REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ AMAR THELIDJI-LAGHOUAT

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHS ET INFORMATIQUE

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION D'UN DIPLOME

DE LICENCE EN MATHEMATIQUE

THEME

Résolution de systéme non linéaire par la méthode de Newton

Encadré par :

M.Abdelaziz Rahmoun

Réalisé par :

-Messaoudi Zineb

-Senouci Bouchra

Année universitaire :2013/1014

بسم الله الرحمن الرحيم

REMERCIEMENT

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier notre professeur M. Aek. Mokhtari, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nous tenons également à remercier notre encadreur

M. A. Rahmoun.

A nos familles qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

A notre chère ami Atallah Merzoug

Un remerciement particulier et sincère pour tous vos efforts fournis. Vous avez toujours été présent.

Que ce travail soit un témoignage de notre gratitude et notre profond respect.

MERCIE !

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père ***Boubakeur****.*

A ma très chère mère ***Elhadja***

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères et mes sœurs ***Amina, Mohamed, Djihad, Ibrahim et Merieme*** *.*

A mes tantes ***Hadjer ,Sara.***

A ma grande famille .

A ma meilleure amie ***Bouchra Senouci*** *et sa famille .*

A mon fiancé ***Atallah merzoug***

Ton encouragement et ton soutien étaient la bouffée d'oxygène qui me ressourçait dans les moments pénibles, de solitude et de souffrance.

Merci d'être toujours à mes côtés, par ta présence, par ton amour dévoué et ta tendresse, pour donner du goût et du sens à notre vie.

En témoignage de mon amour, de mon admiration et de ma grande affection , je te prie de trouver dans ce travail l'expression de mon estime et mon sincère attachement.

Zineb

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon Père Abedelkader
Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.
Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.
Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma très chère mère Hedjaj Fatima

A celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite

À mes adorables sœurs ***Houda***, ***Sarah***, ***Nadjet*** *et* ***Rekia.***

A mes frères ***Farouk***, ***Habib*** et ***Monib.***

A ma meilleure amie ***Messaoudi Zineb*** *et sa famille*

Et sans oublie ma trés chére amie ***Kadidja Chabni***

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur
A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet :
A mon fiancé ***Mohammed Boudjelal***
A mes sœurs, maitresses : Amina Messaoudi, Messaouda Behtita , Asma Messaoudi et Aicha Ben Mahia.

Et on général à tous les personnes qu'ils aiment Bouchra et faire une petite geste pour ma réussite, Que dieu tous puissant vous protègent et Merci.

Bouchra

Table des matières

Introduction

L'objet de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier les méthodes de résolutions de certains problèmes mathématiques, en général issus de problèmes réels, et dont on cherche à calculer la solution à l'aide d'un ordinateur.

Exemples de problèmes à résoudre :

- Systèmes linéaires ou non linéaires.

- Optimisation.

- Equations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Etc. . .

dans notre travail en intéressent à la résolution numérique de systèmes non linéaires avec la méthode de Newton..

Dans le Première chapitre nous donnons quelque préliminaires (Espaces vectoriels normés, Différentielle forte, Les espaces complets)

Deuxième : Méthode de newton (Principe de la méthode)

Troisième : La convergence du processus de Newton (Remarques générales, Existence des solutions d'un systéme et convergence de la méthode, Unicité de la solution)

En finalement la méthode de Newton modifiée (Principe de la méthode).

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une norme ssi :

1-$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$(homogénéité)

2- $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire)

3-$\forall x \in E, N(x) \geq 0$ (positivité)

4-$\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (définie)

Un espace vectoriel muni d'une norme appelé espace vectoriel normé (en abrégé $< EVN >$).

Exemple 1.1.2.

a) l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application <<valeur absolue>> $x \longmapsto | x |$

b) l'espace vectoriel $E = C \approx \mathbb{R}^2$ muni de l'application <<module>> $x \longmapsto | x |$

c) tout espace vectoriel ecludien $(E; (.,.))$ muni de la norme

$N(x) = \| x \| := \sqrt{(x,x)}$ est un EVN.

1.2 Différentielle forte

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et f une application d'une ouvert O de X dans Y.

Nous dirons que cette application est différentiable en une point donné $x_0 \in O$, s'il existe un opérateur linéaire borné $[f'(x) \in L(X,Y)]$ tel que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(x_0, h) \qquad (1)$$

Où

$$\frac{\|\alpha(x_0,h)\|}{\|h\|} \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \|h\| \to 0 \qquad (2)$$

-L'expression $f'(x_0)h$ (qui représente évidement un élément de l'espace Y,

$\forall h \in X$) s'appelle différentielle forte de l'application f au point x_0.

-L'opérateur linéaire $f'(x_0)$ s'appelle dérivée forte de l'application f au point x_0.

-Si l'application f est différentiable au point x_0, la dérivée est définie de façon unique.

En effet, soit :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f_1'(x_0)h + \alpha_1(x_0, h) = f_2'(x_0) + \alpha_2(x_0, h)$$

Alors

$$f_1'(x_0)h - f_2'(x_0)h = \alpha_2(x_0, h) - \alpha_1(x_0, h)$$

D'aprés (2) on a :

$$\frac{\left\|f_1'(x_0)h - f_2'(x_0)h\right\|}{\|h\|} \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \|h\| \to 0 \qquad (3)$$

Où,si $f_1'(x_0) \neq f_2'(x_0)$ il existe h tel que

$$\frac{\left\|f_1'(x_0)h - f_2'(x_0)h\right\|}{\|h\|} = \lambda \neq 0$$

Mais alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ on a :

$$\frac{\left\| f_1'(x_0)(\varepsilon h) - f_2'(x_0)(\varepsilon h) \right\|}{\|\varepsilon h\|} = \lambda$$

D'aprés (3) est impossible.

1.3 Les espaces complets

Définition 1.3.3. La suite (x_n) est de Couchy si elle vérifier l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

1) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N(\varepsilon)$ tel que :$d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pour tout $m, n \geq N(\varepsilon)$;

2) $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ pour $n \to +\infty$ uniformément en $p \geq 0$;

3) diam $\{ x_n \setminus n \geq N \} \to 0$ lorsque $N \to +\infty$.

Toute suite convergente est évidament de Couchy. La réciproque est fausse

Définition 1.3.4. Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Couchy dans E est convergente.

1.3.1 Complétion des espaces normés

On sait qu'un espace normé $(X, \|\|)$ n'est pas nécessairement complet,(c'est à dire n'importe quelle suite de Couchy n'est pas convergente).On a alors le théoréme suivant :

Théorème 1.3.5. *Soit* $(X, \|\|)$ *un espace normé non complet.*

Alors il existe un espace normé $(\widetilde{X}, \|\|_\sim)$ *et un sous espace* $\widetilde{Y}$ *de* $\widetilde{X}$ *tels que :*

1) $(\widetilde{X}, \|\|_\sim)$ *est complet ;*

2) $\widetilde{Y}$ *est dense dans* $\widetilde{X}$ *;*

3) $(X, \|\|)$ *est isométrique à* $(\widetilde{X}, \|\|_\sim)$.

