République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Amar Telidji Laghouat

Faculté : Technologie

Département : Électronique

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Électronique

Spécialité : Électronique

Destiné aux étudiants de Licence en Électronique

Polycopié de Travaux Dirigés

avec résumés de cours

Asservissement et Régulation

Présenté par : Dr. ABOUCHABANA Nabil
MCB, Université de Laghouat
Email : n.abouchabana@lagh-univ.dz
Année universitaire : 2025/2026

Avant-propos

Ce document constitue un support de travaux dirigés destiné aux étudiants de Licence en Électronique dans le cadre du module **Asservissement et Régulation**. Il a été élaboré afin d'accompagner les étudiants dans la compréhension, l'analyse et l'application des notions fondamentales relatives aux systèmes asservis.

L'objectif de ce polycopié est de proposer un ensemble structuré d'exercices permettant aux étudiants de consolider les connaissances théoriques acquises en cours, tout en développant leur capacité à résoudre des problèmes concrets relevant du domaine de l'automatique. Les séries de travaux dirigés abordent progressivement les concepts essentiels tels que la modélisation des systèmes dynamiques, la représentation par fonction de transfert, l'analyse de la réponse temporelle, l'étude de la stabilité, ainsi que les principes de base de la correction et de la régulation.

Une attention particulière a été accordée à la progression pédagogique du contenu. Les exercices ont été choisis de manière à permettre aux étudiants de passer des applications directes du cours à des problèmes plus complets exigeant une démarche d'analyse et de synthèse. Les solutions proposées ont pour but de guider l'étudiant dans sa méthode de raisonnement, tout en l'aidant à acquérir une meilleure autonomie dans son travail personnel.

Ce support peut être utilisé aussi bien durant les séances encadrées de travaux dirigés que dans le cadre d'une préparation individuelle aux examens. Il constitue également un outil d'accompagnement pour l'enseignant dans l'organisation et la conduite des séances pédagogiques.

Nous espérons que ce document contribuera à faciliter l'apprentissage de cette matière fondamentale et à renforcer chez l'étudiant les compétences nécessaires à la compréhension et à la maîtrise des systèmes asservis.

Introduction

L'asservissement et la régulation occupent une place essentielle dans le domaine de l'électronique, de l'automatique et, plus largement, dans l'ensemble des systèmes industriels modernes. De nombreux dispositifs techniques nécessitent aujourd'hui un contrôle précis de leurs grandeurs physiques, telles que la position, la vitesse, la température, la pression ou encore le niveau. Afin d'assurer ce contrôle, on met en œuvre des systèmes capables de comparer en permanence une grandeur mesurée à une valeur souhaitée, puis de corriger automatiquement l'écart observé.

Un système asservi est donc un système de commande doté d'une boucle de rétroaction, permettant d'ajuster son comportement en fonction de l'erreur entre la consigne et la sortie réelle. Ce principe de fonctionnement est présent dans un très grand nombre d'applications, allant de la commande des moteurs électriques à la régulation thermique, en passant par les systèmes robotiques, les procédés industriels automatisés et les dispositifs embarqués.

L'étude des systèmes asservis repose sur plusieurs outils fondamentaux. Parmi eux, la modélisation mathématique permet de représenter le comportement dynamique d'un système physique. La fonction de transfert constitue un outil central pour l'analyse des systèmes linéaires continus. L'étude des réponses temporelles permet d'évaluer les performances dynamiques d'un système, tandis que l'analyse de la stabilité garantit la fiabilité de son fonctionnement. Enfin, la synthèse de correcteurs permet d'améliorer les performances du système en fonction d'un cahier des charges donné.

Les travaux dirigés présentés dans ce support ont pour objectif de familiariser les étudiants avec ces différents outils méthodologiques. Ils visent à développer chez eux une démarche rigoureuse de modélisation, d'analyse et d'interprétation des résultats, indispensable à toute formation en électronique et en automatique.

Ce document s'inscrit ainsi dans une perspective pédagogique visant à renforcer la maîtrise des concepts de base de l'asservissement et de la régulation, tout en préparant l'étudiant à aborder des applications plus avancées dans la suite de son parcours universitaire et professionnel.

Organisation du polycopié

Ce support pédagogique a été conçu selon une progression rigoureuse, permettant aux étudiants de troisième année de Licence d'assimiler graduellement les concepts de l'automatique continue linéaire. Le cheminement s'articule logiquement du domaine de l'analyse vers celui de la synthèse.

Les travaux dirigés sont structurés autour des sept séries thématiques suivantes :

- **Série N°01 – Modélisation mathématique :** Utilisation de la transformée de Laplace et mise en équation des systèmes physiques sous forme de fonctions de transfert.
- **Série N°02 – Représentation des systèmes :** Algèbre des schémas-blocs, manipulation, déplacement des points de prélèvement et réduction des boucles d'asservissement.
- **Série N°03 – Analyse temporelle :** Étude des régimes transitoire et permanent, et caractérisation des systèmes fondamentaux du premier et du second ordre.
- **Série N°04 – Stabilité des systèmes asservis :** Étude des pôles en boucle fermée et application du critère algébrique de Routh-Hurwitz pour déterminer les conditions de stabilité.
- **Série N°05 – Évaluation des performances :** Analyse multicritère globale incluant la précision (calcul des erreurs statiques de position, vitesse, accélération), la rapidité, le compromis fondamental de l'automatique, et l'étude du retour tachymétrique.
- **Série N°06 – Synthèse des régulateurs analogiques :** Conception des lois de commande industrielles fondamentales (actions Proportionnelle et Proportionnelle-Intégrale), méthode de placement des pôles par compensation, et réalisation électronique par amplificateurs opérationnels.

Table des matières

Chapitre 1

Série TD 1 : Transformée de LAPLACE et Transformée de LAPLACE inverse

1.1 Introduction de la série

Cette première série de travaux dirigés est consacrée à la Transformée de Laplace , un outil mathématique fondamental pour l'étude et l'analyse des systèmes linéaires continus dans le cadre du module d'Asservissement et Régulation. La maîtrise de cet opérateur est une compétence indispensable pour tout électronicien, car elle permet de basculer de l'analyse temporelle, souvent complexe, vers le domaine symbolique (complexe) où la résolution des problèmes dynamiques s'apparente à de l'algèbre classique. L'objectif de cette série est de familiariser l'étudiant avec la manipulation rigoureuse de cet outil à travers une progression pédagogique structurée en plusieurs axes :

— Le calcul direct de la transformée de Laplace : Application de la définition théorique sur des fonctions usuelles (exponentielles, trigonométriques, polynomiales) et des signaux temporels caractéristiques de l'automatique (échelons, rampes, signaux périodiques).

— La transformée de Laplace inverse : Maîtrise des techniques mathématiques, notamment la décomposition en éléments simples, pour retrouver l'expression temporelle d'un signal à partir de sa représentation fréquentielle. théorèmes aux limites : Utilisation des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale pour anticiper le comportement transitoire et le régime permanent d'un système, sans nécessiter la résolution complète de ses équations.

— La résolution d'équations différentielles : Application directe des propriétés de la transformée de Laplace pour simplifier et résoudre les équations différentielles linéaires régissant la dynamique des systèmes physiques.

— L'établissement de la fonction de transfert : Introduction à la notion centrale de l'automatique en établissant le lien mathématique direct entre l'équation différentielle d'un système physique et sa représentation par fonction de transfert.

À l'issue de cette première série, l'étudiant disposera du bagage mathématique et méthodologique nécessaire pour aborder sereinement la modélisation, l'analyse des réponses temporelles et l'étude de la stabilité des systèmes asservis qui constitueront le cœur des prochains chapitres.

1.2 Énoncé de la série

Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté de Technologie – Département d'Électronique

Niveau : 3ème Année Licence Électronique
Module : Asservissement et Régulation

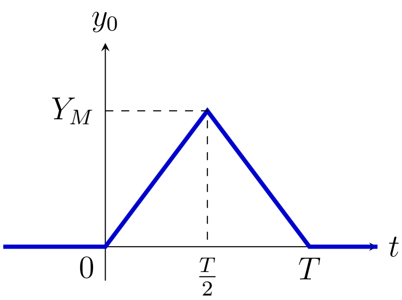
TD N°01 : Transformée de Laplace

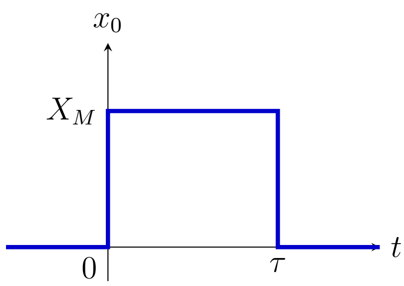
Exercice 1 : Déterminer la transformée de Laplace des signaux suivants

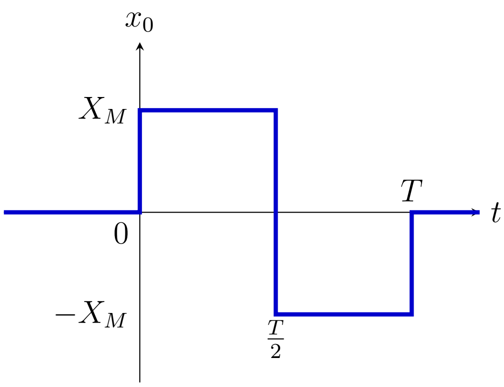
$a) f(t) = e^{-t}$
$b) f(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}$
$c) f(t) = t$
$d) f(t) = f(t) = \cos(\omega t)$
$e) f(t) = f(t) = t^n \quad (n \geq 0)$
$f) f(t) = 3(1 - e^{-4t})$
$g) f(t) = t^5 e^{2t}$
$h) f(t) = e^{-0.5t} u(t-2)$
$i) f(t) = \sin(2t + \tau)$
$j) f(t) = e^{-0.5t} \sin(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)$

Exercice 2 : Calculer la transformée de Laplace par calcul direct

Calculer la transformée de Laplace des trois signaux représentés ci-dessous :

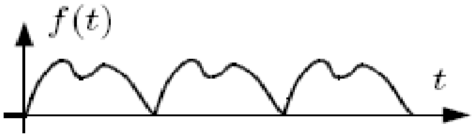






Exercice 3 : Fonction périodique

On suppose une fonction causale $f(t)$ qui est périodique de période T pour $t > 0$. Plus précisément, la période de $f(t)$ est une fonction $f_0(t)$ ce qui permet d'écrire :



$$f(t) = f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \dots$$

Montrez que :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_0(t)]\frac{1}{1-e^{-Tp}}$$

Exercice 4 : Calculer la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ des fonctions :

a) $F(p) = \dfrac{3}{p+3}$

b) $F(p) = \dfrac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

c) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3+5p^2+6p}$

d) $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2(p+2)}$

e) $F(p) = \dfrac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$

f) $F(p) = \dfrac{3p}{p^2+4p+4}$

g) $F(p) = \dfrac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}$

Exercice 5 : Valeur finale et initiale d'une fonction

a) Calculer la valeur initiale de $f(t)$ dont la TL est $F(p) = \frac{1}{p+1}$

b) Calculer la valeur finale de $f(t)$ dont la TL est $F(p) = \frac{1}{p(p+1)}$

c) Calculer la valeur finale de $f(t)$ dont la TL est $F(p) = \frac{2(p+1)}{p(p+3)(p+5)^2}$

d) Calculer la valeur initiale de $f(t)$ dont la TL est $F(p) = \frac{4p}{p^3+2p^2+9p+6}$

Exercice 6 : Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisant les transformées de Laplace :

a) $\dot{y}(t) + 3y(t) = \sin(t)$ Avec $y(0) = 1$ et $\dot{y}(0) = 2$

b) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 4$ Avec $y(0) = -2$ et $\dot{y}(0) = 0$

c) $y^{(3)}(t) + 5\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) = 0$ Avec $y(0) = 3$, $\dot{y}(0) = -2$ et $\ddot{y}(0) = 7$

Exercice 7 : Fonction de transfert d'un système

Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u(t)$$

Où :

- $y(t)$ est la sortie du système
- $u(t)$ est l'entrée du système

1. Appliquer la transformée de Laplace aux deux côtés de l'équation différentielle en supposant les conditions initiales nulles.
2. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$.

1.3 Rappel de cours

1.3.1 Définition

La transformée de Laplace d'une fonction causale $f(t)$ nulle pour $t < 0$ est définie par :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

où p est une variable complexe.

1.3.2 Transformées usuelles

On utilisera fréquemment les résultats suivants :

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}, \qquad \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p^2}, \qquad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \geq 0)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{e^{-at}\cos(\omega t)\} = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$$

1.3.3 Propriétés utiles

Linéarité : $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(p) + bG(p)$

Translation temporelle : Si $u(t-a)$ est l'échelon unitaire retardé :

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-ap}F(p)$$

Dérivation :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

1.3.4 Transformée de Laplace inverse

Pour retrouver $f(t)$ à partir de $F(p)$, on utilise :

— les transformées usuelles ;

— la décomposition en éléments simples ;

— l'identification avec des formes connues.

1.3.5 Rappel de méthode

Pour calculer la transformée inverse de Laplace d'une fraction rationnelle, on utilise :

– la **décomposition en éléments simples** lorsque les pôles sont simples et distincts ;

– la méthode des **pôles doubles ou multiples** lorsqu'un facteur est répété ;

– la **division euclidienne** si le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur.

1.3.6 Méthodes de calcul de la transformée inverse de Laplace

En pratique, la transformée inverse de Laplace d'une fonction rationnelle

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

se calcule en décomposant $F(p)$ en fractions simples, puis en utilisant la table usuelle des transformées de Laplace inverses.

On distingue principalement les cas suivants :

— les pôles simples distincts ;

— les pôles doubles ou multiples.

1.3.7 Décomposition en éléments simples (pôles simples distincts)

Principe :

Supposons que le dénominateur $D(p)$ admette n pôles simples distincts

$$p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_n$$

et que le degré du numérateur soit strictement inférieur à celui du dénominateur.

Alors la fonction

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

peut s'écrire sous la forme

$$F(p) = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{A_n}{p-p_n}$$

Les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont appelés les **résidus**.

Calcul des résidus :

Pour chaque pôle simple p_i, on calcule

$$A_i = [(p - p_i)F(p)]_{p=p_i}$$

Autrement dit, pour chaque coefficient :

$$A_1 = [(p - p_1)F(p)]_{p=p_1}$$

$$A_2 = [(p - p_2)F(p)]_{p=p_2}$$

$$\vdots$$

$$A_n = [(p - p_n)F(p)]_{p=p_n}$$

Forme générale :
Si

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_n)}$$

avec des pôles simples distincts, alors

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{p - p_i}$$

où

$$A_i = [(p - p_i)F(p)]_{p=p_i}$$

Remarque importante :
Après décomposition, on applique directement la table des transformées inverses usuelles :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p + a}\right\} = e^{-at}, \qquad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = u(t)$$

1.3.8 Pôles doubles ou multiples

Principe : Supposons maintenant que $F(p)$ possède un pôle multiple p_1 d'ordre k, et éventuellement d'autres pôles simples.

Alors la décomposition de $F(p)$ prend la forme

$$F(p) = \frac{A_k}{(p - p_1)^k} + \frac{A_{k-1}}{(p - p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(p - p_1)^2} + \frac{A_1}{p - p_1} + \cdots$$

Par exemple :

— pour un pôle double :

$$F(p) = \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \frac{A_1}{p-p_1} + \cdots$$

— pour un pôle triple :

$$F(p) = \frac{A_3}{(p-p_1)^3} + \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \frac{A_1}{p-p_1} + \cdots$$

Formule générale des coefficients

Si p_1 est un pôle multiple d'ordre k, alors les coefficients se calculent par

$$A_i = \frac{1}{r!}\left[\frac{d^r}{dp^r}\left(F(p)(p-p_1)^k\right)\right]_{p=p_1}$$

avec

$$r = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

La correspondance entre i et r est :

$$i = k - r$$

Autrement dit :

— pour obtenir A_k, on prend $r = 0$;

— pour obtenir A_{k-1}, on prend $r = 1$;

— pour obtenir A_{k-2}, on prend $r = 2$;

— etc.

1.3.9 Cas d'un pôle double

Si $F(p)$ possède un pôle double p_1, alors

$$F(p) = \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \frac{A_1}{p-p_1} + \cdots$$

Les coefficients sont :

$$A_2 = \left[F(p)(p-p_1)^2\right]_{p=p_1}$$

$$A_1 = \left[\frac{d}{dp}\left(F(p)(p-p_1)^2\right)\right]_{p=p_1}$$

1.3.10 Cas d'un pôle triple

Si $F(p)$ possède un pôle triple p_1, alors

$$F(p) = \frac{A_3}{(p-p_1)^3} + \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \frac{A_1}{p-p_1} + \cdots$$

Les coefficients sont :

$$A_3 = \left[F(p)(p-p_1)^3\right]_{p=p_1}$$

$$A_2 = \left[\frac{d}{dp}\left(F(p)(p-p_1)^3\right)\right]_{p=p_1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dp^2}\left(F(p)(p-p_1)^3\right)\right]_{p=p_1}$$

Pour calculer une transformée inverse de Laplace d'une fraction rationnelle, il faut :

1. factoriser le dénominateur ;
2. identifier la nature des pôles ;
3. choisir la forme adaptée de décomposition ;
4. calculer les coefficients ;
5. appliquer la table des transformées inverses usuelles.

Ainsi :

— si les pôles sont **simples et distincts**, on utilise les résidus ;

— si un pôle est **double ou multiple**, on utilise la formule avec les dérivées.

On utilisera aussi les transformées inverses usuelles :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\} = e^{-at}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2}\right\} = te^{-at}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^3}\right\} = \frac{t^2}{2}e^{-at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{1\} = \delta(t), \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = u(t)$$

1.3.11 Théorèmes de la valeur initiale et finale

Valeur initiale

$$f(0^+) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$$

Valeur finale

$$f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

à condition que tous les pôles de $pF(p)$ soient à partie réelle strictement négative, sauf éventuellement un pôle simple en $p=0$.

1.3.12 Résolution d'équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle par la transformée de Laplace, on utilise les relations suivantes :

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\} = p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0)$$

où $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$.

Le principe de résolution est le suivant :

— appliquer la transformée de Laplace aux deux membres ;

— introduire les conditions initiales ;

— déterminer $Y(p)$;

— décomposer $Y(p)$ en éléments simples ;

— appliquer la transformée de Laplace inverse.

1.4 Solutions de la série de TD N°1 : Transformée de Laplace

1.4.1 Exercice 1 : Calcul de transformées de Laplace

a) Calcul direct de $\mathcal{L}\{e^{-t}\}$

Soit la fonction :

$$f(t) = Ae^{\alpha t}$$

où A et α sont des constantes réelles.
Par définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} Ae^{\alpha t}e^{-pt}\,dt$$

On regroupe les exponentielles :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = A\int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}\,dt$$

On utilise la primitive :

$$\int e^{-at}dt = -\frac{1}{a}e^{-at}$$

Ainsi :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = A\left[-\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\right]_0^{+\infty}$$

Pour $p > \alpha$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-(p-\alpha)t} = 0$$

Donc :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = A\left(0 + \frac{1}{p-\alpha}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{L}\{Ae^{\alpha t}\} = \frac{A}{p-\alpha}} \qquad (p > \alpha)$$

Soit :

$$f(t) = e^{-t}$$

Pour $A = 1$ et $\alpha = -1$: $\boxed{\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \dfrac{1}{p+1}}$

b) $f(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}$

Par linéarité : $\mathcal{L}\{3e^{-t} - e^{-2t}\} = 3\mathcal{L}\{e^{-t}\} - \mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \boxed{\dfrac{3}{p+1} - \dfrac{1}{p+2}}$

c) Calcul direct de $\mathcal{L}\{t\}$

Soit :

$$f(t) = t$$

Par définition :

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt$$

On effectue une intégration par parties :

On pose :

$$u = t \qquad \Rightarrow \qquad du = dt$$

$$dv = e^{-pt}dt \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt = \left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$

Pour $p > 0$:

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} = 0$$

et à $t = 0$, le terme vaut 0.

Donc :

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p}$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p^2}}$$

d) Calcul direct de $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$

Soit :

$$f(t) = \cos(\omega t)$$

Par définition :

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(\omega t)\, dt$$

On utilise la primitive connue :

$$\int e^{-pt} \cos(\omega t)\, dt = \frac{e^{-pt}}{p^2 + \omega^2}\big(-p\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\big)$$

Donc :

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \left[\frac{e^{-pt}}{p^2 + \omega^2}\big(-p\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\big)\right]_0^{+\infty}$$

Pour $p > 0$, lorsque $t \to +\infty$, on a :

$$e^{-pt} \to 0$$

donc le terme supérieur est nul.

À $t = 0$:

$$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0$$

Ainsi :

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = 0 - \left(\frac{-p}{p^2 + \omega^2}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}}$$

e) Calcul direct de $\mathcal{L}\{t^n\}$, avec $n \geq 0$

Soit :

$$f(t) = t^n \qquad (n \geq 0)$$

Par définition :

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt$$

On va faire une démonstration par récurrence à l'aide d'intégrations par parties.

Première intégration par parties Posons :

$$u = t^n \qquad \Rightarrow \qquad du = nt^{n-1}dt$$

$$dv = e^{-pt}dt \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{t^n}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}\, dt$$

Pour $p > 0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} t^n e^{-pt} = 0$$

et à $t = 0$, le terme est aussi nul.

Donc :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt = \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}\, dt$$

On recommence de la même manière :

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt}\, dt = \frac{n-1}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-2}e^{-pt}\, dt$$

Ainsi, en poursuivant :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{p^n}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}$$

Donc :

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^n}\cdot\frac{1}{p}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}} \qquad (p > 0)$$

f) $f(t) = 3(1 - e^{-4t})$

Par linéarité : $\mathcal{L}\{3(1-e^{-4t})\} = 3\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \boxed{\frac{3}{p} - \frac{3}{p+4}}$

g) $f(t) = t^5 e^{2t}$

D'après la propriété de translation sur l'axe complexe $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$:

$$\mathcal{L}\{t^5 e^{2t}\} = \frac{5!}{(p-2)^6} = \boxed{\frac{120}{(p-2)^6}}$$

h) $f(t) = e^{-0.5t}u(t-2)$

Calcul direct de la borne de causalité déplacée :

$$F(p) = \int_2^{+\infty} e^{-0.5t}e^{-pt}dt = \int_2^{+\infty} e^{-(p+0.5)t}dt = \left[\frac{-1}{p+0.5}e^{-(p+0.5)t}\right]_2^{+\infty} = \boxed{\frac{e^{-2(p+0.5)}}{p+0.5} = \frac{e^{-2p-1}}{p+0.5}}$$

i) $f(t) = \sin(2t+\tau)$

On utilise l'identité trigonométrique : $\sin(2t+\tau) = \sin(2t)\cos\tau + \cos(2t)\sin\tau$.
Donc :

$$\mathcal{L}\{\sin(2t+\tau)\} = \cos\tau\,\mathcal{L}\{\sin(2t)\} + \sin\tau\,\mathcal{L}\{\cos(2t)\}$$

Or :

$$\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{p^2+4}, \qquad \mathcal{L}\{\cos(2t)\} = \frac{p}{p^2+4}$$

Alors :

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(2t+\tau)\} = \frac{2\cos\tau + p\sin\tau}{p^2+4}}$$

On traite chaque terme séparément.

