الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications.

Par :

Mansouri Hadja Mériem

Thème

Principes d'incertitude pour la transformée en ondelettes de Hankel

Devant le jury composé de :

Dr. YAZID Fares	M C A	Université de Laghouat	Président
Dr. BOUKHATEM Amina	M C B	Université de Laghouat	Examinateur
Dr. Kabache Aicha	M C B	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier ***Dieu****, qui m'a accordé la santé, la volonté et la patience nécessaires pour compléter ma formation et obtenir mon diplôme, ainsi que la capacité de mener à bien ce travail de recherche. J'aimerais exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de recherche, Madame* ***Aicha Kabache****, qui m'a proposé le sujet de cette thèse et m'a guidé avec ses conseils précieux, ses suggestions et la confiance qu'elle m'a témoignée tout au long de ce travail.*

Je voudrais également remercier les membres du jury, les professeurs

Fares Yazid *et* ***Boukhatem Amina***

pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail. J'adresse aussi mes remerciements à tous mes professeurs de la Faculté des Mathématiques et aux employés de la Bibliothèque des Sciences, en particulier Monsieur ***Aissa Attiat****, pour son aide précieuse et son dévouement constant à fournir des ressources et un soutien qui ont grandement contribué à la réalisation de ce travail.*

Enfin, j'exprime ma sincère gratitude et mon appréciation à toutes les personnes qui ont contribué, directement ou indirectement, à l'accomplissement de ce travail.

Dédicaces

À la lumière qui a éclairé les chemins de la connaissance et de l'apprentissage.

À mon modèle, mon cher père

qui m'a appris que le succès naît de l'effort et de la détermination, et que les difficultés sont surmontées avec détermination et patience, je te dédie cette réalisation en guise de remerciement et de gratitude.

À ma chère mère

source de sécurité et de soutien constant, dont les prières ont rassuré mon cœur et m'ont poussé à aller de l'avant, je dédie ce travail en remerciement de chaque moment où tu as été mon soutien.

À mes frères et sœurs

je vous dédie ce travail en témoignage de mon amour et de ma reconnaissance.

À mes éminents professeurs

je vous remercie pour tout ce que vous avez fait pour moi, pour les connaissances et les conseils dont j'ai bénéficié, et pour les modèles que vous avez été pour moi au cours de ma carrière universitaire.

À mes chers amis

je vous dédie ce succès en guise de remerciement pour votre amitié et votre soutien.

À tous ceux qui ont cru en moi et m'ont soutenu, à tous ceux qui ont contribué à cette réussite, je vous adresse mes plus sincères remerciements et ma gratitude.

Table des matières

التلخيص

الهدف من هذه المذكرة هو تعريف مشغل بيسل (مشغل هانكل $\ell\alpha$)
ثم دراسة وإثبات بعض أدوات التحليل التوافقي المتعلقة بهذا المشغل. بعد ذلك، نعرّف ونثبت صيغه الأساسية (صيغة بلانشريل، بارسيفال وصيغة الانعكاس).

كما نقدم أيضًا تحويل التردد الزمني، وهو تحويل هانكل الموجي، وهو تقنية متقدمة لمعالجة الإشارات تجمع بين مبادئ تحويل هانكل وتحويل المويجات.

وأخيرًا، نوضح مبدأ عدم اليقين من نوع هايزنبرغ لتحويل تحويل هانكل الموجي المستمر.

<u>الكلمات المفتاحية</u> : مشغل بيسل، تحويل هانكل، تحويلات هانكل الموجية، مبادئ عدم اليقين لهايزنبرغ.

Abstract

The aim of this dissertation is to define the Bessel operator (or Hankel operator ℓ_α), then to study and prove some harmonic analysis tools related to this operator. Next, we define the Hankel transform and prove its fundamental formulae (Plancherel, Parseval and inversion formula).

We also introduce the time-frequency transform, the Hankel wavelet transform, an advanced signal processing technique that combines the principles of the Hankel transform and the wavelet transform.

Finally, we demonstrate the Heisenberg-type uncertainty principle for the continuous Hankel wavelet transform.

Keywords : Bessel operator, Hankel transform, Hankel wavelet transforms, Heisenberg uncertainty principles.

Résumé

Le but de ce mémoire est de définir l'opérateur de Bessel (ou opérateur de Hankel ℓ_α), puis d'étudier et de prouver quelques outils d'analyse harmonique liés à cet opérateur. Ensuite, nous définissons la transformée de Hankel et démontrons ses formules fondamentales (formules de Plancherel, Parseval et d'inversion).

Nous introduisons également la transformation en temps-fréquence, à savoir la transformation en ondelettes de Hankel, une technique avancée de traitement du signal qui combine les principes de la transformation de Hankel et de la transformation en ondelettes.

Enfin, nous démontrons le principe d'incertitude de type Heisenberg pour la transformée en ondelettes de Hankel continue.

Mots-clés : Opérateur de Bessel, transformée de Hankel, transformées en ondelettes de Hankel, principes d'incertitude de type Heisenberg.

Notations

- $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et paires.

- $\mathcal{C}_{*,c}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, paires et à support compact.

- $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ des fonctions satisfaisant
$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.$$

- $\mathcal{C}_{b,*}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, paires et bornées.

- $\mathcal{E}_*(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

- $d\mu_\alpha$ la mesure définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$d\mu_\alpha(t) = \frac{t^{2\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} dt.$$

- $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+), p \in [1,+\infty]$, l'espace des fonctions f mesurables sur $[0,+\infty[$ vérifiant :
$$\|f\|_{p,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p d\mu_\alpha(x)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty \\ \underset{x\in[0,+\infty[}{\text{supess}} |f(x)| < +\infty, & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

- $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions paires infiniment différentiables et rapidement décroissantes ainsi que toutes leurs dérivées, L'espace $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ est muni de la famille de normes $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$N_n(f) = \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ k,p\leqslant n}} (1+t^2)^p \left| (\frac{df}{dt^2})^{(k)}(t) \right|.$$

Introduction

En analyse harmonique, le principe d'incertitude, souvent associé aux travaux de Heisenberg, Pauli et Weyl, stipule qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être fortement localisées en même temps. Cette affirmation a été largement étudiée et on peut trouver plusieurs façons de l'exprimer, la plus connue d'entre elles étant l'inégalité forte de Heisenberg-Pauli-Weyl [35] qui montre que pour toute fonction carrément intégrable f,

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} t^2|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \lambda^2|\widehat{f(\lambda)}|^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^2dt\right)$$

avec égalité si et seulement si $f(t) = de^{bt^2}$ pour certains $d \in \mathbb{C}$ et $b > 0$, où

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+} f(t)e^{it\lambda}dt.$$

D'autres types de relations d'incertitude ont été étudiés. Parmi eux, on peut citer les articles de Hardy [27], Cowling et Price [8], Benedicks [3], Amrein et Berthier [2] ainsi que les travaux de Donoho.

Les principes d'incertitude ont également été étendus à diverses situations, telles que la transformation de Hankel. L'inégalité de type de type Heisenberg a d'abord été prouvée par Bowie [4], puis par Rösler et Voit [28]. Une preuve simple basée sur les expansions de Laguerre a récemment été donné par Ghobber [12] (voir également [13, 21, 24, 34]). Plus récemment, dans [21, 37], les auteurs ont établi des inégalités de type Heisenberg, respectivement sur les hypergroupes de Chébli-Trimèche et sur les groupes de Heisenberg. Dans [17], Jaming et Ghobber ont établi plusieurs relations d'incertitude pour une famille de transformées intégrales, comprenant en particulier la transformée de Fourier usuelle, la transformée de Hankel, la transformée de Dunkl, etc. Des informations supplémentaires sur l'importance des principes d'incertitude peuvent être trouvées dans [18, 36] et les références qui y sont citées.

De nos jours, de nouveaux principes d'incertitude impliquant des représentations temps-fréquence, telles que les transformations de Gabor et en ondelettes, ont été formulés de différentes manières. Plus précisément, pour une fonction non nulle et carrément intégrable ψ satisfaisant $C_\psi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi/|\xi| < +\infty$, la transformée en ondelettes continue W_ψ est définie par :

$$W_\psi(f)(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_0^{+\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},$$

Pour une fonction non nulle et carrément intégrable g, la transformée de Gabor $\mathcal{F}_g$ est définie par $\mathcal{F}_g(f)(x,\xi) = [fg(.\widehat{-}x)](\xi); (x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, où f est une fonction carrément intégrable.

Dans ce mémoire, nous nous sommes basés sur l'article de C. Baccar [6], qui présente les principes d'incertitude de type Heisenberg appliqués à la transformée en ondelettes de Hankel. Nous avons donné de nombreux détails sur ce sujet et avons organisé ce mémoire comme suit.

Dans le premier chapitre, nous étudions et prouvons quelques outils d'analyse harmonique liés à la transformée de Hankel qui seront utilisés par la suite. [19, 29, 32, 33] . On désigne par α, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, l'opérateur de Bessel défini sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\ell_\alpha = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{d}{dt}.$$

Pour tout λ dans $\mathbb{C}$ on a le système

$$(S) : \begin{cases} \ell_\alpha(u) = -\lambda u, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

admet une solution unique donnée par

$$z \longmapsto j_\alpha(\lambda z).$$

où j_α est la fonction de Bessel modifiée d'indice α définie par :

$$j_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

L'opérateur de translation associé à l'opérateur de Bessel ℓ_α, est défini sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ par :

$$\forall s \geq 0, \quad \tau_t^\alpha(f)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^\pi f(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta.$$

En utilisant l'opérateur de translation pour définir le produit de convolution associé à l'opérateur de Bessel de la fonction f par g comme suit :

$$f *_\alpha g(t) = \int_0^{+\infty}\tau_t^\alpha(f)(s)g(s)d\mu_\alpha(s).$$

La transformée de Hankel d'une fonction donnée $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ est définie par

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)j_\alpha(\lambda t)d\mu_\alpha(t), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

Cependant, la littérature a largement démontré que la transformée de Hankel $\mathcal{H}_\alpha$ peut être prolongée en un isomorphisme isométrique de $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ dans lui-même. En particulier, pour tout f et g dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, nous avons la formule de Parseval suivante :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}d\mu_\alpha(t) = \int_0^\infty \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\overline{\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)}d\mu_\alpha(\lambda).$$

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la transformée en ondelettes de Hankel continue. Cette dernière transformée est définie sur $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ par

$$T_\psi(f)(a,t) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(r)\overline{\tau_t(D_a(\psi))(r)}d\mu_\alpha(r); \quad (a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+.$$

Où τ_t^α est l'opérateur de translation et D_α est l'opérateur de dilatation d'une fonction mesurable ψ est défini par :

$$D_a(\psi)(t) = a^{\alpha+1}\psi(at).$$

Et ψ est une fonction dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, appelée ondelette mère, satisfaisant la condition d'admissibilité suivante

$$0 < C_\psi = \int_0^{+\infty}|\mathcal{H}_\alpha(\psi)(a)|^2\frac{da}{a} < +\infty.$$

La transformée en ondelettes de Hankel satisfait la formule de Plancherel suivante. Pour tout f dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, la fonction T_ψ appartient à $L^2_{\nu_\alpha}\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+\right)$ et nous avons

$$\int_0^{+\infty} |f(r)|^2 d\mu_\alpha(r) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left|T_\psi(f)(a,t)\right|^2 d\nu_\alpha(a,t).$$

Le dernier chapitre vise à établir des inégalités de type Heisenberg pour la transformation de Hankel et la transformation en ondelettes continues.
Soient $s \geq 1$, $t \geq 1$, et pour chaque fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\|r^s f\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \geq (\alpha+1)^{st/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}$$

avec égalité si et seulement si $s = t = 1$ et $f(r) = de^{-br^2/2}$ pour certains $d \in \mathbb{C}$ et b > 0.
Les inégalités suivantes, établies dans ce chapitre, ont été étudiées pour la première fois par Wilczok dans [36]. Dans le cas classique, elles impliquent séparément les variables temps et fréquence, et non les deux variables temps-fréquence :

Soient $s,t > 0$ et $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, une fonction admissible. Alors il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \geq c\left(\sqrt{C_\psi}\right)^{t/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}.$$

En particulier, si $s,t \geq 1$, la constante c est donnée par $c = (\alpha+1)^{st/(s+t)}$.
Cependant, nous utilisons les inégalités ci-dessus pour prouver l'inégalité de type Heisenberg-Pauli-Weyl pour T_ψ, qui implique les deux variables temps-fréquence. Soient $s,t > 0$ et $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ une fonction admissible. Alors il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\|r^s f\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)} \left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{s/s+t)} \geq c\left(\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)}\right)^{s/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}, \tag{3.8}$$

où $\mathcal{M} : f \mapsto \mathcal{M}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x/x^{z+1}$ est la transformation de Mellin classique. Si $s,t \geq 1$, la constante c est donnée par $c = (\alpha+1)^{st/(s+t)}$.

