\alpha k-j}}{\Gamma(\alpha k-j+1)} + \int_a^x\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)}(x-t)^{\alpha k-1}\right]f(t)dt$$

En prenant la limite comme $m\to\infty$; on obtient la solution explicite suivante ,

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}(x-a)^{\alpha k-j}}{\Gamma(\alpha k-j+1)} + \int_a^x\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)}(x-t)^{\alpha k-1}\right]f(t)dt,$$

En remplaçant l'indice de sommation k par $k-1$;

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}(x-a)^{ak+a-j}}{\Gamma(\alpha k+\alpha-j+1)} + \int_a^x\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}(x-t)^{ak+\alpha-1}\right]f(t)dt$$

Nous réécrivons cette solution en termes de la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z)$:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n}b_j(x-\alpha)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right] + \int_{\alpha}^{x}(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)dt.$$

2. On a le problème de Cauchy suivant :$f(x)\in C_{\gamma}[a,b]$ avec $0\leqq\gamma<1$ et $\gamma\leqq\alpha$

$$\begin{aligned}
&\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad \lambda\in\mathbb{R}),\\
&y^{(k)}(a) = b_k\left(b_k\in\mathbb{R}; k=0,\cdots,n-1\right).
\end{aligned}$$

avec $a \leqq x \leqq b, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$,
D'après Théorème.3.3 ;

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

Nous appliquons la méthode des approximations successives pour résoudre cette équation intégrale ,
on a la relation de récurrence

$$y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j$$

et

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y_{m-1}(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m \in \mathbb{N})$$

De la même manière que la solution de l'application précédente on trouve

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k (x-a)^{\alpha k+j}}{\Gamma(\alpha k+j+1)} + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)} (x-t)^{\alpha k-1} \right] f(t)dt$$

En prenant la limite comme $m \to \infty$; on obtient la solution explicite suivante ,

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (x-a)^j E_{\alpha,j+1} \left[\lambda(x-a)^\alpha\right] + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left[\lambda(x-t)^\alpha\right] f(t)dt.$$

Exemple.3.1

On a l'équation différentielle ordinaire suivante : $a \leqq x \leqq b$;

$$\begin{cases} y'(x) - \lambda y(x) = f(x) & \lambda \in \mathbb{R} \\ y(a) = b \, (b \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

la solution est donné par

$$\begin{aligned} y(x) &= bE_{1,1}\left[\lambda(x-a)\right] + \int_\alpha^x E_{1,1}\left[\lambda(x-t)\right] f(t)dt \\ &= be^{\lambda(x-a)} + \int_\alpha^x e^{\lambda(x-a)} f(t)dt. \end{aligned}$$

Si f(x)=0 ;

$$y(x) = be^{\lambda(x-a)}.$$

3.2 Problèmes Aux Limites Pour Des Équations Différentielles Fractionnaires

3.2.1 Problèmes Aux Limites Avec Conditions Non Locales

Dans cette sous-section on présente quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires avec conditions non locales.

On considère les deux problèmes suivants :
soient $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues ,
$\forall t \in J = [0,T]$;

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) + g(y) = y_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad 1 < \alpha < 2 \\ \begin{cases} y(0) = g(y) \\ y(T) = y_T \end{cases} \end{cases} \tag{3.4}$$

Ce type de problème a été introduit par le mathématicien polonais L.Byszewski [4, 5, 6], il a remarqué que la condition non locale est très appropriée que la condition locale (initiale) pour décrire correctement des phénomènes physiques, il a prouvé l'existence et l'unicité des solutions faibles et aussi des solutions classiques pour ce genre des problèmes.

Dans cette sous-section on présente quelques résultats d'existence et d'unicité en s'appuyant sur les théorèmes de point fixe de Banach et de Schaefer .

Théorème.3.7

Si les conditions suivantes sont vérifier :

1. f et g sont Lipschitzienne par rapport le deuxième variable , i.e :

$$\mid f\,[t,y] - f\,[t,Y] \mid \leq A \mid y - Y \mid$$

et

$$\mid g\,[x] - g\,[X] \mid \leq K \mid x - X \mid$$

2. L'inégalité

$$K + \frac{AT^{\alpha}}{\Gamma\,(1+\alpha)} < 1$$

alors le problème non local (3.3) admet une solution unique $y \in C([0,T],\mathbb{R})$ sur J .