Pour le premier terme :

$$\mathcal{L}\{e^{-0.5t}\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(p+0.5)^2+\omega^2}$$

Pour le second terme :

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi$$

Donc :

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t+\varphi)\} = \cos\varphi\,\frac{p}{p^2+\omega^2} - \sin\varphi\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Finalement :

$$\boxed{F(p) = \frac{\omega}{(p+0.5)^2+\omega^2} + \frac{p\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}}$$

1.4.2 Exercice 2 : Calcul direct de la transformée de Laplace

1) Signal rectangulaire positif

$$f(t) = \begin{cases} X_M, & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \Longrightarrow F(p) = \int_0^{\tau} X_M e^{-pt}dt = X_M\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\tau} = \boxed{\frac{X_M}{p}(1-e^{-p\tau})}$$

2) Signal triangulaire

$$f(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -at + b, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad \text{avec } a = \frac{2y_m}{T} \text{ et } b = 2y_m$$

L'intégration par parties sur les deux morceaux donne après réduction algébrique complète :

$$F(p) = \frac{2y_m}{Tp^2}\left(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}\right) = \boxed{\frac{2y_m}{Tp^2}(1 - e^{-pT/2})^2}$$

3) Signal rectangulaire bipolaire

Le signal est défini par :

$$f(t) = \begin{cases} X_M, & 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ -X_M, & \dfrac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

Par définition :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

Donc :

$$F(p) = \int_0^{T/2} X_M e^{-pt}\,dt + \int_{T/2}^{T} (-X_M)e^{-pt}\,dt$$

$$F(p) = X_M \int_0^{T/2} e^{-pt}\,dt - X_M \int_{T/2}^{T} e^{-pt}\,dt$$

Calcul du premier terme :

$$X_M \int_0^{T/2} e^{-pt}\,dt = X_M \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{T/2} = \frac{X_M}{p}\left(1 - e^{-pT/2}\right)$$

Calcul du second terme :

$$X_M \int_{T/2}^{T} e^{-pt}\,dt = X_M \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_{T/2}^{T} = \frac{X_M}{p}\left(e^{-pT/2} - e^{-pT}\right)$$

Ainsi :

$$F(p) = \frac{X_M}{p}\left(1 - e^{-pT/2}\right) - \frac{X_M}{p}\left(e^{-pT/2} - e^{-pT}\right)$$

$$F(p) = \frac{X_M}{p}\left(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{F(p) = \frac{X_M}{p}\left(1 - 2e^{-pT/2} + e^{-pT}\right)}$$

ou encore :

$$\boxed{F(p) = \frac{X_M}{p}\left(1 - e^{-pT/2}\right)^2}$$

1.4.3 Exercice 3 : Fonction périodique

Soit $f(t) = f_0(t) + f_0(t-T)u(t-T) + f_0(t-2T)u(t-2T) + \dots$ En appliquant le théorème de la translation temporelle :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_0(t)\} + e^{-pT}\mathcal{L}\{f_0(t)\} + e^{-2pT}\mathcal{L}\{f_0(t)\} + \cdots = \mathcal{L}\{f_0(t)\}\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{-pT})^k$$

Cette somme est une série géométrique de raison e^{-pT}. Comme $|e^{-pT}| < 1$ pour $p > 0$:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_0(t)]\frac{1}{1 - e^{-Tp}}}$$

1.4.4 Exercice 4 : Transformées de Laplace inverses

a) $F(p) = \frac{3}{p+3}$

On utilise directement la table des transformées de Laplace : $\boxed{f(t) = 3e^{-3t}}$

b) $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

Les pôles de $F(p)$ sont :

$$p_1 = -1, \qquad p_2 = -2$$

Ce sont deux pôles simples distincts.

On écrit :

$$F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

Calcul des résidus :

$$A = F(p)(p+1)\Big|_{p=-1} = \left(\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}(p+1)\right)_{p=-1} = \left(\frac{p+3}{p+2}\right)_{p=-1} = 2$$

$$B = F(p)(p+2)\Big|_{p=-2} = \left(\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}(p+2)\right)_{p=-2} = \left(\frac{p+3}{p+1}\right)_{p=-2} = -1$$

Donc :

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

Par transformée inverse :

$$\boxed{f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}}$$

c) $F(p) = \frac{p+1}{p^3+5p^2+6p}$

On factorise le dénominateur :

$$p^3 + 5p^2 + 6p = p(p+2)(p+3)$$

Donc :

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)(p+3)}$$

Les pôles sont :

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = -2, \qquad p_3 = -3$$

Ce sont des pôles simples distincts.

On écrit :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

Calcul des résidus :

$$A = F(p)p\Big|_{p=0} = \left(\frac{p+1}{p(p+2)(p+3)}p\right)_{p=0} = \left(\frac{p+1}{(p+2)(p+3)}\right)_{p=0} = \frac{1}{6}$$

$$B = F(p)(p+2)\Big|_{p=-2} = \left(\frac{p+1}{p(p+2)(p+3)}(p+2)\right)_{p=-2} = \left(\frac{p+1}{p(p+3)}\right)_{p=-2} = \frac{1}{2}$$

$$C = F(p)(p+3)\Big|_{p=-3} = \left(\frac{p+1}{p(p+2)(p+3)}(p+3)\right)_{p=-3} = \left(\frac{p+1}{p(p+2)}\right)_{p=-3} = -\frac{2}{3}$$

Donc :

$$F(p) = \frac{1}{6}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{p+3}$$

Par transformée inverse :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{6}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}}$$

d) $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$

La fonction $F(p)$ contient :

– un pôle double en $p = -1$,

– un pôle simple en $p = -2$.

On écrit alors :

$$F(p) = \frac{A_2}{(p+1)^2} + \frac{A_1}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

Calcul de A_2 :

$$A_2 = \left[F(p)(p+1)^2\right]_{p=-1} = \left[\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}(p+1)^2\right]_{p=-1} = \left[\frac{1}{p+2}\right]_{p=-1} = 1$$

Calcul de A_1 :

$$A_1 = \left[\frac{d}{dp}\left(F(p)(p+1)^2\right)\right]_{p=-1}$$

Or :

$$F(p)(p+1)^2 = \frac{1}{p+2}$$

donc :

$$A_1 = \left[-\frac{1}{(p+2)^2}\right]_{p=-1} = -1$$

Calcul de B :

$$B = [F(p)(p+2)]_{p=-2} = \left[\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}(p+2)\right]_{p=-2} = \left[\frac{1}{(p+1)^2}\right]_{p=-2} = 1$$

Donc :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$$

Par transformée inverse :

$$\boxed{f(t) = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}}$$

e) $F(p) = \frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$

La fonction $F(p)$ contient un pôle triple en $p = -1$.

On écrit :

$$F(p) = \frac{A_3}{(p+1)^3} + \frac{A_2}{(p+1)^2} + \frac{A_1}{p+1}$$

Calcul de A_3 :

$$A_3 = \left[F(p)(p+1)^3\right]_{p=-1} = \left[p^2+2p+3\right]_{p=-1} = 1-2+3 = 2$$

Calcul de A_2 :

$$A_2 = \left[\frac{d}{dp}\left(F(p)(p+1)^3\right)\right]_{p=-1} = \left[\frac{d}{dp}(p^2+2p+3)\right]_{p=-1} = (2p+2)_{p=-1} = 0$$

Calcul de A_1 :

$$A_1 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dp^2}\left(F(p)(p+1)^3\right)\right]_{p=-1}$$

Or :

$$\frac{d^2}{dp^2}(p^2+2p+3) = 2$$

Donc :

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Ainsi :

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{p+1}$$

Par transformée inverse :

$$\boxed{f(t) = t^2e^{-t} + e^{-t}}$$

f) $F(p) = \frac{32}{p^2+4p+4}$

On factorise :

$$p^2+4p+4 = (p+2)^2$$

Donc :

$$F(p) = \frac{3p}{(p+2)^2}$$

La fonction $F(p)$ contient un pôle double en $p=-2$.
On écrit :

$$F(p) = \frac{A_2}{(p+2)^2} + \frac{A_1}{p+2}$$

Calcul de A_2 :

$$A_2 = \left[F(p)(p+2)^2\right]_{p=-2} = \left[\frac{3p}{(p+2)^2}(p+2)^2\right]_{p=-2} = 3(-2) = -6$$

Calcul de A_1 :

$$A_1 = \left[\frac{d}{dp}\left(F(p)(p+2)^2\right)\right]_{p=-2} = \left[\frac{d}{dp}(3p)\right]_{p=-2} = 3$$

Donc :

$$F(p) = \frac{-6}{(p+2)^2} + \frac{3}{p+2}$$

Par transformée inverse :

$$\boxed{f(t) = -6te^{-2t} + 3e^{-2t}}$$

g) $F(p) = \frac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}$

Le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, donc on commence par une division euclidienne :

$$\frac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2} = 2 + \frac{p+4}{p^2+3p+2}$$

On factorise le dénominateur :

$$p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2)$$

Donc :

$$F(p) = 2 + \frac{p+4}{(p+1)(p+2)}$$

On pose :

$$\frac{p+4}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

Calcul des résidus :

$$A = \left[\frac{p+4}{(p+1)(p+2)}(p+1)\right]_{p=-1} = \left[\frac{p+4}{p+2}\right]_{p=-1} = 3$$

$$B = \left[\frac{p+4}{(p+1)(p+2)}(p+2)\right]_{p=-2} = \left[\frac{p+4}{p+1}\right]_{p=-2} = -2$$

Donc :

$$F(p) = 2 + \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p+2}$$

Par transformée inverse :

$$\boxed{f(t) = 2\delta(t) + 3e^{-t} - 2e^{-2t}}$$

1.4.5 Exercice 5 : Valeur initiale et valeur finale

a) $F(p) = \dfrac{1}{p+1}$ **: valeur initiale**

On applique le théorème de la valeur initiale :

$$f(0^+) = \lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{p}{p+1} = 1$$

Donc :

$$\boxed{f(0^+) = 1}$$

b) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ **: valeur finale**

On applique le théorème de la valeur finale :

$$f(+\infty) = \lim_{p\to0} pF(p) = \lim_{p\to0} \frac{p}{p(p+1)} = \lim_{p\to0} \frac{1}{p+1} = 1$$

Donc :

$$\boxed{f(+\infty) = 1}$$

c) $F(p) = \dfrac{2(p+1)}{p(p+3)(p+5)^2}$ **: valeur finale**

On applique le théorème de la valeur finale :

$$f(+\infty) = \lim_{p\to0} pF(p) = \lim_{p\to0} \frac{2(p+1)}{(p+3)(p+5)^2}$$

Donc :

$$f(+\infty) = \frac{2(1)}{3\cdot 25} = \frac{2}{75}$$

Ainsi :

$$\boxed{f(+\infty) = \frac{2}{75}}$$

d) $F(p) = \dfrac{4p}{p^3+2p^2+9p+6}$ **: valeur initiale**

On applique le théorème de la valeur initiale :

$$f(0^+) = \lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{4p^2}{p^3+2p^2+9p+6}$$

En divisant par p^3 :

$$f(0^+) = \lim_{p \to +\infty} \frac{4/p}{1 + 2/p + 9/p^2 + 6/p^3} = 0$$

Donc :

$$\boxed{f(0^+) = 0}$$

1.4.6 Exercice 6 : Résolution d'équations différentielles

a) $\ddot{y}(t) + 3y(t) = \sin(t)$ avec $y(0) = 1$ et $\dot{y}(0) = 2$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres :

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + 3\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(t)\}$$

Donc :

$$\Big(p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)\Big) + 3Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

En remplaçant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $\dot{y}(0) = 2$, on obtient :

$$p^2Y(p) - p - 2 + 3Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$(p^2 + 3)Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + p + 2$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)} + \frac{p + 2}{p^2 + 3}$$

On décompose le premier terme :

$$\frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)} = \frac{A}{p^2 + 1} + \frac{B}{p^2 + 3}$$

Donc :

$$1 = A(p^2 + 3) + B(p^2 + 1)$$

En identifiant :

$$A + B = 0, \qquad 3A + B = 1$$

D'où :

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$Y(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2 + 3} + \frac{p}{p^2 + 3} + \frac{2}{p^2 + 3}$$

On utilise les transformées inverses usuelles :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin(at)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} = \cos(at)$$

Avec $a = \sqrt{3}$, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+3}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+3}\right\} = \cos(\sqrt{3}\,t)$$

Donc :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t) + \cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\,t)}$$

En simplifiant :

$$\boxed{y(t) = \cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}\,t) + \frac{1}{2}\sin t}$$

b) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 4$ avec $y(0) = -2$ et $\dot{y}(0) = 0$

On applique la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} + 4\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + 20\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{4\}$$

Donc :

$$\left(p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)\right) + 4\left(pY(p) - y(0)\right) + 20Y(p) = \frac{4}{p}$$

En remplaçant $y(0) = -2$ et $\dot{y}(0) = 0$, on obtient :

$$p^2Y(p) + 2p + 4(pY(p) + 2) + 20Y(p) = \frac{4}{p}$$

$$(p^2 + 4p + 20)Y(p) + 2p + 8 = \frac{4}{p}$$

$$(p^2 + 4p + 20)Y(p) = \frac{4}{p} - 2p - 8$$

$$Y(p) = \frac{4 - 2p^2 - 8p}{p(p^2 + 4p + 20)}$$

On écrit :

$$Y(p) = \frac{-2(p^2 + 4p - 2)}{p(p^2 + 4p + 20)}$$

Faisons la décomposition :

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 4p + 20}$$

En multipliant par $p(p^2 + 4p + 20)$, on obtient :

$$-2p^2 - 8p + 4 = A(p^2 + 4p + 20) + p(Bp + C)$$

$$-2p^2 - 8p + 4 = (A + B)p^2 + (4A + C)p + 20A$$

Par identification :

$$A + B = -2$$

$$4A + C = -8$$

$$20A = 4$$

D'où :

$$A = \frac{1}{5}, \qquad B = -\frac{11}{5}, \qquad C = -\frac{44}{5}$$

Ainsi :

$$Y(p) = \frac{1}{5p} + \frac{-\frac{11}{5}p - \frac{44}{5}}{p^2 + 4p + 20}$$

On complète le carré :

$$p^2 + 4p + 20 = (p + 2)^2 + 16$$

Et on réécrit le numérateur :

$$-\frac{11}{5}p - \frac{44}{5} = -\frac{11}{5}(p + 2) - \frac{22}{5}$$

Donc :

$$Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{11}{5}\frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 16} - \frac{22}{5}\frac{1}{(p + 2)^2 + 16}$$

On utilise les formules :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}\right\} = e^{-at}\cos(\omega t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t)$$

Ici $a = 2$ et $\omega = 4$. Donc :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{5} - \frac{11}{5}e^{-2t}\cos(4t) - \frac{11}{10}e^{-2t}\sin(4t)}$$

c) $y^{(3)}(t) + 5\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) = 0$ avec $y(0) = 3, \dot{y}(0) = -2, \ddot{y}(0) = 7$

$$(p^3Y(p)-3p^2+2p-7)+5(p^2Y(p)-3p+2)+6(pY(p)-3) = 0 \Rightarrow (p^3+5p^2+6p)Y(p) = 3p^2+13p+15$$

$$Y(p) = \frac{3p^2+13p+15}{p(p+2)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3} \Rightarrow A = \frac{5}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 1$$

Par transformée inverse immédiate : $\boxed{y(t) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t}}$

Exercice 7 : Fonction de transfert d'un système

1) Application de la transformée de Laplace

En supposant les conditions initiales nulles :

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

on a :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = p^2Y(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = pY(p)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p), \qquad \mathcal{L}\{u(t)\} = U(p)$$

Donc l'équation devient :

$$p^2Y(p) + 3pY(p) + 2Y(p) = 5U(p)$$

On factorise $Y(p)$:

$$Y(p)\Big(p^2+3p+2\Big) = 5U(p)$$

2) Détermination de la fonction de transfert

La fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Donc :

$$\boxed{H(p) = \frac{5}{p^2 + 3p + 2}}$$

En factorisant le dénominateur :

$$p^2 + 3p + 2 = (p + 1)(p + 2)$$

on peut aussi écrire :

$$\boxed{H(p) = \frac{5}{(p + 1)(p + 2)}}$$

1.5 Conclusion de la série

Cette première série permet de maîtriser les outils fondamentaux de la transformée de Laplace, indispensables pour :

— le passage du domaine temporel au domaine de Laplace ;

— la résolution des équations différentielles ;

— le calcul des fonctions de transfert ;

Elle constitue donc une base essentielle pour la suite du module d'asservissement et de régulation.

Chapitre 2

Série TD 2 : Algèbre des schémas fonctionnels

2.1 Introduction de la série

Cette deuxième série de travaux dirigés est consacrée à l'étude de l'**algèbre des schémas fonctionnels**, outil fondamental dans l'analyse des systèmes asservis.

Les schémas fonctionnels permettent de représenter de manière simple et structurée les relations entre les différentes grandeurs d'un système : entrée, sortie, erreur, chaîne directe et chaîne de retour. L'algèbre des schémas fonctionnels consiste à transformer, simplifier et réduire ces schémas tout en conservant le même comportement global.

Les exercices proposés dans cette série ont pour objectifs de permettre aux étudiants de :

- maîtriser les règles de transformation des schémas fonctionnels ;
- réduire un schéma complexe en un schéma équivalent plus simple ;
- déterminer la fonction de transfert globale d'un système ;
- analyser un système multivariable ;
- mettre un schéma sous forme de boucle ouverte ou de boucle fermée.

Cette série constitue une étape essentielle dans l'apprentissage de l'asservissement, car elle prépare directement à l'étude des fonctions de transfert globales, de la stabilité et des performances des systèmes de commande.

2.2 Énoncé de la série

Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté de Technologie – Département d'Électronique

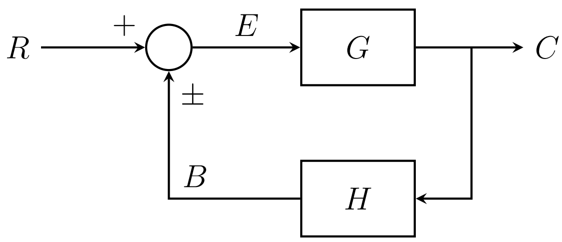
Niveau : $3^{\text{ème}}$ Année Licence Électronique
Module : Asservissement et Régulation

TD N°02 : Algèbre des schémas fonctionnels

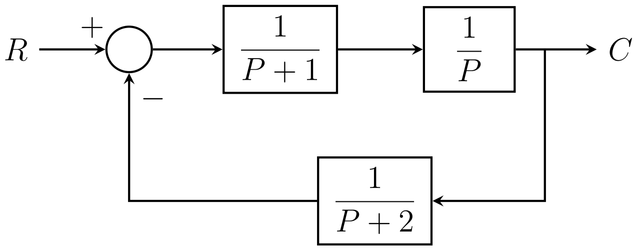
Exercice 1 : Démontrer les équations suivantes

Démontrer les équations fondamentales pour le schéma fonctionnel ci-dessous :

- $\dfrac{C}{R} = \dfrac{G}{1 \pm GH}$
- $\dfrac{E}{R} = \dfrac{1}{1 \pm GH}$
- $\dfrac{B}{R} = \dfrac{GH}{1 \pm GH}$

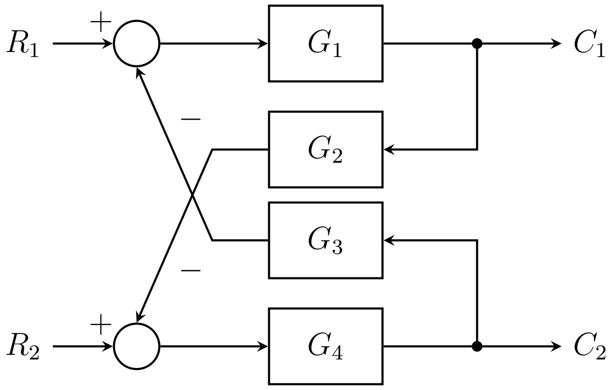


Exercice 2 : Réduire le schéma fonctionnel suivant



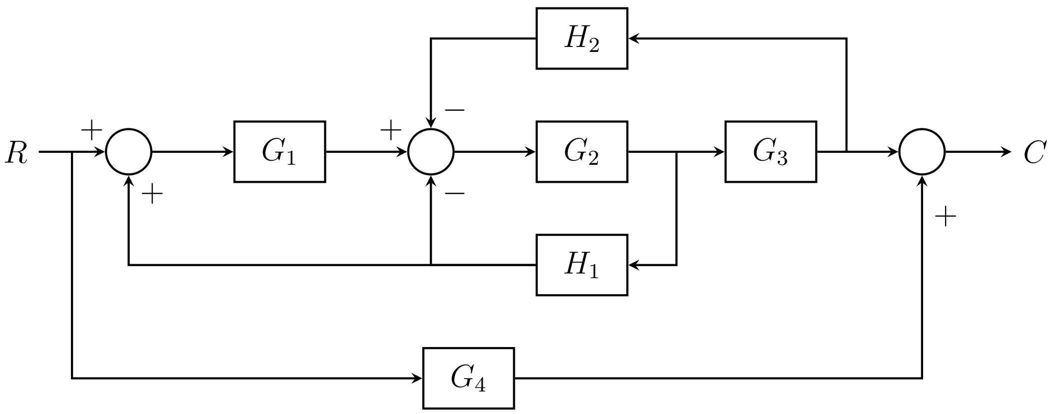
Exercice 3 : Système multivariable

Le schéma fonctionnel suivant est un exemple d'un système multi-variables. Déterminer C_1 et C_2.



Exercice 4 : Mise sous forme d'un schéma en boucle ouverte

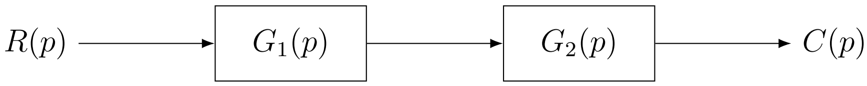
Mettre le schéma fonctionnel complexe suivant sous forme d'un schéma en boucle ouverte simple :



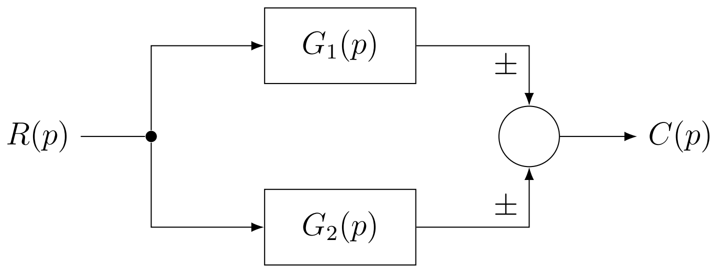
2.3 Rappels de cours

2.3.1 Associations fondamentales

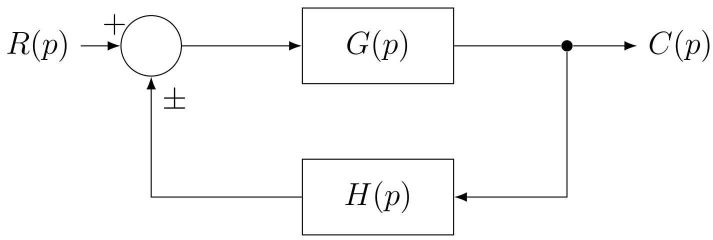
En série : Deux blocs en cascade se multiplient : $G_{\text{eq}}(p) = G_1(p)G_2(p)$.



En parallèle : Deux blocs disposant de la même entrée s'additionnent algébriquement au niveau du sommateur : $G_{\text{eq}}(p) = G_1(p) \pm G_2(p)$.