Chapitre 1

Transformation de Hankel associée à l'opérateur de Bessel

La transformée de Hankel ou transformée de Fourier-Bessel est une transformation intégrale dans laquelle la fonction de Bessel est le noyau. Quand nous abordons des problèmes avec une symétrie circulaire, la transformation de Hankel peut être extrêmement bénéfique. La transformée de Hankel, par exemple, correspond à la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction à symétrie circulaire. En outre, la transformation de Hankel a été introduite pour la première fois dans l'analyse de la transformation de Fourier des fonctions radiales et a été ensuite généralisée dans le cas général. Ce chapitre présente une synthèse de quelques outils d'analyse harmonique associés à la transformée de Hankel que nous utiliserons ultérieurement (voir [1, 7, 9, 20].)

1.1 Opérateur de Bessel

Définition 1.1. *Pour tout* $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, *l'opérateur de Bessel* ℓ_α *est défini sur* $[0,+\infty[$ *par :*

$$\begin{aligned}\ell_\alpha u(t) &= \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{du(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{t^{2\alpha+1}}\frac{d}{dt}\left(t^{2\alpha+1}\frac{du(t)}{dt}\right).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Où j_α est la fonction de Bessel modifiée, donnée par

$$\begin{aligned}j_\alpha(z) &= 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} \\ &= \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

et J_α est la fonction de Bessel de première espèce d'indice α [23], défini par :

$$J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha+1+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

Avec Γ est la fonction Gamma d'Euler, donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0, \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.3}$$

Proposition 1.1. Pour tout nombre complexe λ dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \ell_\alpha(u) = -\lambda^2 u, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

admet une solution unique donnée par la fonction

$$z \longmapsto j_\alpha(\lambda z).$$

Démonstration. La fonction de Bessel modifiée j_α est analytique et paire et on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(j_\alpha(z)) &= \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-1}\\ &= -z\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n!\Gamma(\alpha+n+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\\ &= -\frac{z}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(z),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}(j_\alpha(z)) &= -\frac{1}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(z)-\frac{z}{2(\alpha+1)}j'_{\alpha+1}(z)\\ &= -\frac{1}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(z)+\frac{z^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}j_{\alpha+2}(z).\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{d}{dz}(j_\alpha(\lambda z)) = \frac{-\lambda^2 z}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(z).$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(j_\alpha(\lambda z)) = -\lambda^2\left(-\frac{1}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(z)+\frac{\lambda^2 z^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}j_{\alpha+2}(z)\right).$$

Et on a

$$\begin{aligned}\ell_\alpha(j_\alpha(\lambda z)) &= \frac{d^2}{dz^2}(j_\alpha(\lambda z))+\frac{2\alpha+1}{z}\frac{d}{dz}(j_\alpha(\lambda z))\\ &= -\lambda^2\left(-\frac{1}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(\lambda z)+\frac{\lambda^2 z^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}j_{\alpha+2}(\lambda z)\right)+\frac{2\alpha+1}{z}\left(\frac{-\lambda^2 z}{2(\alpha+1)}j_{\alpha+1}(\lambda z)\right)\\ &= -\lambda^2\left(j_{\alpha+1}(\lambda z)-\frac{\lambda^2 z^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}j_{\alpha+2}(\lambda z)\right).\end{aligned}$$

Or, la fonction de Bessel de première espèce vérifie (Pour plus de détails voir [15])

$$J_{\alpha+1}(t)+J_{\alpha-1}(t) = \frac{2\alpha}{t}J_\alpha(t),$$

d'où

$$j_{\alpha+1}(z) = j_\alpha(z)+\frac{z^2}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}j_{\alpha+2}(z).$$

Alors

$$\ell_\alpha(j_\alpha(\lambda z)) = -\lambda^2 j_\alpha(\lambda z).$$

De plus, j_α vérifie les conditions initiales du problème de Cauchy associées au système (S). ■

Proposition 1.2. La fonction de Bessel modifiée j_α admet la représentation intégral de type Mehler suivante :

$$j_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(zt)dt. \tag{1.4}$$

En particulier, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}; \quad |j_\alpha^{(k)}(z)| \leq e^{|Im(z)|}. \tag{1.5}$$

Démonstration. $\forall k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+k+1)} &= \int_0^1 t^{t-\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&= 2\int_0^1 t^{2k}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&= \int_{-1}^1 t^{2k}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1 t^{2k}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt.$$

Donc, $\forall z \in \mathbb{C}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
j_\alpha(z) &= \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\
&= \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1 t^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\frac{1}{2})}(tz)^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(tz)^{2n}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(zt)dt.
\end{aligned}$$

nous pouvons écrire : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on obtient

$$j_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(zt)dt.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$j_\alpha(k) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)})\int_{0}^{1}(1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\frac{d^k\cos}{dz^k}(zt)dt.$$

En utilisant la formule d'Euler pour le cosinus, on obtient pour tout $t \in [0,1]$, et $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^k\cos}{dz^k}(zt)\right| &\leq \frac{|t|^k|e^{izt}|+|t|^k|e^{-izt}}{2}\\ &\leq e^{|Im(z)|t}\\ &\leq e^{|Im(z)|}.\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}|j_\alpha^k(k)| &\leq \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)})\int_{0}^{1}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}|\frac{d^k\cos}{dz^k}(zt)|dt\\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)})e^{|Im(z)|}\int_{0}^{1}(1-s)^{\alpha-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}dt\\ &= e^{|Im(z)|}.\end{aligned}$$

■

Remarque 1. *Pour tout nombre réel t, on a*

$$|j_\alpha^{(k)}(t)| \leq 1.$$

Proposition 1.3. La fonction de Bessel modifiée j_α vérifie la formule produit suivante pour tous $t, s \geq 0$

$$j_\alpha(t)j_\alpha(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}j_\alpha(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta.$$

Démonstration. Voir [15, 23] ■

1.2 Opérateur de translation associés à l'opérateur de Bessel

Définition 1.2. *Pour tout nombre réel t, l'opérateur de translation τ_t^α associé à la l'opérateur de Bessel est défini sur $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ par*

$$\forall s \geq 0, \quad \tau_t^\alpha(f)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^\pi f(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta. \tag{1.6}$$

Example 1. *Pour $\alpha > 0$, et $f(t) = e^{-at}$. Alors, pour tous $t, s \geq 0$, et d'après le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient*

$$\begin{aligned}
\tau_t^\alpha f(s) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^\pi e^{-at^2-as^2-2ats\cos\theta}(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}e^{-at^2-as^2}\int_{-1}^1 e^{-2atsu}(1-u^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}e^{-at^2-as^2}\left(\int_0^1 e^{-2ats\sqrt{1-z}}\frac{z^{\alpha-\frac{1}{2}}dz}{2\sqrt{1-z}} + \int_0^1 e^{2ats\sqrt{1-z}}\frac{z^{\alpha-\frac{1}{2}}dz}{2\sqrt{1-z}}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}e^{-at^2-as^2}\left(\int_0^1 (\sum_{n=0}^\infty \frac{(-2ats)^n}{n!} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(2ats)^n}{n!})(1-z)^{\frac{n-1}{2}}z^{\alpha-\frac{1}{2}}\frac{dz}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}e^{-at^2-as^2}\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-2ats)^n}{n!} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(2ats)^n}{n!}\right)\left(\int_0^1 (1-z)^{\frac{n-1}{2}}z^{\alpha-\frac{1}{2}}dz\right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}e^{-at^2-as^2}\left(\sum_{p=0}^\infty \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{(2p)!\Gamma(p+\alpha+1)}(2ats)^{2p}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}e^{-at^2-as^2}\left(\sum_{p=0}^\infty \frac{(2p)!\sqrt{\pi}}{2^{2p}p!(2p)!\Gamma(p+\alpha+1)}(2ats)^2p\right) \\
&= \Gamma(\alpha+1)e^{-at^2-as^2}\sum_{p=0}^\infty \frac{1}{p!\Gamma(p+\alpha+1)}(ats)^{2p} \\
&= e^{-at^2-as^2}j_\alpha(2ats),
\end{aligned}$$

où j_α est la fonction de Bessel modifiée du premier espèce définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, j_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = j_\alpha(iz).$$

Théorème 1.1. Pour tous $t, s \geq 0$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. on a

$$\tau_t^\alpha(j_\alpha(\lambda.))(s) = j_\alpha(\lambda t) j_\alpha(\lambda s). \tag{1.7}$$

Démonstration. En utilisant les relations (1.6), on déduit que pour tous $t, s \geq 0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\tau_t^\alpha(j_\alpha(\lambda.))(s) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^\pi j_\alpha(\lambda\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha} d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^\pi j_\alpha(\sqrt{(\lambda t)^2+(\lambda s)^2+2(\lambda t)(\lambda s)\cos\theta})(\sin\theta)^{2\alpha} d\theta \\
&= j_\alpha(\lambda t) j_\alpha(\lambda s).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.4. Pour tout $f \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R})$, et pour tous $t, s \geq 0$, on a

$$\tau_t^\alpha(f)(s) = \int_0^\infty f(m)\omega_\alpha(t, s, m) d\mu_\alpha(m), \tag{1.8}$$

où ω_α donné par

$$\omega_\alpha(t, s, m) = \frac{(\Gamma(\alpha+1))^2}{2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \frac{[(t+s)^2-m^2]^{\alpha-\frac{1}{2}}[m^2-(t-s)^2]^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(tsm)^{2\alpha}} \chi_{]|t-s|, t+s[}(m).$$

Démonstration. Soit f une fonction mesurable positive sur $[0, +\infty[$. En effectuant le changement de variables $m = \sqrt{t^2+s^2+2ts\cos\theta}$ et $\sin\theta = \left(\frac{((t+s)^2-m^2)(m^2-(t-s)^2)}{4t^2s^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Finalement, on déduit que

$$\tau_t^\alpha(f)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)^2}{2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_{|t-s|}^{t+s} f(t) \frac{[(t+s)^2-m^2]^{\alpha-\frac{1}{2}}[m^2-(t-s)^2]^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(tsm)^{2\alpha}} d\mu_\alpha(m),$$

Ce qui donne ce résultat souhaité. ■

Lemme 1.1. Le noyau ω_α satisfait les propriétés suivantes :

1. Pour tous $t,s,m>0$, on a $\omega_\alpha(t,s,m)\geq 0$.
2. Pour tous $t,s,m>0$, on a $\omega_\alpha(t,s,m)=\omega_\alpha(s,t,m)=\omega_\alpha(t,m,s)=\omega_\alpha(m,s,t)$.
3. Pour tous $t,s>0$, on a

$$\int_0^\infty \omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m)=1. \tag{1.9}$$

Démonstration. Si $|t-s|<m<t+s$, et $(t-s)^2<m^2<(t+s)^2$.
Alors on a $[((t+s)^2-m^2)(m^2-(t-s)^2)]^{\alpha-\frac{1}{2}}\geq 0$.