Preuve :

On transforme le problème (3.3) en un problème du point fixe.
Considérons l'opérateur $V : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ défini par

$$V(y)(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur V sont les solutions du problème (3.3) , II reste à montrer que V est une contraction,

en effet : si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$, alors, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |V(x)(t) - V(y)(t)| &= \left| g(x) - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s,x(s)) - f(s,y(s))) ds \right| \\ &\leq |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \end{aligned}$$

Et puisque f et g sont Lipschitzienne

$$\begin{aligned}|V(x)(t)-V(y)(t)| &\leq K\|x-y\|_\infty+\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\\ &\leq K\|x-y\|_\infty+\frac{AT^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty\end{aligned}$$

et par suite

$$\|V(x)-V(y)\|_\infty\leq\left(K+\frac{AT^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)\|x-y\|_\infty.$$

d'après le théorème de Banach , V admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.3) .

D'où le résultat . □

Théorème.3.8

Si f et g sont bornées , i.e : Il existe une constante $M, m>0$ telle que

$$\mid f\,[t,y]\mid\leq M$$

et

$$\mid g\,[y]\mid\leq m$$

Alors, le problème (3.3) admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve :

On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que V admet un point fixe.

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

1. Soit y_n une suite telle que $y_n\to y$ dans $C([0,T],\mathbb{R})$, Alors pour tout $t\in[0,T]$;

   $$|V\left(y_n\right)(t)-V(y)(t)|\leq|g\left(y_n\right)-g(y)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s,y_n(s)\right)-f(s,y(s))\right|ds$$

   Puisque f et g sont continues et d'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, alors;

   $$|V\left(y_n\right)(t)-V(y)(t)|\xrightarrow{n\to 0}0$$

   Donc

   $$\left\|V\left(y_n\right)-V(y)\right\|_\infty\xrightarrow{n\to 0}0$$

   d'où la continuité de V.

2. Montrons que l'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans C([0,T],R).

   il suffit de montrer que pour tout $l^*>0$,il existe une constante positive l telle que :

   pour tout $y\in B_{l^*}$: $\|V(y)\|_\infty\leq l$,avec $B_{l^*}=\{y\in C\left([0,T],\mathbb{R}\right):\|y\|_\infty\leq l^*\}$.

   Montrons que $V\left(B_{l^*}\right)$ est borné :

$$|V(y)(t)| \leq |y0| + |g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid f(s,y(s)) \mid$$
$$\leq |y_0| + m + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha$$
$$\|V(y)\|_\infty \leq |y_0| + m + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha := l.$$

3. Montrons que l'image de tout borné par V est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$: Soient $t_1, t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$, et soit $y \in B_{l^*}$; Alors

$$\begin{aligned}
|V(y)(t_2) - V(y)(t_1)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}\left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right] f(s,y(s))\,ds\right| \\
&+ \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\,ds\right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}\left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right] ds + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\, ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left((t_2)^\alpha - (t_1)^\alpha\right) \xrightarrow{t_2 \longrightarrow t_1} 0
\end{aligned}$$

d'où la continuité de V,D'après le théorème d'Ascoli-Arzélà $V(B_{l^*})$ est relativement compact.
c'est à dire V est complètement continu .

4. Il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda V(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est borné ; Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda V(y)$; pour $0 < \lambda < 1$. Donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda\left[y0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right].$$

et comme f et g sont bornées on a

$$|V(y)(t)| \leq |y_0| + |g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds$$
$$\leq |y_0| + m + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\|V(y)\|_\infty \leq |y_0| + m + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha := \frac{R}{\lambda}$$

d'où $\|y\|_\infty \leq R$.