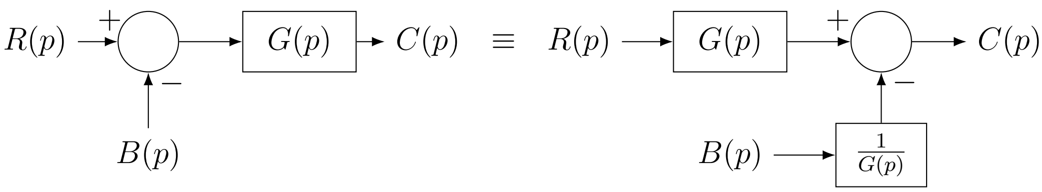
Boucle fermée simple : Pour une chaîne directe $G(p)$ et une chaîne de retour $H(p)$, la fonction de transfert globale est :



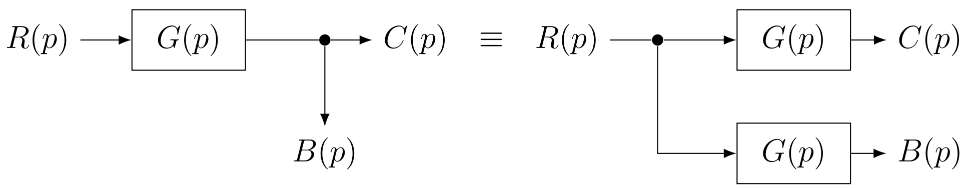
$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} \text{ (Retour négatif)}, \qquad \frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1 - G(p)H(p)} \text{ (Retour positif)}$$

2.3.2 Règles de déplacement structurel

Déplacement d'un point de sommation de l'avant vers l'arrière d'un bloc : Pour déplacer un sommateur en aval d'un bloc $G(p)$, il est impératif d'introduire le bloc inverse $\frac{1}{G(p)}$ sur la branche secondaire afin de ne pas altérer la sortie globale.



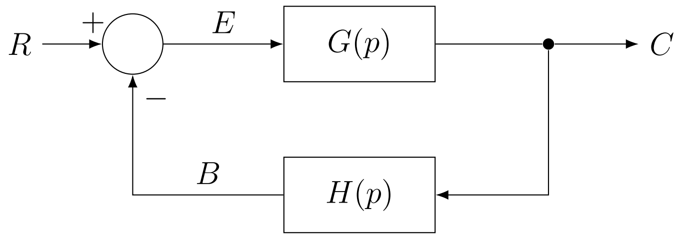
Déplacement d'un point de prélèvement de l'arrière vers l'avant d'un bloc : Pour déplacer un point de prélèvement en amont d'un bloc $G(p)$, il faut rajouter le multiplicateur $G(p)$ dans la branche de dérivation.



2.4 Solutions de la série de TD N°2

2.4.1 Exercice 1 : Établissement des équations fondamentales

Nous avons le schéma de base suivant :



Au niveau du nœud de comparaison : $E(p) = R(p) - B(p)$.

Le retour vaut : $B(p) = H(p)C(p)$.

L'équation de chaîne directe : $C(p) = G(p)E(p)$.

– **Calcul de la FTBF $\frac{C}{R}$:**

$$C(p) = G(p)[R(p) - H(p)C(p)] \Rightarrow C(p)(1+G(p)H(p)) = G(p)R(p) \Rightarrow \boxed{\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}}$$

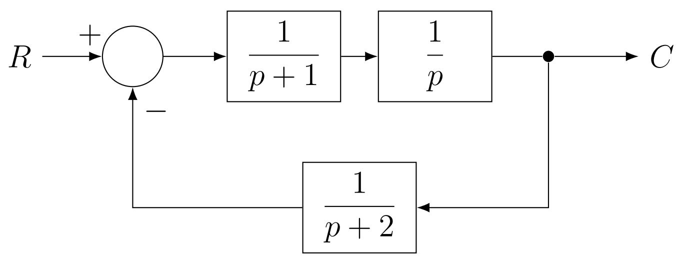
– **Calcul de la FT de l'erreur $\frac{E}{R}$:**

$$E(p) = R(p) - H(p)[G(p)E(p)] \Rightarrow E(p)(1 + G(p)H(p)) = R(p) \Rightarrow \boxed{\frac{E}{R} = \frac{1}{1+GH}}$$

– **Calcul de la FT du retour $\frac{B}{R}$:**

$$B(p) = H(p)C(p) = H(p)\left[\frac{G(p)R(p)}{1+G(p)H(p)}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{B}{R} = \frac{GH}{1+GH}}$$

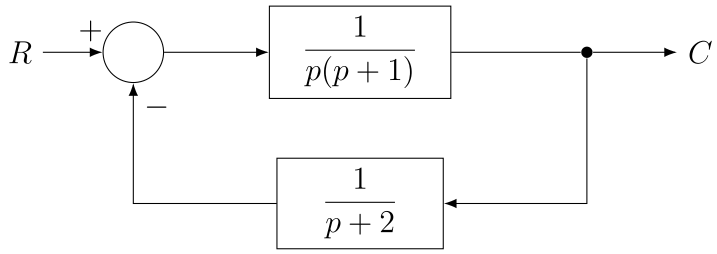
2.4.2 Exercice 2 : Réduction de schéma-bloc imbriqué



Étape 1 : Réduction de la chaîne directe. Les blocs de transfert $\frac{1}{p+1}$ et $\frac{1}{p}$ sont montés en série (cascade) :

$$G(p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p(p+1)}$$

Le schéma équivalent devient alors :



Étape 2 : Réduction de la boucle fermée. Le système est maintenant une boucle fermée simple à rétroaction négative.

On utilise donc la formule :

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)}$$

avec

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)} \qquad \text{et} \qquad H(p) = \frac{1}{p+2}$$

Alors :

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{\dfrac{1}{p(p+1)}}{1 + \dfrac{1}{p(p+1)} \cdot \dfrac{1}{p+2}}$$

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{\dfrac{1}{p(p+1)}}{1 + \dfrac{1}{p(p+1)(p+2)}}$$

En mettant au même dénominateur :

$$1 + \frac{1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+1)(p+2) + 1}{p(p+1)(p+2)}$$

Donc :

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{1}{p(p+1)} \cdot \frac{p(p+1)(p+2)}{p(p+1)(p+2) + 1}$$

On simplifie par $p(p+1)$:

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{p+2}{p(p+1)(p+2) + 1}$$

Développons le dénominateur :

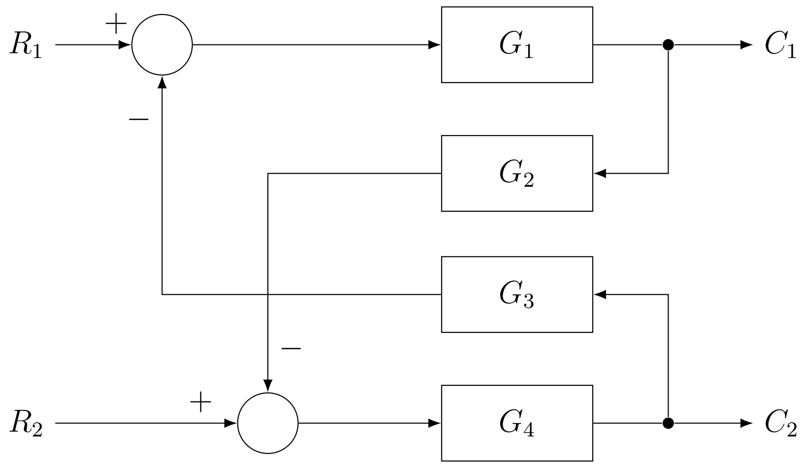
$$p(p+1)(p+2) = p(p^2 + 3p + 2) = p^3 + 3p^2 + 2p$$

Le schéma fonctionnel donné est équivalent à un système de fonction de transfert : :

$$\boxed{\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{p+2}{p^3+3p^2+2p+1}}$$

2.4.3 Exercice 3 : Système multivariable (MIMO)

D'après l'analyse des sommateurs du système, nous dressons le système couplé d'équations :



D'après le schéma fonctionnel, on écrit :

$$(1) \quad C_1 = G_1(R_1 - G_3C_2), \qquad (2) \quad C_2 = G_4(R_2 + G_2C_1)$$

Injectons (2) dans (1) :

$$C_1 = G_1R_1 - G_1G_3G_4(R_2 + G_2C_1) \Rightarrow C_1(1 + G_1G_2G_3G_4) = G_1R_1 - G_1G_3G_4R_2$$

$$\boxed{C_1 = \frac{G_1R_1 - G_1G_3G_4R_2}{1 + G_1G_2G_3G_4}}$$

Injectons maintenant (1) dans (2) :

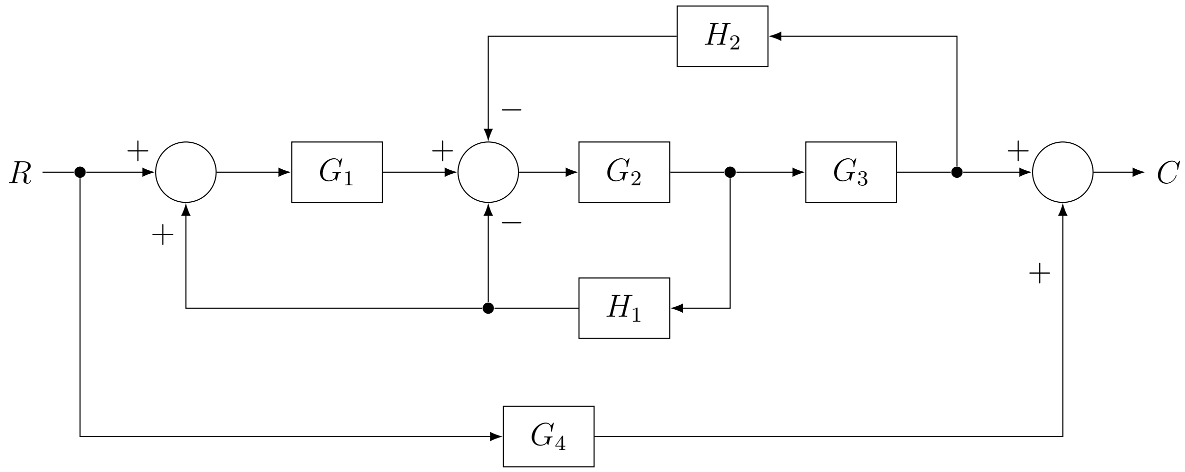
$$C_2 = G_4R_2 + G_2G_4\left[\frac{G_1R_1 - G_1G_3G_4R_2}{1 + G_1G_2G_3G_4}\right] = \frac{G_4R_2(1 + G_1G_2G_3G_4) + G_1G_2G_4R_1 - G_1G_2G_3G_4^2R_2}{1 + G_1G_2G_3G_4}$$

Après réduction des termes identiques au numérateur :

$$\boxed{C_2 = \frac{G_1G_2G_4R_1 + G_4R_2}{1 + G_1G_2G_3G_4}}$$

2.4.4 Exercice 4 : Mise sous forme d'un schéma en boucle ouverte complexe

On considère le schéma fonctionnel suivant



Étape 1 : définition des signaux intermédiaires

On note :

- X : le signal en sortie de la chaîne de retour H_1,
- Y_1 : la sortie du bloc G_1,
- Y_2 : la sortie du bloc G_2,
- Y_3 : la sortie du bloc G_3.

D'après le schéma, on établit les équations fondamentales suivantes :

$$X = H_1 Y_2$$

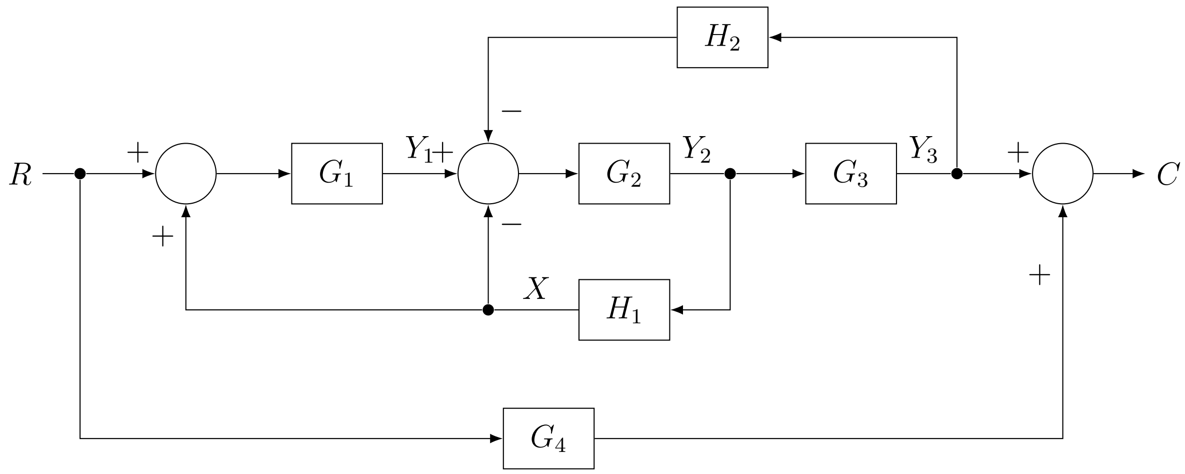
$$Y_1 = G_1(R + X)$$

$$Y_2 = G_2(Y_1 - X - H_2 Y_3) \quad \text{(Attention aux signes } - \text{ du 2ème sommateur)}$$

$$Y_3 = G_3 Y_2$$

$$C = Y_3 + G_4 R \quad \text{(Le prélèvement pour } G_4 \text{ se fait directement sur l'entrée } R\text{)}$$

Schéma intermédiaire avec notations



Étape 2 : calcul de Y_1

En substituant X dans l'équation du premier sommateur :

$$Y_1 = G_1(R + H_1Y_2)$$

Étape 3 : calcul de Y_2

Partons de l'équation du deuxième sommateur :

$$Y_2 = G_2(Y_1 - X - H_2Y_3)$$

On remplace Y_1, X et Y_3 par leurs expressions respectives :

$$Y_2 = G_2\Big[G_1(R + H_1Y_2) - H_1Y_2 - H_2G_3Y_2\Big]$$

En développant :

$$Y_2 = G_1G_2R + G_1G_2H_1Y_2 - G_2H_1Y_2 - G_2G_3H_2Y_2$$

On regroupe tous les termes en Y_2 du côté gauche de l'égalité :

$$Y_2 - G_1G_2H_1Y_2 + G_2H_1Y_2 + G_2G_3H_2Y_2 = G_1G_2R$$

On factorise par Y_2 :

$$Y_2\Big[1 - G_1G_2H_1 + G_2H_1 + G_2G_3H_2\Big] = G_1G_2R$$

D'où l'expression de la fonction de transfert intermédiaire :

$$\boxed{Y_2 = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} R}$$

Fonction de transfert intermédiaire entre R et Y_2

$$R \longrightarrow \boxed{\frac{Y_2}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}} \longrightarrow Y_2$$

Étape 4 : calcul de la sortie finale C

La sortie finale est donnée par le dernier sommateur :

$$C = Y_3 + G_4 R$$

Comme $Y_3 = G_3 Y_2$, on obtient :

$$C = G_3 Y_2 + G_4 R$$

En remplaçant Y_2 par l'expression trouvée à l'étape 3 :

$$C = G_3 \left(\frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} R \right) + G_4 R$$

On factorise par R pour obtenir la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} + G_4$$

Résultat final en boucle ouverte

Ainsi, le schéma fonctionnel initial complexe est équivalent à un système en boucle ouverte défini par la fonction de transfert globale $G_{\text{eq}}(p)$:

$$R(p) \longrightarrow \boxed{G_{\text{eq}}(p)} \longrightarrow C(p)$$

avec :

$$\boxed{G_{\text{eq}}(p) = \frac{C(p)}{R(p)} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}}$$

2.5 Conclusion de la série

À travers cette deuxième série, l'étudiant a acquis les techniques de modélisation structurelle et de simplification des systèmes de régulation. L'algèbre des schémas fonctionnels s'avère être un outil visuel et analytique puissant pour réduire des architectures complexes — impliquant de multiples boucles, prélèvements et variables — en un modèle global compréhensible. La détermination des fonctions de transfert équivalentes en boucle ouverte et en boucle fermée, travaillée dans ces exercices, constitue l'étape préalable et obligatoire avant toute analyse de la stabilité ou des performances d'un système asservi.

Chapitre 3

Série TD 3 : Systèmes et réponse temporelle

3.1 Introduction de la série

Cette troisième série de travaux dirigés est consacrée à l'étude des **systèmes dynamiques** et de leur **réponse temporelle**. L'objectif principal est d'analyser le comportement d'un système lorsqu'il est soumis à une entrée donnée, en particulier une entrée de type **échelon**.

L'étude de la réponse temporelle occupe une place essentielle en asservissement, car elle permet d'évaluer les performances dynamiques d'un système. En effet, l'observation de la sortie en fonction du temps fournit des informations importantes sur la rapidité, la stabilité et la précision du système.

Dans cette série, les étudiants seront amenés à exploiter les outils fondamentaux de l'automatique pour :

— déterminer la fonction de transfert d'un système à partir de son équation différentielle ;

— calculer la réponse temporelle à une entrée donnée ;

— appliquer le théorème de la valeur finale ;

— déterminer les caractéristiques temporelles d'un système, telles que le temps de montée, le temps de pic, le temps de réponse et le dépassement maximal ;

— identifier les paramètres caractéristiques d'un système du deuxième ordre, notamment le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation naturelle ;

— analyser le comportement d'un circuit électrique modélisé par un système différentiel.

Les exercices proposés dans cette série portent essentiellement sur les **systèmes du premier ordre et du deuxième ordre**, qui constituent des modèles de base très importants en automatique. La maîtrise de ces modèles est indispensable pour comprendre ensuite l'étude de la stabilité, de la précision et de la synthèse des correcteurs.

Cette série a donc pour but de familiariser l'étudiant avec les méthodes de calcul de la réponse temporelle et avec l'interprétation physique des résultats obtenus.

3.2 Énoncé de la série

Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté de Technologie – Département d'Électronique

Niveau : 3$^{\text{ème}}$ Année Licence Électronique
Module : Asservissement et Régulation

TD N°03 : Systèmes et réponse temporelle

Exercice 1 : Étude d'un système du premier ordre

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \frac{5}{2}e(t)$$

1. Calculer la fonction de transfert de ce système. En déduire $S(p)$ si le signal d'entrée est un échelon unité.
2. Déterminer la valeur finale de $s(t)$ en utilisant le théorème de la valeur finale.
3. Calculer l'expression de $s(t)$ et retrouver le résultat précédent.
4. Pour quelle valeur t_r de t, $s(t)$ atteint-il 95% de sa valeur finale ?
5. Calculer le temps de montée ?
6. Donner l'équation de la tangente à l'origine ?

Exercice 2 : Modélisation d'un circuit RLC

Soit le circuit ci-après :

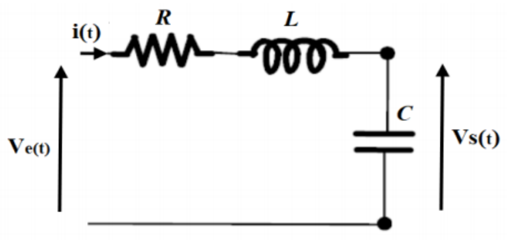
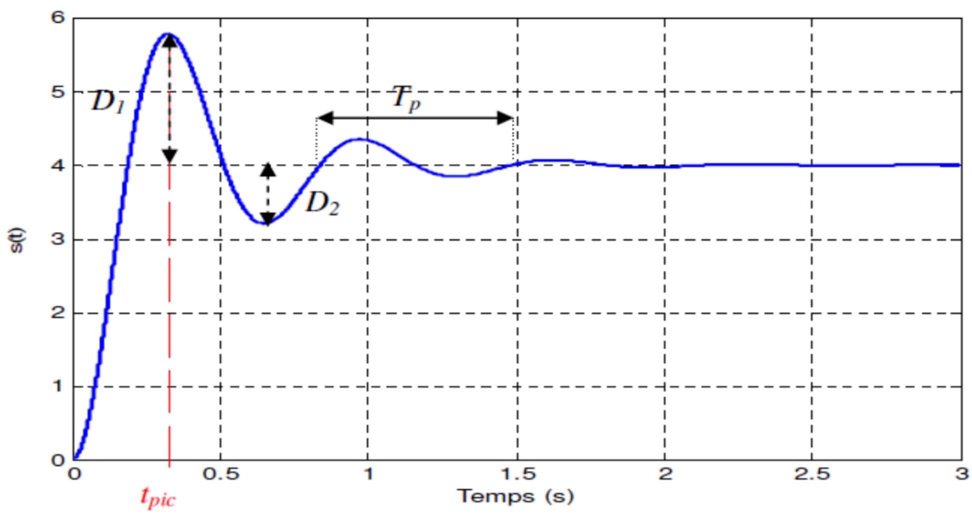


FIGURE 3.1 – Circuit RLC

1. Établir l'équation différentielle reliant $V_s(t)$ (tension aux bornes du condensateur) à l'entrée $V_e(t)$. Pour l'application numérique, on prend : $R = 4.7$ kΩ, $L = 50$ mH, $C = 2.2$ nF.
2. Calculer la fonction de transfert du système sachant que $V_s(0) = V_s'(0) = 0$.
3. Calculer : Le temps de pic, Le temps de réponse et Le premier dépassement D_1.
4. Calculer le gain statique, le coefficient d'amortissement et la pulsation naturelle.
5. Calculer et tracer $V_s(t)$ pour une entrée sous forme d'échelon de valeur 5V.

Exercice 3 : Analyse graphique d'une réponse indicielle

Soit la réponse d'un système de 2$^{\text{ème}}$ ordre représentée par la figure suivante :



À partir de l'allure de sortie, déduire :

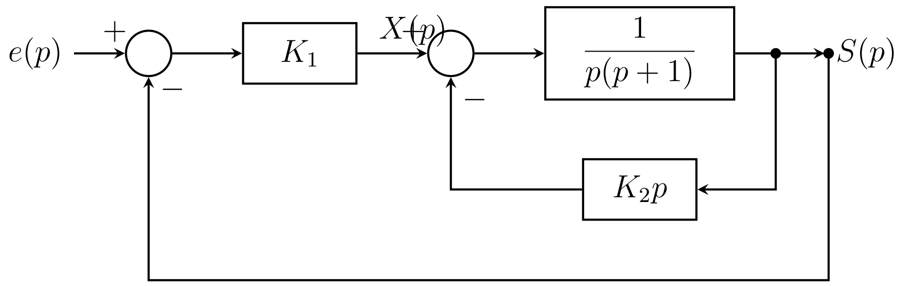
1. Le temps de pic.
2. Le temps de réponse.
3. Le premier dépassement D_1.

À partir de l'allure de sortie, déterminer :

1. Le gain statique si l'entrée est un échelon d'amplitude 2.
2. La pulsation naturelle (ω_0).
3. Le coefficient d'amortissement (ξ). Et déduire le temps de réponse.

Exercice 4 : Identification et réglage d'une boucle

Soit le système asservi ci-après :

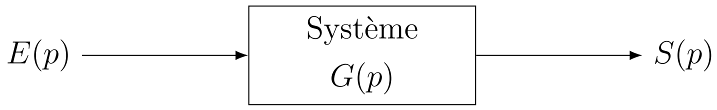


1. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
2. Calculer K_1 et K_2, pour que le système en boucle fermée soit équivalent à un système de deuxième ordre de coefficient d'amortissement (ξ) égal à 0.6 et une pulsation propre (ω_0) égale à 10 rad/s.
3. Pour une entrée de consigne ($e(t)$) sous forme d'échelon unitaire, calculer la valeur de : le temps de pic (t_{pic}), le gain statique, la pseudo-période (T_p), et le premier dépassement de la réponse.
4. Calculer le temps de réponse en boucle fermée.
5. Calculer et tracer la réponse en boucle fermée pour une entrée échelon unitaire.