Démonstration.

1) **Construction de l'espace normé** $(\widetilde{X}, \|\|_\sim)$.

Soit C l'ensemble des suites de Couchy de X. On va définir une relation d'équivalence sur l'ensemble C de la maniére suivante :

$(x_n)_n \in C$

$(y_n)_n \in C$

$(x_n)_n \sim (y_n)_n$ si et seulement si la suite $(x_n - y_n)_n$ converge vers zéro :

$\|x_n - y_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$

cette relation est :

a) *refléxive :* $(x_n)_n \in C$; $x_n - x_n \to 0 \Longrightarrow (x_n)_n \sim (x_n)_n$

b) *symétrique :*$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Longrightarrow x_n - y_n \to 0 \Longrightarrow -(y_n - x_n) \to 0 \Longrightarrow (y_n) \sim (x_n)$

c) *transitive :*$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Leftrightarrow x_n - y_n \to 0$

$$(y_n)_n \sim (z_n)_n \Longleftrightarrow y_n - z_n \to 0$$

$$\Longleftrightarrow x_n - z_n = (x_n - y_n) + (y_n - z_n) \to 0.$$

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence .

Posons $\tilde{X}$ l'ensemble des classes d'équivalence

$\tilde{X} = C/\sim$. Soit $\tilde{x}$ un élément de $\tilde{X}$ càd $\tilde{x}$ une classe d'équivalence : Si

$$\begin{cases} (x_n)_n \in \tilde{x} \\ (y_n)_n \in \tilde{x} \end{cases} \Longrightarrow x_n - y_n \to 0.$$

Notons que si (x_n) est une suite de Couchy pas nécessairement convergente , alors la suite $(\|x_n\|)_n$ est convergente .

En effet $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon \Longrightarrow (\|x_n\|)_n$ est une suite de Couchy de

$\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ est complet donc convergente .Posons alors

$$\|\tilde{x}\|_{\sim} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \text{ où } (x_n)_n \in \tilde{x} \text{ et } \tilde{x} \text{ etant un élément quelconque de } C/\sim = \tilde{X}$$

L'application :

$$\tilde{X} \to \mathbb{R}_+$$

$$\tilde{x} \to \|\tilde{x}\|_{\sim} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

est une norme car elle vérifie

$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_{\sim} \leq \|\tilde{x}\|_{\sim} + \|\tilde{y}\|_{\sim}$

$\left\|\lambda\tilde{x}\right\|_{\sim} \leq |\lambda| \|\tilde{x}\|_{\sim}$ et $\|\tilde{x}\|_{\sim} = 0 \Longrightarrow \tilde{x} = \tilde{0}$.

$(\ C/\sim, \|\|_{\sim})$ est un espace vectoriel normé .

Contruisons une isométrie entre $(X, \|\|)$ et $(\ C/\sim, \|\|_{\sim})$.

Pour tout $x \in X$, la suite $(x_n)_n$ avec $x_n = x$ $\forall n$ est une suite de Couchy car $\|x_n - x_m\| = \|x - x\| < \varepsilon$.

La suite $(x_n)_n \in C$ (où $x_n = x$); donc $(x_n)_n \in \tilde{x} \in C/\sim$.

On peut alors définir l'application :

$$\phi : X \to \tilde{X} = C/\sim$$

$$x \to \phi(x) = \tilde{x}$$

Il est evident que

$\phi(x + y) = \widetilde{x + y} = \tilde{x} + \tilde{y} = \phi(x) + \phi(y)$

$\phi(\lambda x) = \widetilde{\lambda x} = \lambda\tilde{x} = \lambda\phi(x)$.Noter que C est un espace vectoriel donc $C/\sim$ est un espace vectoriel quotient.

Mais $\|\phi(x)\|_{\sim} = \|\tilde{x}\|_{\sim} \overset{déf}{=} \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$ d'où $\|\phi(x)\|_{\sim} = \|x\|$ et cette application préserve la norme. Cette application est injective car

$\phi(x) = \tilde{x} = \tilde{0} \Longrightarrow \|\phi(x)\|_{\sim} = \|\tilde{x}\|_{\sim} = \left\|\tilde{0}\right\|_{\sim} = \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Mais elle n'est pas surjective. Posons alors $\tilde{Y} = \{\phi(x),\, x \in X\}$

l'application $\phi : X \to \tilde{Y}$ est surjective car toute fonction f définie de $E \to f(E)$ est surjective.

Par suite ϕ est :

$i)$ linéaire ;

$ii)$ conserve la norme ;

$iii)$ bijective de $X \to \tilde{Y}$.

c'est donc une isométrie de $(X, \|\|)$ dans $(\tilde{Y}, \|\|_{\sim})$ où $\tilde{Y} \subset \tilde{X}$; $\tilde{Y}$ est un sous espace vectoriel de $\tilde{X}$.

2) Montrons que $\tilde{Y}$ est dense dans $\tilde{X}$

$$\overline{\tilde{Y}} = \tilde{X} \quad ; \tilde{Y} \subset \tilde{X} \Longrightarrow \overline{\tilde{Y}} \subset \overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$$

il faut montrer que si $\tilde{x} \in \tilde{X} \Longrightarrow \tilde{x} \in \overline{\tilde{Y}}$.

Soit $(x_n)_n$ un élément de $\tilde{x}$; càd $(x_n)_n$ de Couchy, $(\phi(x_n))_n$ est une suite de $\tilde{Y}$ par définition de $\tilde{y}$

$$\|\phi(x_n) - \tilde{x}\|_{\sim} = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_{\sim} = \varepsilon \text{ car } (x_n) \in \tilde{x}$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x_n) = \tilde{x}$ dans la norme $\|\|_{\sim}$.

Donc $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}, \exists$ une suite $\phi(x_n)$ de $\tilde{Y}$ telle $\phi(x_n) \to \tilde{x}$.

càd $\tilde{Y}$ est dense dans $\tilde{X}$.

3) Montrons que $(\tilde{X}, \|\|_{\sim})$ est complet

Soit $(\tilde{x}_n)_n$ une suite de Couchy de $(\tilde{X}, \|\|_{\sim})$ c-à-d $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| < \varepsilon$ pour $n > m > n_0$.