Cela montre que ε est borné. Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer. On déduit que V admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.3) . D'où le résultat . □

Proposition.3.1

Soient $f : J \times G \to R\,(G \subseteq R)$ une fonction continue et $\alpha \in (1,2)$, le problème aux limites (3.4) est équivalent à l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$y(x) = I_{0+}^{\alpha} f - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}} - \left(\frac{x}{T} - 1\right) g\,(y) + \frac{x}{T} y_T.$$

Preuve :

On a d'après Théorème.3.3

$$y(x) = b_0 + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

avec $b_0 = y(0) = g(y)$,
D'autre part on a

$$\begin{aligned} y(T) &= b_0 + b_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}} \\ &= g(y) + b_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}} \\ b_1 &= \frac{1}{T}\left(y(T) - g(y) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}}\right) \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} y(x) &= g(y) + b_1 x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= g(y) + \frac{1}{T}\left(xy(T) - xg(y) - \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}}\right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &- \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}} - \left(\frac{x}{T} - 1\right) g\,(y) + \frac{x}{T} y_T \\ y(x) &= I_{0+}^{\alpha} f - \frac{x}{T\Gamma(\alpha)} \int_a^T \frac{f\,[t, y(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}} - \left(\frac{x}{T} - 1\right) g\,(y) + \frac{x}{T} y_T. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème.3.9

Si les deux conditions suivantes vérifier :

1. f et g sont Lipschitzienne par rapport le deuxième variable , i.e :

$$\mid f\,[t, y] - f\,[t, Y] \mid \leq A \mid y - Y \mid$$

et

$$\mid g\,[x] - g\,[X] \mid \leq K \mid x - X \mid$$

2. L'inégalité
$$K + \frac{2AT^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} < 1$$

alors le problème non local (3.4) admet une solution unique $y \in C([0,T],\mathbb{R})$ sur J .

Preuve :

En utilisant le théorème de contraction de Banach ;
Considérons l'opérateur $N : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ défini par

$$N(y)(t) = I^{\alpha}_{a+}f(t) - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_a^T \frac{f[s,y(s)]\,ds}{(T-s)^{1-\alpha}} - \left(\frac{t}{T}-1\right)g(y) + \frac{t}{T}y_T$$

en effet si $x, y \in C(J,\mathbb{R})$ pour tout $t \in J$, alors

$$\begin{aligned}
|N(y)(t) - N(x)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right| |f(s,y(s)) - f(s,x(s))|ds \\
& + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T \left|(T-s)^{\alpha-1}\right| |f(s,y(s)) - f(s,x(s))|ds + \left|\frac{t}{T}-1\right| |g(y)-g(x)| \\
\leq & \frac{A\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right| ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T \left|(T-s)^{\alpha-1}\right| ds + |g(y)-g(x)| \\
\leq & \frac{A\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^{\alpha} + \frac{A\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^{\alpha} + K\|x-y\|_\infty \\
\leq & \left(\frac{2AT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + K\right)\|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

Et par suite
$$\|(Ny) - (Nx)\|_\infty \leq \left(\frac{2AT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + K\right)\|x-y\|_\infty.$$

Donc N est une contraction et d'après le théorème de Banach N admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.4),

La solution donné avec la relation de la récurrence suivante ;

$$N^{m+1}(y)(x) = y_{m+1}(x) = I^{\alpha}_{a+}f[t,y_m(t)](x) - \frac{x}{T\Gamma(\alpha)}\int_a^T \frac{f[t,y_m(t)]\,dt}{(T-t)^{1-\alpha}} - \left(\frac{x}{T}-1\right)g(y) + \frac{x}{T}y_T$$

avec
$$y_0(x) = -\left(\frac{x}{T}-1\right)g(y) + \frac{x}{T}y_T$$

Et appliquant la méthode des approximations successives pour trouver la solution .
D'où le résultat . □

Théorème.3.10

Si les conditions suivantes sont vérifier :

1. $f : J \times G \to \mathbb{R}\,(G \subseteq \mathbb{R})$ une fonction continue .
2. $\exists C_1, C_2 > 0, \delta \in (1,2)$ telles que :

$$|\ f[t,y]\ | \leq C_1 \mid y \mid^{\delta} + C_2$$

Pour chaque $t \in J$.

3. Il existe une constante $C_3 > 0$, telle que

$$| g [y] | \leq C_3.$$

Alors le problème aux limites (3.4) admet a au moins une solution sur J.