3.3 Rappels de cours

3.3.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système linéaire invariant est définie comme le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie et celle de l'entrée, sous conditions initiales nulles.



On définit alors la fonction de transfert par :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

où :

— $E(p)$ est la transformée de Laplace du signal d'entrée ;

— $S(p)$ est la transformée de Laplace du signal de sortie.

La fonction de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système dans le domaine de Laplace.

3.3.2 Réponse à un échelon

Pour une entrée échelon d'amplitude E :

$$E(p) = \frac{E}{p}$$

La sortie est alors :

$$S(p) = G(p)\frac{E}{p}$$

3.3.3 Système du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit généralement sous la forme :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

où :

— K : gain statique du système

— τ : constante de temps

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\dfrac{K}{1+\tau p}} \longrightarrow S(p)$$

Si l'entrée est un échelon d'amplitude E :

$$E(p) = \frac{E}{p}$$

alors la sortie est :

$$S(p) = \frac{KE}{p(1+\tau p)}$$

La réponse temporelle est :

$$s(t) = KE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

—

3.3.4 Performances temporelles

Les performances principales d'un système du premier ordre sont :
Valeur finale

$$s(\infty) = KE$$

Constante de temps
La constante de temps τ correspond au temps pour lequel :

$$s(t) = 0.63\, s(\infty)$$

Temps de montée
Pour un système du premier ordre :

$$t_m \approx 2.2\,\tau$$

Temps de réponse à 95%

$$t_r \approx 3\,\tau$$

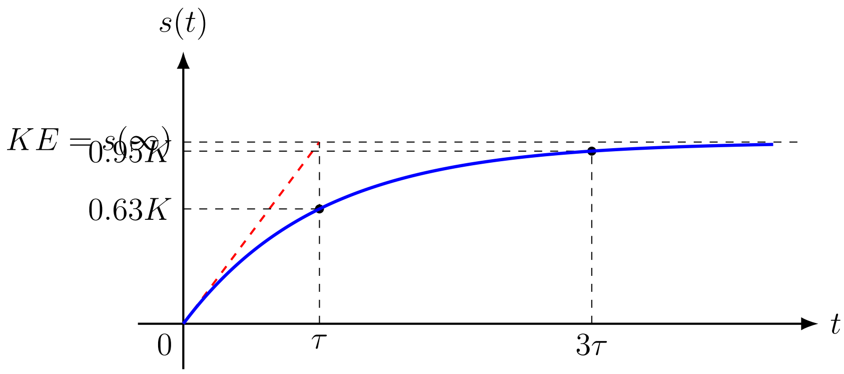
Dépassement
Pour un système du premier ordre :

$$D_1 = 0$$

Il n'y a donc pas de dépassement.

—

3.3.5 Allure de la réponse indicielle



3.3.6 Système du deuxième ordre

La fonction de transfert d'un système du deuxième ordre est :

$$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

où :

- K : gain statique
- ζ : coefficient d'amortissement
- ω_0 : pulsation naturelle

Performances temporelles

Pour un système du deuxième ordre sous-amorti :

Valeur finale

$$s(\infty) = KE$$

Temps de pic

$$t_p = \frac{n\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

n=1 correspond au premier dépassement noté (D_1) et n=2 correspond au deuxième dépassement noté (D_2), ……, n=i correspond au dépassement noté (D_i).

Premier dépassement

$$D_1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

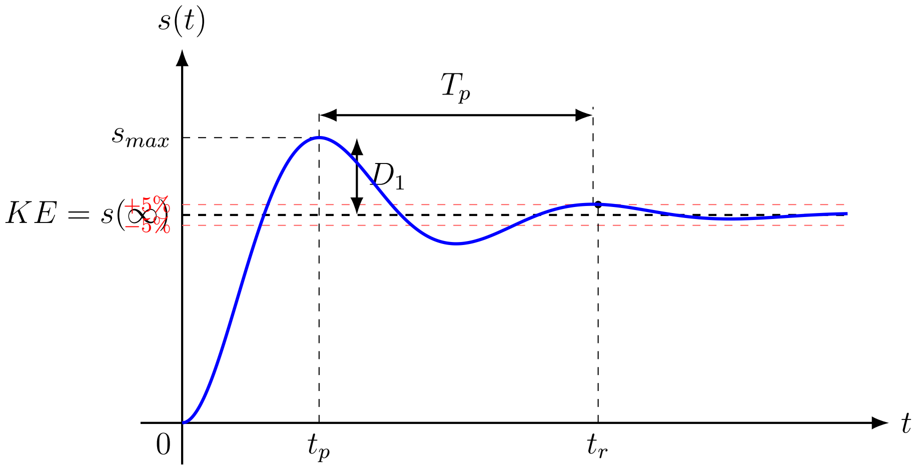
Temps de réponse

$$t_r \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}$$

Pseudo période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

3.3.7 Allure de la réponse indicielle



3.4 Solutions de la série de TD N°3

3.4.1 Exercice 1 : Modèle du premier ordre

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \frac{5}{2}e(t)$$

1) Calcul de la fonction de transfert du système

On applique la transformée de Laplace aux deux membres, sous conditions initiales nulles :

$$\frac{1}{2}\left[pS(p) - s(0)\right] + S(p) = \frac{5}{2}E(p)$$

Comme les conditions initiales sont nulles, on a :

$$\frac{1}{2}pS(p) + S(p) = \frac{5}{2}E(p)$$

On factorise $S(p)$:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right)S(p) = \frac{5}{2}E(p)$$

La fonction de transfert est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{p}{2} + 1}$$

En simplifiant :

$$\boxed{G(p) = \frac{5}{p+2}}$$

Détermination de $S(p)$ pour un échelon unité Pour une entrée échelon unité :

$$e(t) = u(t) \qquad \Longrightarrow \qquad E(p) = \frac{1}{p}$$

Donc :

$$S(p) = G(p)E(p) = \frac{5}{p+2} \cdot \frac{1}{p}$$

Ainsi :

$$\boxed{S(p) = \frac{5}{p(p+2)}}$$

2) Valeur finale de $s(t)$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p)$$

Or :

$$S(p) = \frac{5}{p(p+2)}$$

Donc :

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{5}{p(p+2)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} \frac{5}{p+2}$$

$$\boxed{s(\infty) = \frac{5}{2}}$$

3) Calcul de l'expression de $s(t)$

On part de :

$$S(p) = \frac{5}{p(p+2)}$$

On effectue la décomposition en éléments simples :

$$\frac{5}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2}$$

En multipliant par $p(p+2)$, on obtient :

$$5 = A(p+2) + Bp$$

Pour $p = 0$:

$$5 = 2A \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{5}{2}$$

Pour $p = -2$:

$$5 = -2B \qquad \Longrightarrow \qquad B = -\frac{5}{2}$$

Donc :

$$S(p) = \frac{5}{2}\frac{1}{p} - \frac{5}{2}\frac{1}{p+2}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}$$

On sait que :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\} = e^{-at}$$

Donc :

$$\boxed{s(t) = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)}$$

Vérification de la valeur finale

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \frac{5}{2}(1-0) = \frac{5}{2}$$

On retrouve bien le résultat précédent :

$$\boxed{s(\infty) = \frac{5}{2}}$$

4) Valeur de t_r pour laquelle $s(t)$ atteint 95% de sa valeur finale

La valeur finale vaut :

$$s(\infty) = \frac{5}{2}$$

On cherche t_r tel que :

$$s(t_r) = 0.95\, s(\infty)$$

Donc :

$$\frac{5}{2}\left(1 - e^{-2t_r}\right) = 0.95 \cdot \frac{5}{2}$$

En simplifiant par $\frac{5}{2}$, on obtient :

$$1 - e^{-2t_r} = 0.95$$

$$e^{-2t_r} = 0.05$$

En prenant le logarithme népérien :

$$-2t_r = \ln(0.05)$$

$$t_r = -\frac{1}{2}\ln(0.05)$$

Comme $\ln(0.05) = -\ln(20)$, on obtient :

$$\boxed{t_r = \frac{1}{2}\ln(20)}$$

Valeur numérique :

$$\boxed{t_r \approx 1.50 \text{ s}}$$

Remarque Comme $\tau = \frac{1}{2}$, on retrouve bien l'approximation classique :

$$t_m \approx 3\tau = 3 \times 0.5 = 1.5 \text{ s}$$

5) Calcul du temps de montée

Pour un système du premier ordre, le temps de montée est généralement pris entre 10% et 90% de la valeur finale.

Temps à 10%

$$\frac{5}{2}(1 - e^{-2t_{10}}) = 0.1 \cdot \frac{5}{2}$$

$$1 - e^{-2t_{10}} = 0.1$$

$$e^{-2t_{10}} = 0.9$$

$$t_{10} = -\frac{1}{2}\ln(0.9)$$

Temps à 90%

$$\frac{5}{2}(1 - e^{-2t_{90}}) = 0.9 \cdot \frac{5}{2}$$

$$1 - e^{-2t_{90}} = 0.9$$

$$e^{-2t_{90}} = 0.1$$

$$t_{90} = -\frac{1}{2}\ln(0.1)$$

Le temps de montée vaut donc :

$$t_m = t_{90} - t_{10}$$

$$t_m = -\frac{1}{2}\ln(0.1) + \frac{1}{2}\ln(0.9)$$

$$t_m = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{0.9}{0.1}\right)$$

$$\boxed{t_m = \frac{1}{2}\ln(9)}$$

Valeur numérique :

$$\boxed{t_m \approx 1.10 \text{ s}}$$

Remarque Comme $\tau = \frac{1}{2}$, on retrouve bien l'approximation classique :

$$t_m \approx 2.2\tau = 2.2 \times 0.5 = 1.1 \text{ s}$$

6) Équation de la tangente à l'origine

La réponse temporelle est :

$$s(t) = \frac{5}{2}(1 - e^{-2t})$$

La tangente à l'origine a pour équation :

$$y = s(0) + s'(0)t$$

Calculons d'abord $s(0)$:

$$s(0) = \frac{5}{2}(1 - 1) = 0$$

Calculons maintenant la dérivée :

$$s'(t) = \frac{5}{2} \cdot 2e^{-2t} = 5e^{-2t}$$

Donc :

$$s'(0) = 5$$

L'équation de la tangente à l'origine est alors :

$$\boxed{y = 5t}$$

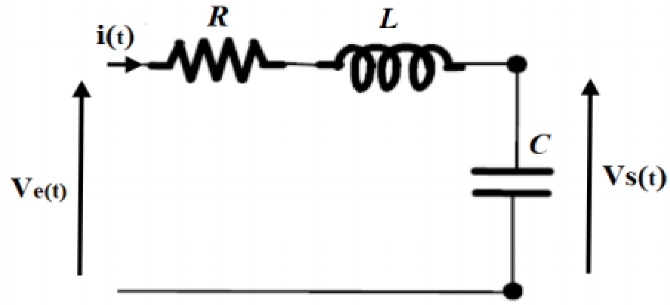
3.4.2 Exercice 2 : Analyse d'un filtre électrique RLC

On considère le circuit RLC suivant : Les paramètres sont :

$$R = 4.7\,k\Omega \qquad L = 50\,mH \qquad C = 2.2\,nF$$

—

1) Équation différentielle du système



!

Figure 3.2 – Circuit RLC

On applique la loi des mailles :

$$V_e(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Or :

$$V_R(t) = Ri(t)$$

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$V_C(t) = V_s(t)$$

et :

$$i(t) = C\frac{dV_s(t)}{dt}$$

Donc :

$$V_e(t) = RC\frac{dV_s(t)}{dt} + LC\frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + V_s(t)$$

Ainsi l'équation différentielle est :

$$\boxed{LC\frac{d^2V_s}{dt^2} + RC\frac{dV_s}{dt} + V_s = V_e}$$

—

2) Fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace :

$$LCp^2V_s(p) + RCpV_s(p) + V_s(p) = V_e(p)$$

$$V_s(p)(LCp^2 + RCp + 1) = V_e(p)$$

Donc :

$$\boxed{G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}}$$

—

3) Mise sous forme canonique

La forme canonique d'un système du second ordre est :

$$G(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

—

4) Calcul des paramètres

$$L = 50 \times 10^{-3}$$

$$C = 2.2 \times 10^{-9}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 \approx 9.53 \times 10^4 \; rad/s$$

Coefficient d'amortissement :

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\zeta \approx 0.49$$

Le système est donc :

$$\boxed{\text{sous amorti}}$$

—

5) Temps de pic

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\boxed{t_p \approx 3.8 \times 10^{-5}\ s}$$

—

6) Temps de réponse

$$t_r \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}$$

$$\boxed{t_r \approx 6.4 \times 10^{-5}\ s}$$

—

7) Premier dépassement

$$D_1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$$

$$\boxed{D_1 \approx 17\%}$$

—

8) Gain statique

$$K = G(0)$$

$$\boxed{K = 1}$$

—

9) Réponse pour un échelon de 5V

Pour un système du deuxième ordre :

$$V_s(t) = KV_e\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_d t + \phi)\right)$$

avec

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

Ici :

$$V_e = 5V$$

$$\boxed{V_s(\infty) = 5V}$$

—

Résultats principaux

$$G(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

$$\omega_0 \approx 9.53 \times 10^4 \; rad/s$$

$$\zeta \approx 0.49$$

$$t_p \approx 38 \; \mu s$$

$$t_r \approx 64 \; \mu s$$

$$D_1 \approx 17\%$$

Réponse indicielle et performances du système

La réponse indicielle du système pour un échelon de $5\,V$ est donnée par l'expression :

$$V_s(t) = 5\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \varphi)\right)$$

avec :

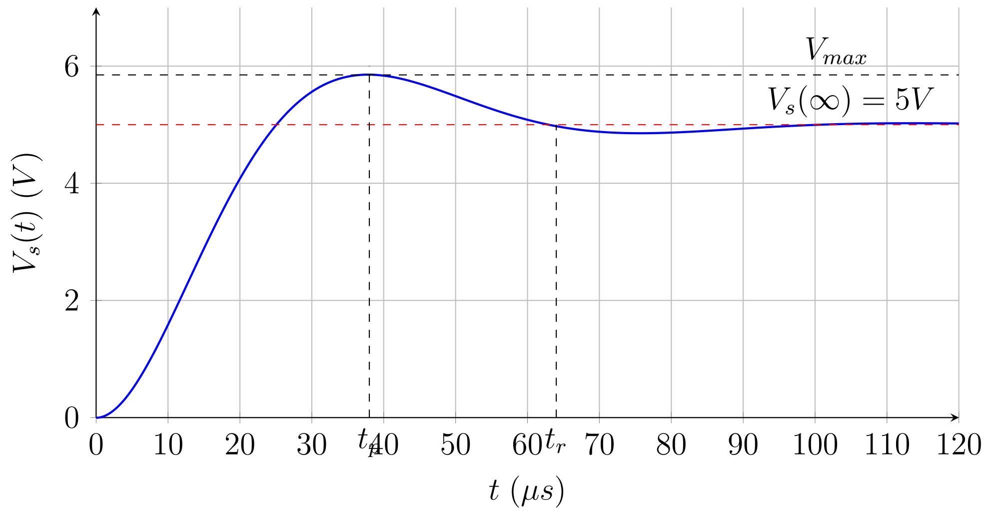
$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_0 \approx 9.53 \times 10^4 \; rad/s \qquad \zeta \approx 0.49$$

$$t_p \approx 38 \; \mu s$$

$$t_r \approx 64 \; \mu s$$

$$D_1 \approx 17\%$$



Interprétation La réponse indicielle présente les caractéristiques suivantes :

- un dépassement maximal D_1 d'environ 17% ;
- un temps de pic t_p correspondant au premier maximum de la réponse ;
- un temps de réponse t_r correspondant à l'entrée dans la bande de $\pm 5\%$ autour de la valeur finale ;
- une convergence vers la valeur finale :

$$V_s(\infty) = 5V$$

3.4.3 Exercice 3 : Identification temporelle d'un second ordre

Soit la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre représentée par la figure donnée.

Lecture graphique des caractéristiques temporelles

D'après l'allure de la courbe, on peut lire approximativement :

$$s(\infty) \approx 4$$

$$s_{\max} \approx 5.8$$

$$t_p \approx 0.32\, s$$

La pseudo-période lue entre deux maxima successifs est approximativement :

$$T_p \approx 0.63\,s$$

1) Temps de pic

Le temps de pic correspond à l'instant auquel la réponse atteint son premier maximum. D'après la figure :

$$\boxed{t_p \approx 0.32\,s}$$

2) Temps de réponse

À partir de l'allure de la courbe, on constate que la réponse devient pratiquement établie à partir de : Pour vérifier ce résultat sur le tracé, il faut définir la bande des 5 % autour de la valeur finale $s(\infty) = 4$:

— Limite haute : $4 + (0.05 \times 4) = 4.2$

— Limite basse : $4 - (0.05 \times 4) = 3.8$

Si vous observez la courbe, après le deuxième pic D_2, elle redescend pour former un creux vers $t \approx 1.25$ s. Ce creux effleure tout juste la ligne des 3.8, puis la courbe reste définitivement emprisonnée entre 3.8 et 4.2.L'estimation théorique de 1.2 s est donc tout à fait cohérente avec la lecture graphique !

$$\boxed{t_r \approx 1.2\,s}$$

Remarque Cette valeur est une lecture graphique approchée.

3) Premier dépassement D_1

Le premier dépassement est donné par :

$$D_1 = \frac{s_{\max} - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100$$

En remplaçant les valeurs lues sur la figure :

$$D_1 = \frac{5.8 - 4}{4} \times 100$$

$$D_1 = \frac{1.8}{4} \times 100$$

$$\boxed{D_1 \approx 45\%}$$

4) Gain statique

Le gain statique est donné par :

$$K = \frac{s(\infty)}{e_0}$$

L'entrée étant un échelon d'amplitude 2, on a :

$$K = \frac{4}{2}$$

Donc :

$$\boxed{K = 2}$$

5) Détermination du coefficient d'amortissement ζ

Pour un système du deuxième ordre, on a :

$$D_1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Ici :

$$D_1 = 45\% = 0.45$$

Donc :

$$0.45 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

En prenant le logarithme népérien :

$$\ln(0.45) = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

La résolution donne :

$$\boxed{\zeta \approx 0.25}$$

6) Détermination de la pulsation naturelle ω_0

La relation entre le temps de pic et la pulsation naturelle est :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Donc :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

En remplaçant $t_p \approx 0.32\,s$ et $\zeta \approx 0.25$, on obtient :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{0.32\sqrt{1-0.25^2}}$$

$$\boxed{\omega_0 \approx 10.1\ rad/s}$$

7) Déduction du temps de réponse

Pour un système du deuxième ordre, le temps de réponse est approximativement :

$$t_r \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}$$

En remplaçant $\zeta \approx 0.25$ et $\omega_0 \approx 10.1$, on obtient :

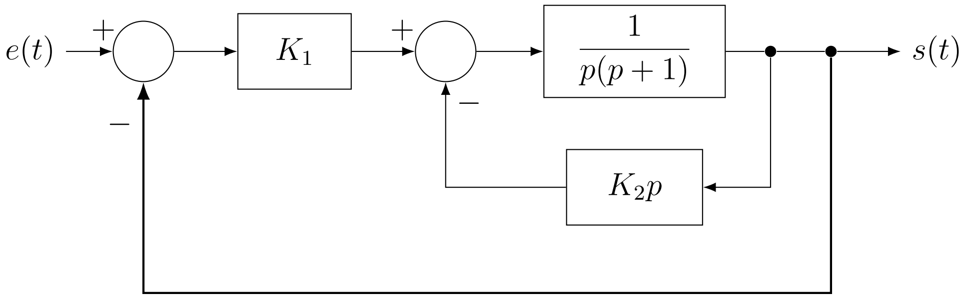
$$t_r \approx \frac{3}{0.25 \times 10.1}$$

$$\boxed{t_r \approx 1.2\,s}$$

Remarque La valeur théorique obtenue est proche de la valeur lue graphiquement sur la courbe.

3.4.4 Exercice 4 : Synthèse de paramètres en boucle fermée

On considère le système asservi suivant :



1) Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

Étape 1 : réduction de la boucle interne La chaîne directe du bloc interne est :

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

La rétroaction interne est :

$$H_2(p) = K_2 p$$

La fonction de transfert équivalente de la boucle interne est donc :

$$G_{\text{int}}(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)H_2(p)}$$

$$G_{\text{int}}(p) = \frac{\dfrac{1}{p(p+1)}}{1 + \dfrac{1}{p(p+1)}K_2 p}$$

$$G_{\text{int}}(p) = \frac{1}{p(p+1) + K_2 p}$$

$$G_{\text{int}}(p) = \frac{1}{p^2 + (1+K_2)p}$$

Étape 2 : prise en compte du gain K_1 La chaîne directe globale devient :

$$G_{\text{eq}}(p) = \frac{K_1}{p^2 + (1+K_2)p}$$

Étape 3 : fermeture de la boucle externe unitaire La boucle externe est à rétroaction unitaire négative, donc :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_{\text{eq}}(p)}{1 + G_{\text{eq}}(p)}$$

$$T(p) = \frac{\dfrac{K_1}{p^2 + (1+K_2)p}}{1 + \dfrac{K_1}{p^2 + (1+K_2)p}}$$

$$T(p) = \frac{K_1}{p^2 + (1+K_2)p + K_1}$$

Ainsi, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_1}{p^2 + (1 + K_2)p + K_1}}$$

2) Détermination de K_1 et K_2

On veut que le système soit équivalent à un système du deuxième ordre canonique :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

avec :

$$\zeta = 0.6 \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

Donc :

$$\omega_0^2 = 10^2 = 100$$

$$2\zeta\omega_0 = 2 \times 0.6 \times 10 = 12$$

En identifiant avec :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_1}{p^2 + (1 + K_2)p + K_1}$$

on obtient :

$$K_1 = \omega_0^2 = 100$$

$$1 + K_2 = 2\zeta\omega_0 = 12$$

Donc :

$$K_2 = 11$$

Ainsi :

$$\boxed{K_1 = 100 \qquad \text{et} \qquad K_2 = 11}$$

3) Performances pour une entrée échelon unitaire

Le système obtenu est :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{100}{p^2 + 12p + 100}$$

On a donc :

$$\omega_0 = 10 \qquad \zeta = 0.6$$

a) Temps de pic

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_{pic} = \frac{\pi}{10\sqrt{1-0.6^2}}$$

$$t_{pic} = \frac{\pi}{10 \times 0.8}$$

$$\boxed{t_{pic} \approx 0.393\ s}$$

b) Gain statique

$$K_s = T(0) = \frac{100}{100} = 1$$

Donc :

$$\boxed{K_s = 1}$$

c) Pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{10 \times 0.8}$$

$$\boxed{T_p \approx 0.785\ s}$$

d) Premier dépassement

$$D_1 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$$

$$D_1 = e^{-\frac{0.6\pi}{0.8}} \times 100$$

$$D_1 = e^{-2.356} \times 100$$

$$\boxed{D_1 \approx 9.5\%}$$

4) Temps de réponse en boucle fermée

Pour un système du deuxième ordre, on prend généralement à 5% :

$$t_r \approx \frac{3}{\zeta\omega_0}$$

$$t_r = \frac{3}{0.6 \times 10}$$

$$\boxed{t_r \approx 0.50\ s}$$

5) Réponse en boucle fermée pour un échelon unitaire

La réponse indicielle d'un système du deuxième ordre sous-amorti est :

$$s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin\left(\omega_d t + \varphi\right)$$

avec :

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_d = 10 \times 0.8 = 8 \text{ rad/s}$$

et

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \arctan\left(\frac{0.8}{0.6}\right)$$

$$\varphi \approx 0.927 \text{ rad}$$

Donc :

$$\boxed{s(t) = 1 - \frac{1}{0.8} e^{-6t} \sin(8t + 0.927)}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{s(t) = 1 - 1.25\, e^{-6t} \sin(8t + 0.927)}$$

Tracé de la réponse en boucle fermée pour un échelon unitaire

On a obtenu :

$$s(t) = 1 - 1.25\, e^{-6t} \sin(8t + 0.927)$$

avec :

$$\zeta = 0.6, \qquad \omega_0 = 10 \text{ rad/s}, \qquad \omega_d = 8 \text{ rad/s}$$

Les performances calculées sont :

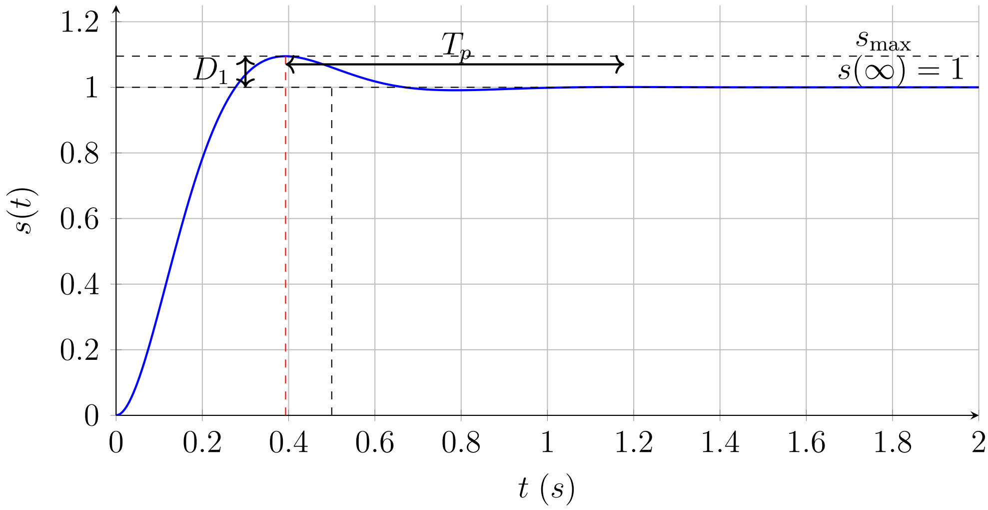
$$t_{pic} \approx 0.393\ s, \qquad T_p \approx 0.785\ s, \qquad D_1 \approx 9.5\%, \qquad t_r \approx 0.50\ s$$

La réponse indicielle correspondante est représentée ci-dessous.