$\overline{\tilde{Y}} = \tilde{X}$ et $(\tilde{x}_n)$ appartient à $\tilde{X}$ il existe une suite $(\tilde{y}_m)$ de $\tilde{Y}$ telle que $\|\tilde{y}_m - \tilde{x}_n\| < \varepsilon$ pour $n = 1, 2, ...$ mais $(\tilde{y}_m)_m$ est une suite de Couchy car

$$\|\tilde{y}_m - \tilde{y}_p\| \leq \|\tilde{y}_m - \tilde{x}_n\| + \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_p\| < 2\varepsilon.$$

Comme $(\tilde{X}, \|\|_{\sim})$ est complet alors $\tilde{y}_m \to \tilde{y} \Longrightarrow \|\tilde{y}_m - \tilde{y}\| < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \|\tilde{x}_n - \tilde{y}\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_m + \tilde{y}_m - \tilde{y}\|$$

$$\leq \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_m\| + \|\tilde{y}_m - \tilde{y}\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

Chapitre 2

Méthode de Newton

2.1 Principe de la méthode

Considérons un systéme d'équations en général non linéaire

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

à premiérs membres réels.

Ecrivons le systéme (1) sous une forme abrégeé. L'ensemble des arguments $x_1, x_2, ...x_n$ peut être considéré comme un vecteur de dimension n

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}.$$

De façon analogue, l'ensemble des fonctions $f_1, f_2, ..., f_n$ forme un vecteur de dimension n (vecteur fonction)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Le systéme (1) peut donc s'écrire sous une forme abrégeé

$$f(x) = 0 \qquad (1')$$

Pour résoudre le systéme $(1')$ on fera appel à la méthode des approximations successives.

Supposons qu'on ait trouvé la $p-iéme$ approximation

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, ..., x_n^{(p)})$$

d'une des solutions isolées $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de l'équation vectorielle $(1')$.La solution exacte de $(1')$ pourra alors se mettre sous la forme

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)} \qquad (2)$$

où $\varepsilon^{(p)} = (\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, ..., \varepsilon_n^{(p)})$ est une correction (`erreur de solution).`

En portant l'expression (2) dans $(1')$, on aura

$$f(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = 0 \qquad (3)$$

Supposons que la fonction $f(x)$ soit continûment dérivable dans un certain domaine convexe qui contient x et $x^{(p)}$ et décomposons le premier membre de l'équation (3) par rapport aux puissances du petit vecteur $\varepsilon^{(p)}$ en nous bornant aux termes linéaires

$$f(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}) = f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0 \qquad (4)$$

ou, sous une forme développée

$$
(4')... \begin{cases}
f_1(x_1^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)},x_2^{(p)}+\varepsilon_2^{(2)},....x_n^{(p)}+\varepsilon_n^{(p)}) = f_1(x_1^{(p)},x_2^{(p)},...,x_n^{(p)}) + f'_{1x_1}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} \\
\qquad + f'_{1x_2}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_2^{(p)} + ... + f'_{1x_n}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0 \\
f_2(x_1^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)},x_2^{(p)}+\varepsilon_2^{(2)},....x_n^{(p)}+\varepsilon_n^{(p)}) = f_2(x_1^{(p)},x_2^{(p)},...,x_n^{(p)}) + f'_{2x_1}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} \\
\qquad + f'_{2x_2}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_2^{(p)} + ... + f'_{2x_n}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0 \\
\qquad .... \\
f_n(x_1^{(p)}+\varepsilon_1^{(p)},x_2^{(p)}+\varepsilon_2^{(2)},....x_n^{(p)}+\varepsilon_n^{(p)}) = f_n(x_1^{(p)},x_2^{(p)},...,x_n^{(p)}) + f'_{nx_1}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_1^{(p)} \\
\qquad + f'_{nx_2}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_2^{(p)} + ... + f'_{nx_n}(x_1^{(p)},x_2^{(p)},....,x_n^{(p)})\varepsilon_n^{(p)} = 0
\end{cases}
$$

Les formules (4) et $(4')$ entraînent qu'il faut entendre par dérivée $f'(x)$ la matrice jacobienne du systéme des fonctions $f_1, f_2, ...f_n$ des variables $x_1, x_2, ...x_n$

$$
f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\
.... \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{bmatrix}
$$

ou, en écriture condensée

$$f'(x) = W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \qquad (i,j = 1,2,....,n).$$

$(4')$ est un systéme linéaire par rapport aux erreurs $\varepsilon_i^{(p)}(i = 1,2,....,n)$ à matrice $W(x)$, aussi peut-on mettre la formule (4) sous la forme :

$$f(x^{(p)}) + W(x^{(p)})\varepsilon^{(p)} = 0.$$

En supposont que la matrice $W(x^{(p)})$ est réguliére, on obtient :

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}).$$

Par conséquent

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}) \qquad (p = 0,1,2,.....) \qquad (5)$$

On prend pour approximation initiale $x^{(0)}$ une valeur grossiére de la solution cherchée.

Exemple 2.1.6. Trouver par la méthode de Newton la solution positive approchée du systéme d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+y^2-4z=0, \\ 3x^2-4y+z^2=0, \end{cases}$$

en partant de l'approximation initiale

$x_0=y_0=z_0=0,5.$

Solution

On a

$$f(x)=\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y^2-4z \\ 3x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}$$

D'où

$$f(x^{(0)})=\begin{bmatrix} 0,25+0,25+0,25-1 \\ 0,50+0,25-2,00 \\ 0,75-2,00+0,25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix}.$$

Formons la matrice jacobienne

$$W(x)=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

On a

$$W(x^{(0)})=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\det W(x^{(0)}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -40.$$

Cherchons la matrice inverse

$$W^{-1}(x^{(0)}) = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}.$$

D'aprés la formule (5) la premiére approximation est

$$x^{(1)} = x^{(0)} - W^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)})$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{-7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix}.$$

Calculons ensuite la deuxiéme approximation $x^{(2)}$.On a

$$f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0,875^2 + 0,500^2 + 0,375^2 - 1 \\ 2 \times 0,875^2 + 0,500^2 - 4 \times 0,375 \\ 3 \times 0,875^2 - 4 \times 0,500 + 0,375^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{bmatrix}$$

et

$$W(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2 \times 0,875 & 2 \times 0,500 & 2 \times 0,375 \\ 4 \times 0,875 & 2 \times 0,500 & -4 \\ 6 \times 0,875 & -4 & 2 \times 0,375 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{bmatrix}$$

D'où

$$\det W(x^{(1)}) = \begin{vmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 1,750 & 0 & -4,750 \\ 12,250 & 0 & 3,750 \end{vmatrix} = -64,75$$

et

$$W^{-1}(x^{(1)}) = -\frac{1}{64,75} \begin{bmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,6250 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{bmatrix}$$

En appliquant la formule (5),on obtient :

$$x^{(2)} = x^{(1)} - W^{-1}(x^{(1)})f(x^{(1)})$$

$$= \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix} + \frac{1}{64,75} \begin{bmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,6250 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,08519 \\ 0,00338 \\ 0,00507 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,78981 \\ 0,49662 \\ 0,36993 \end{bmatrix}$$

De façon analogue on calcule les approximations suivantes :

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,78521 \\ 0,49662 \\ 0,36992 \end{bmatrix}$$

$$f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0,00001 \\ 0,00004 \\ 0,00005 \end{bmatrix}$$

etc.