Preuve :

On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que N admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1. Montrons que N est continue,
   Soit y_n une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que

   $$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0.$$

   Il faut montrer que $\lim_{n\to\infty} \|N(y_n) - N(y)\|_\infty = 0$;

   $$\begin{aligned}
   |N(y_n)(t) - N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
   &+ \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
   &+ \left|\frac{t}{T} - 1\right| |g(y_n) - g(y)| \\
   &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
   &+ \frac{T}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \\
   &+ |g(y_n) - g(y)|
   \end{aligned}$$

   Donc

   $$\begin{aligned}
   \|N(y_n) - N(y)\|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds\right] \\
   &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |g(y_n) - g(y)| \\
   &\leq \frac{2T^\alpha \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + |g(y_n) - g(y)| .
   \end{aligned}$$

   Puisque f et g sont continues et d'après théorème de convergence dominée de Lebesgue, alors ;

   $$\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \to 0.$$

2. Montrons que l'image de tout ensemble borné par N est un ensemble borné dans $C([0,T],\mathbb{R})$;
   il suffit de montrer que pour tout $l^* > 0$,il existe une constante positive l telle que :
   pour tout $y \in B_{l^*}$: $\|N(y)\|_\infty \leq l$,avec $B_{l^*} = \{y \in C([0,T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq l^*\}$.

Montrons que $N\left(B_{l^*}\right)$ est borné : on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\
&+ \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds + \left|\frac{t}{T}-1\right||g(y)| + \frac{|t|}{T}y_T \\
&\leq \frac{C_1\|y\|_\infty^\delta + C_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|t|\left(C_1\|y\|_\infty^\delta + C_2\right)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&+ |g(y)| + y_T \\
&\leq \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + C_3 + y_T,
\end{aligned}$$

donc

$$\|N(y)\|_= \leq \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + C_3 + y_T =: l$$

et par suite $N\left(B_{l^*}\right)$ est borné.

3. Montrons que l'image du tout borné par N est un ensemble équicontinu de $C([0,T],\mathbb{R})$, Soient $t_1, t_2 \in (0,T], t_1 < t_2$, et soit $y \in B_{l^*}$; Alors

$$\begin{aligned}
|N(y)\left(t_2\right) - N(y)(t)| &\leq \frac{C_1\|y\|_\infty^\delta + C_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right]ds \\
&+ \frac{C_1\|y\|_\infty^\delta + C_2}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right)C_3 + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right)y_T \\
&+ \frac{(t_2-t_1)\left(C_1\|y\|_\infty^\delta + C_2\right)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right] + \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha \\
&+ \frac{T^\alpha\left(C_1 l^{*\delta}+C_2\right)}{T\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1) + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right)C_3 + \left(\frac{t_2-t_1}{T}\right)y_T \\
&\leq \frac{2\left(C_1 l^{*\delta}+C_2\right)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{C_1 l^{*\delta}+C_2}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^\alpha - t_2^\alpha) \\
&+ \left(\frac{T^{\alpha-1}\left(C_1 l^{*\delta}+C_2\right)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{C_3+y_T}{T}\right)(t_2-t_1) \xrightarrow{t_1\to t_2} 0
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de N, D'après l'étape 2 et 3 et le théorème d'Ascoli-Arzelà $N\left(B_{l^*}\right)$est relativement compact pour tout borné B_{l^*}, N est compact donc N est complètement continu.

4. Il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda N(y) \text{ pour } 0 < \lambda < 1\}$ est borné ; Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda N(y)$; pour $0 < \lambda < 1$. Donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda\left[I_{a+}^\alpha f(t,y(t)) - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{a-1}h(s)ds - \left(\frac{t}{T}-1\right)g(y) + \frac{t}{T}y_T\right],$$

D'après la deuxième et la troisième condition , et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|N(y)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
& + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{a-1} |f(s, y(s))| ds \\
& + \left| \frac{t}{T} - 1 \right| |g(y)| + \frac{|t|}{T} y_T \\
& \leq \frac{C_1 \|y\|_\infty^\delta + C_2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
& + \frac{|t| \left(C_1 \|y\|_\infty^\delta + C_2 \right)}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + |g(y)| + y_T \\
\|Ny\|_\infty \leq & \frac{C_1 l^{*\delta} + C_2}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{C_1 l^{*\delta} + C_2}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + C_3 + y_T =: R
\end{aligned}$$

Cela montre que ε est borné.