Interprétation La réponse en boucle fermée présente :

- un comportement oscillatoire amorti, car le système est du deuxième ordre sous-amorti ;
- un premier dépassement d'environ 9.5% ;
- un temps de pic voisin de $0.393\,s$;
- une convergence vers la valeur finale unitaire.

5. Tracé de la réponse indicielle corrigée en boucle fermée :



3.5 Conclusion de la série

Cette troisième série vient concrétiser l'étude temporelle des systèmes fondamentaux du premier et du deuxième ordre. L'étudiant est désormais capable d'établir le lien direct entre les paramètres mathématiques d'une fonction de transfert (gain statique, constante de temps, coefficient d'amortissement, pulsation naturelle) et le comportement physique réel du système face à un échelon de consigne. Savoir identifier, interpréter et quantifier les performances transitoires (dépassement, temps de pic, temps de réponse) ainsi que la précision en régime permanent, pose ainsi les bases nécessaires pour aborder la problématique de la correction et de la synthèse des régulateurs.

Chapitre 4

Série TD 4 :Étude de Stabilité

4.1 Introduction à la Série

La stabilité est la condition primordiale et indispensable de tout système asservi. Un système instable est par définition inutilisable, voire dangereux, car ses grandeurs de sortie peuvent diverger vers l'infini à la moindre perturbation. L'objectif de cette série est de fournir les outils analytiques permettant de statuer sur la stabilité d'un système à partir de sa fonction de transfert, sans avoir à résoudre l'équation différentielle du système dans le domaine temporel.

À travers ces exercices, nous allons aborder :

- L'application du **critère algébrique de Routh-Hurwitz**, qui permet de déterminer si des pôles à partie réelle positive existent, simplement en analysant les coefficients de l'équation caractéristique.
- L'étude de l'influence du gain (K ou G) sur la stabilité d'un système en boucle fermée.
- L'identification des conditions de stabilité limite (pompage ou oscillations entretenues).

4.2 Énonce de la série

Université Amar Telidji de Laghouat

Faculté de Technologie – Département d'Électronique

Niveau : 3ème Année Licence Électronique

Module : Asservissement et Régulation

TD N°04 : Étude de Stabilité

Exercice 1 : Étude de stabilité (Équations caractéristiques)

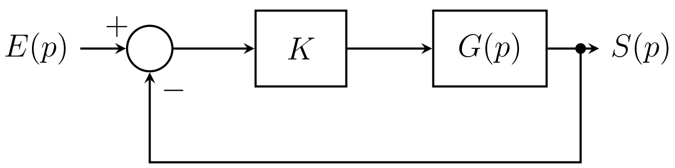
Soit les fonctions caractéristiques données par :

- $G_1(p) = 3p^3 + 2p^2 + 4p + 1 = 0$
- $G_2(p) = p^6 - 5p^5 + 11p^4 - 25p^3 + 34p^2 - 20$

Étudier la stabilité de ces systèmes.

Exercice 2 : Stabilité d'un système asservi

On considère le système asservi défini par le schéma fonctionnel suivant :



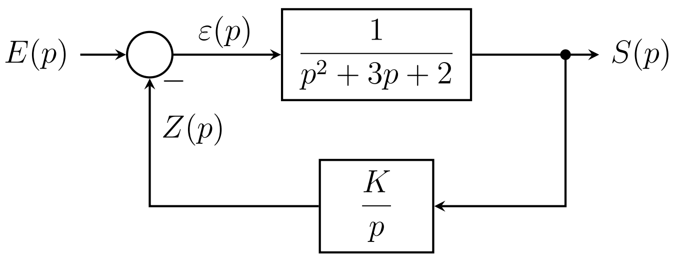
Avec :

$$G(p) = \frac{4p+1}{p(p^2+0.3p+1)(5p-1)}$$

Quelle valeur doit-on donner à K pour assurer la stabilité du système ?

Exercice 3 : Application du critère de Routh

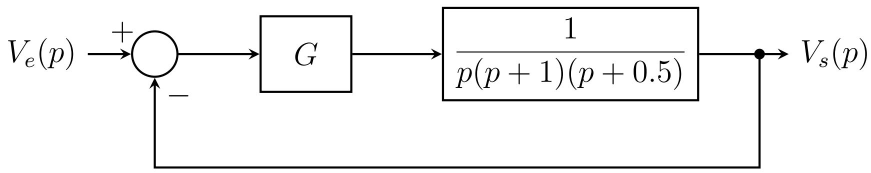
Soit la boucle de transfert d'un système en boucle fermée :



1. Déterminer la fonction de transfert du système en boucle fermée.
2. Calculer K pour que le système en boucle fermée soit stable (critère de ROUTH).

Exercice 4 : Analyse d'un système asservi d'ordre supérieur

Nous avons un système représenté par la boucle suivante :



1. Quel est l'ordre du système ?
2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée.
3. Appliquer le critère de Routh au dénominateur de cette fonction de transfert en boucle fermée et déterminer les conditions sur le gain G permettant d'assurer la stabilité du système en boucle fermée.
4. Tracer à main levée l'allure de la tension de sortie $V_s(t)$ lorsque le système est sollicité par un essai indiciel en entrée et que la valeur de G est fixée à 3/4.

Exercice 5 : Étude de stabilité par l'analyse fréquentielle (Bode)

On considère un système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est donnée par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(0.1p+1)}$$

Partie A : Analyse des marges de stabilité pour $K = 1$

On fixe le gain proportionnel à $K = 1$.

1. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique (amplitude et phase) de ce système.
2. Par le calcul, déterminer la pulsation de coupure à -180° (notée $\omega_{-\pi}$).
3. En déduire la marge de gain (M_G). Le système en boucle fermée est-il stable ?

Partie B : Limite de stabilité et lien avec Routh

4. À partir de la marge de gain calculée précédemment, déduire la valeur limite du gain proportionnel K_{limite} pour laquelle le système devient juste instable (phénomène de pompage).

5. Retrouver cette valeur limite K_{limite} en appliquant le critère algébrique de Routh-Hurwitz sur l'équation caractéristique du système en boucle fermée. Conclure.

4.3 Rappels de Cours : Stabilité des Systèmes Linéaires

4.3.1 Condition générale de stabilité

Un système linéaire continu et invariant est dit **asymptotiquement stable** si, et seulement si, tous les pôles de sa fonction de transfert (les racines de son équation caractéristique) ont une partie réelle strictement négative. Sur le plan complexe, cela signifie que tous les pôles doivent se trouver dans le demi-plan gauche.

4.3.2 L'équation caractéristique

Pour un système bouclé avec une chaîne directe $G(p)$ et une chaîne de retour $H(p)$, la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est $\frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$. L'équation caractéristique régissant la dynamique du système est le dénominateur de la FTBF annulé :

$$1 + G(p)H(p) = 0 \quad \text{soit} \quad D_{BF}(p) = 0$$

4.3.3 Critère de Routh-Hurwitz

Soit l'équation caractéristique : $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0$.

— **Condition nécessaire (mais non suffisante) :** Tous les coefficients a_i doivent être non nuls et de même signe.

— **Condition suffisante :** On construit le tableau de Routh. Le système est stable si, et seulement si, tous les termes de la **première colonne** du tableau sont strictement de même signe (aucun changement de signe). Le nombre de changements de signe dans cette colonne donne exactement le nombre de pôles instables (à partie réelle positive).La construction du tableau s'arrête sur un ligne remplie de zéros.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	....
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	....
p^{n-2}	C_1	C_2	C_3	....
p^{n-3}	D_1	D_2	D_3	....
$\vdots$ $\vdots$				

Les coefficients $C_1, C_2, C_3, \ldots,$ et $D_1, D_2, D_3, \ldots$ sont calculés de la manière suivante :

$$C_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$C_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$D_1 = \frac{C_1 a_{n-3} - C_2 a_{n-1}}{C_1}$$

$$D_2 = \frac{C_1 a_{n-5} - C_3 a_{n-1}}{C_1}$$

4.3.4 Analyse fréquentielle et Stabilité (Bode)

L'analyse fréquentielle consiste à étudier la réponse en régime permanent d'un système soumis à une entrée sinusoïdale. Mathématiquement, on remplace la variable de Laplace p par $j\omega$ dans la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

1. Le Diagramme de Bode

La représentation de Bode se compose de deux tracés superposés en fonction de la pulsation ω sur une échelle logarithmique :

- **La courbe de Gain (Amplitude) :** $G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}|FTBO(j\omega)|$
- **La courbe de Phase :** $\varphi(\omega) = \arg(FTBO(j\omega))$ exprimée en degrés.

2. Critère de Stabilité (Revers paramétrique)

Pour un système à minimum de phase (sans retard pur ni pôles instables en boucle ouverte), la stabilité en boucle fermée s'évalue graphiquement en observant la position de la FTBO par rapport au point critique instable $(-1, 0)$ du plan complexe, ce qui correspond au point $(0\text{ dB}, -180°)$ dans le plan de Bode.

Un système est stable en boucle fermée si et seulement si ses **marges de stabilité sont strictement positives**.

3. Les Marges de Stabilité

Pour quantifier la robustesse de la stabilité, on définit deux marges :

- **La Marge de Phase (M_φ) :** C'est le retard de phase supplémentaire que le système peut tolérer avant de devenir instable.
  - — On détermine d'abord la pulsation ω_{0dB} pour laquelle le gain croise l'axe des abscisses : $|FTBO(j\omega_{0dB})|_{dB} = 0$ dB.
  - — On calcule la marge : $\boxed{M_\varphi = 180° + \varphi(\omega_{0dB})}$.
  - — *Condition : Pour un bon amortissement, on vise généralement $M_\varphi \approx 45°$ à $60°$.*
- **La Marge de Gain (M_G) :** C'est le coefficient multiplicateur (le gain) que l'on peut ajouter au système avant d'atteindre l'instabilité.
  - — On détermine d'abord la pulsation $\omega_{-\pi}$ pour laquelle la phase croise l'axe critique : $\varphi(\omega_{-\pi}) = -180°$.
  - — On calcule la marge : $\boxed{M_G = 0 \text{ dB} - |FTBO(j\omega_{-\pi})|_{dB}}$.
  - — *Condition : Pour une bonne robustesse, on vise généralement $M_G \geq 10$ dB.*

4.4 Solutions de la série de TD N°4

4.4.1 Exercice 1 :

Premier système : $G_1(p) = 3p^3 + 2p^2 + 4p + 1 = 0$

Condition nécessaire : Tous les coefficients $(3, 2, 4, 1)$ sont présents et strictement positifs. La condition nécessaire est remplie.

Condition suffisante (Tableau de Routh) :

p^4	3	4	0
p^3	2	1	0
p^2	$\frac{2\times4-3\times1}{2} = 2.5$	$\frac{1\times0-4\times0}{2} = 0$	0
p^1	$\frac{2.5\times1-2\times0}{2.5} = 1$	0	0

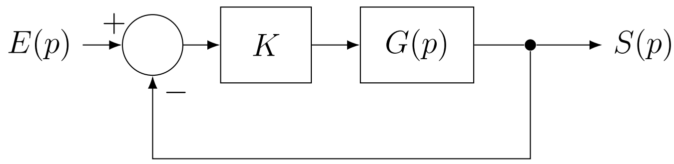
Conclusion : La première colonne est $\{3, 2, 2.5, 1\}$. Il n'y a aucun changement de signe, tous les termes de la première colonne sont positifs. Le système ne possède pas de pôles à partie réelle positive. alors le système est stable.

Deuxième système : $G_2(p) = p^6 - 5p^5 + 11p^4 - 25p^3 + 34p^2 - 20 = 0$

Condition nécessaire : Le coefficient du terme en p^5 est négatif (-5) et le terme en p est manquant (coefficient nul). Les coefficients ne sont pas tous de même signe et certains sont nuls. **Conclusion :** La condition nécessaire n'est pas remplie. Le système est **instable** sans qu'il soit nécessaire de dresser le tableau de Routh.

4.4.2 Exercice 2 :

Le schéma-bloc présente un retour unitaire négatif.



L'équation caractéristique est : $1 + K \cdot G(p) = 0$. Soit :

$$1 + \frac{K(4p+1)}{p(p^2+0.3p+1)(5p-1)} = 0$$

Développons le dénominateur de la FTBO :

$$D_{BO}(p) = p(p^2+0.3p+1)(5p-1) = p(5p^3-p^2+1.5p^2-0.3p+5p-1) = 5p^4+0.5p^3+4.7p^2-p$$

L'équation caractéristique devient :

$$5p^4 + 0.5p^3 + 4.7p^2 - p + K(4p+1) = 0$$

En regroupant les termes de même puissance :

$$5p^4 + 0.5p^3 + 4.7p^2 + (4K-1)p + K = 0$$

Condition nécessaire : Tous les coefficients doivent être strictement positifs.

— $K > 0$

— $4K - 1 > 0 \implies K > 0.25$

Condition suffisante (Routh) :

$$
\begin{array}{c|ccc}
p^4 & 5 & 4.7 & K \\
p^3 & 0.5 & 4K-1 & 0 \\
\hline
p^2 & \frac{0.5(4.7)-5(4K-1)}{0.5} = 14.7-40K & K & 0 \\
p^1 & \frac{(14.7-40K)(4K-1)-0.5K}{14.7-40K} & 0 & 0 \\
p^0 & K & &
\end{array}
$$

Pour garantir la stabilité, les éléments de la première colonne doivent être positifs :
1) $14.7 - 40K > 0 \implies K < \frac{14.7}{40} = 0.3675$
2) Le numérateur de la ligne p^1 doit être positif (car le dénominateur est positif d'après la condition 1) :

$$(14.7 - 40K)(4K - 1) - 0.5K > 0$$

$$58.8K - 14.7 - 160K^2 + 40K - 0.5K > 0$$

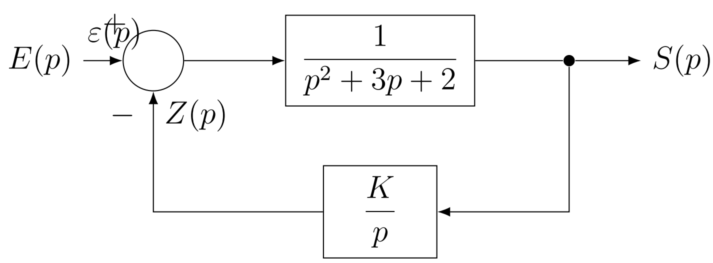
$$-160K^2 + 98.3K - 14.7 > 0$$

La résolution de ce trinôme donne deux racines : $K_1 \approx 0.257$ et $K_2 \approx 0.357$. Le trinôme est positif entre les racines.

Conclusion : En faisant l'intersection de toutes les conditions, le système en boucle fermée est stable pour :

$$\boxed{0.257 < K < 0.357}$$

4.4.3 Exercice 03 :



Fonction de transfert en boucle fermée

La fonction de transfert globale est :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{\frac{1}{p^2+3p+2}}{1 + \frac{1}{p^2+3p+2} \cdot \frac{K}{p}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $p(p^2 + 3p + 2)$:

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{p}{p^3 + 3p^2 + 2p + K}}$$

Calcul de K pour la stabilité

L'équation caractéristique est : $p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$.

Condition nécessaire : Tous les coefficients doivent être strictement positifs $\Longrightarrow K > 0$.

Condition suffisante (Routh) :

$$\begin{array}{c|cc}
p^3 & 1 & 2 \\
p^2 & 3 & K \\
\hline
p^1 & \frac{3\times2-1\times K}{3} = \frac{6-K}{3} & 0 \\
p^0 & K &
\end{array}$$

Pour que la première colonne soit positive, il faut :

$$\frac{6-K}{3} > 0 \Longrightarrow 6 - K > 0 \Longrightarrow K < 6$$

Conclusion : Le système est stable pour $\boxed{0 < K < 6}$.

4.4.4 Exercice 04

Ordre du système

La fonction de transfert de la chaîne directe est $FTBO(p) = \frac{G}{p(p+1)(p+0.5)}$. Le dénominateur est un polynôme de degré 3. Il s'agit donc d'un système du **troisième ordre**.

2. Fonction de transfert en boucle fermée

Le système possède un retour unitaire ($H(p) = 1$).

$$FTBF(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{\frac{G}{p(p+1)(p+0.5)}}{1 + \frac{G}{p(p+1)(p+0.5)}}$$

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{G}{p(p^2 + 1.5p + 0.5) + G} = \frac{G}{p^3 + 1.5p^2 + 0.5p + G}}$$

3. Conditions de stabilité sur le gain G (Critère de Routh)

L'équation caractéristique est : $p^3 + 1.5p^2 + 0.5p + G = 0$.

Condition nécessaire : $G > 0$.

Tableau de Routh :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 0.5 \\ p^2 & 1.5 & G \\ \hline p^1 & \frac{1.5\times0.5-1\times G}{1.5} = \frac{0.75-G}{1.5} & 0 \\ p^0 & G & \end{array}$$

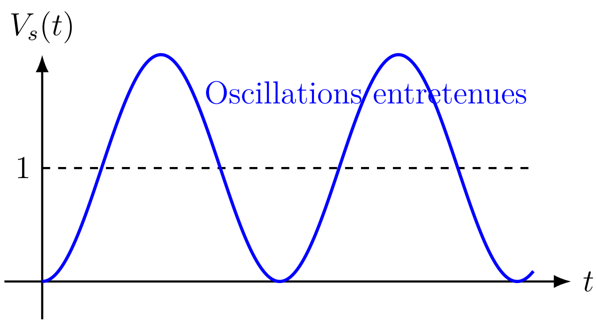
Pour que le système soit stable, on doit avoir :

$$0.75 - G > 0 \implies G < 0.75$$

La condition de stabilité est donc $\boxed{0 < G < 0.75}$.

4. Allure de la réponse pour G = 3/4

Pour $G = 3/4 = 0.75$, nous sommes exactement à la limite de stabilité (le terme p^1 du tableau de Routh s'annule). Le système va entrer en "pompage" : sa réponse indicielle présentera des **oscillations entretenues** (non amorties) d'amplitude constante autour de sa valeur de régime permanent.



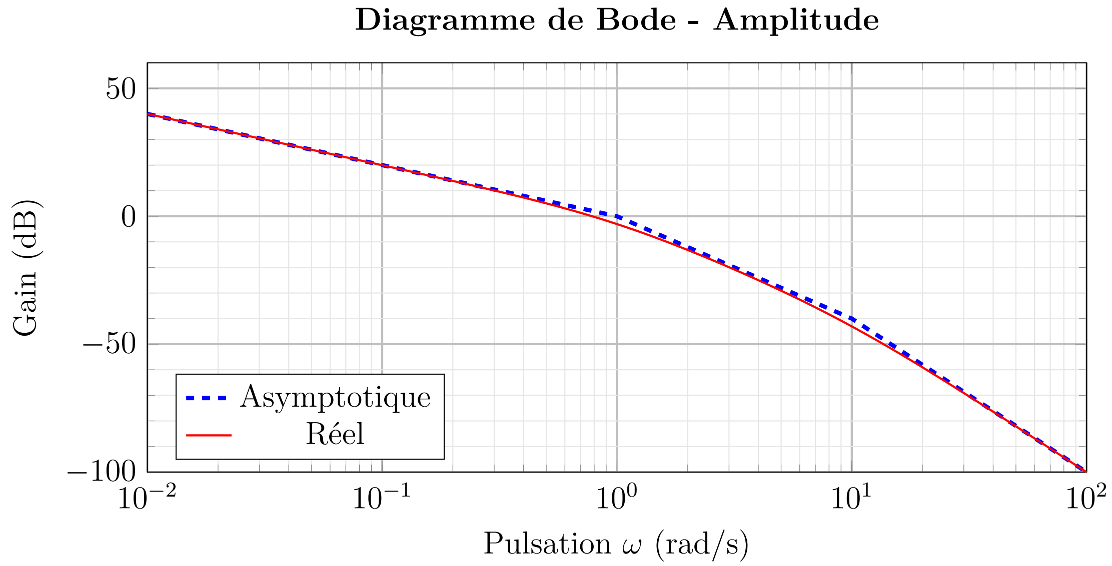
4.4.5 Exercice 5 :

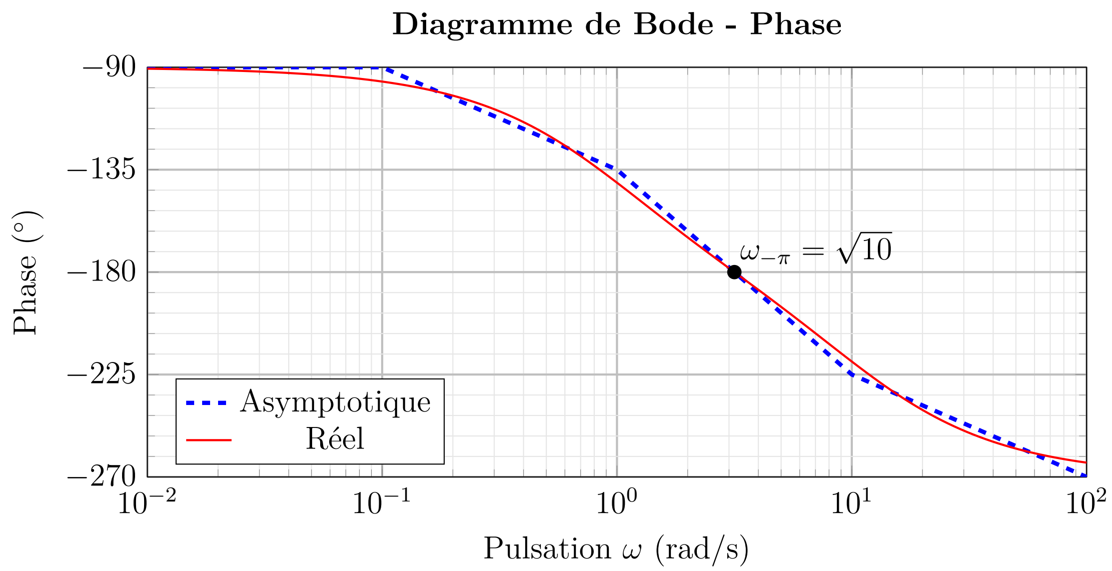
Partie A : Analyse des marges de stabilité ($K = 1$)

1. Tracé asymptotique de Bode

La fonction de transfert possède trois éléments fondamentaux :

- Un intégrateur $\frac{1}{p}$: Pente de -20 dB/déc, phase constante de -90°.
- Un pôle simple en $\omega_1 = 1$ rad/s : Cassure de pente à -40 dB/déc, la phase chute vers -180°.
- Un pôle simple en $\omega_2 = 10$ rad/s : Cassure de pente à -60 dB/déc, la phase chute vers -270°.