Ce qui prouve que $\omega_\alpha(t,s,m)$ est positivé. Donc d'après la relation (1.6) et (1.8) on trouve

$$\int_0^\infty \omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m)=\tau_t^\alpha(1)(s)=\frac{\Gamma(\alpha+1)^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^\pi(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta=1.$$

■

Proposition 1.5. Soit $f\in\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, alors pour tout $x\geq 0$. L'opérateur de translation $\tau_t^\alpha(f)$ est continue de $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$ dans lui même, et on a

$$\lim_{t\to 0^+}\|\tau_t^\alpha(f)-f\|_{\infty,\alpha}=0. \tag{1.10}$$

De plus si $supp f\subseteq[-a,a]$, alors

$$supp\ \ \tau_t^\alpha(f)\subset[-a-|t|,a+|t|]. \tag{1.11}$$

Démonstration. 1 Soit $f\in\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, pour tous $\theta\in[0,\pi], s\in[0,+\infty]$;

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}f(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos(\theta)})\sin^{2\alpha}(\theta)\right|\leq\|f\|_{\infty,\alpha}\sin^{2\alpha}(\theta). \tag{1.12}$$

On a la fonction

$$\theta\longrightarrow\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\ \|f\|_{\infty,\alpha}\sin^{2\alpha}(\theta)$$

est intégrable et

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\ \|f\|_{\infty,\alpha}\int_0^\pi\sin^{2\alpha}(\theta)d\theta=\|f\|_{\infty,\alpha}.$$

Mais

$$\lim_{s\to+\infty} f(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos(\theta)})\sin^{2\alpha}(\theta)=0,$$

donc d'après le théorème de convergence dominée et l'inégalité (1.10) on déduit que la fonction $\tau_t^\alpha(f)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon>0$; puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\eta\geq 0$ tel que

$$\forall z,s\in\mathbb{R}, |z-s|\leq\eta, |f(z)-f(s)|\leq\varepsilon.$$

Donc pour tout $t,s\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<\eta$, on a

$$\begin{aligned}
|\tau_t^\alpha(f)(s)-f(s)| &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \left|f(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos(\theta)})-f(s)\right|\sin^{2\alpha}(\theta)d\theta \\
&\leq \varepsilon\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \sin^{2\alpha}(\theta)d\theta \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0, \exists\eta>0, |t|\leq\eta$, on a

$$\|\tau_t^\alpha(f)-f\|_{\infty,\alpha}\leq\varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\|\tau_t^\alpha(f)-f\|_{\infty,\alpha}=0.$$

- Si $t=0$, on a

  $$\tau_0^\alpha(f)(s)=f(s)$$

  d'où

  $$supp(\tau_0^\alpha(f))=supp(f)=[-a,a].$$

- Si $t>0$ alors pour tout $s\in]-\infty,-a+t[\,\bigcup\,]a+t,+\infty[$ on a $|t-s|>a$ et par suite

  $$\tau_t^\alpha(f)(s)=\int_{|t-s|}^{t+s} f(t)\omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m)=0.$$

  Ainsi

  $$supp\ (\tau_t^\alpha(f))\subset[-a+t,a+t]\subset[-a-t,a+t]$$

- Si $t<0$ alors $-t>0$ et on a d'aprés la relation précédent (1.11)

  $$supp\ \tau_t(f)=supp\ \tau_{-t}(f)\subset[-a+t,a-t].$$

  D'où pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $supp\ \tau_t^\alpha(f)\subset[-a-|t|,a+|t|]$.

■

Proposition 1.6. Pour tout $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+), p \in [1,+\infty[$, L'espace $\mathcal{C}_{*,c}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$.

Proposition 1.7. Pour tout $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$; $p \in [1,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,+\infty[$ l'opérateur de translation τ^α_t appartient à $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et on a :

$$||\tau^\alpha_t(f)||_{p,\alpha} \leq ||f||_{p,\alpha}. \tag{1.13}$$

De plus

$$\lim_{t\to 0^+} ||\tau^\alpha_t(f) - f||_{p,\alpha} = 0. \tag{1.14}$$

Démonstration. Soit $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$

- Si $p = \infty$, Pour tous $t, s \in [0,+\infty[$, on a

$$\tau^\alpha_t(f)(s) = \int_0^\infty f(m)\omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m)$$

Alors

$$\begin{aligned} |\tau^\alpha_t(f)(s)| &\leq \int_0^\infty |f(m)|\omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m) \\ &\leq ||f||_{\infty,\mu_\alpha}\int_0^\infty \omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m) \\ &\leq ||f||_{\infty,\alpha}. \end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $\tau^\alpha_t(f)$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et

$$||\tau^\alpha_t(f)||_{\infty,\alpha} \leq ||f||_{\infty,\alpha}.$$

- Si $p = 1$, on sait que

$$\tau^\alpha_t(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(m)\omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(m).$$

D'après la théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$||\tau^\alpha_t(f)||_{1,\alpha} \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \left(\int_0^{+\infty} \omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(s)\right) d\mu_\alpha(m).$$

Et comme $\int_0^{+\infty} \omega_\alpha(t,s,m)d\mu_\alpha(s) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\tau_t^\alpha(f)\|_{1,\alpha} &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)| d\mu_\alpha(m) \\
&= \|f\|_{1,\alpha}.
\end{aligned}$$

- Si $p \in]1,+\infty[$ et q l'exposant conjugué de p, d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
|\tau_t^\alpha(f)(s)| &= \int_0^{\infty} |f(m)| \omega_\alpha(t,s,m)^{\frac{1}{p}} \omega_\alpha(t,s,m)^{\frac{1}{q}} d\mu_\alpha(m) \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} |f(m)|^P \omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha(m) \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

En appliquant de nouveau le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\tau_t^\alpha(f)\|_{p,\alpha} &\leq \int_0^{+\infty} |f(m)|^P \left(\omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha(s)\right) d\mu_\alpha(m). \\
&= \int_0^{+\infty} |f(m)|^P d\mu_\alpha(m) \\
&= \|f\|_{p,\alpha}^p.
\end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{C}_{*,c}(\mathbb{R})$ telle que $suppf \subset [-a,a]$, alors d'après la relation (1.13), on a pour tout $t \in [-1,1], supp(\tau_t^\alpha(f)) \subset [-a-1,a+1]$.
f étant uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$, vérifiant $|s-s'| < \varepsilon$, on a

$$|f(s) - f(s')| < \varepsilon',$$

où $\varepsilon' = \frac{\eta}{(\int_0^{a+1} d\mu_\alpha)^{\frac{1}{p}}}$.

Si $0 \leq t \leq \eta$, alors pour tout $s \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
|\tau_t(f)(s) - f(s)| &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} |f(\sqrt{t^2+s^2+2ts\cos(\theta)}) - f(s)| \sin^{2\alpha} d\theta \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu_\alpha([0,a+1])^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|\tau_t^\alpha(f) - f\|_{p,\alpha} &= \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s) - f(y)|^p d\mu_\alpha(s) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^{a+1} |\tau_t^\alpha(f)(s) - f(y)|^p d\mu_\alpha(s) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela montre que pour tout

$$\lim_{t\to 0^+} \|\tau_t^\alpha(f)-f\|_{p,\alpha}=0. \tag{1.15}$$

Donc, soit $f\in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et $\varepsilon>0$. D'après la proposition(1.6) il existe $g\in\mathcal{C}_{*,c}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f-g\|_{p,\alpha}<\frac{\varepsilon}{4},$$

d'autre part, de la relation (1.15), il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $t\in[-1,1]$ on a

$$\|\tau_t^\alpha(g)-g\|_{p,\alpha}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\|\tau_t^\alpha(f)-f\|_{p,\alpha} &= \|\tau_t^\alpha(f-g)+\tau_t^\alpha(g)-g+g-f\|_{p,\alpha}\\
&\le 2\|f-g\|_{p,\alpha}+\|\tau_t^\alpha(g)-g\|_{p,\alpha}\\
&\le 2\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&=\varepsilon.
\end{aligned}$$

■

1.3 Produit de convolution de Bessel

Définition 1.3. *Soient f et g deux fonctions mesurables sur $[0,+\infty[$ et soit $t\ge 0$. Si l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty}\tau_t^\alpha(f)(s)g(s)d\mu_\alpha(s)$$

existe, on l'appelle produit de convolution de f par g et on la note $f*_\alpha g(t)$.

Remarque 2. *Le produit de convolution $*_\alpha$ est commutatif. En effet, le théorème de*

Fubini nous permet d'écrire pour tout $t \in [0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
f *_\alpha g(t) &= \int_0^{+\infty} \tau_t^\alpha(f)(s) g(s) d\mu_\alpha(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(m) \omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha(m) \right) g(s) \mu_\alpha(s) \\
&= \int_0^{+\infty} g(s) \left(\int_0^{+\infty} f(m) \omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha(m) \right) d\mu_\alpha(s) \\
&= \int_0^{+\infty} f(m) \left(\int_0^{+\infty} g(s) \omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha(s) \right) d\mu_\alpha(m) \\
&= \int_0^{+\infty} f(m) \tau_t^\alpha(g)(s) g(m) d\mu_\alpha(m) \\
&= g *_\alpha f(t).
\end{aligned}$$

Théorème 1.2. Soient $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, alors la fonction $f *_\alpha g$ est définie presque partout, appartient à $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ donc

$$||f *_\alpha g||_{1,\alpha} \leq ||f||_{1,\mu_\alpha} ||g||_{1,\alpha}. \tag{1.16}$$

Démonstration. Soient f et g deux fonctions de $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, d'après le théorème de Fubini-Tonnelli et la relation (1.13) on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)||g(s)| d\mu_\alpha(t) d\mu_\alpha(s) &= \int_0^{+\infty} |g(s)| \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)| d\mu_\alpha(t) \right) d\mu_\alpha(s) \\
&= ||\tau_s^\alpha(f)||_{1,\alpha} ||g||_{1,\alpha} \\
&\leq ||f||_{1,\alpha} ||g||_{1,\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainsi d'après le théorème de Fubini, la fonction $f *_\alpha g$ définie presque partout, appartient à $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et on a

$$||f *_\alpha g||_{1,\alpha} \leq ||f||_{1,\alpha} ||g||_{1,\alpha}.$$

∎

Théorème 1.3. Pour tout $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et $g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+), p \in [1,+\infty[$, la fonction $f *_\alpha g$ appartient à $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et on a

$$||f *_\alpha g||_{p,\alpha} \leq ||f||_{p,\alpha}||g||_{1,\alpha}. \tag{1.17}$$

Démonstration. Soit $p, q \in [0, +\infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Si $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et $g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)||g(s)|d\mu_\alpha(s)\right)^p &= \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)||g(s)|^{\frac{1}{p}}|g(s)|^{\frac{1}{q}}d\mu_\alpha(t)\right)^p \\ &\leq ||g||_{1,\alpha}^{\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)|^P|g(s)|d\mu_\alpha(s).\end{aligned}$$

Donc, de l'inégalité (1.13), on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)||g(s)|d\mu_\alpha(s)\right)^p d\mu_\alpha(t) \leq ||g||^{p/q_{1,\alpha}}||f||^P_{p,\alpha} < \infty.$$

En particulier, la fonction $t \longmapsto f *_\alpha g(t)$ est définie pour presque tout $t \geq 0$, et nous avons

$$\int_0^{+\infty}\left|\int_0^{+\infty} \tau_t^\alpha(f)(s)g(s)|d\mu_\alpha(s)\right|^p d\mu_\alpha(t) \leq ||g||^p_{1,\alpha}||f||^p_{p,\alpha}.$$