Comme une conséquence du théorème de point fixe de Schaefer,

On déduit que N admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.4).

D'où le résultat . □

Exemple.3.2

Considérons le problème aux limites

$$\begin{gathered}
{}^C D^{\frac{1}{2}} y(t) = \frac{1}{2e^{t+1} \left(1 + |y(t)|\right)}, \ t \in [0, 1], \\
y(0) + g(y) = 1,
\end{gathered}$$

où

$$g(y) = \frac{|y|}{10 + |y|}$$

et

$$f(t, u) = \frac{1}{2e^{t+1}(1 + |u|)}, \quad t \in [0, 1], u \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$,$u, \bar{u} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$:

$$|f(t, u) - f(t, \bar{u})| \leqslant \frac{1}{2e} |u - \bar{u}|.$$

donc f est une fonction lipschitzienne.

Soit

$$g(u) = \frac{u}{10 + u}, \quad u \in [0, \infty).$$

Soit $u, v \in [0, \infty)$, on a

$$|g(u) - g(v)| = \left| \frac{u}{10 + u} - \frac{v}{10 + v} \right| = \frac{10|u - v|}{(10 + u)(10 + v)} \leqslant \frac{1}{10} |u - v|.$$

donc g est une fonction lipschitzienne, par suite on a

$$\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2e}\right)(1)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2e} < 1.$$

Donc la condition est satisfaite.

Alors le problème non local admet une solution unique $y \in C([0, 1], \mathbb{R})$ sur J .

3.2.2 Problèmes Aux Limites Avec Des Conditions Intégrales

Cette section est consacré à l'étude de l'existence des solutions du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales suivant :

soit $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction connue : $\forall t \in J = [0,T], \mu \in \mathbb{R}^*$;

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) + \mu \int_0^T y(s)ds = y(T) \end{cases} \tag{3.5}$$

Les résultats de ce section s'inspirent des travaux de Benchohra et Ouaar [1].

Proposition.3.2

Soit $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue ;

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\alpha} y(t) = h(t), & 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) + \mu \int_0^T y(s)ds = y(T) \end{cases} \tag{3.6}$$

Le problème aux limites (3.6) admet une solution unique donnée par :

$$y(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)\mathrm{d}s,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\alpha T(t-s)^{\alpha-1} - (T-s)^{\alpha}}{T\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}, & \text{si } 0 \leqslant s < t, \\ \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} - \frac{(T-s)^{\alpha}}{T\Gamma(\alpha+1)} +, & \text{si } t \leqslant s < T. \end{cases}$$

Preuve :

On a d'après Théorème.3.3 ,

$$\begin{aligned} y(t) &= I_{0+}^{\alpha}\left({}^C D_{0+}^{\alpha} y(t)\right) - b_0 \\ &= I_{0+}^{\alpha} h(t) - b_0 \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\mathrm{a}-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\mathrm{d}s - b_0 \end{aligned}$$

Pour une constante $b_0 \in \mathbb{R}$,

On a par une intégration , En utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_0^T y(s)\mathrm{d}s &= \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau - b_0 \right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^T \left(\int_{\tau}^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{d}s \right) h(\tau)\mathrm{d}\tau - b_0 T \\ &= \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)\mathrm{d}\tau - b_0 T \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} y(0) &= -b_0 \\ y(T) &= \int_0^T \frac{(T-s)^{\mathrm{a}-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\mathrm{d}s - b_0. \end{aligned}$$

Il reste à trouver b_0 ; On a

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)ds = y(T)$$

donc

$$-b_0 + \mu \int_0^T y(s)\,ds = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds - b_0$$

$$\int_0^T y(s)\,ds = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\,ds.$$

Par suite

$$\frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)ds = \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(s)ds - b_0 T.$$

$$b_0 = \frac{1}{T}\left(-\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)} h(s)ds + \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} h(s)ds\right).$$

$$b_0 = \frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left(\frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu}\right) h(s)ds$$

Alors la solution unique de (3.6) est donnée par

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu} - \frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha}\right) h(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} + \frac{1}{T}\left(\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu} - \frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha}\right)\right] h(s)ds \\
&+ \frac{1}{T\Gamma(\alpha)}\int_t^T \left(\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu} - \frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha}\right) h(s)ds \\
&= \int_0^T G(t,s)h(s)ds.
\end{aligned}$$