En se bornant à la troisiéme approximation,on a

$x = 0,7852;\ \ y = 0,4966;\ \ z = 0,3699.$

Chapitre 3

La convergence du processus de Newton

3.1 Remarques générales

Dans ce qui suit il serait commode de considérer les ensembles des fonctions comme *vecteur fonction* ou *fonction matricielle*.Pour alléger l'exposé nous allons généraliser à ces cas la notion de la dérivée.

Soient $x = (x_1, ..., x_n)$ et

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{bmatrix},$$

où $f_i \in C^{(1)} (i = 1, 2, ..., n)$.

Définition 3.1.7. Par dérivée $f'(x)$ on entend la matrice jacobienne du systéme des fonctions

$f_i(i = 1, ..., n)$ par rapport aux variables $x_1, ...x_n$

$$f'(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]. \qquad (1)$$

La fonction matricielle

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x)......f_{1r}(x) \\ .... \\ f_{n1}(x)......f_{nr}(x) \end{bmatrix}.$$

Peut être considérée comme un ensemble de n vecteurs fonctions

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) \\ . \\ . \\ f_{n1}(x) \end{bmatrix}, ..., F_r(x) = \begin{bmatrix} f_{1r}(x) \\ . \\ . \\ f_{nr}(x) \end{bmatrix}.$$

Il est donc naturel d'entendre par dérivée $F'(x)$ l'ensemble

$$F'(x) = [F_1'(x)...F_r'(x)]$$

où

$$F_k'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1k}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{1k}}{\partial x_n} \\ .... \\ \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

sont les matrices jacobiennes $(k = 1, 2, ..., r)$.

Définition 3.1.8. Si $F(x) = [f_{ij}(x)]$ est une matrice fonctionnelle $n \times r$ et

$f_{ij}(x) \in C^{(1)}$,on pose

$F'(x) = [F_k'(x)]$

où

$F_k'(x) = \left[\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ...r).$

En particulier, si le vecteur fonction $f(x) = [f_i(x)]$ est tel que $f_i(x) \in C^{(2)}$,

$f''(x) = [W_1(x)...W_n(x)]$

avec

$W_k(x) = \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}\right]$ $(k = 1, 2, ..., n)$.

Pour évaluer les matrices nous utilisons dans ce paragraphe la m-norme en omettant l'indice m pour abréger l'écriture :

$$\|f(x)\| = \max_i \mid f_i(x) \mid;$$

$$\|f'(x)\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}\right|;$$

$$\|f''(x)\| = \max_k \|W_k(x)\| = \max_k \left\{ \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_k \partial x_j}\right| \right\} \text{,etc.}$$

D'une façon analogue

$$\|F(x)\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}(x)|\,;$$

$$\|F'(x)\| = \max_{i,j} \sum_{k}^{n} \left|\frac{\partial f_{ij}(x)}{\partial x_k}\right|.$$

Déduisons ou préalable quelques estimations des $m-$normes des différences de valeurs des fonctions matricielles analogues à la formule des accroissements finis. qui nous seront utiles dans ce qui suit.

Lemme 3.1.9. *Si* $F(x) = [f_{ij}(x)]\,(n \times r)$

où $f_{ij}(x)$ *sont continues avec leurs dérivées permiéres partielles dans un domaine convexe qui contient les points* x *et* $x + \Delta x$*, alors*

$$\|F(x + \Delta x) - F(x)\| \leq r\,\|\Delta x\|\,\|F'(\xi)\| \qquad (3)$$

où $\xi = x + \theta\Delta x$, $0 < \theta < 1$,*et par norme des matrices on entend la m-normes.*

Démonstration. En appliquant la formule de Taylor,on obtient :

$F(x+\Delta x)-F(x)=[f_{ij}(x+\Delta x)-f_{ij}(x)]=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_{ij}(\xi_{ij})}{\partial x_k}\Delta x_k\right]$

avec $\xi_{ij}=x+\theta_{ij}\Delta x, 0<\theta_{ij}<1, i=1,2...,n; j=1,2,....,r$.Si l'on fixe x et $x+\Delta x$, on aura :

$$\begin{aligned}\|F(x+\Delta x)-F(x)\| &= \max_i \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(\xi_{ij})}{\partial x_k}\Delta x_k\right| \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(\xi_{ij})}{\partial x_k}\right||\Delta x_k| \\ &\leq \max_k |\Delta x_k| . \sum_{j=1}^{r}\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(\xi_{ij})}{\partial x_k}\right| \\ &= r\,\|\Delta x\| \max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(\xi_{ij})}{\partial x_k}\right| .\end{aligned}$$

Le nombre de couples (i,j) étant fini,il existe un couple (p,q) tel que

$$\max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(\xi_{ij})}{\partial x_k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{pq}(\xi_{pq})}{\partial x_k}\right| \leq \max_{i,j}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(\xi_{pq})}{\partial x_k}\right| = \|F'(\xi)\|$$

où $\xi=\xi_{pq}$.

Ainsi

$$\|F(x+\Delta x)-F(x)\|\leq r\,\|\Delta x\|\,\|F'(\xi)\|$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Corollaire 3.1.10. *Si*

$$f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ f_n(x)\end{bmatrix},$$

il vient

$$\|f(x+\Delta x)-f(x)\|\leq\|\Delta x\| . \|f'(\xi)\|,$$

où $\xi=x+\theta\Delta x$ *et* $0<\theta<1$.

Ici $r=1$.

Corollaire 3.1.11. *Avec $f(x) \in C^{(2)}$ on a :*

$$\|f'(x+\Delta x) - f'(x)\| \leq n\,\|\Delta x\|\,\|f''(\xi)\|,$$

où $\xi = x + \theta\Delta x$ et $0 < \theta < 1$.

Lemme 3.1.12. *Si*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ f_n(x) \end{bmatrix} \in C^{(2)}$$

dans un domaine convexe qui contient les points x et $x + \Delta x$, alors

$$\|f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x\| \leq \tfrac{1}{2}n\,\|\Delta x\|^2.\,\|f''(\xi)\| \qquad (4)$$

où $\xi = x + \theta\Delta x$ et $0 < \theta < 1$.

Démonstration. En utilisant la formule de binôme de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x\| &= \|[f_i(x+\Delta x) - f_i(x) - df_i(x_i)]\| \\
&= \tfrac{1}{2}\left\|\left[\sum_{j.k} \frac{\partial^2 f_i(\xi_i)}{\partial x_j \partial x_k}\Delta x_j \Delta x_k\right]\right\| \\
&\leq \tfrac{1}{2}\left\|\left[\sum_j \mid \Delta x_j \mid \sum_k \mid \frac{\partial^2 f_i(\xi_i)}{\partial x_j \partial x_k} \mid \Delta x_k \mid\right]\right\| \\
&\leq \tfrac{1}{2}\max_j \mid \Delta x_j \mid .\max_k \mid \Delta x_k \mid .\left\|\left[\sum_j\sum_k \mid \frac{\partial^2 f_i(\xi_i)}{\partial x_j \partial x_k} \mid\right]\right\| \\
&= \tfrac{1}{2}\,\|\Delta x\|^2 \left\|\left[\sum_j\sum_k \mid \frac{\partial^2 f_i(\xi_i)}{\partial x_j \partial x_k} \mid\right]\right\| \qquad (5)
\end{aligned}$$

où $\xi_i = x + \theta_i \Delta x, 0 < \theta_i < 1$.