Et le résultat suit. ∎

Théorème 1.4. Pour tout $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et $g \in \mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, on a $f *_\alpha g$ appartient à $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R}_+)$, on a

$$||f *_\alpha g||_{\infty,\alpha} \leq ||f||_{1,\alpha}||g||_{\infty,\alpha}. \tag{1.18}$$

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)||g(s)|d\mu_\alpha(t)d\mu_\alpha(s) &\leq ||g||_{\infty,\alpha}\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)|d\mu_\alpha(s) \\ &= ||g||_{\infty,\alpha}||f||_{1,\alpha} < \infty.\end{aligned}$$

Cela implique que $f *_\alpha g$ est défini presque partout. Ainsi, à partir de la proposition (1.5), nous obtenons pour tout $t,t' \geq 0$,

$$\begin{aligned}|f *_\alpha g(t) - f *_\alpha g(t')| &\leq \int_0^{+\infty} |f(s)||\tau_t^\alpha(g)(s) - \tau_t'^\alpha(g)(s)|d\mu_\alpha(s)\\ &= \int_0^{+\infty} |f(s)||\tau_s^\alpha(g)(t) - \tau_s^\alpha(g)(t')|d\mu_\alpha(s)\\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(s)||(g)(t) - (g)(t')|d\mu_\alpha(s).\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t,t' \geq 0$ tel que $|t-t'| < \eta$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$|f *_\alpha g(t) - f *_\alpha g(t')| \leq \frac{\varepsilon}{||f||_{1,\alpha}} \int_0^{+\infty} |f(s)|d\mu(s) = \varepsilon.$$

Cela montre que c'est $f *_\alpha g$ uniformément continu. D'autre part, pour presque tous $s \geq 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \tau_t^\alpha(g)(s) f(s) = 0,$$

et pour tous $t,s \geq 0$, on trouve

$$|\tau_t^\alpha(g)(s) f(s)| \leq ||g||_{\infty,\alpha} |f(s)|.$$

on en déduit que $f *_\alpha g$ appartient à $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, et pour tout $x \geq 0$, on a

$$|f *_\alpha g(s)| \leq ||f||_{1,\mu_\alpha} ||g||_{\infty,\alpha}.$$

Ainsi,

$$||f *_\alpha g||_{\infty,\mu_\alpha} \leq ||f||_{1,\mu_\alpha} ||g||_{\infty,\alpha}.$$

■

Théorème 1.5. Soient $p,q \in]1,+\infty[$, et q l'exposont conjugué de p. Alors pour chaque $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et $g \in L^q_\alpha(\mathbb{R}_+)$, le produit de convolution $f *_\alpha g$ est dans $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, et on a

$$||f *_\alpha g||_{\infty,\alpha} \leq ||f||_{p,\alpha} ||g||_{q,\alpha} \tag{1.19}$$

Démonstration. . D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in [0,+\infty[$, l'intégrale

$$f *_\alpha g(t) = \int_0^{+\infty} \tau_t^\alpha(f)(s) g(s) d\mu_\alpha(s)$$

existe et

$$|f *_\alpha g(t)| \leq \int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha g(s)||(f)(s)|d\mu_\alpha(s)$$
$$\leq ||f||_{p,\alpha}||g||_{q,\alpha}.$$

Puisque $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, est dense dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+), p \in [1,+\infty[$, il existe une suite $(f_k)_k \subset \mathcal{C}_{c,0}(\mathbb{R})$, et une suit $(g_k)_k \subset \mathcal{C}_{c,0}(\mathbb{R})$, tel que

$$\lim_{k\to+\infty} ||f_k - f|| = 0 \quad et \quad \lim_{k\to+\infty} ||g_k - g|| = 0 \tag{1.20}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_k *_\alpha g_k(t) - f *_\alpha g(t) = f_k * \alpha g_k(t) - f_k *_\alpha g(t) + f_k *_\alpha g(t) - f *_\alpha g(t)$$
$$= f_k * \alpha(g_k - g)(t) + (f_k - f) *_\alpha g(t),$$

et de l'inégalité de Hölder, pour $x \geq 0$,

$$|f_k *_\alpha g_k(t) - f *_\alpha g(t)| \leq ||f_k||_{p,\alpha}||g_k - g||_{q,\alpha} + ||f_k - f||_{p,\alpha}||g||_{q,\alpha}.$$

Alors d'aprés la relation (1.20) on déduit que la suite $(f_k *_\alpha g_k)_k$ converge uniformément vers $f *_\alpha g$. Puisque l'espace $\mathcal{C}_{c,0}(\mathbb{R})$ est complet et la suite $(f_k *_\alpha g_k)_k \in \mathcal{C}_{*,c}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$, alors $f *_\alpha g \in \mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R})$. ■

Théorème 1.6. (Inégalité de Young) Soient $p, q, r \geq 1$, tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Pour tous $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et $g \in L^q_\alpha(\mathbb{R}_+)$, la fonction $f *_\alpha g$ appartient à $L^r_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et on a

$$||f *_\alpha g||_{r,\alpha} \leq ||f||_{p,\alpha}||g||_{q,\alpha}. \tag{1.21}$$

Démonstration. Soit $p = r$ ou $q = r$, l'équation (1.21) est donnée par le théorème (1.3) . De la même manière, le cas $r = \infty$, est déjà traité dans le théorème (1.5). Supposons maintenant que $r \neq \infty$, et que $q \neq r$, $p \neq r$, sachant que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, on peut facilement vérifier que

$$\frac{1}{r} + \frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{qr} = 1,$$

par conséquent, en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée avec les exposants r, $\frac{pr}{r-p}$, et $\frac{qr}{r-q}$, et en utilisant relation (1.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}
|f *_\alpha g(t)| &\leq \int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s) g(s)| d\mu_\alpha(s) \\
&\leq \int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(s)|^{1+p/r-p/r} |g(s)|^{1+q/r-q/r} d\mu_\alpha(s) \\
&\leq \int_0^{+\infty} (|\tau_t^\alpha(f)(s)|^p |g(s)|^q)^{/r} |\tau_t^\alpha(f)(s)|^{1-p/r} |g(s)|^{1-q/r} d\mu_\alpha(s) \\
&\leq \|(|\tau_t^\alpha(f)|^p |g(s)|^q)^{1/r}_{r,\alpha} \| |\tau_t^\alpha(f)|^{(r-p)/r} \|_{pr/(r-p),\alpha} \| |g|^{(r-q)/r} \|_{qr/(r-q),\alpha} \\
&= \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(m)|^p |g(m)|^q d\mu_\alpha(m) \right)^{1/r} \|\tau_t^\alpha(f)\|_{p,\alpha}^{(r-p)/r} \|g\|_{q,\alpha}^{(r-q)/r} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(m)|^p |g(m)|^q d\mu_\alpha(m) \right)^{1/r} \|f\|_{p,\alpha}^{(r-p)/r} \|g\|_{q,\alpha}^{(r-q)/r}.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et encore la relation (1.13), on déduit que

$$\begin{aligned}
\|f *_\alpha g\|_{r,\alpha}^r &= \int_0^{+\infty} |f *_\alpha g(t)|^r d\mu_\alpha(t) \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(m)|^p |g(m)|^q d\mu_\alpha(m) \right) \|f\|_{p,\alpha}^{(r-p)} \|g\|_{q,\alpha}^{(r-q)} d\mu_\alpha(t) \\
&= \|f\|_{p,\alpha}^{(r-p)} \|g\|_{q,\alpha}^{(r-q)} \int_0^{+\infty} |g(m)|^q \left(\int_0^{+\infty} |\tau_t^\alpha(f)(m)|^p d\mu_\alpha(t) \right) d\mu_\alpha(m) \\
&\leq \|f\|_{p,\alpha}^{(r-p)} \|g\|_{q,\alpha}^{(r-q)} \int_0^{+\infty} |g(m)|^q \left(\int_0^{+\infty} |f(m)|^p d\mu_\alpha(t) \right) d\mu_\alpha(m) \\
&\leq \|f\|_{p,\alpha}^{(r-p)} \|g\|_{q,\alpha}^{(r-q)} \|g\|_{q,\alpha}^q \|f\|_{p,\alpha}^p \\
&\leq \|g\|_{q,\alpha}^r \|f\|_{p,\alpha}^r.
\end{aligned}$$

■

1.4 Transformation de Hankel

Transformation de Hankel dans $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$

Définition 1.4. *Soit $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. La transformation de Hankel associée à l'opérateur de Bessel est défini sur $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ par :*

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) j_\alpha(\lambda t) d\mu_\alpha(t), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \tag{1.22}$$

Où j_α la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Example 2. *Soit $\alpha > 0$, et soit la fonction φ_α est défini sur $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ par :*
$\varphi_\alpha(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$. Et en échangeant l'intégrale et la sommation, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\alpha(\varphi_\alpha)(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^\alpha n! \Gamma(\alpha+n+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n} \int_0^\infty \left(\alpha + 1 - \frac{t^2}{2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} t^{2n+2\alpha+1} d(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\alpha+n+1)} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^n \int_0^\infty (\alpha+1-u) e^{-u} u^{n+\alpha} d(u) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\alpha+n+1)} \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^n [(\alpha+1)\Gamma(\alpha+n+1) - \Gamma(\alpha+n+2)] \\
&= \frac{s^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-s^2}{2}\right)^k \\
&= \frac{s^2}{2} e^{-\frac{s^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \leq 0$, on obtient $\mathcal{H}_\alpha(\varphi)(\lambda) = \frac{s^2}{2} e^{-\frac{s^2}{2}}$.

Théorème 1.7.

1. Pour tous $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, $\ t, \lambda \geq 0$, on a

$$\mathcal{H}_\alpha(\tau_t^\alpha(f))(\lambda) = j_\alpha(\lambda t) \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda). \tag{1.23}$$

2. Pour tous $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}_\alpha(f *_\alpha g)(\lambda) = \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) \mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda). \tag{1.24}$$

Démonstration. 1. Soit $f \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, la fonction $\tau^\alpha_t(f)$ appartient à l'espace $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et pour tous $t, \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha(\tau^\alpha_t(f))(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \tau^\alpha_t(f)(s) j_\alpha(\lambda s) d\mu_\alpha(s)\\ &= \int_0^{+\infty} j_\alpha(\lambda s) \int_0^{+\infty} f(m)\omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha(m) d\mu_\alpha(s)\\ &= \int_0^{+\infty} f(m)\left(\int_0^{+\infty} j_\alpha(\lambda s)\omega_\alpha(t,s,m) d\mu_\alpha\right) d\mu_\alpha(m)\\ &= \int_0^{+\infty} f(m)\tau^\alpha_t(j_\alpha(\lambda .))(m) d\mu_\alpha(m),\end{aligned}$$

d'après la relation (1.7) on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha(\tau^\alpha_t(f))(\lambda) &= j_\alpha(\lambda t)\int_0^{+\infty} f(m) j_\alpha(\lambda m) d\mu_\alpha(m)\\ &= j_\alpha(\lambda t)\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda).\end{aligned}$$

2. Pour tous $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$. La fonction $f *_\alpha g$ appartient à $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha(f *_\alpha g)(\lambda) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \tau^\alpha_t(f)(s) g(s) d\mu_\alpha(s)\right) j_\alpha(\lambda t) d\mu_\alpha(t)\\ &= \int_0^{+\infty} g(s)\left(\int_0^{+\infty} j_\alpha(\lambda t)\tau^\alpha_t(f)(s) d\mu_\alpha(t)\right) d\mu_\alpha(s)\\ &= \int_0^{+\infty} g(s)\mathcal{H}_\alpha(\tau^\alpha_t(f))(\lambda) d\mu_\alpha(s)\\ &= \int_0^{+\infty} g(s) j_\alpha(\lambda t)\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) d\mu_\alpha(s)\\ &= \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda).\end{aligned}$$