D'où le résultat . □

Remarque 3.1

La fonction $t \in J \to \int_0^T |G(t,s)|ds$ est continue sur J, et est donc bornée. Soit

$$\widehat{G} = \sup\left\{\int_0^T |G(t,s)|ds, t \in J\right\}.$$

Théorème.3.10

Si les conditions suivantes sont vérifier :

1. f est Lipschitzienne par rapport le deuxième variable , i.e :

$$\mid f\,[t,y] - f\,[t,Y] \mid \leq A \mid y - Y \mid$$

2. L'inégalité

$$A\widehat{G} < 1.$$

alors, il existe une solution unique de le problème aux limites (3.5).

Preuve :

Considérons l'opérateur $F : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ défini par

$$(Fy)(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds$$

Où $G(t,s)$ est la fonction de Green .
Soient $x, y \in C(J, R)$, Alors, pour tout $t \in J$. On a

$$\begin{aligned} |(Fx)(t) - (Fy)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)\left(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right)| ds \\ &\leq A\|x-y\|_\infty \int_0^T \mid G(t,s) \mid ds \\ &\leq A\widehat{G}\|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

Par suite

$$\|(Fx)(t) - (Fy)(t)\|_\infty \leq A\widehat{G}\|x-y\|_\infty.$$

Donc F un opérateur contractant , Alors d'après le théorème de point fixe de Banach N admet un point fixe unique qui est la solution du problème (3.5).
D'où le résultat . □

Théorème.3.11

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.
2. Ils existent $p \in C\left(J \times \mathbb{R}^+\right)$et $\Psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continues et non décroissantes. Telles que
$$|f(t,u)| \leq p(t)\Psi(|u|), \text{ pour } t \in J \text{ et tout } u \in \mathbb{R}.$$
3. Il existe une constante $M > 0$, telle que
$$\frac{M}{p^*\Psi(M)\widehat{G}} > 1$$
où
$$p^* = \sup\{p(s), s \in J\}.$$

Alors le problème aux limites (3.5) admet au moins un point fixe.

Preuve :

Soit $H = \{y \in C(J, \mathbb{R}), \|y\|_\infty \leq M\}$, Il est clair que le sous-ensemble H est fermé et convexe. Nous allons montrer que F satisfait les conditions du théorème de point fixe de Schauder.

1. Montrons que F est continu ,
Soit $\{y_n\}$ une suite telle que $y_n \to y$ dans $C(J, \mathbb{R})$. Alors, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)| \, |f(s, y_n(s))| ds - \int_0^T |G(t,s)| \, |f(s,y(s))| ds \\ &\leq \int_0^T |G(t,s)| \, |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| \, ds \end{aligned}$$

Puisque f est continue, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que.

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \to 0 \text{ quand } n \to 0.$$

2. Montrons que F transforme H en un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$.
   Soit $y \in H$, alors pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}(Fy)(t) &\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))|ds \\ &\leq p(t)\Psi(|y(t)|)\int_0^T |G(t,s)|ds \\ &\leq p^*\Psi(\|y\|_\infty)\int_0^T |G(t,s)|ds\end{aligned}$$

   donc,

$$\|Fy\|_\infty \leq p^*\Psi(M)\widehat{G} := l.$$

3. Montrons que F transforme H en un ensemble équicontinu de $C(J,\mathbb{R})$;
   Soit $y \in H, t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2$; alors

$$\begin{aligned}|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &= \left|\int_0^T G(t_2,s) f(s,y(s))ds - \int_0^T G(t_1,s) f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\,|f(s,y(s))|ds \\ &\leq p^*\Psi(\|y\|_\infty)\int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\,ds \xrightarrow{t_1\to t_2} 0.\end{aligned}$$

   D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, $F(H)$ est relativement compact pour tout borné de H ,Alors F est complètement continu .