Puisque

$$\sum_k \mid \frac{\partial^2 f_i(\xi_i)}{\partial x_j \partial x_k} \mid \leq \max_{i,j}\sum_k \mid \frac{\partial^2 f_i(\xi_i)}{\partial x_j \partial x_k} \mid = \sum_k \mid \frac{\partial^2 f_p(\xi_p)}{\partial x_q \partial x_k} \mid \leq \max_{i,j} \sum_k \mid \frac{\partial^2 f_i(\xi_p)}{\partial x_j \partial x_k} \mid = \|f''(\xi_p)\|,$$

compte tenu du sens de la norme, l'inégalité (5) entraîne

$$\|f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x\| \leq \tfrac{1}{2}\|\Delta x\|^2 [\|f''(\xi)\|] = \tfrac{n}{2}\|\Delta x\|^2 \|f''(\xi)\|,$$

où $\xi = \xi_p = x + \theta\Delta x$ et $0 < \theta < 1$. ■

3.2 Existence des solutions d'un systéme et convergence de la méthode

Théorème 3.2.13. *Soit un systéme réel d'équations algébriques ou transcendantes non linéaires*

$f(x) = 0 \qquad (1)$

où le vecteur fonction

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots\ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots\ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

avec ses dérivées partielles premiéres et secondes est défini et continu dans un certains domaine ω*,c'est-à-dire*

$f(x) \in C^{(2)}(\omega).$

Posons que $x^{(0)}$ *est un point contenu dans* ω *avec son* $\pounds$*-voisinage fermé*

$\bar{U}_{\pounds}(x^{(0)}) = \left\{\left\|x - x^{(0)}\right\| \leq \pounds\right\} \subset \omega$

où par norme on entend la m-norme et où l'on vérifie les conditions suivantes :

1) la matrice jacobienne $W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$ *pour* $x = x^{(0)}$ *posséde une inverse*

$\Gamma_0 = W^{-1}(x^{(0)})$ *avec* $\|\Gamma_0\| \leq A_0^*$

2) $\left\|\Gamma_0 f(x^{(0)}\right\| \leq B_0 \leq \frac{\pounds}{2}$

C'est-à-dire,si $A = [a_{ij}]$:

$$\|A\| = \|A\|_m = \max_i \sum_j | a_{ij} | .$$

3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq C$

pour $i, j = 1, 2, ..., n$ *et* $x \in \bar{U}_{\pounds}(x^{(0)})$

4) Les constantes A_0, B_0 *et* C *satisfont à l'inégalité*

$$\mu_0 = 2nA_0B_0C \leq 1. \qquad (2)$$

Alors, pour une approximation initiale $x^{(0)}$*, le processus de Newton*

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}) \qquad (3)$$

$(p = 0, 1, 2, ...)$ *converge et le vecteur limite*

$$x^* = \lim_{p\to\infty} x^{(p)}$$

est une solution du systéme (1) telle que

$$\left\|x^* - x^{(0)}\right\| \leq 2B_0 \leq \pounds.$$

Démonstration. Introduisons les notations

$h_p = \left\|x^{(p+1)} - x^{(p)}\right\| = \max\limits_k \left|x_k^{(p+1)} - x_k^{(p)}\right|,$

$\Gamma_p = W^{-1}(x^{(p)}) \qquad (p = 0, 1, 2, ...).$

La formule (3) entraîne

$$h_p = \left\|\Gamma_p f(x^{(p)})\right\|.$$

Les conditions 1 et 4 donnent les estimations des quantités Γ_p et $\Gamma_p f(x^{(p)})$.

Examinons d'abord le cas $p = 1$. En utilisant la condition 2, on a :

$h_0 = \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| = \left\|W^{-1}(x^{(0)})f(x^{(0)})\right\| \leq B_0 \leq \frac{\pounds}{2}$

donc $\qquad h_0 \leq B_0$

et

$$\bar{U}_{\frac{\pounds}{2}}(x^{(1)}) \subset \bar{U}_{\pounds}(x^{(0)}).$$

*En d'autres termes, si $W(x^{(0)}) = [a_{ij}]$,alors $\Gamma_0 = W^{-1}(x^{(0)}) = \left[\frac{A_{ij}}{\Delta}\right]$, où A_{ij} sont les cofacteurs des éléments a_{ij} et $\Delta = \det[a_{ij}]$, par conséquent

$$\|\Gamma_0\| = \max_i \tfrac{1}{|\Delta|} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \,.$$

Pour évaluer $\Gamma_1 = W^{-1}(x^{(1)})$, appliquons la relation $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pour mettre cette grandeur sous la forme

$$\Gamma_1 = \left[W(x^{(0)}) \cdot \Gamma_0 W(x^{(1)})\right]^{-1} = \left[\Gamma_0 W(x^{(1)})\right]^{-1} \cdot \Gamma_0. \qquad (4)$$

En tenant compte de la condition 1 du théoréme, on a :

$$\begin{aligned}\left\|E - \Gamma_0 W(x^{(1)})\right\| &= \left\|\Gamma_0 \left[W(x^{(0)}) - W(x^{(1)})\right]\right\| \\ &\leq \|\Gamma_0\| \left\|W(x^{(0)}) - W(x^{(1)})\right\| \\ &\leq A_0 \left\|W(x^{(1)}) - W(x^{(0)})\right\| .\end{aligned}$$

Puisque la condition 3 améne

$$\|f''(x)\| = \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \left|\tfrac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq C$$

en vertu du **corollaire 3.1.11** on obtient :

$$\left\|W(x^{(1)}) - W(x^{(0)})\right\| = \left\|f'(x^{(1)}) - f'(x^{(0)})\right\| \leq n \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| C \leq nB_0C$$

et donc

$$\left\|E - \Gamma_0 W(x^{(1)})\right\| \leq nA_0B_0C = \tfrac{\mu_0}{2} \leq \tfrac{1}{2}.$$

Par suite,il existe une matrice inverese

$$\left[\Gamma_0 W(x^{(1)})\right]^{-1} = \left\{E - (E - \Gamma_0 W(x^{(1)}))\right\}^{-1}$$

et comme $\|E\| = \|E\|_m = 1$

$$\left\|\left[\Gamma_0 W(x^{(1)})\right]^{-1}\right\| \leq \tfrac{1}{1-\frac{\mu_0}{2}} \leq 2. \qquad (5)$$