2. Calcul de la pulsation à -180° ($\omega_{-\pi}$)

L'expression de la phase en fonction de la pulsation ω est :

$$\varphi(\omega) = -90° - \arctan(\omega) - \arctan(0.1\omega)$$

On cherche $\omega_{-\pi}$ telle que $\varphi(\omega_{-\pi}) = -180°$:

$$-180° = -90° - \arctan(\omega_{-\pi}) - \arctan(0.1\omega_{-\pi})$$

$$\arctan(\omega_{-\pi}) + \arctan(0.1\omega_{-\pi}) = 90°$$

Sachant que la somme de deux arctangentes vaut 90° si et seulement si leurs arguments sont inverses l'un de l'autre ($a \times b = 1$), on obtient :

$$\omega_{-\pi} \times 0.1\omega_{-\pi} = 1 \implies 0.1\omega_{-\pi}^2 = 1 \implies \omega_{-\pi}^2 = 10$$

Soit : $\omega_{-\pi} = \sqrt{10} \approx 3.16$ rad/s.

3. Marge de gain (M_G) et stabilité

La marge de gain se calcule en évaluant le gain à cette pulsation $\omega_{-\pi}$.
L'amplitude (module) du système est :

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}$$

Évaluons ce module pour $\omega = \sqrt{10}$:

$$|G(j\sqrt{10})| = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{1+10}\sqrt{1+0.01(10)}} = \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{11}\sqrt{1.1}}$$

$$|G(j\sqrt{10})| = \frac{1}{\sqrt{110 \times 1.1}} = \frac{1}{\sqrt{121}} = \frac{1}{11}$$

Le gain en décibels à cette pulsation est donc :

$$G_{dB}(\omega_{-\pi}) = 20\log\left(\frac{1}{11}\right) = -20\log(11) \approx -20.83 \text{ dB}$$

La marge de gain est $M_G = 0 - G_{dB}(\omega_{-\pi})$.

$$M_G = +20.83 \text{ dB}$$

Puisque la marge de gain est strictement positive, **le système est stable en boucle fermée pour** $K = 1$.

Partie B : Limite de stabilité et lien avec Routh

4. Déduction de K_{limite} via Bode

La marge de gain indique de combien de décibels on peut augmenter le gain du système avant d'atteindre l'instabilité (le point critique 0 dB / -180°). Puisque $M_G = 20.83$ dB, le gain limite en linéaire correspond exactement à l'inverse du module calculé précédemment :

$$K_{limite} = 10^{\frac{20.83}{20}} = 11$$

5. Vérification par le critère de Routh

L'équation caractéristique en boucle fermée est $1 + G(p) = 0$:

$$1 + \frac{K}{p(1+p)(1+0.1p)} = 0$$

$$p(1 + 1.1p + 0.1p^2) + K = 0$$

$$0.1p^3 + 1.1p^2 + p + K = 0$$

Dressons le tableau de Routh :

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 0.1 & 1 \\ p^2 & 1.1 & \text{K} \\ p^1 & \frac{1.1-0.1K}{1.1} & 0 \\ p^0 & \text{K} & \end{array}$$

Pour que le système soit stable, tous les termes de la première colonne doivent être strictement positifs. La ligne p^1 impose :

$$1.1 - 0.1K > 0 \implies 0.1K < 1.1 \implies K < 11$$

Conclusion : La limite de stabilité mathématique trouvée par le critère de Routh ($K = 11$) correspond parfaitement et logiquement à la limite physique déduite de la marge de gain du diagramme de Bode.

4.5 Conclusion de la série

Cette quatrième série de travaux dirigés a mis en exergue l'importance vitale de l'étude de la stabilité dans la conception des systèmes asservis. L'application du critère de Routh-Hurwitz démontre qu'il est possible de paramétrer un régulateur (en ajustant son gain K ou G) pour maintenir un système dans sa zone de fonctionnement stable. Nous avons également vu qu'un gain excessif pousse inévitablement les pôles vers le demi-plan droit complexe, transformant le système en un oscillateur instable. Ces concepts de marges et de limites de gain introduisent naturellement les chapitres suivants consacrés aux correcteurs et à l'analyse harmonique, où la précision et la rapidité devront être optimisées sans jamais sacrifier cette stabilité.

Chapitre 5

Série TD 5 : Systèmes asservis

5.1 Introduction à la Série de TD N°05 :

Après avoir étudié la modélisation mathématique et l'analyse de la stabilité, cette cinquième série aborde le cœur du métier d'automaticien : l'évaluation des performances globales d'un système asservi (précision, rapidité, amortissement) et la synthèse de lois de commande (régulateurs).

L'objectif de ces exercices est de comprendre comment un régulateur (qu'il soit purement proportionnel ou inséré dans une boucle de retour tachymétrique) modifie le comportement dynamique du système. Vous y apprendrez à dimensionner un gain pour satisfaire un cahier des charges précis, que ce soit pour annuler une erreur statique de position, limiter un dépassement, ou imposer un temps de réponse spécifique.

5.2 Énoncé de la série

Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté de Technologie – Département d'Électronique

Niveau : 3ème Année Licence Électronique
Module : Asservissement et Régulation

TD N°05 : Systèmes asservis

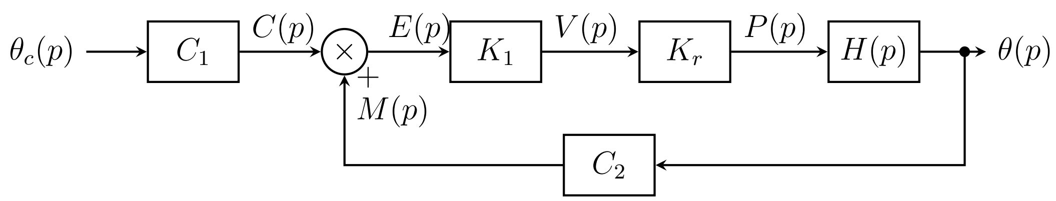
Exercice 1 : Régulation de température d'un four

Le comportement d'un four destiné au traitement thermique d'objets est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\theta(t) + T\frac{d\theta(t)}{dt} = K \cdot p(t)$$

I. Calculer la fonction de transfert du four en boucle ouverte $H(p) = \frac{\theta(p)}{P(p)}$ par transformée de Laplace de l'équation différentielle.

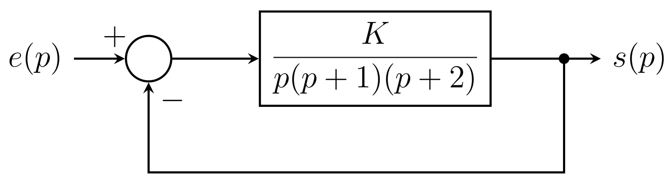
II. La régulation de température du four est donnée par le schéma-bloc suivant :



1. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)}$.
2. Calculer la sortie du système $\theta(t)$ pour une entrée en échelon d'amplitude 200°C ($\theta_c(t) = 200°\text{C}$).

Exercice 2 : Stabilité et performances

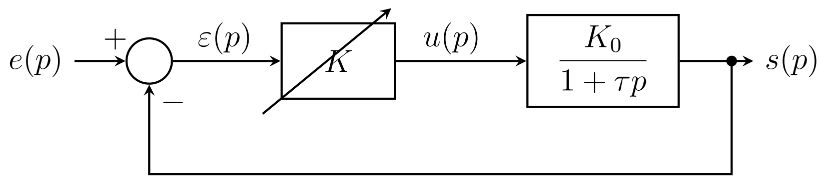
Soit le système asservi ci-après :



1. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
2. Étudier la stabilité du système en boucle fermée en fonction de K. On suppose que K est toujours positif.
3. Pour $K = 6$, montrer que $p = -3$ est un pôle en boucle fermée et déterminer les deux autres pôles. Quel est le type de cette réponse ?
4. Pour $K = 6$, calculer et tracer la réponse $s(t)$ en boucle fermée pour une consigne sous forme d'échelon unitaire. Quel est le type de cette réponse ?

Exercice 3 : Régulateur de type proportionnel

Le schéma fonctionnel de l'asservissement d'un système du 1er ordre par un régulateur est donné par :



1. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme : $G_{BF}(p) = \frac{K'}{1+\tau' p}$ en déduisant K' et τ'. Que peut-on conclure ?
2. Quel est le type de ce régulateur ?
3. Donner le circuit électrique (à base d'AOP) pour réaliser ce régulateur.

Exercice 4 : Amélioration de la précision

Soit à commander par un régulateur proportionnel un système du 1er ordre de fonction de transfert :

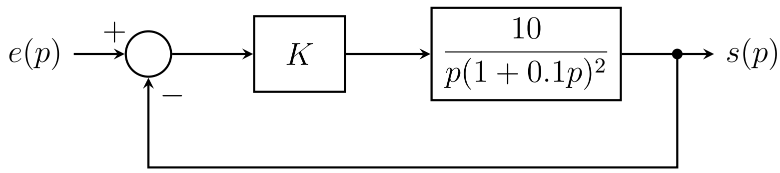
$$\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{2}{1+3p}$$

On considère une consigne sous forme d'échelon de valeur 3.

1. Étudier les performances en boucle fermée sans régulateur ($K = 1$).
2. Étudier les performances en boucle fermée avec régulateur ($K \neq 1$). On prend $K = 10$.
3. Déterminer le gain (K) du régulateur pour que l'erreur statique de position soit améliorée de 10% par rapport à l'erreur statique obtenue sans régulation.

Exercice 5 : Évaluation des erreurs statiques

Soit le système asservi décrit par le schéma fonctionnel suivant :

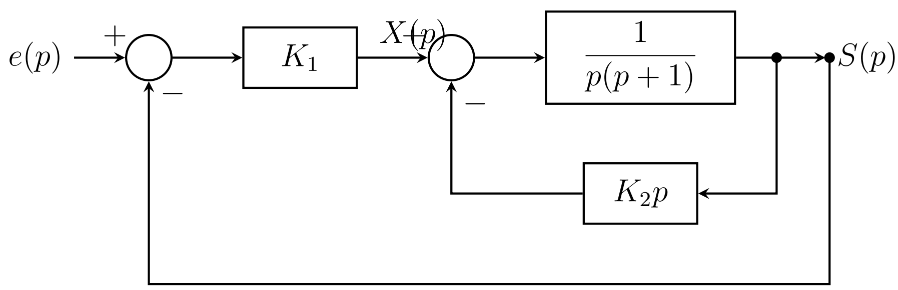


Le gain K est positif.

1. Déterminer le gain statique en boucle ouverte.
2. Quelle est la classe du système ?
3. Déterminer les valeurs de K pour que le système soit stable en boucle fermée.
4. Déterminer les erreurs statiques : ε_{sp} (position), ε_{sv} (vitesse), ε_{sa} (accélération).
5. Est-ce qu'il existe un gain K pour que les performances suivantes soient réalisées en boucle fermée :
   - ▷ $\varepsilon_{sv} = 0.01$
   - ▷ Système stable en boucle fermée.

Exercice 6 : Synthèse de boucle avec retour tachymétrique

Soit le système asservi ci-après :



1. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
2. Calculer K_1 et K_2, pour que le système en boucle fermée soit équivalent à un système de deuxième ordre de coefficient d'amortissement (ξ) égal à 0.6 et une pulsation propre (ω_0) égale à 10 rad/s.
3. Pour une entrée de consigne ($e(t)$) sous forme d'échelon unitaire, calculer la valeur du premier dépassement de la réponse.
4. Calculer le temps de réponse en boucle fermée.
5. Calculer et tracer la réponse en boucle fermée pour une entrée échelon unitaire.

5.3 Rappels de Cours : Précision et Synthèse

5.3.1 Erreur en régime permanent (Précision)

L'erreur $\epsilon(p) = E(p) - S(p)$ (pour un retour unitaire) permet de caractériser la précision du système via le théorème de la valeur finale :

$$\epsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{p\to 0} p \cdot \epsilon(p) = \lim_{p\to 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Selon l'entrée $e(t)$, on définit :

- **Erreur de position (ϵ_{sp})** : Entrée en échelon $E(p) = E_0/p$. Dépend du gain statique. Nulle si le système possède au moins un intégrateur .
- **Erreur de traînage ou de vitesse (ϵ_{sv})** : Entrée en rampe $E(p) = V_0/p^2$. Nulle si le système possède au moins deux intégrateurs .
- **Erreur d'accélération(ϵ_{sa})** : Entrée en rampe $E(p) = V_0/p^2$. Nulle si le système possède au moins deux intégrateurs .

La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi s'écrit dans le cas général sous la forme suivante :

$$G(p) = \frac{K_s N(p)}{p^\alpha D(p)}$$

Avec :

- $N(0) = D(0) = 1$;
- α : La classe du système ($\alpha \geq 0$) ;
- K_s : Gain statique du système en boucle ouverte.

Donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{e(p)}{1 + \frac{K_s N(p)}{p^\alpha D(p)}} = \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + K_s N(p)} e(p)$$

D'où l'erreur statique :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \left[p \frac{p^\alpha D(p)}{p^\alpha D(p) + K_s N(p)} e(p) \right]$$

On remarque que l'erreur statique dépend du type d'entrée et de la classe du système.

Tableau récapitulatif

Les erreurs statiques sont regroupées dans le tableau suivant :

Type d'entrée	**Classe du système**			
	Classe ($\alpha = 0$)	**Classe** ($\alpha = 1$)	**Classe** ($\alpha = 2$)	**Classe** ($\alpha > 2$)
Entrée échelon	$\varepsilon_{sp} = \dfrac{E}{1+K_s}$	$\varepsilon_{sp} = 0$	$\varepsilon_{sp} = 0$	$\varepsilon_{sp} = 0$
Entrée rampe	$\varepsilon_{sv} = \infty$	$\varepsilon_{sv} = \dfrac{E}{K_s}$	$\varepsilon_{sv} = 0$	$\varepsilon_{sv} = 0$
Entrée parabolique	$\varepsilon_{sa} = \infty$	$\varepsilon_{sa} = \infty$	$\varepsilon_{sa} = \dfrac{2E}{K_s}$	$\varepsilon_{sa} = 0$

5.3.2 Synthèse par identification

Lorsqu'on dispose d'un correcteur avec plusieurs paramètres (ex : K_1 en cascade et K_2 en retour), on exprime la fonction de transfert en boucle fermée paramétrée, puis on identifie son dénominateur avec le polynôme caractéristique désiré (souvent un $2^{\text{ème}}$ ordre canonique : $p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2$) pour imposer un comportement dynamique précis.

5.4 Solutions de la série de TD N°5

5.4.1 Exercice 01

I. Fonction de transfert du four en boucle ouverte

L'équation différentielle du four est : $\theta(t) + T\frac{d\theta(t)}{dt} = K \cdot p(t)$. En appliquant la transformée de Laplace avec des conditions initiales nulles :

$$\theta(p) + Tp\theta(p) = KP(p) \implies \theta(p)(1+Tp) = KP(p)$$

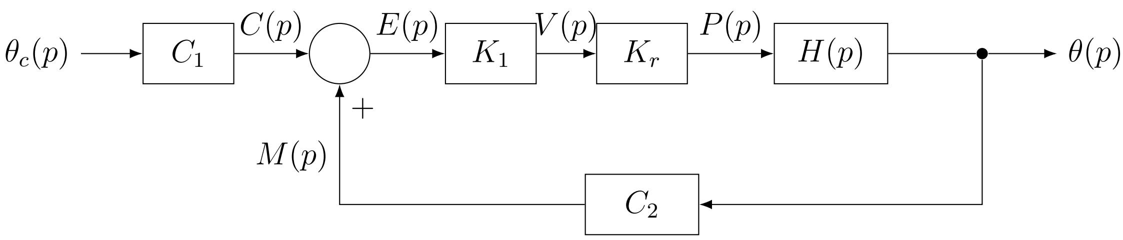
La fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

$$\boxed{G(p) = \frac{\theta(p)}{P(p)} = \frac{K}{1+Tp}}$$

Il s'agit d'un système classique du premier ordre.

II. Régulation en boucle fermée

1. Fonction de transfert en boucle fermée :



La chaîne d'action directe est constituée des blocs C_1, K_1, K_r et $H(p)$ (qui est le four, donc $H(p) = G(p)$). Le retour est fait par C_2. En supposant un comparateur classique (différenciateur), on a :

$$FTBF(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = \frac{C_1K_1K_rH(p)}{1 - C_2K_1K_rH(p)}$$

En remplaçant $H(p)$ par $\frac{K}{1+Tp}$:

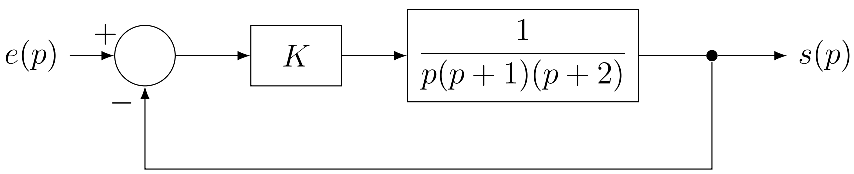
$$\boxed{FTBF(p) = \frac{C_1K_1K_rK}{1 + Tp - C_2K_1K_rK} = \frac{\frac{C_1K_1K_rK}{1+C_2K_1K_rK}}{1 - \frac{T}{1+C_2K_1K_rK}p}}$$

2. Sortie pour un échelon : La réponse à un échelon d'amplitude 200 tendra vers le gain statique de la boucle fermée multiplié par 200.

$$\theta(\infty) = 200 \times \frac{C_1K_1K_rK}{1 - C_2K_1K_rK}$$

5.4.2 Exercice 02

1) Fonction de transfert en boucle fermée



La $FTBO$ est $G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} = \frac{K}{p^3+3p^2+2p}$.

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p^3 + 3p^2 + 2p + K}}$$

2) Étude de la stabilité (Critère de Routh)

L'équation caractéristique est : $p^3 + 3p^2 + 2p + K = 0$.

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 2 \\ p^2 & 3 & K \\ \hline p^1 & \frac{6-K}{3} & 0 \\ p^0 & K & \end{array}$$

Pour $K > 0$, le système est stable si $\frac{6-K}{3} > 0 \implies \boxed{0 < K < 6}$.

3) Pôles pour K = 6

Pour $K = 6$, l'équation caractéristique est $p^3 + 3p^2 + 2p + 6 = 0$. Vérifions si $p = -3$ est un pôle : $(-3)^3 + 3(-3)^2 + 2(-3) + 6 = -27 + 27 - 6 + 6 = 0$. C'est vérifié.

Pour trouver les autres pôles, on effectue la division euclidienne du polynôme caractéristique par $(p + 3)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} p^3 & +3p^2 & +2p & +6 & p+3 \\ \cline{5-5} -p^3 & -3p^2 & & & p^2+2 \\ \cline{1-4} & 0 & +2p & +6 & \\ & & -2p & -6 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

On en déduit la factorisation :

$$p^3 + 3p^2 + 2p + 6 = (p + 3)(p^2 + 2)$$

Les deux autres pôles sont les solutions de $p^2 + 2 = 0$, soit $\boxed{p = \pm j\sqrt{2}}$.

4) Réponse temporelle pour K = 6

Pour $K = 6$, le système possède deux pôles imaginaires purs. Il est à la limite de la stabilité. La réponse indicielle sera de type **oscillatoire entretenue** (pompage) à la pulsation $\omega = \sqrt{2}$ rad/s. Pour $K = 6$, la fonction de transfert en boucle fermée avec une entrée en échelon unitaire $E(p) = \frac{1}{p}$ donne la sortie suivante :

$$S(p) = \frac{6}{p(p^3 + 3p^2 + 2p + 6)} = \frac{6}{p(p + 3)(p^2 + 2)}$$

Par décomposition en éléments simples, on obtient la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{Cp+D}{p^2+2}$$

Après identification et calcul des coefficients ($A = 1$, $B = -\frac{2}{11}$, $C = -\frac{9}{11}$, $D = -\frac{6}{11}$), l'expression devient :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{p+3} - \frac{9}{11} \cdot \frac{p}{p^2+2} - \frac{3\sqrt{2}}{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{p^2+2}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, la réponse temporelle exacte du système est :

$$s(t) = \left[1 - \frac{2}{11}e^{-3t} - \frac{9}{11}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{3\sqrt{2}}{11}\sin(\sqrt{2}t)\right] u(t)$$

L'exponentielle décroissante (e^{-3t}) caractérisant le régime transitoire initial s'annule très rapidement. Le système étant à la **limite de la stabilité** (présence de pôles imaginaires purs $\pm j\sqrt{2}$), la réponse se transforme en **oscillations entretenues** (phénomène de pompage) autour de la valeur finale 1, avec une pulsation naturelle $\omega = \sqrt{2}$ rad/s.

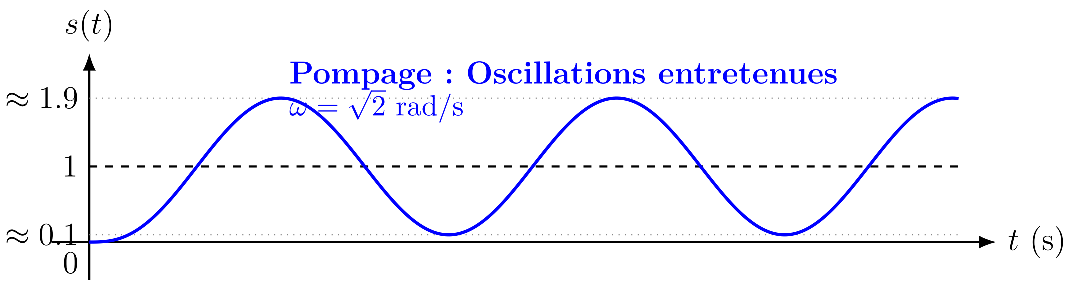
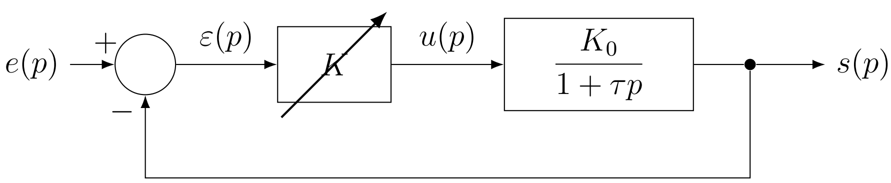


FIGURE 5.1 – Réponse indicielle du système à la limite de stabilité ($K = 6$).