■

Proposition 1.8. (Propriété de changement pour la transformation de Hankel) Pour tous $f, g \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, alors on a

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) g(\lambda) d\mu_\alpha(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathcal{H}_\alpha(g)(t) d\mu_\alpha(t). \tag{1.25}$$

Démonstration. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f(t)||j_\alpha(\lambda t)||g(\lambda)| d\mu_\alpha(t) \leq \|f\|_{1,\alpha}\|f\|_{1,\alpha} < \infty.$$

De plus, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)g(\lambda)d\mu_\alpha(\lambda) &= \int_0^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{+\infty} g(\lambda)j_\alpha(\lambda t)d\mu_\alpha(\lambda)\right)d\mu_\alpha(t)\\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\mathcal{H}_\alpha(g)(t)d\mu_\alpha(t).\end{aligned}$$

■

Remarque 3. *(Formule d'inversion) Pour toute fonction f dans $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et transformation de Hankel $\mathcal{H}_\alpha$ dans $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a Formule d'inversion suivante*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)j_\alpha(\lambda t)d\mu_\alpha(\lambda).$$

Transformation de Hankel dans $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$

Lemme 1.2. L'opérateur $\dfrac{d}{dt^2} = \dfrac{1}{t}\dfrac{d}{dt}$ est continu de l'espace $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$. Alors en utilisant la formule de Taylor on obtient

$$\frac{df}{dt^2}(t) = \int_0^1 f''(mt)dm,$$

donc $\dfrac{df}{dt^2}$ appartient à $\mathcal{E}_*(\mathbb{R})$, et pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{df}{dt^2}\right)^k(t) = \int_0^1 m^k f^{(k+2)}(mt)dm.$$

D'autre part, pour chaque $t \neq 0$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} f''(mt)dt = \left[\frac{f'(mt)}{t}\right]_0^\infty = \lim_{m\to+\infty} \frac{f'(mt)}{t} - \frac{f'(0)}{t} = 0.$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} f''(mt)dm = 0,$$

et puis

$$\frac{df}{dt^2}(t) = \int_0^1 f''(mt)dm = -\int_1^{+\infty} f''(mt)dm,$$

ce qui conduit au fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left(\frac{df}{dt^2}\right)^k (t) = -\int_1^{+\infty} m^k f^{k+2}(mt)dm.$$

Soit $p, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} \left|(1+t^2)^p(\frac{df}{dt^2})^{(k)}(t)\right| &= \sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} \left|(1+t^2)^p \int_0^1 t^k f^{(k+2)}(mt)dt\right| \\
&\le \sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} (1+t^2)^p \int_0^1 t^k |f^{(k+2)}(mt)|dt \\
&= \sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} (1+t^2)^p \int_0^t \frac{u^k}{t^{k+1}} |f^{(k+2)}(u)|du \\
&\le 2^n N_{n+2}(f) \int_0^t \frac{u^k}{t^{k+1}} |f^{(k+2)}(u)|du \\
&\le 2^n N_{n+2}(f),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} \left|(1+t^2)^p(\frac{df}{dt^2})^{(k)}(t)\right| &= \sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} \left|-(1+t^2)^p \int_0^\infty t^k f^{(k+2)}(mt)dt\right| \\
&\le \sup_{\substack{0\le r\le 1\\ k,p\le n}} \int_1^\infty (1+m^2t^2)^{p+k+1} |f^{(k+2)}(mt)| \frac{dt}{1+m^2t^2} \\
&\le N_{2n+2}(f) \int_1 \frac{dt}{1+t^2} \\
&\le \frac{\pi}{4} N_{2n+2}(f).
\end{aligned}$$

Ainsi pour chaque $n \in \mathbb{N}$

$$N_n\left(\frac{df}{dt^2}\right) \le 2^n N_{2n+2}(f).$$

■

Lemme 1.3. Pour tout $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, l'opérateur ℓ_α est continu de $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Démonstration. La conséquence immédiate du lemme (1.2) et du fait bien connu que l'opérateur laplacien est continu de $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ dans lui-même.

■

Proposition 1.9. Soit $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R})$, g bornée ainsi que toutes leurs dérivées, on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ell_\alpha(g)(t)d\mu_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} \ell_\alpha(f)(t)g(t)d\mu_\alpha(t). \tag{1.26}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R})$ être une fonction bornée ainsi que toutes leurs dérivées. Alors d'après la relation (1.1), et en intégrant par parties, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\ell_\alpha(g)(t)d\mu_\alpha(t) &= \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} f(t)\frac{d}{dt}\left(x^{2\alpha+1}\frac{dg}{dt}\right)(t)dt \\
&= -\frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} x^{2\alpha+1}\frac{df}{dt}\frac{dg}{dt}(t)dt \\
&= \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} g(t)\frac{d}{dt}\left(x^{2\alpha+1}\frac{df}{dt}\right)(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \ell_\alpha(f)(t)g(t)d\mu_\alpha(t).
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.4. Soit $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$, alors

1. $\mathcal{H}_\alpha(f) \in \mathcal{E}_*(\mathbb{R})$ et on a

$$\forall \lambda \geq 0, \ \frac{d}{d\lambda}(\mathcal{H}_\alpha(f))(\lambda) = -\lambda \mathcal{H}_{\alpha+1}(f)(\lambda).$$

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \lambda \geq 0, \ (1+\lambda^2)^m \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) = \mathcal{H}_\alpha\left(\left(Id_{\mathcal{S}_*(\mathbb{R})} - \ell_\alpha\right)^m f\right)(\lambda).$$

En particulier la fonction $\mathcal{H}_\alpha(f)$ est à décroissance rapide.

Démonstration. 1. Soit $f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$. Il est claire que la fonction $\mathcal{H}_\alpha(f)$ est paire. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on déduit que $\mathcal{H}_\alpha(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{d^k \mathcal{H}_\alpha(f)}{d\lambda^k}\right)(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t) t^k \frac{d^k j_\alpha}{d\lambda^k}(\lambda t) d\mu_\alpha(t)$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}_\alpha(f)}{d\lambda}(\lambda) &= \int_0^{+\infty} f(t) \frac{d}{d\lambda}(j_\alpha)(\lambda t) d\mu_\alpha(t) \\
&= -\lambda \int_0^{+\infty} f(x) j_{\alpha+1}(\lambda t) d\mu_{\alpha+1}(t) \\
&= -\lambda \mathcal{H}_{\alpha+1}(f)(\lambda).
\end{aligned}$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$. Alors $\left(Id_{\mathcal{S}_*(\mathbb{R})} - \ell_\alpha\right)^m (f) \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
(1+\lambda^2)^m \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda) &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \int_0^{+\infty} f(t) \lambda^{2k} j_\alpha(\lambda t) d\mu_\alpha(t) \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \int_0^{+\infty} f(t) \left(-\lambda^2\right)^k j_\alpha(\lambda t) d\mu_\alpha(t) \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \int_0^{+\infty} f(t) \ell_\alpha^k \left(j_\alpha(\lambda .)\right)(t) d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^k \ell_\alpha^k (f)(t) j_\alpha(\lambda t) d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(Id_{\mathcal{S}_*(\mathbb{R})} - \ell_\alpha\right)^m (f)(t) j_\alpha(\lambda t) d\mu_\alpha(t) \\
&= \mathcal{H}_\alpha\left(\left(Id_{\mathcal{S}_*(\mathbb{R})} - \ell_\alpha\right)^m f\right)(\lambda).
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\lambda \mapsto (1+\lambda^2)^m \mathcal{H}_\alpha(f)$ est bornée, ce qui montre que la fonction $\mathcal{H}_\alpha(f)$ est à décroissance rapide.

■

Proposition 1.10. Pour tous $f, g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$, on a la formule de Parseval suivante

$$\int_0^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}d\mu_\alpha(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\overline{\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)}d\mu_\alpha(\lambda). \tag{1.27}$$

En particulier, pour tout f $\in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$, on a

$$||\mathcal{H}_\alpha(f)||_{2,\alpha} = ||f||_{2,\alpha}. \tag{1.28}$$

Démonstration. Soient f et $g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$, on a

$$\mathcal{H}_\alpha\left(f *_\alpha \bar{g}\right)(\lambda) = \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\overline{\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)}.$$

En appliquant la formule d'inversion et en utilisant le fait que la fonction $f *_\alpha g \in \mathcal{S}_*(\mathbb{R})$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f *_\alpha \overline{g(t)} = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\overline{\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)}j_\alpha(\lambda x)d\mu_\alpha(\lambda),$$

en particulier, pour $t = 0$

$$\begin{aligned} f *_\alpha \bar{g}(0) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\overline{\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)}d\mu_\alpha(\lambda) \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}v_\alpha(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Transformation de Hankel dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$

Théorème 1.8. (Théorème de Plancherel pour la transformée de Hankel)
La transformée de Hankel $\mathcal{H}_\alpha$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2_\alpha(R_+)$ en lui-même, avec ${\mathcal{H}_\alpha}^{-1} = \mathcal{H}_\alpha$. De plus, pour chaque $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, nous avons

$$||\mathcal{H}_\alpha(f)||_{2,\alpha} = ||f||_{2,\alpha}. \tag{1.29}$$

Démonstration. Soit $f \in L^2_\alpha(R_+)$. Alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}_+)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_{2,\alpha} = 0$. Maintenant, en utilisant le proposition (1.10), nous avons pour chaque $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{H}_\alpha(f_m) - \mathcal{H}_\alpha(f_n)||_{2,\alpha} &= ||\mathcal{H}_\alpha(f_m - f_n)||_{2,\alpha} \\ &= ||f_m - f_n||_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathcal{H}_\alpha(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ qui est complet. Par conséquent, $(\mathcal{H}_\alpha(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ qui est bien définie car elle est indépendante du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En fait, soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}_+)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} ||g_n - f||_{2,\alpha} = 0$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} ||\mathcal{H}_\alpha(g_n) - g||_{2,\alpha} &= ||\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(f_n) + \mathcal{H}_\alpha(f_n) - g||_{2,\alpha} \\ &\le ||\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(f_n)||_{2,\alpha} + \mathcal{H}_\alpha(f_n) - g||_{2,\alpha} \\ &\le ||\mathcal{H}_\alpha(g_n - f_n)||_{2,\alpha} + \mathcal{H}_\alpha(f_n) - g||_{2,\alpha} \\ &\le ||g_n - f_n||_{2,\alpha} + \mathcal{H}_\alpha(f_n) - g||_{2,\alpha} \\ &\le ||g_n - f_n||_{2,\alpha} + ||f - f_n||_{2,\alpha} + ||\mathcal{H}_\alpha(f_n) - g||_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{H}_\alpha(g_n) - g||_{2,\alpha} = 0.$$

À présent, nous avons

$$\begin{aligned} ||g||_{2,\alpha} &= \lim_{n\to\infty} ||\mathcal{H}_\alpha(f_n)||_{2,\alpha} \\ &= \lim_{n\to\infty} ||f_n||_{2,\alpha} \\ &= ||f||_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi, g est isométrique sur $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}_+)$. Enfin, si $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_*(\mathbb{R}_+)$ qui converge vers f. À partir de la proposition (1.10), nous avons que $\mathcal{H}_\alpha(f_n)$ est dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Maintenant, nous déduisons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f_n)).$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f_n)),$$

et alors

$$f = \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f_n)).$$

Enfin, $\mathcal{H}_\alpha$ est un isomorphisme de $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ en lui-même, et nous avons $\mathcal{H}_\alpha^{-1} = \mathcal{H}_\alpha$. ■

Théorème 1.9. (Formule de Parseval pour la transformation de Hankel) : pour chaque $f, g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}d\mu_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\overline{\mathcal{H}_\alpha(g)(\lambda)}d\mu_\alpha(\lambda). \tag{1.30}$$

Démonstration. Soit $f, g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors il existe $f_n et g_n$ dans $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{2,\alpha} = \lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{2,\alpha} = 0$. De plus , on a

$$\langle f|g\rangle_\alpha = \langle f - f_n|g\rangle_\alpha + \langle f_n|g_n\rangle_\alpha + \langle f_n|g - g_n\rangle_\alpha.$$

Donc, On obtient

$$|\langle f|g\rangle_\alpha - \langle f_n|g_n\rangle_\alpha| \leq \|f - f_n\|_{2,\alpha}\|g\|_{2,\alpha} + \|f_n\|_{2,\alpha}\|g - g_n\|_{2,\alpha}.$$

Ainsi, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n|g_n\rangle_\alpha = \langle f|g\rangle_\alpha.$$

De la même manière, et en utilisant le proposition (1.10), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{H}_\alpha(f_n)|\mathcal{H}_\alpha(g_n)\rangle_\alpha = \langle \mathcal{H}_\alpha(f)|\mathcal{H}_\alpha(g)\rangle_\alpha.$$

Ainis on obtient le résultat souhaité.