On déduit de la formule (4) :

$$\|\Gamma_1\| \leq \left\|\left[\Gamma_0 W(x^{(1)})\right]^{-1}\right\| \|\Gamma_0\| \leq 2A_0 = A_1. \qquad (6)$$

La formule (3) entraîne

$$f(x^{(0)} + f')(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = 0,$$

d'où, en vertu du **lemme 3.1.12**

$$\left\|f(x^{(1)})\right\| = \left\|f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) - f'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)})\right\|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}n \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|^2 \left\|f''(\xi)\right\| \leq \tfrac{1}{2}nB_0^2C$$

avec

$$\xi = x^{(0)} + \theta(x^{(1)} - x^{(0)}) \text{ et } 0 < \theta < 1.$$

Compte tenu de l'inégalité (6), on obtient :

$$\left\|\Gamma_1 f(x^{(1)})\right\| \leq \|\Gamma_1\| \left\|f(x^{(1)})\right\| \leq 2A_0.\tfrac{1}{2}nB_0^2C = nA_0B_0^2C = \tfrac{1}{2}\mu_0B_0 = B_1. \quad (7)$$

Ainsi pour le point $x^{(1)}$ nous avons

$\bar{U}_{\frac{\pounds}{2}}(x^{(1)}) \subset \bar{U}_{\pounds}(x^{(0)}) \subset \omega$

et, en outre,

$$\|\Gamma_1\| \leq A_1, \qquad h_1 \left\|\Gamma_1 f(x^{(1)})\right\| \leq B_1,$$

où

$$A_1 = 2A_0$$

$$B_1 = \tfrac{1}{2}\mu_0B_0 \leq \tfrac{\pounds}{4}$$

Il en résulte

$$\mu_1 = 2nA_1B_1C = 2n.2A_0.\tfrac{1}{2}\mu_0B_0C = \mu_0.2nA_0B_0C = \mu_0^2 \leq 1. \quad (8)$$

On retombe donc dans les conditions du théoréme, à cette différence présqu'au lieu du voisinage $\bar{U}_{\pounds}(x^{(0)})$ on a le voisinage $\bar{U}_{\frac{\pounds}{2}}(x^{(1)})$ emboîté dans le premier voisinage.

En reprenant des raisonnements analogues, nous pouvons établir que les approximations successives $x^{(p)}(p = 1, 2, ...)$ ont un sens et sont telles que

$$....\bar{U}_{\frac{\pounds}{2^p}}(x^{(p)}) \subset ..... \subset \bar{U}_{\frac{\pounds}{2}}(x^{(1)}) \subset \bar{U}_{\pounds}(x^{(0)})$$

de plus

$$\|\Gamma_p\| = \left\|W^{-1}(x^{(p)})\right\| \leq A_p$$

$$\left\|\Gamma_p f(x^{(p)})\right\| = \left\|x^{(p+1)} - x^{(p)}\right\| \leq B_p$$

où les constantes A_p et B_p sont liées elles par les relations de récurrence

$$\begin{cases} A_p = 2A_{p-1} \\ B_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1}B_{p-1} \end{cases} \tag{9}$$

et

$$\mu_p = 2nA_pB_pC \quad (p = 1, 2, ...). \tag{10}$$

Montrons que la suite des approximations $x^{(p)}$ $(p = 1, 2, ...)$ vérifie le critére de Cauchy.

En effet, pour $q > 0$ on a :

$$x^{(p+q)} \in \bar{U}_{\frac{\pounds}{2^p}}(x^{(p)}).$$

Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$ donnée à l'avance

$$\left\| x^{(p+q)} - x^{(p)} \right\| \leq \frac{\pounds}{2^p} < \varepsilon$$

si $p > N$ et $q > 0$ avec N suffisamment grand, ce qui est équivalent au critére de Cauchy.

On en tire l'existence de la limite

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x^* \in \bar{U}_{\pounds}(x^{(0)}).$$

Montrons maintenant que x^* est une solution du systéme (1).

La relation (3) conduit à

$$f(x^{(p)}) + W(x^{(p)})(x^{(p+1)} - x^{(p)}) = 0$$

En passant dans cette égalité à la limite quand $p \to \infty$ et en tenant compte du fait que

$$x^{(p+1)} - x^{(p)} \to 0$$

ainsi que $W(x^{(p)})$ est continue et bornée dans $\bar{U}_{\pounds}(x^{(0)})$, on aura :

$$\lim_{p\to\infty} f(x^{(p)}) = 0.$$

On obtient en vertu de la continuité de $f(x)$:

$$f(\lim_{p\to\infty} x^{(p)}) = f(x^*) = 0$$

c'est-à-dire x^* est une solution du systéme (1). En outre

$$\left\|x^* - x^{(0)}\right\| = \left\|\sum_{p=0}^{\infty}\left[x^{(p+1)} - x^{(p)}\right]\right\| \leq \sum_{p=0}^{\infty}\left\|x^{(p+1)} - x^{(p)}\right\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} B_p \leq B_0 + \frac{B_0}{2} + \dots.$$
$$= 2B_0 \leq \pounds.$$

Le théoréme est ainsi complétement démontré. ■

Remarque 3.2.14. Si $f(x) \in C^{(2)}(\omega)$ et dans le domaine ω le systéme (1) a une solution simple x^*, c'est-à-dire telle que

$$f(x^*) = 0, \;\; f'(x^*) = W(x^*) \neq 0$$

les conditions du **théoréme 3.2.13** seront évidemment respectées pour tout point $x^{(0)}$ suffisamment proche de x^*.

Pour vérifier la condition 2 il est utile de noter que B_0 donne une estimation de l'écart entre les approximations initiale et premiére du processus de Newton :

$$\left\|\Gamma_0 f(x^{(0)})\right\| = \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \leq B_0$$

cette inégalité peut donc être vérifiée aisément dés qu'on trouve l'approximation $x^{(1)}$.

Remarque 3.2.15. On obtient des énoncés analogues du théoréme de convergence si au lieu de la norme $\|A\|_m$on recourt à la norme $\|A\|_l$ ou $\|A\|_k$.

3.3 Unicité de la solution

Théorème 3.3.16. *Sous les conditions 1 à 4 du **théoréme 3.2.13** le domaine*

$$\left\|x - x^{(0)}\right\| \leq 2B_0 \qquad (1)$$

contient une seule solution du systéme (1) du chapitre 3.