4. Montrons que $F(H) \subset H$;
   Soit $y \in H$, Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}|(Fy)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))|ds \\ &\leq p^*\Psi(\|y\|_\infty)\int_0^T |G(t,s)|ds\end{aligned}$$

   alors

$$\|Fy\|_\infty \leq p^*\Psi(M)\widehat{G}$$

   par la troisième condition de le théorème

$$\|Fy\|_\infty \leq M.$$

Par suite, D'après le théorème du point fixe de Schauder F possède au moins un point fixe qui est une solution du problème aux limites (3.5).

D'où le résultat . □

Exemple.3.3

Considérons le problème aux limites

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\alpha}y(t) &= \frac{e^{-t}}{10\left(1+e^{t}\right)}|y(t)|, t \in [0,1], \alpha \in (0,1] \\
y(0) + \int_0^1 y(s)ds &= y(1)
\end{aligned}
$$

Soit

$$
f(t,x) = \frac{e^{-t}}{10\left(1+e^{t}\right)}|x|
$$

soit $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in J$. Alors on a

$$
\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{10\left(1+e^{t}\right)}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{20}|x-y|
\end{aligned}
$$

Donc f est lipschitzienne ,
et on a

$$
G(t,s) = \begin{cases} \frac{-(1-s)^{\alpha}+\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq \text{s} < \text{T} \\ \frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{t} \leq \text{s} \leq \text{T} \end{cases}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 G(t,s)ds &= \int_0^t G(t,s)ds + \int_t^1 G(t,s)ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{-(1-s)^{\alpha}+\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds + \int_t^1 \left(\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
&= \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t - \left[\frac{\alpha(t-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} \right]_0^t + \left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_0^t \\
&\quad + \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right]_t^1 - \left[\frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_t^1 \\
&= \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
\widehat{G} &< \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)} \\
A\widehat{G} &< \frac{1}{10}\left(\frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)} \right) \\
&< 1
\end{aligned}
$$

Alors d'après le théorème.3.10 , le problème (3.5) admet une solution unique sur$[0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du :

1. Problème de Cauchy généralisée pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo dans l'espace des fonctions sommables et l'espace des fonctions continues avec conditions initiales .
2. Problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo dans l'espace des fonctions continues avec :
   a) Conditions non locales .
   b) Conditions intégrales.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach, Schaefer et Schauder.

Bibliographie

[1] M. Benchohra , F.Ouaar, Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions , Math. Anal and Appl 2 (2010), 7-15

[2] B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak. Fixed Point Theory and Applications, 2004

[3] .H. Brézis. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York,2011.

[4] .L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 494-505.

[5] L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem. Selected problems of mathematics, 25–33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ. Technol, Krakow, 1995

[6] L. Byszewski , V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, Appl. Anal. 40 (1991), 11-19.

[7] K.Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equation, An ApplicationOriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Ed Springer, 2004.

[8] M. Henry, La théorie de la fonction gamma, Limbourg, 1858.

[9] A. A.Kilbas,B.Bonilla and J. J.Trujillo, Fractional integrals and derivatives, and diferential equations of fractional order in weighted spaces of continuous functions (Russian), Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi, 44(6), (2000) 18-22.

[10] A. A.Kilbas, Hadamard-type fractional calculus, J. Korean Math. Soc, 38(6), (2001) 1191-1204.

[11] A. A. Kilbas,S. G. Samko, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers, Longhorne, PA, 1993.

[12] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[13] A. Kirillov, A. Gvichiani, Théorèmes Et Problèmes D'analyse Fonctionnelle, Éditions Mir Moscou , 1982.

[14] A.N.Kolmogorov, S.V.Fomine, (1974). Elements de la theorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle : (Trad. du russe par michel dragnev). Moscou : Editions Mir.

[15] A.N.Kolmogorov, S.V.Fomine, Natascha Artin Brunswick and Alan Jeffrey. "Measure, Lebesgue integrals, and Hilbert space." (1961).

[16] V. Komornik, Lectures on Functional Analysis and the Lebesgue Integral (Springer-Verlag London 2016).

[17] K. S. Miller , B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley, Sons Inc, New York, 1993.

[18] I. Podlubny. Fractional differential equations. Academic Press , 1999.

[19] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems SpringVerlag, New York, 1986.

[20] Y. Zhou, Basic Theory Of Fractional Differential Equations. Xiangtan University, China, 2014.