■

Proposition 1.11. Soit f et $g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors

$$f *_\alpha g = \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)). \tag{1.31}$$

De plus $f *_\alpha g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, si seulement si, $\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et dans ce cas on a

$$\mathcal{H}_\alpha(f *_\alpha g) = \mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g). \tag{1.32}$$

Démonstration. Il est bien connu que pour chaque $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Par le théorème (1.9), nous savons que la transformée de Hankel est une forme d'isomorphisme en $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ être deux suites dans $\mathcal{S}_*(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement à f et g dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors.nous avons

$$f_n *_\alpha g_n - f *_\alpha g = (f_n - f) *_\alpha g_n + f *_\alpha (g_n - g).$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}|f_n *_\alpha g_n(s) - f *_\alpha g(s)| &\leq \int_0^{+\infty} |(f_n - f)(t)\tau_s^\alpha(g_n)(t)|d\mu_\alpha(t) + \int_0^{+\infty} |f(t)\tau_s^\alpha(g_n - g)(t)|d\mu_\alpha(t) \\ &\leq ||g_n||_{2,\alpha}||f_n - f||_{2,\alpha} + ||f||_{2,\alpha}||g_n - g||_{2,\alpha}.\end{aligned}$$

Alors

$$||f_n *_\alpha g_n + f *_\alpha g||_{\infty,\alpha} \leq ||g_n||_{2,\alpha}||f_n - f||_{2,\alpha} + ||f||_{2,\alpha}||g_n - g||_{2,\alpha}.$$

In particulier

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n *_\alpha g_n + f *_\alpha g||_{\infty,\alpha} \leq \lim_{n\to\infty} ||g_n||_{2,\alpha}||f_n - f||_{2,\alpha} + ||f||_{2,\alpha}||g_n - g||_{2,\alpha} = 0.$$

Cela signifie que la suite $(f_n *_\alpha g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f *_\alpha g$. D'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\mathcal{H}_\alpha(f_n)\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g) = (\mathcal{H}_\alpha(f_n) - \mathcal{H}_\alpha(f))\mathcal{H}_\alpha(g_n) + (\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(g))\mathcal{H}_\alpha(f).$$

Donc de la même manière, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&||\mathcal{H}_\alpha(f_n)\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)||_{1,\alpha} \\ &= ||(\mathcal{H}_\alpha(f_n) - \mathcal{H}_\alpha(f))\mathcal{H}_\alpha(g_n) + (\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(g))\mathcal{H}_\alpha(f)||_{1,\alpha} \\ &\leq ||(\mathcal{H}_\alpha(f_n) - \mathcal{H}_\alpha(f))\mathcal{H}_\alpha(g_n)||_{1,\alpha} + ||(\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(g))\mathcal{H}_\alpha(f)||_{1,\alpha} \\ &\leq ||\mathcal{H}_\alpha(g_n)||_{2,\alpha}||\mathcal{H}_\alpha(f_n) - \mathcal{H}_\alpha(f)||_{2,\alpha} + ||\mathcal{H}_\alpha(f)||_{2,\alpha}||\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(g)||_{2,\alpha} \\ &= ||g_n||_{2,\alpha}||f_n - f||_{2,\alpha} + ||f||_{2,\alpha}||g_n - g||_{2,\alpha}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{H}_\alpha(f_n)\mathcal{H}_\alpha(g_n) - \mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)||_{1,\alpha} = 0,$$

ce qui implique que la suite $(\mathcal{H}_\alpha(f_n)\mathcal{H}_\alpha(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)$ dans $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Cependant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathcal{H}_\alpha(f_n *_\alpha g_n) = \mathcal{H}_\alpha(f_n)\mathcal{H}_\alpha(g_n).$$

Alors $(\mathcal{H}_\alpha(f_n *_\alpha g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)$ dans $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Puisque la transformée de Hankel est continue de $L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{C}_{*,0}(\mathbb{R}_+)$, nous obtenons que la suite $(f_n *_\alpha g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g))$. En particulier $f *_\alpha g = \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g))$. Ainsi $f *_\alpha g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ est équivalent au fait que $\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ ce qui implique que $\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. À l'inverse, si $\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}+)$ alors $\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g) \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)\bigcap L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et par conséquent

$$f *_\alpha g = \mathcal{H}_\alpha(\mathcal{H}_\alpha(f)\mathcal{H}_\alpha(g)) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+).$$

$\blacksquare$

Chapitre 2

Transformation en ondelettes de Hankel

La Transformation en Ondelette de Hankel (HWT) est une technique avancée de signal traitement qui combine les principaux de la transformation de Hankel et la transformation en ondelettes. Cette technique est utilisées pour l'analyse de signaux non stationnaires et multi résolution, et est essentiel dans domaines telles que le traitement de images, la compression de données et l'analyse des séries temporelles complexes. Ce chapitre présente les faits préliminaires de la théorie de la transformée continue en ondelettes de Hankel qui a été explorée par Peng et Ma [26]. Nous nous référons également à [25, 32].

2.1 Opérateur de Dilatation D_a

Définition 2.1. *Pour $a > 0$, l'opérateur de dilatation D_α d'une fonction mesurable ψ est défini par*

$$D_a(\psi)(t) = a^{\alpha+1}\psi(at).$$

Proposition 2.1. Pour tout $f \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+), 1 \leq p < +\infty$, on a $D_a(\psi) \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$et on obtient

$$\|D_a(\psi)\|_{p,\alpha} = a^{\left(1-\frac{2}{p}\right)(\alpha+1)} \|\psi\|_{p,\alpha}.$$

En particulier, pour $p = 2$, on obtient

$$\|D_a(\psi)\|_{2,\alpha} = \|\psi\|_{2,\alpha}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Soient $a > 0$, $1 \leq p < +\infty$, et $\psi \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |D_a(\psi)(m)|^p \, d\mu_\alpha(m) &= \int_0^{+\infty} \left|a^{\alpha+1}\psi(am)\right|^p d\mu_\alpha(m) \\
&= a^{p\alpha+p} \int_0^{+\infty} |\psi(am)|^p \frac{m^{2\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} dm \\
&= a^{p\alpha+p} \int_0^{+\infty} |\psi(s)|^p \frac{s^{2\alpha+1}}{a^{2\alpha+1} 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \frac{ds}{a} \\
&= a^{(p-2)(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} |\psi(s)|^p d\mu_\alpha(s).
\end{aligned}$$

Donc, $D_a(\psi) \in L^p_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et on a

$$\|D_a(\psi)\|_{p,\alpha} = a^{\left(1-\frac{2}{p}\right)(\alpha+1)} \|\psi\|_{p,\alpha}.$$

En particulier,
si $p = 2$, alors pour tout $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+), D_a(\psi) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et on obtient

$$\|D_a(\psi)\|_{2,\alpha} = \|\psi\|_{2,\alpha}.$$

■

Proposition 2.2. Pour tous $a > 0$ et $\psi, \varphi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\langle D_a(\psi), \varphi \rangle_\alpha = \left\langle \psi, D_{1/a}(\varphi) \right\rangle_\alpha. \tag{2.2}$$

Démonstration. Soient $a > 0$, et $\psi, \varphi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors, on a $D_a(\psi) \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et

$$\begin{aligned}
\langle D_a(\psi), \varphi \rangle_\alpha &= \int_0^{+\infty} D_a(\psi)(t)\overline{\psi(t)} d\mu_\alpha(t) \\
&= \frac{a^{\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \psi(at)\overline{\varphi(t)} t^{2\alpha+1} dt.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $m = at$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle D_a(\psi), \varphi\rangle_\alpha &= \int_0^{+\infty} \psi(m) \overline{\frac{1}{a^{\alpha+1}} \varphi\left(\frac{m}{a}\right)} \frac{m^{2\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} dm \\
&= \int_0^{+\infty} \psi(m) \overline{D_{1/a}(\varphi)(m)} d\mu_\alpha(m) \\
&= \left\langle \psi, D_{1/a}(\varphi) \right\rangle_\alpha .
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.

1. Pour tous $a > 0$, et $t \geq 0$, on a

$$D_a \tau_t = \tau_{t/a} D_a. \tag{2.3}$$

2. Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{H}_\alpha D_a = D_{1/a} \mathcal{H}_\alpha. \tag{2.4}$$

Démonstration. 1. Soient $a > 0$, $t \geq 0$ et $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors, on a pour tout $m \geq 0$

$$\begin{aligned}
D_a(\tau_t \psi)(m) &= a^{\alpha+1} \tau_t^\alpha \psi(am) \\
&= a^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \psi\left(\sqrt{t^2 + a^2 m^2 + 2tam\cos(\theta)}\right) \sin(\theta)^{2\alpha} d\theta \\
&= a^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \psi\left(a\sqrt{\frac{t^2}{a^2} + m^2 + 2\frac{t}{a} m\cos(\theta)}\right) \sin(\theta)^{2\alpha} d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi D_a(\psi)\left(\sqrt{\frac{t^2}{a^2} + m^2 + 2\frac{t}{a} m\cos(\theta)}\right) \sin(\theta)^{2\alpha} d\theta \\
&= \tau_{t/a} D_a(\psi)(m).
\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$D_a \tau_t = \tau_{t/a} D_a.$$

2. Soit $\psi \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$. Alors, $D_a(\psi) \in L^1_\alpha(\mathbb{R}_+)$, et on obtient pour tout $m \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\alpha(D_a(\psi))(m) &= \int_0^{+\infty} D_a(\psi)(t) j_\alpha(tm) d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^{+\infty} a^{\alpha+1}\psi(at) j_\alpha(tm) d\mu_\alpha(t) \\
&= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} \psi(s) j_\alpha\left(s\frac{m}{a}\right) \frac{s^{2\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} ds \\
&= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} \psi(s) j_\alpha\left(s\frac{m}{a}\right) d\mu_\alpha(s) \\
&= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \mathcal{H}_\alpha(\psi)\left(\frac{m}{a}\right) \\
&= D_{1/a}(\mathcal{H}_\alpha(\psi))(m).
\end{aligned}$$

■

2.2 Transformation en ondelettes de Hankel

Définition 2.2. *(Condition d'admissibiliée). Soit $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$une fonction non nulle. Alors, on dit que ψ est une ondelette admissible de l'opérateur de Hankel si*

$$0 < C_\psi = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(\psi)(a)|^2 \frac{da}{a} < +\infty. \tag{2.5}$$

Example 3. *Soit $\varphi(t) = \left(\alpha + 1 - \frac{t^2}{2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$ alors on a*

$$\forall s \geq 0, \quad \mathcal{H}_\alpha(\varphi)(s) = \frac{s^2}{2} e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(\varphi)(s)|^2 \frac{ds}{s} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{s^2}{2} e^{-\frac{s^2}{2}}\right)^2 \frac{ds}{s} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{s^3}{4} e^{-s^2} ds \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u}{8} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Donc, la fonction φ est une ondelette admissible de Hankel.