Démonstration. Supposons qu'en plus de la solution x^* du systéme (1) du *chapitre*

3, définie par le processus de Newton , il existe une autre solution x^{**} de ce systéme telle que

$$\left\|x^{**} - x^{(0)}\right\| \leq 2B_0. \qquad (2)$$

Les approximations successives $x^{(p)}$ (p=0,1,2,....) du processus de Newton sont comprises dans le voisinage de (1) et respectent la condition

$$f(x^{(p)}) + W_p(x^{(p+1)} - x^{(p)}) = 0$$

avec

$$W_{\ p} = W(x^{(p)}).$$

En tenant compte du fait que

$$f(x^{**}) = 0$$

il vient

$$W_p(x^{(p+1)} - x^{**}) = f(x^{**}) - f(x^{(p)}) - W_p(x^{**} - x^{(p)})$$

et, par conséquent

$$x^{(p+1)} - x^{**} = \Gamma_p \left[f(x^{**}) - f(x^{(p)}) - W_p(x^{**} - x^{(p)})\right]$$

où

$$\Gamma_p = W_p^{-1}.$$

Calculant l'estimation en norme, on aura :

$$\left\|x^{**} - x^{(p+1)}\right\| \leq \|\ \Gamma_p\| \left\|f(x^{**}) - f(x^{(p)}) - W_p(x^{**} - x^{(p)})\right\|.$$

Dans les notations du **théoréme 3.2.13**

$$\|\Gamma_p\| \leq A_p.$$

L'application du **lemme 3.1.12** conduit à l'inégalité

$$\left\|f(x^{**}) - f(x^{(p)}) - W_p(x^{**} - x^{(p)})\right\| \leq \frac{1}{2}nC\left\|x^{**} - x^{(p)}\right\|^2,$$

où la constante C est définie d'aprés la condition 3 du **théoréme 3.2.13** . Par suite

$$\left\|x^{**}-x^{(p+1)}\right\| \leq \frac{1}{2}nA_pC\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\|^2 \qquad (p=0,1,2,......). \tag{3}$$

Posant dans l'inégalité (3) $p=0$ et utilisant l'inégalité (2), on obtient

$$\left\|x^{**}-x^{(1)}\right\| \leq \frac{1}{2}nA_0C\left\|x^{**}-x^{(0)}\right\|^2 \leq 2nA_0B_0^2C$$

ou, introduisant les nombres définis par les relations

$$\begin{cases} \mu_p = 2nA_pB_pC \\ B_{p+1} = \frac{1}{2}\mu_pB_p \end{cases} \qquad (p=0,1,2,....) \tag{4}$$

on trouve

$$\left\|x^{**}-x^{(1)}\right\| \leq \mu_0B_0 = 2B_1. \tag{5}$$

D'une façon analogue pour $p=1$ on déduit des formules (3),(4) et (5) :

$$\left\|x^{**}-x^{(2)}\right\| \leq \frac{1}{2}nA_1C\left\|x^{**}-x^{(1)}\right\|^2 \leq 2nA_0B_0^2C = \mu_1B_1 = 2B_2.$$

En général

$$\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\| \leq 2B_p \qquad (p=0,1,2,....). \tag{6}$$

La grandeur $B_p \to 0$ quand $p \to \infty$, en passant à la limite dans l'inégalité (6) on a :

$$x^{**} = \lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x^*$$

c'est-à-dire la solution du systéme (1) dans le domaine $\left\|x-x^{(0)}\right\| \leq 2B_0$ est unique.

■

Remarque 3.3.17. Si le domaine $\bar{U}_{£}(x^{(0)})$ est tel que

$$\frac{2}{\mu_0}B_0 \leq £$$

le systéme (1) ne posséde pas dans le domaine étendu (1)

$$\left\|x-x^{(0)}\right\| \leq \frac{2}{\mu_0}B_0 \tag{7}$$

d'autres solutions que x^*.

En effet, en supposant que le domaine (7) comporte une solution x^{**} du systéme (1) (*chapitre 3*) et en reprenant les raisonnements du **théoréme 3.2.13**, on obtient une inégalité de la forme (3)

$$\left\|x^{**}-x^{(p+1)}\right\| \leq \frac{1}{2} n A_p C \left\|x^{**}-x^{(p)}\right\|^2$$

où $x^{(p)}$ $(p=0,1,2,....)$ sont les approximations successives du processus de Newton à approximation initiale $x^{(0)}$.D'où , puisque

$$\left\|x^{**}-x^{(0)}\right\| \leq \frac{2}{\mu_0} B_0$$

on a successivement , en utilisant les nombres $\mu_{p+1}=\mu_p^2$

$$\left\|x^{**}-x^{(1)}\right\| \leq \frac{1}{2} n A_0 C \frac{4}{\mu_0^2} B_0^2 = 2 n A_0 B_0 C \cdot \frac{1}{\mu_0^2} B_0 = \frac{1}{\mu_0} B_0 = \frac{2}{\mu_0^2} B_1 = \frac{1}{\mu_1} B_1$$

$$\left\|x^{**}-x^{(2)}\right\| \leq \frac{1}{2} n A_1 C \frac{4}{\mu_1^2} B_1^2 = 2 n A_1 B_1 C \cdot \frac{1}{2}\mu_1 B_1 \cdot \frac{2}{\mu_1^3} = \mu_1 \cdot B_2 \cdot \frac{2}{\mu_1^3} = \frac{2}{\mu_1^2} B_2 = \frac{2}{\mu_2} B_2$$

etc.

En général

$$\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\| \leq \frac{2}{\mu_p} B_p \qquad (p=0,1,2,....).$$

Puisque

$$B_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1} B_{p-1}$$

et

$$\mu_p = \mu_{p-1}^2,$$

il vient

$$\frac{B_p}{\mu_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{p-1}}{\mu_{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \frac{B_0}{\mu_0}. \qquad (8)$$

Ainsi

$$\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \qquad (p=0,1,2,...).$$

par conséquent

$$x^{**} = \lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x^*,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 4

Méthode de Newton modifiée

4.1 Le principe de la méthode

La construction du processus de Newton

$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)})$ (p=0,1,2,....) (1)

présente un inconvénient important qui consiste à calculer à chaque pas la matrice inverse $W^{-1}(x^{(p)})$.

Si la matrice $W^{-1}(x)$ est continuemans le voisinage de la solution cherchée x^* et l'approximation initiale $x^{(0)}$ est suffisamment proche de x^*, on peut poser approximativement

$$W^{-1}(x^{(p)}) \approx W^{-1}(x^{(0)}),$$

et on retombe ainsi sur un processus de Newton modifié

$$\xi^{(p+1)} = \xi^{(p)} - W^{-1}(x^{(0)})f(\xi^{(p)}) \qquad (2)$$

(p=0,1,2,.....), où $\xi^{(0)} = x^{(0)}$ .Remarquons que pour les processus (1) et (2) les premiéres approximations $x^{(1)}$ et $\xi^{(1)}$ coïncident

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}.$$

La convergence du processus de Newton modifié (2) a été étudiée par L. Kantorovitch.

Théorème 4.1.18. *Si les conditions de 1 à 4 du* ***théoréme 3.2.13*** *sont remplies et si*

$\mu_0 = 2nA_0B_0C < 1$

le processus de Newton modifié (2) déterminé par l'approximation initiale

$\xi^{(0)} = x^{(0)}$ *converge vers la solution* x^* *du systéme*

$$f(x) = 0$$

et

$$\left\| x^* - \xi^{(p)} \right\| \leq \mu_0^p \left\| x^* - x^{(0)} \right\| \leq 2B_0\mu_0^p \qquad \text{(p=0,1,2,....)}, \qquad (3)$$

où on entend par norme la m-norme.