5.4.3 Exercice 03

1. Expression de la fonction de transfert en boucle fermée



D'après le schéma fonctionnel, la fonction de transfert en boucle ouverte (chaîne directe) est :

$$FTBO(p) = K \cdot \frac{K_0}{1+\tau p} = \frac{KK_0}{1+\tau p}$$

Le système possède un retour unitaire négatif. La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit donc :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{\frac{KK_0}{1+\tau p}}{1+\frac{KK_0}{1+\tau p}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(1+\tau p)$:

$$FTBF(p) = \frac{KK_0}{1+\tau p+KK_0} = \frac{KK_0}{(1+KK_0)+\tau p}$$

Pour obtenir la forme canonique $G(p) = \frac{K'}{1+\tau' p}$, on divise le numérateur et le dénominateur par le terme constant du dénominateur, soit $(1+KK_0)$:

$$FTBF(p) = \frac{\frac{KK_0}{1+KK_0}}{1+\frac{\tau}{1+KK_0}p}$$

Par identification directe avec $G(p) = \frac{K'}{1+\tau' p}$, on déduit :

$$\boxed{K' = \frac{KK_0}{1+KK_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau' = \frac{\tau}{1+KK_0}}$$

Conclusion : Le système en boucle fermée reste un système du premier ordre. L'ajout du régulateur modifie sa dynamique :

— La constante de temps est divisée par $(1+KK_0)$, le système devient donc **plus rapide** ($\tau' < \tau$).

— Le gain statique est inférieur à 1 ($K' < 1$), ce qui implique que l'erreur statique de position n'est pas nulle (le système manque de précision).

2. Type du régulateur

Le bloc de commande est une simple constante mathématique K. Il s'agit donc d'un **Régulateur Proportionnel (Action P)**.

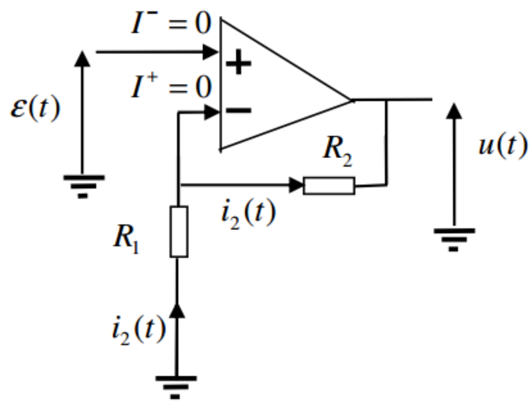
3. Réalisation électrique du régulateur

Un régulateur purement proportionnel ($u(t) = K \cdot \varepsilon(t)$ avec $K > 1$) peut être réalisé facilement à l'aide d'un amplificateur opérationnel (AOP) monté en **amplificateur non inverseur**. L'erreur $\varepsilon(t)$ est appliquée sur l'entrée non inverseuse. Le gain est défini par les résistances : $K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

3. Réalisation électrique du régulateur

Un régulateur purement proportionnel ($u(t) = K \cdot \varepsilon(t)$ avec $K > 0$) peut être réalisé électriquement de deux manières principales à l'aide d'amplificateurs opérationnels (AOP) :

- **Première méthode (Montage non inverseur) :** Le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est appliqué directement sur l'entrée non inverseuse d'un AOP. Le gain est défini par le pont diviseur dans la boucle de retour : $K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Cette solution est simple (un seul AOP) mais limite mathématiquement le réglage à un gain $K \geq 1$.
- **Seconde méthode (Montages inverseurs en cascade) :** Le signal traverse d'abord un amplificateur monté en inverseur, qui permet de régler l'amplitude souhaitée (gain de $-\frac{R_2}{R_1}$). Pour corriger l'inversion de phase (et éviter d'envoyer une commande négative au système), ce premier étage est obligatoirement suivi d'un second montage inverseur de gain unitaire. Ce deuxième AOP utilise deux résistances identiques (gain de $-\frac{R}{R} = -1$) dont le seul rôle est d'annuler le signe moins. Le gain global devient ainsi $K = \frac{R_2}{R_1}$, offrant l'avantage d'être réglable sur toute la plage des valeurs positives (y compris $0 < K < 1$).



!

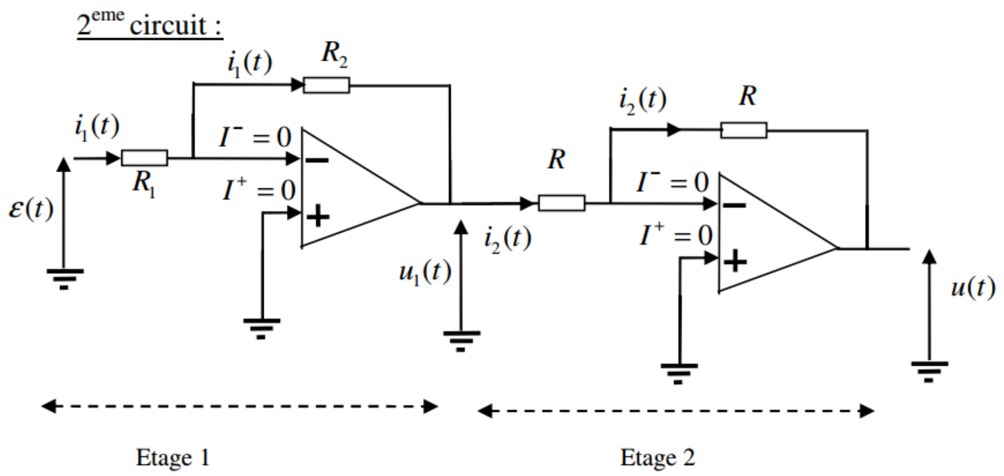
FIGURE 5.2 – Le premier circuit de réalisation du régulateur (P)

5.4.4 Exercice 04

Le système étudié est un premier ordre de fonction de transfert :

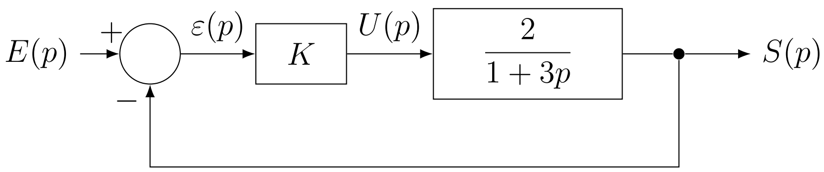
$$G(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{2}{1 + 3p}$$

L'entrée est un échelon de consigne d'amplitude $E_0 = 3$, soit dans le domaine de Laplace : $E(p) = \frac{3}{p}$.



!

FIGURE 5.3 – Le deuxième circuit de réalisation du régulateur (P)



1. Performances en boucle fermée sans régulateur $(K = 1)$

Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$FTBF(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{2}{1+3p}}{1+\frac{2}{1+3p}} = \frac{2}{1+3p+2} = \frac{2}{3+3p}$$

En divisant par 3 pour obtenir la forme canonique :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{2/3}{1+p}}$$

Analyse des performances :

- **Stabilité :** Le dénominateur est $1 + p = 0 \implies p = -1$. Le pôle est réel et strictement négatif, le système est donc **stable**.
- **Rapidité :** La constante de temps de la boucle fermée est $\tau_{BF} = 1$ s. Le temps de réponse à 95% est donc $t_{r95\%} \approx 3\tau_{BF} = \mathbf{3}$ s.
- **Précision (Erreur statique) :** L'erreur de position pour une entrée en échelon s'écrit $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K_{BO}}$, où K_{BO} est le gain statique de la boucle ouverte ($K_{BO} = 2$).

$$\varepsilon_p = \frac{3}{1+2} = \frac{3}{3} = \mathbf{1}$$

On peut vérifier via la valeur finale : $s(\infty) = E_0 \times K_{BF} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$. L'erreur est bien $3 - 2 = 1$.

2. Performances en boucle fermée avec régulateur $(K = 10)$

Le nouveau système en boucle ouverte intègre le gain : $G_{BO}(p) = K \cdot G(p) = \frac{20}{1+3p}$.
Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$FTBF(p) = \frac{\frac{20}{1+3p}}{1 + \frac{20}{1+3p}} = \frac{20}{1 + 3p + 20} = \frac{20}{21 + 3p}$$

En divisant par 21 pour obtenir la forme canonique :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{20/21}{1 + \frac{3}{21}p} = \frac{20/21}{1 + \frac{1}{7}p}}$$

Analyse des performances :

- **Stabilité :** Pôle en $p = -7$. Le système est **stable**.
- **Rapidité :** La nouvelle constante de temps est $\tau_{BF} = \frac{1}{7}$ s. Le temps de réponse à 95% devient $t_{r95\%} = \frac{3}{7} \approx \mathbf{0.43}$ s. L'ajout du gain a rendu le système beaucoup plus **rapide**.
- **Précision :** Le nouveau gain en boucle ouverte est $K_{BO} = 20$.

$$\varepsilon_p = \frac{3}{1 + 20} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \approx \mathbf{0.14}$$

Le système est devenu beaucoup plus **précis** (l'erreur statique a été divisée par 7).

3. Détermination du gain K pour une amélioration de 10% de l'erreur

L'erreur statique initiale (sans régulateur) était $\varepsilon_0 = 1$. Une amélioration de 10% de cette erreur signifie que l'on souhaite réduire cette erreur de 10%. La nouvelle erreur cible est donc :

$$\varepsilon_{cible} = \varepsilon_0 \times (1 - 0.10) = 1 \times 0.9 = 0.9$$

L'expression générale de l'erreur statique en fonction de K est :

$$\varepsilon_p(K) = \frac{E_0}{1 + K \cdot K_{sys}} = \frac{3}{1 + 2K}$$

On résout l'équation pour trouver K :

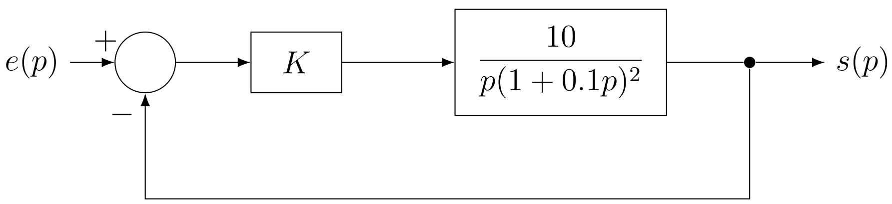
$$\frac{3}{1+2K} = 0.9$$

$$3 = 0.9(1+2K)$$
$$3 = 0.9 + 1.8K$$
$$2.1 = 1.8K$$
$$K = \frac{2.1}{1.8} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$$

Pour obtenir une amélioration de 10% de l'erreur statique, il faut régler le gain proportionnel à :

$$\boxed{K = \frac{7}{6} \approx 1.167}$$

5.4.5 Exercice 05



1) Gain statique en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est exprimée par :

$$G_0(p) = \frac{K_s N(p)}{p^\alpha D(p)} = \frac{10K}{p(1+0.1p)^2}$$

Avec $N(p) = 1$ et $D(p) = (1+0.1p)^2$
On a bien $N(0) = D(0) = 1$.
Donc :
Le gain statique en boucle ouverte (ou gain de vitesse) est :

$$\boxed{K_s = 10K}$$

2) Classe du système

Le dénominateur de la FTBO possède le terme p en facteur isolé (à la puissance $\alpha = 1$). Il y a donc un intégrateur pur dans la chaîne d'action directe. Le système est de **classe 1**.

3) Stabilité en boucle fermée (Critère de Routh)

Pour étudier la stabilité, on détermine l'équation caractéristique en boucle fermée :

$$1 + G_0(p) = 0 \implies 1 + \frac{10K}{p(1+0.1p)^2} = 0$$

En multipliant par le dénominateur $p(1+0.1p)^2$:

$$p(1+0.1p)^2 + 10K = 0$$

Développons le polynôme :

$$p(1+0.2p+0.01p^2) + 10K = 0 \implies 0.01p^3 + 0.2p^2 + p + 10K = 0$$

Dressons le tableau de Routh pour ce polynôme du troisième ordre :

p^3	0.01	1
p^2	0.2	$10K$
p^1	$\frac{0.2\times1-0.01\times10K}{0.2} = \frac{0.2-0.1K}{0.2} = 1-0.5K$	0
p^0	$10K$	

L'énoncé précise que le gain K est positif ($K > 0$). Pour garantir la stabilité, tous les termes de la première colonne doivent être positifs :

$$1 - 0.5K > 0 \implies 1 > 0.5K \implies K < \frac{1}{0.5} \implies K < 2$$

Le système est donc stable en boucle fermée **uniquement si** : $\boxed{0 < K < 2}$.

4) Erreurs statiques

D'après le tableau récapitulatif du cours, pour un système de **classe 1** :

– **Erreur de position** (entrée échelon) : L'intégrateur pur annule l'erreur.

$$\boxed{\varepsilon_{sp} = 0}$$

– **Erreur de vitesse** (entrée rampe) :

$$\boxed{\varepsilon_{sv} = \frac{E}{K_s} = \frac{1}{10K}}$$

– **Erreur d'accélération** (entrée parabolique) :

$$\boxed{\varepsilon_{sa} = \infty}$$

5) Calcul du gain K pour un cahier des charges donné

On souhaite satisfaire simultanément deux conditions :

— Une erreur de vitesse $\varepsilon_{sv} = 0.01$.

— Un système stable en boucle fermée.

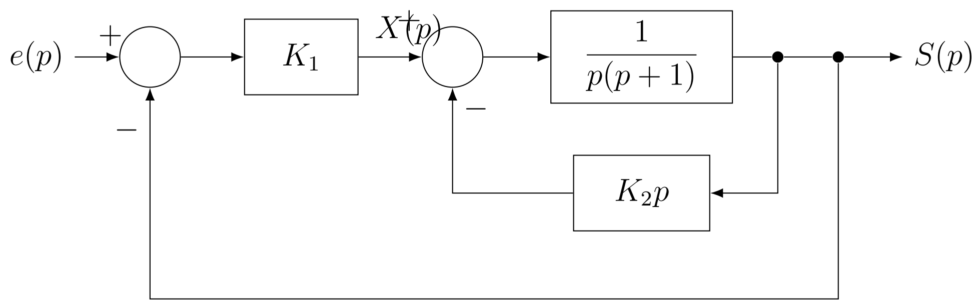
Calculons la valeur de K nécessaire pour obtenir la précision voulue :

$$\frac{1}{10K} = 0.01 \implies 10K = \frac{1}{0.01} = 100 \implies \mathbf{K = 10}$$

Vérification de la stabilité : Pour que l'erreur de vitesse soit de 0.01, il faut régler le gain à $K = 10$. Cependant, la condition de stabilité trouvée à la question 3 exige que $K < 2$. Puisque $10 \not< 2$, le réglage $K = 10$ rend le système **totalement instable**.

Conclusion : Non, il n'existe aucun gain K permettant de satisfaire simultanément ces deux performances avec un simple régulateur proportionnel. Une tentative d'améliorer la précision à ce point déstabiliserait le système. Pour résoudre ce problème, il faudrait utiliser un correcteur plus évolué (de type PI, PD ou PID).

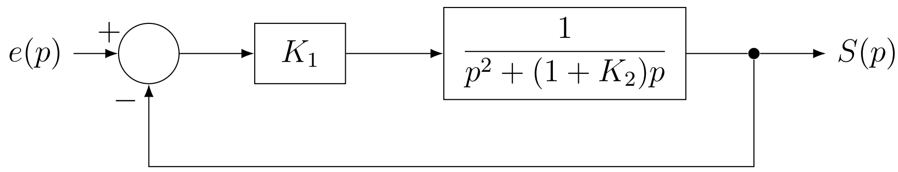
5.4.6 Exercice 06



1) Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

Pour déterminer la fonction de transfert globale, nous procédons par réduction de schémas blocs en commençant par la boucle interne (actionnée par le retour de la génératrice tachymétrique K_2p) :

$$G_{\text{int}}(p) = \frac{\frac{1}{p(p+1)}}{1 + \frac{1}{p(p+1)} \cdot K_2p} = \frac{1}{p(p+1) + K_2p} = \frac{1}{p^2 + p + K_2p} = \frac{1}{p^2 + (1 + K_2)p}$$



Le système global devient alors une boucle simple avec une chaîne directe composée du gain K_1 en cascade avec $G_{\text{int}}(p)$, et un retour unitaire négatif. La FTBF s'exprime ainsi :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_1 \cdot G_{\text{int}}(p)}{1 + K_1 \cdot G_{\text{int}}(p)} = \frac{\frac{K_1}{p^2+(1+K_2)p}}{1 + \frac{K_1}{p^2+(1+K_2)p}}$$

En simplifiant le dénominateur, nous obtenons la forme canonique d'un système du second ordre :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{K_1}{p^2 + (1+K_2)p + K_1}}$$

2) Calcul de K_1 et K_2 pour respecter le cahier des charges

Le cahier des charges impose un comportement équivalent à un second ordre de caractéristiques :

- Coefficient d'amortissement : $\zeta = 0.6$
- Pulsation propre : $\omega_0 = 10$ rad/s

Le dénominateur canonique d'un second ordre est sous la forme : $p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2$. Par identification directe avec le dénominateur de notre FTBF ($p^2+(1+K_2)p+K_1$) :

a) **Identification du terme constant :**

$$\omega_0^2 = K_1 \implies K_1 = 10^2 \implies \boxed{K_1 = 100}$$

b) **Identification du terme du premier degré :**

$$2\zeta\omega_0 = 1 + K_2 \implies 2 \times 0.6 \times 10 = 1 + K_2 \implies 12 = 1 + K_2 \implies \boxed{K_2 = 11}$$

3) Valeur du premier dépassement (D_1)

Pour une entrée en échelon unitaire, le premier dépassement en pourcentage ($D_1\%$) dépend uniquement du coefficient d'amortissement ζ. Il est donné par la formule classique :

$$D_1\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

En remplaçant $\zeta = 0.6$:

$$D_1\% = e^{-\frac{0.6\times\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}} \times 100\% = e^{-\frac{0.6\pi}{0.8}} \times 100\% = e^{-0.75\pi} \times 100\% \approx e^{-2.356} \times 100\% \approx 9.48\%$$

La valeur maximale atteinte par la sortie est donc :

$$\boxed{s_{\max} = 1 + 0.0948 = 1.0948}$$

4) Calcul du temps de réponse ($t_{r95\%}$)

Pour un coefficient d'amortissement de $\zeta = 0.6$, l'abaque des temps de réponse réduit indique que le produit $\omega_0 \cdot t_r \approx 3$. De manière plus rigoureuse, l'enveloppe exponentielle atteint la bande des $95 - 105\%$ lorsque :

$$t_{r\%} \approx \frac{3}{\zeta\omega_0} = \frac{3}{0.6 \times 10} = \frac{3}{6} = \boxed{0.5\ \text{s}}$$

5) Expression mathématique et tracé de la réponse indicielle

Pour une entrée en échelon unitaire $E(p) = \frac{1}{p}$, la sortie du système dans le domaine temporel est régie par l'équation d'un second ordre sous-amorti ($\zeta < 1$) :

$$s(t) = \left[1 - e^{-\zeta\omega_0 t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)\right] u(t)$$

Où la pulsation amortie (pseudo-fréquence) est : $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-0.36} = 8$ rad/s.

En remplaçant les valeurs numériques ($\zeta\omega_0 = 6$ et $\frac{0.6}{0.8} = 0.75$), on trouve l'expression temporelle exacte :

$$s(t) = 1 - e^{-6t}\cos(8t) - 0.75e^{-6t}\sin(8t)$$

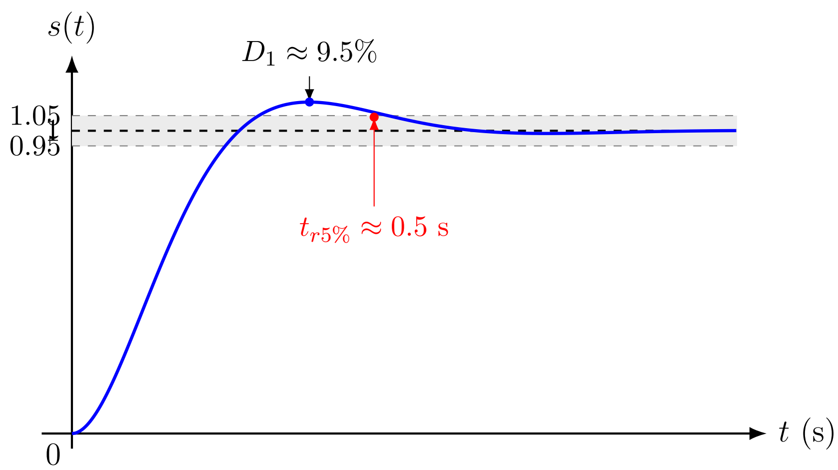


FIGURE 5.4 – Réponse indicielle du système régulé (zoom sur le régime transitoire).

5.5 Conclusion de la Série N°05

Cette ultime série de travaux dirigés vient couronner le module d'Asservissement et Régulation. Elle a permis de synthétiser l'ensemble des connaissances acquises en montrant concrètement comment les outils de modélisation (Laplace, schémas-blocs) et d'analyse (stabilité de Routh) servent l'objectif final : la conception de régulateurs. L'étudiant est désormais capable de comprendre les compromis fondamentaux de l'automatique (un gain trop élevé annule l'erreur statique mais dégrade la stabilité) et de dimensionner des correcteurs (proportionnels, retours tachymétriques) permettant d'imposer mathématiquement au système physique les performances dynamiques exigées par un cahier des charges industriel.

Les limitations matérielles et mathématiques du simple correcteur proportionnel justifient le recours à des algorithmes de commande plus complets. Le prochaine séries aborderont notamment l'action **Intégrale (I)** pour annuler définitivement l'erreur statique, et l'action **Dérivée (D)** pour anticiper les variations, formant ainsi les célèbres régulateurs **PID**.

Chapitre 6

Série TD 6 : Les Régulateurs P et PI

6.1 Introduction à la Série

Après avoir étudié l'évaluation des performances des systèmes asservis (précision, rapidité, stabilité) lors de la série précédente, cette sixième série est consacrée à la **synthèse des lois de commande**.

L'objectif est d'apprendre à concevoir et à régler des régulateurs industriels standards pour forcer un système à respecter un cahier des charges rigoureux. Nous nous focaliserons sur les deux structures de contrôle fondamentales : l'action **Proportionnelle (P)** et l'action **Proportionnelle-Intégrale (PI)**. Vous y découvrirez comment la structure du correcteur modifie la classe du système pour améliorer la précision, et comment la méthode de compensation de pôle permet de maîtriser la dynamique transitoire.

6.2 Énoncé de la série

Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté de Technologie – Département d'Électronique

Niveau : 3ème Année Licence Électronique
Module : Asservissement et Régulation

TD N°06 : Systèmes asservis

Exercice 1 : Asservissement par régulateur Proportionnel (P)

1) Donner un circuit de réalisation (à l'aide d'amplificateurs opérationnels) d'un régulateur proportionnel de gain $K = 0.5$.

2) Soit un processus du premier ordre décrit par la fonction de transfert suivante :

$$\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{10}{2p+1}$$

   a) Calculer et tracer sa réponse pour une entrée échelon unitaire.
   b) Calculer le temps de réponse.