Définition 2.3. *(Transformation en ondelettes de Hankel). Pour une ondelette admissible de Hankel ψ, la transformée en ondelettes de Hankel continue T_ψ est définie pour toute fonction dans $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ par :*

$$T_\psi(f)(a,t) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(r)\overline{\psi_{a,t}(r)}d\mu_\alpha(r); \quad (a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \tag{2.6}$$

où $\psi_{a,t}(r) = \tau_t(D_a(\psi))(r)$.

Notations. *On note par $\nu_\alpha = \mu_\alpha \otimes \mu_\alpha$ la mesure définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ par*

$$d\nu_\alpha(a,t) = \frac{a^{2\alpha+1}t^{2\alpha+1}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}dadt,$$

et $L^p_{\nu_\alpha}\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+\right), 1 \le p \le +\infty$, l'espace Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure ν_α avec la norme L^p notée par $\|.\|_{p,\nu_\alpha}$.

Remarque 4. *On peut écrire la transformation en ondelettes de Hankel sous les formes suivantes :*

$$T_\psi(f)(a,t) = f *_\alpha D_a(\overline{\psi})(t) \tag{2.7}$$

$$= \langle f, \psi_{a,t}\rangle_\alpha . \tag{2.8}$$

Proposition 2.4. Soit $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. La transformation en ondelettes de Hankel est un opérateur linéaire borné de $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ dans $L^\infty_{\nu_\alpha}\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+\right)$et on a

$$\left\|T_\psi(f)\right\|_{\infty,\nu_\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha}\|\psi\|_{2,\alpha}. \tag{2.9}$$

Démonstration. Soient $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ et $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et les relations (1.13),(1.19) et (2.1), on obtient pour tout $(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\left|T_\psi(f)(a,t)\right| &= \left|\langle f, \psi_{a,t}\rangle_\alpha\right| \\ &\le \|f\|_{2,\alpha}\left\|\psi_{a,t}\right\|_{2,\alpha} \\ &\le \|f\|_{2,\alpha}\|\psi\|_{2,\alpha},\end{aligned}$$

d'où, l'opérateur T_ψ est borné de $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ dans $L^\infty_{\nu_\alpha}\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+\right)$ et on a

$$\left\|T_\psi(f)\right\|_{\infty,\nu_\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha}\|\psi\|_{2,\alpha}.$$

$\blacksquare$

La transformée en ondelettes de Hankel continue satisfait aux propriétés suivantes (voir [26])

Proposition 2.5. (Formule de Plancherel). Soit ψ une ondelette admissible de Hankel. Pour chaque $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, la fonction T_ψ appartient à $L^2_{\nu_\alpha}\left(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+\right)$ et nous avons

$$\int_0^{+\infty} |f(r)|^2 d\mu_\alpha(r) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|T_\psi(f)(a,t)\right|^2 d\nu_\alpha(a,t). \tag{2.10}$$

Démonstration. Soit ψ être une ondelette de Hankel admissible et $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. On a d'après le théorème de Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|T_\psi(f)(a,t)\right|^2 d\nu_\alpha(a,t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|f *_\alpha D_a\overline{(\psi)}(t)\right|^2 d\nu_\alpha(a,t) \\
&= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(t)|^2 \, |\mathcal{H}_\alpha(D_a(\psi)(t))|^2 d\nu_\alpha(a,t) \\
&= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(t)|^2 \left(\int_0^{+\infty} \left|D_{1/a}(\mathcal{H}_\alpha(f)(t))\right|^2 d\mu_\alpha(a)\right) d\mu_\alpha(t) \\
&= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(t)|^2 \left(\int_0^{+\infty} \left|\mathcal{H}_\alpha(f)\left(\frac{t}{a}\right)\right|^2 \frac{da}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1) a}\right) d\mu_\alpha(\lambda) \\
&= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(t)|^2 \left(\frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(u)|^2 \frac{du}{u}\right) d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(t)|^2 \, d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^{+\infty} |f(r)|^2 d\mu_\alpha(r).
\end{aligned}$$

∎

Proposition 2.6. (Formule de Parseval). Soit ψ une ondelette admissible. Pour les fonctions f et g en $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ nous avons

$$\int_0^\infty f(r)\overline{g(r)} d\mu_\alpha(r) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_0^\infty T_\psi(f)(a,t)\overline{T_\psi(g)(a,t)} d\nu_\alpha(a,t). \tag{2.11}$$

Démonstration. Cela résulte de l'identité de polarisation et de la relation (2.10), en fait

$$\begin{aligned}
\left\langle T_\psi f, T_\psi g\right\rangle_{\nu_\alpha} &= \frac{1}{4}\Big(\|T_\psi f + T_\psi g\|^2_{2,\nu_\alpha} - \|T_\psi f - T_\psi g\|^2_{2,\nu_\alpha} \\
&\quad + i\|T_\psi f - iT_\psi g\|^2_{2,\nu_\alpha} - i\|T_\psi f + iT_\psi g\|^2_{2,\nu_\alpha}\Big) \\
&= \frac{1}{4}(C_\psi\|f+g\|^2_{2,\alpha} - C_\psi\|f-g\|^2_{2,\alpha} + iC_\psi\|f-ig\|^2_{2,\alpha} - iC_\psi\|f+ig\|^2_{2,\alpha}) \\
&= C_\psi \langle f, g\rangle_\alpha .
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.7. (Formule de la reconstruction) Soit ψ une ondelette admissible, alors pour toute fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, nous avons

$$f(.) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \int_0^\infty T_\psi f(a,t)\psi_{a,t}(.)\ d\nu_\alpha(a,t). \tag{2.12}$$

Démonstration. Soit $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, D'après la formule de Parseval pour la transformée en ondelettes de Hankel continue (2.11) et pour toute fonction $g \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, nous avons

$$\begin{aligned}
C_\psi \langle f, g\rangle_\alpha &= \left\langle T_\psi f, T_\psi g\right\rangle_{\nu_\alpha} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty T_\psi f(a,t)\overline{T_\psi g(a,t)} d\mu_\alpha(a) d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty T_\psi f(a,t)\left(\overline{\int_0^\infty g(r)\overline{\psi_{a,t}(r)} d\mu_\alpha(r)}\right) d\mu_\alpha(a) d\mu_\alpha(t) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \int_0^\infty T_\psi f(a,t)\psi_{a,t}(r)\ d\mu_\alpha(a) d\mu_\alpha(t)\right)\overline{g(r)} d\mu_\alpha(r).
\end{aligned}$$

Donc

$$f(.) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \int_0^\infty T_\psi f(a,t)\psi_{a,t}(.)\ d\nu_\alpha(a,t).$$

■

Remarque 5. *En utilisant le fait que $T_\psi(f)$ appartient à $L^2_{v_\alpha}\left(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+\right) \cap \mathcal{C}_b\left(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+\right)$ et que la transformée de Hankel est un automorphisme sur $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, on obtient des relations (1.24) et (2.7),*

$$T_\psi(f)(a,t) = \frac{1}{a^{\alpha+1}}\mathcal{H}_\alpha\left(\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\mathcal{H}_\alpha(\bar{\psi})\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right)(t), \quad (a,t) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}_+. \tag{2.13}$$

Chapitre 3

Principe d'incertitude de type Heisenberg

Le principe d'incertitude de type Heisenberg, introduit par Werner Heisenberg en 1927, stipule qu'il est impossible de connaître de manière précise la position et la quantité de mouvement d'une particule en même temps. Ce principe a des conséquences importantes pour l'analyse harmonique et le traitement des signaux. Il est particulièrement pertinent dans le cadre des transformations en ondelettes, où des versions spécifiques du principe ont été démontrées, mettant en évidence les limites de localisation simultanée dans les domaines temporel et fréquentiel. Ce chapitre vise à établir des inégalités de type Heisenberg pour la transformation de Hankel et la transformation en ondelettes continues.

Le principe d'incertitude de type Heisenberg pour la transformée de Hankel a été prouvé par Rösler et Voit [28]. Il stipule que pour chaque fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$,

$$\|rf\|_{2,\alpha}\,\|\lambda\mathcal{H}_\alpha(f)\|_{2,\alpha} \geq (\alpha+1)\|f\|^2_{2,\alpha} \tag{3.1}$$

avec égalité si et seulement si $f(r) = de^{-br^2/2}$ pour certains $d \in \mathbb{C}$ et $b > 0$.

Récemment, dans son article [37], Ma a étendu l'inégalité précédente à un cadre plus général, à savoir qu'il a établi que pour $s, t > 0$ et pour chaque fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|r^s f\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \geq c\|f\|_{2,\alpha} \tag{3.2}$$

Plus tard, dans son article [31], Soltani a donné explicitement la constante c dans le cas $s \geqslant 1$ et $t \geqslant 1$. Plus précisément, il a établi le théorème suivant (un résultat similaire a été donné pour la première fois par Rassias [27] pour la transformée de Fourier classique).

Théorème 3.1. Soient $s \geq 1$, $t \geq 1$, et pour chaque fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\|r^s f\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \geq (\alpha+1)^{st/(s+t)}\|f\|_{2,\alpha} \tag{3.3}$$

avec égalité si et seulement si $s = t = 1$ et $f(r) = de^{-br^2/2}$ pour certains $d \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{b} > 0$.

Dans [36], l'auteur a établi des inégalités de type Heisenberg pour l'ondelette habituelle transformer. Ces résultats sont inspirés de la forme [30]. Avec un cadre plus général, nous étudions dans ce qui suit, des inégalités similaires de type Heisenberg pour la transformée en ondelettes de Hankel.

Proposition 3.1. Soient $s, t > 0$ et $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, une fonction admissible. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \geq c\left(\sqrt{C_\psi}\right)^{t/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}. \tag{3.4}$$

En particulier, si $s, t \geq 1$ la constante c est donnée par $c = (\alpha+1)^{st/(s+t)}$.