Démonstration. Considérons le vecteur fonction

$$F(x) = x - \Gamma_0 f(x) = [F_i(x)],$$

avec $\Gamma_0 = W^{-1}(x^{(0)})$.

Evidemment

$$F(\xi^{(p)}) = \xi^{(p)} - \Gamma_0 f(\xi^{(p)}) = \xi^{(p+1)} \qquad \text{(p=0,1,2,.....)}. \qquad (4)$$

De plus

$$F'(x) = E - \Gamma_0 f'(x) \qquad (5)$$

d'où en particulier

$$F'(x^{(0)}) = E - \Gamma_0 f'(x^{(0)}) = E - E = 0\ . \qquad (6)$$

Montrons par récurrence que toute approximation $\xi^{(p)}$ (p=0,1,2,.......) est comprise dans le voisinage $2B_0$ du point $x^{(0)}$

$$\left\|\xi^{(p)} - x^{(0)}\right\| < 2B_0. \tag{7}$$

En effet , avec p=1 l'inégalité (7) est évidente du fait qu'en vertu de la condition 2 du théoréme on a :

$\left\|\xi^{(1)} - x^{(0)}\right\| = \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \leq B_0.$

Supposons maintenant que pour un certain p l'inégalité (7) soit vraie.

Alors, en utilisant le **lemme 3.1.12** on a :

$$\begin{aligned}\left\|\xi^{(p+1)} - x^{(0)}\right\| &= \left\|F(\xi^{(p)}) - x^{(0)}\right\| = \left\|\xi^{(p)} - \Gamma_0 f(\xi^{(p)}) - x^{(0)}\right\| \\ &= \left\|\Gamma_0\left[f(\xi^{(p)}) - W(x^{(0)})(\xi^{(p)} - x^{(0)})\right]\right\| \\ &\leq \left\|\Gamma_0 f(x^{(0)})\right\| + \left\|\Gamma_0\left\{f(\xi^{(p)}) - f(x^{(0)}) - W(x^{(0)})(\xi^{(p)} - x^{(0)})\right\}\right\| \\ &\leq B_0 + \tfrac{1}{2}A_0 nC\left\|\xi^{(p)} - x^{(0)}\right\|^2.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (7) on trouve :

$\left\|\xi^{(p+1)} - x^{(0)}\right\| < B_0 + \frac{1}{2}nA_0C.4B_0^2 = B_0 + 2nA_0B_0C.B_0 = (1+\mu_0)B_0 < 2B_0.$

ce qui démontre notre propositition.

Puisqu'on suppose que les conditions du **théoréme3.2.13** sont observées , le systéme $f(x) = 0$ posséde une solution x^* telle que

$$\left\|x^* - x^{(0)}\right\| \leq 2B_0.$$

Considérons la différence $x^* - \xi^{(p)}$, où $p \geq 1$. Compte tenu du fait que

$F(x^*) \equiv x^* - \Gamma_0 f(x^*) = x^*.$

et en appliquant le **lemme 3.1.9**, on a :

$$\left\|x^* - \xi^{(p)}\right\| = \left\|F(x^*) - F(\xi^{(p-1)})\right\| \leq \left\|x^* - \xi^{(p-1)}\right\|.\left\|F'(\theta)\right\| \tag{8}$$

où θ est un point du segment $[x^*, \xi^{(p-1)}]$.

Ensuite

$$\left\|F'(\theta)\right\| = \left\|F'(\theta) - F'(x^{(0)})\right\| \leq n\left\|\theta - x^{(0)}\right\| \max\left\|F''(\eta)\right\|, \tag{9}$$

où η est un point du segment $[\theta, x^{(0)}]$.La formule (5) donne

$$F'(x) = [\delta_{ij} - \sum_{s=1}^{n} \gamma_{is} \frac{\partial f_s}{\partial x_j}],$$

où δ_{ij} est le symbole de *Kronecker* et $\Gamma_0 = [\gamma_{ij}]$.Donc

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \sum_{s=1}^{n} \gamma_{is} \frac{\partial f_s}{\partial x_j}$$

et

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} = -\sum_{s=1}^{n} \gamma_{is} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|F''(\eta)\| = \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 F_i(\eta)}{\partial x_j \partial x_k} \right| = \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{s=1}^{n} \gamma_{is} \frac{\partial^2 f_s(\eta)}{\partial x_j \partial x_k} \right| &\leq \max_{i,j} \sum_{s=1}^{n} |\gamma_{is}| \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_s(\eta)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \\ &\leq \max_{i,j} \sum_{s=1}^{n} |\gamma_{is}| \ C \\ &= C \|\Gamma_0\| \\ &\leq A_0 C \end{aligned}$$

et en vertu de (9), on a

$$\|F'(\theta)\| \leq nA_0C \left\| \theta - x^{(0)} \right\|.$$

Le point θ appartient évidemment au voisinage $2B_0$ du point $x^{(0)}$, donc

$$\left\| \theta - x^{(0)} \right\| \leq 2B_0$$

et

$$\|F'(\theta)\| \leq 2nA_0B_0C = \mu_0. \tag{10}$$

Si l'on tient compte de l'inégalité (10), l'inégalité (8) permet de déduire

$$\left\| x^* - \xi^{(p)} \right\| \leq \mu_0 \left\| x^* - \xi^{(p-1)} \right\|$$

d'où

$$\left\| x^* - \xi^{(p)} \right\| \leq \mu_0^p \left\| x^* - \xi^{(p)} \right\| = \mu_0^p \left\| x^* - x^{(0)} \right\| \leq 2B_0\mu_0^p.$$

pour $\mu_0 < 1$, la derniére inégalité entraîne

$$\lim_{p \to \infty} \xi^{(p)} = x^*.$$

Le théoréme est complétement démontré. ■

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude de la méthode de Newton pour résoudre des systèmes non linéaires. C'est équations sont les plus souvent impossible à résoudre le calcul direct. La méthode de Newton est une méthode parmi d'autre pour résoudre ces équations. Nous avons donc pu remarquer la Cohérence, l'efficacité, et la rapidité de cette méthode dans touts les cas, cependant il convient de remarquer, que nous pouvons pas programmer cette méthode.

En effet, cette méthode n'assure pas l'établissement d'une solution.

Bibliographie

[1] **B.D E'MIDOVIICH ET MARON. ÉLÉMENT DE CALCUL NUMÉRIQUE.** page 474-501.

[2] **G.CHILOV. ANALYSE MATHÉMATIQUE :FONCTION D'UNE VARIABLE.**

[3] N2013-PFE/DGI. **MÉMOIRE DÉRIVATION DES FONCTIONS Á VALEURS DANS UN ESPACE NORMÉ.** Université AMAR THLIDJI de LAGHOUAT. page 10.