Démonstration. En appliquant l'inégalité de type Heisenberg (3.2) pour la transformée de Hankel à la fonction $x \mapsto T_\psi(f)(a,x)$, nous obtenons pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,v_\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \geq c\left\|T_\psi(f)\right\|_{2,\alpha}$$

Alors

$$\left(\int_0^{+\infty} x^{2s}\left|T_\psi(f)(a,x)\right|^2 \,\mathrm{d}\mu_\alpha(x)\right)^{t/(s+t)} \left(\int_0^{+\infty} \lambda^{2t}\left|\mathcal{H}_\alpha\left(T_\psi(f)(a,.)\right)(\lambda)\right|^2 \,\mathrm{d}\mu_\alpha(\lambda)\right)^{s/(s+t)}$$
$$\geq c^2 \int_0^{+\infty} \left|T_\psi(f)(a,x)\right|^2 \,\mathrm{d}\mu_\alpha(x). \tag{3.5}$$

Ainsi, en intégrant la relation (3.5) par rapport à la mesure $d\mu a$, et en appliquant l'inégalité de Hölder ainsi que celle de Plancherel pour le théorème de la transformée en ondelettes de Hankel continue, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2s}\left|T_\psi(f)(a,x)\right|^2 \,\mathrm{d}\nu_\alpha(a,x)\right)^{t/(s+t)}\\ &\times\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \lambda^{2t}\left|\mathcal{H}_\alpha\left(T_\psi(f)(a,\cdot)\right)(\lambda)\right|^2 \,\mathrm{d}\nu_\alpha(a,\lambda)\right)^{s/(s+t)}\\ &\geq c^2\left\|T_\psi(f)\right\|^2_{2,\nu_\alpha}=c^2C_\psi\|f\|^2_{2,\alpha}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

D'autre part, par la relation (2.13) et la condition d'admissibilité (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2s}\left|T_\psi(f)(a,x)\right|^2 \,\mathrm{d}\nu_\alpha(a,x)&=\int_0^{+\infty} x^{2s}\left|\mathcal{H}_\alpha(f)(x)\right|^2 d\mu_\alpha(t)\\ &=C_\psi\left\|x^s f\right\|^2_{2,\alpha}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \lambda^{2t}\left|\mathcal{H}_\alpha\left(T_\psi(f)(a,\cdot)\right)(\lambda)\right|^2 \,\mathrm{d}v_\alpha(a,\lambda)\\ &=\int_0^{+\infty} \lambda^{2t}\left|\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)\right|^2\left(\int_0^{+\infty}\left|\mathcal{H}_\alpha(\psi)\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right|^2\frac{\mathrm{d}a}{a}\right)\mathrm{d}\mu_\alpha(\lambda)\\ &=C_\psi\left\|\lambda^t\mathcal{H}_\alpha(f)\right\|^2_{2,\alpha}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Ensuite, le résultat suit en remplaçant la dernière égalité (3.7) et (3.8) dans (3.6). Pour le cas $s,t\geq 1$, nous appliquons le principe d'incertitude de type Heisenberg donné par la relation (3.3) à la fonction $x\mapsto T_\psi(f)(a,x)$ et le reste de la preuve est le même. ■

Proposition 3.2. Soient $s,t>0$ et $\psi\in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, une fonction admissible. Alors il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $f\in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\|r^s f\|^{t/(s+t)}_{2,\alpha}\left\|a^tT_\psi(f)\right\|^{s/s+t)}_{2,\nu_\alpha}\geq c\left(\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)}\right)^{s/(s+t)}\|f\|_{2,\alpha},\tag{3.8}$$

où $\mathcal{M}:f\mapsto\mathcal{M}(f)(z)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x/x^{z+1}$, est la transformation de Mellin classique. Si $s,t\geq 1$ la constante c est donnée par $c=(\alpha+1)^{st/(s+t)}$.

Démonstration. Supposons le cas non trivial où les deux intégrales du membre gauche de (3.8) sont finis. En utilisant le théorème de Fubini, la relation (2.13) et le théorème de

Plancherel pour la transformée de Hankel (1.27), nous avons

$$\begin{aligned}\left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^2 &= \int_0^{+\infty} a^{2t}\left(\int_0^{+\infty}\left|T_\psi(f)(a,x)\right|^2 \, \mathrm{d}\mu_\alpha(x)\right) a^{2\alpha+1} \, \mathrm{d}a \\ &= \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 \left(\int_0^{+\infty} a^{2t}\left|\mathcal{H}_\alpha(\psi)\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right|^2 \frac{\mathrm{d}a}{a}\right) \mathrm{d}\mu_\alpha(\lambda)\end{aligned}$$

Par un changement de variables dans l'intégrale interne, nous obtenons :

$$\left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^2 = \int_0^{+\infty} \lambda^{2t} |\mathcal{H}_\alpha(f)(\lambda)|^2 \left(\int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(\psi)(a)|^2 \frac{\mathrm{d}a}{a^{2t+1}}\right) \mathrm{d}\mu_\alpha(\lambda),$$

alors nous avons $\mathcal{M}(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2) = \int_0^{+\infty} |\mathcal{H}_\alpha(\psi)(a)|^2 \frac{\mathrm{d}a}{a^{2t+1}}$, donc

$$\left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^2 = \mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t) \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^2. \tag{3.9}$$

Ainsi

$$\|r^s f\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)} \left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{s/s+t)} = (\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)})^{s/s+t)} \|r^s f\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{t/(s+t)}.$$

Nous obtenons le résultat en appliquant l'inégalité de type Heisenberg pour la transformée de Hankel (3.2). Pour le cas où $s,t \geq 1$, nous appliquons l'inégalité de type Heisenberg pour la transformée de Hankel donnée par la relation (3.3). ■

Dans [14], les auteurs ont démontré le principe d'incertitude de type Heisenberg pour la transformée de Hankel avec fenêtre impliquant des variables de temps et de fréquence. Dans ce mémoire, nous étudions des résultats similaires avec une approche une approche différente et des paramètres plus généraux.

Théorème 3.2. Soient $s,t > 0$ et $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, une fonction admissible. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{s/(s+t)} \left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{t/(s+t)} \geq c\left(\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)}\right)^{s/(s+t)} \left(\sqrt{C_\psi}\right)^{t/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}, \tag{3.10}$$

pour toute fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. De plus, si $s,t \geq 1$, alors $c = (\alpha+1)^{st/(s+t)}$.

Démonstration. D'aprés les relations (3.9) et (3.4), on a

$$\begin{aligned}\left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{t/(s+t)} \left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{s/(s+t)} &= \left(\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)}\right)^{s/(s+t)} \\ &\times \left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{t/(s+t)} \left\|\lambda^t \mathcal{H}_\alpha(f)\right\|_{2,\alpha}^{s/(s+t)} \\ &\geq c\left(\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)}\right)^{s/(s+t)} \left(\sqrt{C_\psi}\right)^{t/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}\end{aligned}$$

∎

Dans le théorème suivant, nous donnons une inégalité d'incertitude de type Heisenberg impliquant une seule condition sur le comportement simultané temps-fréquence.

Théorème 3.3. Soient $s, t > 0$ et $\psi \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, une fonction admissible. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\begin{aligned}&\left\||(a,x)|^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{t/(s+t)} \left\||(a,x)|^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}^{s/(s+t)} \\ &\geq c\left(\sqrt{\mathcal{M}\left(|\mathcal{H}_\alpha(\psi)|^2\right)(2t)}\right)^{s/(s+t)} \left(\sqrt{C_\psi}\right)^{s/(s+t)} \|f\|_{2,\alpha}\end{aligned} \tag{3.11}$$

pour chaque fonction $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. De plus, si $s, t \geqslant 1$, alors $c = (\alpha+1)^{st/(s+t)}$.

Démonstration. Le résultat découle de la relation (3.4) et du fait que

$$\left\||(a,x)|^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha} \left\|(a,x)|^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha} \geq \left\|x^s T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha} \left\|a^t T_\psi(f)\right\|_{2,\nu_\alpha}.$$

∎

Bibliographie

[1] A. L. Schwartz. Proc. Amer. *An inversion theorem for Hankel transforms.* Math. Soc. 22 (1969), 713-717.

[2] Amrein WO, Berthier AM. *On support properties of Lp-functions and their Fourier transforms.* J Funct Anal. 1977 ;24 :258–267.

[3] Benedicks M. *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. J Math Anal Appl*. 1985 ;106 :180–183.

[4] Bowie PC. *Uncertainty inequalities for Hankel transforms.* SIAM J Math Anal. 1971 ;2 :601–606.

[5] Bonami A, Demange B, Jaming P. *Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms*. Rev Mat Iberoamericana. 2003 ;19 :23–55.

[6] C. Baccar : *Uncertainty principles for the continuous Hankel Wavelet transform,* Integral Transforms and Special Functions,(2016), DOI : 10.1080/10652469.2016.1148031.

[7] C. S. Herz. Proc. Natl. *On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms.* Acad. Sci. USA. 40 (1954), 996-999.

[8]] Cowling M, Price J. *Generalisations of Heisenberg's inequality, In Mauceri G, Ricci F, Weiss G, editors. Harmonic analysis, lecture notes in mathematics.* Vol. 992. Berlin : Springer ; 1983, pp. 443–449.

[9] D. T. Haimo. Trans. Amer. *Integral equations associated with Hankel convolutions.* Math. Soc. 116 (1965), 330-375.

[10] Daubechies I. *Time–frequency localization operators : a geometric phase space approach.* IEEE Trans Inf Theory. 1988 ;34 :605–612.

[11] Flandrin P. *Inequalities in Mellin–Fourier signal analysis. In Lokenath Debnath editor. Wavelet transforms and time–frequency signal analysis.* Berlin : Springer ; 2001. p. 289–319.

[12] Ghobber S. *Phase space localization of orthonormal sequences in* $L^2_\alpha(\mathbb{R}_+)$. J Approx Theory. 2015 ;189 :123–136.

[13] Ghobber S, Jaming P. *Strong annihilating pairs for the Fourier–Bessel transform.* J Math Anal Appl. 2011 ;377 :501–515.

[14] Ghobber S, Omri S. *Time–frequency concentration of the windowed Hankel transform.* Integral Transf Spec F. 2014 ;25 :481–496.

[15] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Univ. Press, 1995.

[16] Hardy G. *A theorem concerning Fourier transforms*. J London Math Soc. 1933 ;1 :227–231.

[17] Havin V, Jöricke B. *The uncertainty principle in harmonic analysis*. Berlin : Springer ; 1994.

[18] Hogan JA. *Time–frequency and time-scale methods : adaptive decompositions, uncertainty principles, and sampling.* Basel : Springer ; 2007.

[19] Hirschman I. *Variation diminishing Hankel transforms.* J Anal Math. 1960 ;8 :307–336.

[20] K. Stempak. C. R. Acad. *La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel.* Sci. Paris. Sér. I Math. 303 (1986), 15-18.

[21] Ma R. *Heisenberg uncertainty principle on Chébli-Trimèche hypergroups.* Pacific J Math. 2008 ;235 :289–296.

[22] Mejjaoli H, Salem AOA. *Weinstein Gabor transform and applications.* Adv Pure Math. 2012 ;2 :203.

[23] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications.* Dover Publications. New-York, 1972.

[24] Omri S. *Local uncertainty principle for the Hankel transform.* Integral Transf Spec Funct. 2010 ;21 :703–712.

[25] Pathak RS, Dixit MM. *Continuous and discrete Bessel wavelet transforms.* J Comput Appl Math. 2003 ;160 :241–250.

[26] Peng L, Ma R. *Wavelets associated with Hankel transform and their Weyl transforms.* Sci China Math. 2004 ;47 :393–400.

[27] Rassias JM. *On the Heisenberg-Weyl inequality.* J Inequal Pure Appl Math. 2005 ;6.

[28] Rösler M, Voit M. *An uncertainty principle for Hankel transforms.* Proc Amer Math Soc. 1999 ;127 :183–194.

[29] Schwartz AL. *An inversion theorem for Hankel transforms.* Proc Amer Math Soc. 1969 ;22 :713–717.

[30] Singer P. *Uncertainty inequalities for the continuous wavelet transform.* IEEE Trans Inform Theory. 1999 ;45 :1039–1042.

[31] Soltani F. *A general form of Heisenberg-Pauli-Weyl uncertainty inequality for the Dunkl transform.* Integral Transf Spec Funct. 2013 ;24 :401–409.

[32] Trimèche K. *Generalized wavelets and hypergroups.* Florida : CRC Press ; 1997.

[33] Trimèche K. *Transformation intégrale de Weyl et théoreme de Paley-Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur (0, +).* J Math Pures Appl. 1981 ;60 :51–98.

[34] Tuan VK. *Uncertainty principles for the Hankel transform.* Integral Transf Spec Funct. 2007 ;18 :369–381.

[35] Weyl H. *The theory of groups and quantum mechanics.* New York : Courier Corporation ; 1950.

[36] Wilczok E. *New uncertainty principles for the continuous Gabor transform and the continuous wavelet transform.* Doc Math. 2000 ;5 :201–226.

[37] Xiao J, He J. *Uncertainty inequalities for the Heisenberg group.* Proc Indian Acad Sci Math Sci. 2012 ;122 :p. 573.