3) On veut asservir ce système par un régulateur proportionnel de gain variable (K_0).
   a) Donner le schéma fonctionnel du système asservi.
   b) Calculer la fonction de transfert en boucle fermée. Étudier la stabilité en boucle fermée en fonction de K_0. Quel est l'ordre du système en boucle fermée ?
   c) Calculer le temps de réponse en boucle fermée en fonction de K_0.
   d) Calculer la valeur de K_0 pour que le temps de réponse en boucle fermée s'améliore de 50% par rapport à celui de la boucle ouverte.
   e) Pour une consigne sous forme d'échelon unitaire, calculer l'erreur statique de position pour la valeur de K_0 calculée en (d).
   f) Calculer et tracer la réponse en boucle fermée pour cette valeur de K_0.
   g) Calculer la valeur statique de la commande (U_s) en régime permanent.

Exercice 2 : Asservissement par régulateur Proportionnel Intégral (PI)

1) Donner un circuit de réalisation (à base d'amplificateurs opérationnels) d'un régulateur PI défini par :

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$$

2) Soit un processus du premier ordre décrit par :

$$\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{10}{2p+1}$$

   a) Calculer et tracer sa réponse pour une entrée échelon unitaire.
   b) Calculer le temps de réponse.

3) On veut asservir ce système par le régulateur PI.

   a- Donner le schéma fonctionnel du système asservi.

   b- En utilisant la méthode de placement des pôles en boucle fermée, on veut améliorer le temps de réponse de 30% par rapport à celui de la boucle ouverte. Calculer T_i et K.

   c- Donner la fonction de transfert en boucle fermée. Quel est l'ordre du système en boucle fermée ? Pour T_i positif, déduire les valeurs de K pour que le système soit stable en boucle fermée en utilisant le critère de Routh.

   d- Pour une consigne sous forme d'échelon unitaire, calculer l'erreur statique de position. Est-ce que le système asservi est précis ? Quelle est la valeur statique (en régime permanent) de la commande $u(t)$?

   e- Calculer et tracer la réponse en boucle fermée.

   f- Conclusion.

6.3 Rappels de Cours : les régulateurs P et PI

Un régulateur (ou correcteur) est inséré dans la chaîne d'action directe d'une boucle d'asservissement pour modifier le signal d'erreur $\varepsilon(p)$ et générer un signal de commande optimisé $U(p)$. Sa fonction de transfert est notée $C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$.

6.3.1 Le Régulateur Proportionnel (Action P)

Le signal de commande est directement proportionnel au signal d'erreur : $u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t)$. Sa fonction de transfert est un gain pur :

$$C(p) = K_p$$

Effets sur les performances :

- **Rapidité :** Il diminue la constante de temps du système en boucle fermée, rendant le système plus rapide.
- **Précision :** Il diminue l'erreur statique (l'erreur est divisée par un facteur lié à K_p), mais ne peut pas l'annuler complètement pour un système de classe 0.
- **Stabilité :** Un gain K_p trop élevé risque de dégrader la marge de phase, d'amplifier les dépassements transitoires, voire d'entraîner l'instabilité du système.

6.3.2 Le Régulateur Proportionnel-Intégral (Action PI)

Pour annuler complètement l'erreur statique, on ajoute une action qui intègre l'erreur au cours du temps. La structure standard associe un gain proportionnel K_p (souvent noté K) et une constante de temps d'intégration T_i. La fonction de transfert globale s'écrit :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p}\right)$$

Effets sur les performances :

- **Précision :** La présence du pôle à l'origine ($p = 0$) au dénominateur du correcteur **augmente la classe du système de 1**. Cela garantit une erreur statique de position strictement nulle face à une consigne en échelon.
- **Stabilité et Transitoire :** L'action intégrale a tendance à déstabiliser le système (elle introduit un retard de phase). Le paramètre T_i doit donc être calculé avec soin pour conserver un bon amortissement.

6.3.3 Réglage par compensation de pôle dominant

Pour régler facilement un correcteur PI associé à un processus du premier ordre de fonction de transfert $G(p) = \frac{K_s}{1+\tau p}$, on utilise souvent la méthode du placement de pôles par compensation.

Le principe consiste à régler la constante de temps d'intégration T_i du régulateur pour qu'elle annule exactement la constante de temps τ du processus :

$T_i = \tau \implies$ Le zéro du correcteur $(1 + T_i p)$ compense le pôle du système $(1 + \tau p)$.

La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) est alors considérablement simplifiée et se réduit à un pur intégrateur :

$$FTBO(p) = \left[K_p\left(\frac{1+\tau p}{\tau p}\right)\right] \times \left[\frac{K_s}{1+\tau p}\right] = \frac{K_p K_s}{\tau p}$$

Le système en boucle fermée redevient ainsi un premier ordre parfaitement maîtrisé, dont la rapidité se règle uniquement via le gain proportionnel K_p.

6.4 Solution de la Série de TD N°06

6.4.1 Exercice 1 : Régulateur Proportionnel (P)

1) Circuit de réalisation du régulateur ($K = 0.5$)

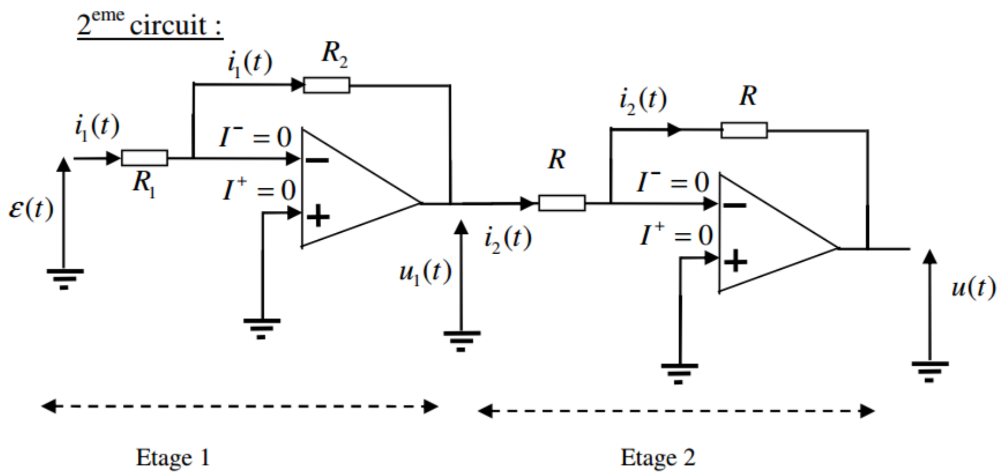
Le gain souhaité étant strictement inférieur à l'unité ($K < 1$), un montage amplificateur non inverseur classique ne peut pas être utilisé (son gain minimal étant de 1). Nous réalisons ce correcteur à l'aide de **deux amplificateurs opérationnels inverseurs en cascade** :

— Le premier étage assure l'atténuation requise : $\text{Gain}_1 = -\frac{R_2}{R_1} = -0.5$.

— Le second étage inverse le signe pour restituer la phase correcte : $\text{Gain}_2 = -\frac{R}{R} = -1$.

En choisissant par exemple $R_1 = 20\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$ et $R = 10\,\text{k}\Omega$, on obtient bien :

$$K = \left(-\frac{10}{20}\right) \times \left(-\frac{10}{10}\right) = 0.5$$



!

FIGURE 6.1 – Circuit de réalisation du régulateur (P) de gain K=0.5 $R_1 = 20\,\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\mathrm{k}\Omega$ et $R = 10\,\mathrm{k}\Omega$,

2) Étude du processus en boucle ouverte

Le processus est défini par la fonction de transfert du premier ordre : $G(p) = \frac{10}{2p+1}$, de gain statique $K_s = 10$ et de constante de temps $\tau = 2$ s.

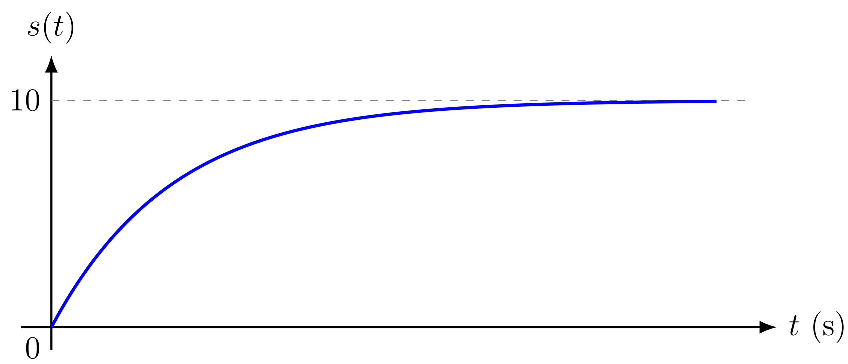
a) Calcul et tracé de la réponse à un échelon unitaire :

Pour une entrée $U(p) = \frac{1}{p}$, la sortie s'écrit :

$$S(p) = \frac{10}{p(2p+1)} = \frac{10}{p} - \frac{10}{p+0.5}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient l'expression temporelle :

$$\boxed{s(t) = 10\left(1 - e^{-0.5t}\right)u(t)}$$



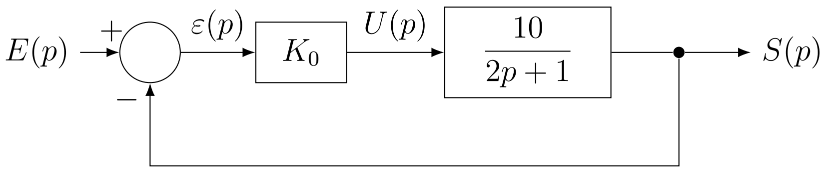
b) Temps de réponse :

Le temps de réponse d'un système du premier ordre vaut classiquement 3τ :

$$\boxed{t_{rBO} = 3 \times 2 = 6 \text{ s}}$$

3) Asservissement du système par un gain variable K_0

a) Schéma fonctionnel :



b) Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) et stabilité :

$$FTBF(p) = \frac{K_0G(p)}{1 + K_0G(p)} = \frac{\frac{10K_0}{2p+1}}{1 + \frac{10K_0}{2p+1}} = \frac{10K_0}{2p + 1 + 10K_0}$$

En mettant sous la forme canonique :

$$\boxed{FTBF(p) = \frac{\frac{10K_0}{1+10K_0}}{1 + \frac{2}{1+10K_0}p}}$$

- **Ordre du système :** Le dénominateur est de degré 1, le système reste donc d'**ordre 1**.
- **Stabilité :** Le pôle du système est $p = -\frac{1+10K_0}{2}$. Le système est stable si ce pôle est strictement négatif, soit $1 + 10K_0 > 0 \implies \boxed{K_0 > -0.1}$.

c) Temps de réponse en boucle fermée : La nouvelle constante de temps est $\tau_{BF} = \frac{2}{1+10K_0}$. Le temps de réponse s'exprime par :

$$\boxed{t_{rBF} = 3\tau_{BF} = \frac{6}{1 + 10K_0}}$$

d) Valeur de K_0 pour une amélioration de 50% de la rapidité : Une amélioration de 50% implique de diviser par deux le temps de réponse initial :

$$t_{rBF} = t_{rBO} \times (1 - 0.50) = 6 \times 0.5 = 3 \text{ s}$$

On résout l'équation suivante :

$$\frac{6}{1 + 10K_0} = 3 \implies 1 + 10K_0 = 2 \implies 10K_0 = 1 \implies \boxed{K_0 = 0.1}$$

e) Analyse des performances pour $K_0 = 0.1$:

- **Erreur statique de position :** L'entrée étant un échelon unitaire ($E_0 = 1$), l'erreur de position vaut :

$$\boxed{\varepsilon_{sp} = \frac{1}{1 + K_{BO}} = \frac{1}{1 + 10K_0} = \frac{1}{1 + 10(0.1)} = 0.5}$$

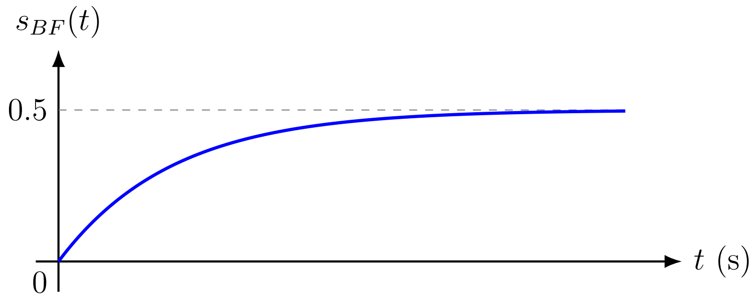
— **Réponse temporelle en boucle fermée :** En remplaçant $K_0 = 0.1$ dans la FTBF, le gain devient $K_{BF} = 0.5$ et $\tau_{BF} = 1$ s. Pour une entrée échelon unitaire :

$$\boxed{s_{BF}(t) = 0.5\left(1 - e^{-t}\right) u(t)}$$

— **Valeur statique de la commande (U_s) en régime permanent :**

$$U_s = \lim_{t\to\infty} u(t) = K_0 \cdot \varepsilon_{sp} = 0.1 \times 0.5 = \boxed{0.05}$$

Vérification : En régime permanent, le gain du processus est de 10, d'où $s(\infty) = 10 \times U_s \implies 0.5 = 10 \times 0.05$ (Cohérent).



6.4.2 Exercice 2 : Régulateur Proportionnel Intégral(PI)

1) Circuit de réalisation d'un régulateur PI

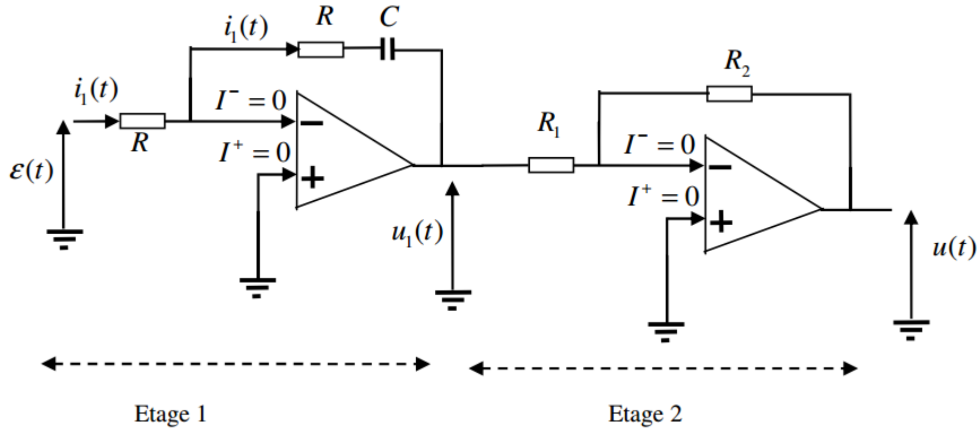
Un régulateur PI de fonction de transfert $C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ est structuré autour d'un premier AOP comportant un groupement série R-C dans sa boucle de contre-réaction, suivi d'un second bloc AOP monté en inverseur unitaire pour éliminer le signe moins.

Par identification électrique, les paramètres du régulateur sont régis par :

$$\boxed{K = \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_i = RC}$$

2) Étude du processus en boucle ouverte

Les résultats de la réponse temporelle et du temps de réponse sont identiques à ceux de la section 2 de l'Exercice 1 ($s(t) = 10(1 - e^{-0.5t})$ et $t_{rBO} = 6$ s).

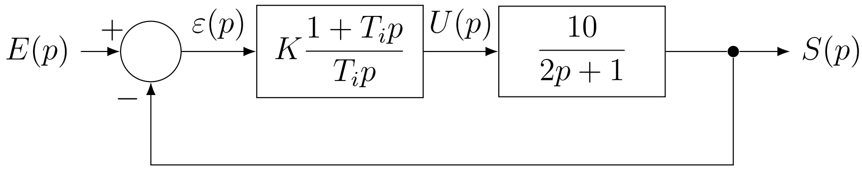


!

FIGURE 6.2 – Circuit de réalisation d' un régulateur (PI)

3) Asservissement du système par le régulateur PI

a) Schéma fonctionnel du système asservi :



b) Calcul de T_i et K par la méthode de placement des pôles (compensation) :

La méthode de compensation consiste à choisir le zéro du régulateur pour annuler le pôle dominant du processus. Le pôle du processus étant lié à sa constante de temps $\tau = 2$ s, on pose :

$$\boxed{T_i = 2 \text{ s}}$$

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) se simplifie alors immédiatement :

$$G_{BO}(p) = C(p)G(p) = \left(K\frac{1+2p}{2p}\right)\left(\frac{10}{2p+1}\right) = \frac{10K}{2p} = \frac{5K}{p}$$

La FTBF résultante se réduit à un système du premier ordre de dynamique simplifiée :

$$FTBF(p) = \frac{\frac{5K}{p}}{1+\frac{5K}{p}} = \frac{5K}{p+5K} = \frac{1}{1+\frac{1}{5K}p}$$

La constante de temps en boucle fermée devient $\tau_{BF} = \frac{1}{5K}$. On exige une amélioration de 30% du temps de réponse par rapport à la boucle ouverte ($t_{rBO} = 6$ s) :

$$t_{rBF} = 6 \times (1 - 0.30) = 4.2 \text{ s}$$

Puisque le système compensé est d'ordre 1, $t_{rBF} = 3\tau_{BF} = \frac{3}{5K}$. Résolvons pour K :

$$\frac{3}{5K} = 4.2 \implies 5K = \frac{3}{4.2} = \frac{5}{7} \implies \boxed{K = \frac{1}{7} \approx 0.143}$$

c) FTBF générale, ordre et étude de stabilité par la méthode de Routh :
Sans appliquer la compensation de pôle, la FTBF générale du système s'écrit :

$$FTBF(p) = \frac{10K(1 + T_i p)}{2T_i p^2 + T_i(1 + 10K)p + 10K}$$

— **Ordre du système :** Le dénominateur est un polynôme du second degré, le système en boucle fermée est donc de classe 0 et d'**ordre 2**.

— **Stabilité (Tableau de Routh) :** L'équation caractéristique est $2T_i p^2 + T_i(1 + 10K)p + 10K = 0$.

$$\begin{array}{c|cc} p^2 & 2T_i & 10K \\ p^1 & T_i(1+10K) & 0 \\ p^0 & 10K & \end{array}$$

Pour $T_i > 0$, la condition nécessaire et suffisante de stabilité impose que tous les termes de la première colonne soient strictement positifs :

$$\begin{cases} T_i(1 + 10K) > 0 \implies 1 + 10K > 0 \implies K > -0.1 \\ 10K > 0 \implies K > 0 \end{cases}$$

En combinant les deux inégalités, le système est stable en boucle fermée pour tout $K > 0$.

d) Erreur statique de position et valeur permanente de la commande :

— **Précision :** La FTBO possède un intégrateur pur (p au dénominateur apporté par le pôle du correcteur PI). Le système est donc de **classe 1**. D'après la théorie des erreurs statiques, l'erreur de position pour un échelon est rigoureusement nulle :

$$\boxed{\varepsilon_{sp} = 0}$$

Le système asservi est donc **parfaitement précis**.

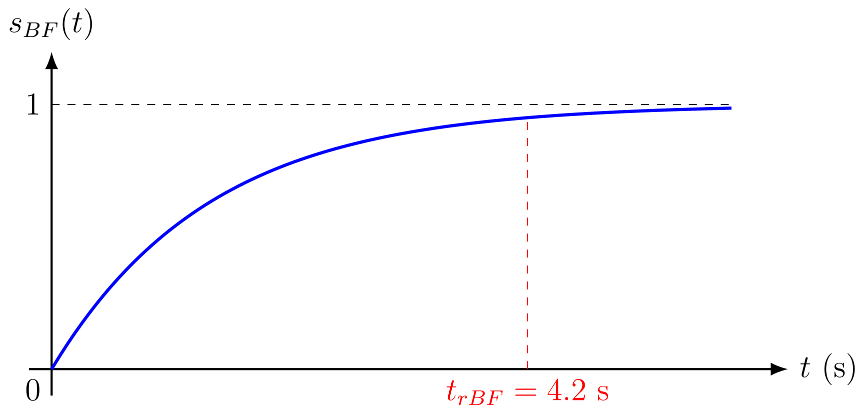
— **Valeur statique de la commande ($u(t)$) :** En régime permanent ($t \to \infty \implies p \to 0$), la sortie atteint parfaitement la consigne, soit $s(\infty) = 1$. Le processus étant régi par $S(\infty) = 10 \times u(\infty)$, on en déduit :

$$\boxed{u(\infty) = \frac{s(\infty)}{10} = \frac{1}{10} = 0.1}$$

e) Calcul et tracé de la réponse en boucle fermée :

Grâce à la méthode de placement des pôles, la FTBF simplifiée est $FTBF(p) = \frac{1}{1+1.4p}$. Pour une entrée en échelon unitaire, la réponse temporelle est un premier ordre pur :

$$\boxed{s_{BF}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{1.4}}\right) u(t)}$$



f) Conclusion

L'introduction de l'action **Intégrale (I)** a permis d'élever la classe du système à 1, ce qui a pour effet d'annuler totalement l'erreur statique de position, conférant au système une précision infinie en régime permanent face à une consigne constante.

Par ailleurs, l'utilisation conjointe de la méthode de **placement des pôles** a offert la possibilité de simplifier l'ordre global du système en boucle fermée (le ramenant de l'ordre 2 à un ordre 1 équivalent). Cela permet un réglage direct du gain K pour satisfaire l'exigence de rapidité fixée par le cahier des charges, tout en éliminant complètement les risques de dépassement ou d'oscillations transitoires.

6.5 Conclusion de la Série N°06

Au terme de cette sixième série, nous avons franchi une étape cruciale en automatique : le passage de l'évaluation des performances à la **synthèse des lois de commande**.

Les principaux enseignements à retenir de ces exercices sont les suivants :

- **La réalisation matérielle des mathématiques :** Un correcteur n'est pas qu'une simple fonction de transfert abstraite $C(p)$. Nous avons vu comment concrétiser physiquement ces algorithmes (actions P et PI) à l'aide de montages électroniques analogiques basés sur des amplificateurs opérationnels.

- **L'action Proportionnelle (P) et ses limites :** Si un simple gain permet d'accélérer le système et de réduire l'erreur, il s'avère structurellement insuffisant pour annuler totalement l'erreur statique face à une consigne constante sur un processus de classe 0.
- **La puissance de l'action Intégrale (I) :** L'ajout d'un intégrateur dans la structure du régulateur (PI) permet d'augmenter artificiellement la classe du système en boucle ouverte. Le bénéfice est immédiat : la garantie d'une précision absolue (erreur statique nulle) en régime permanent.
- **La méthode de compensation de pôle :** Cette technique élégante (où le zéro du régulateur annule le pôle dominant du processus) simplifie considérablement la dynamique en boucle fermée. Elle permet de calculer un gain précis pour atteindre exactement la rapidité exigée par le cahier des charges, tout en maîtrisant parfaitement la stabilité.

Conclusion Générale

Ce polycopié s'achève avec cette sixième série d'exercices. Il a été conçu pour accompagner les étudiants pas à pas, de manière progressive, dans l'assimilation des concepts fondamentaux des systèmes asservis continus linéaires.

Au fil de ce support, vous avez accompli le cheminement complet de l'ingénieur en automatique :

- **De la physique aux mathématiques :** Vous avez appris à traduire le comportement dynamique de systèmes réels en modèles mathématiques exploitables, en vous appuyant sur la puissance de la transformée de Laplace et le formalisme des fonctions de transfert.
- **De l'observation à l'analyse :** Vous avez acquis les outils nécessaires pour analyser des architectures complexes (schémas-blocs), prédire le comportement temporel d'un système, garantir sa sécurité de fonctionnement (critère de stabilité de Routh) et évaluer sa qualité globale (calcul des erreurs statiques et du temps de réponse).
- **De l'analyse à la conception :** L'aboutissement de ce module a été la synthèse de lois de commande. En dimensionnant des régulateurs Proportionnels (P) et Proportionnels-Intégraux (PI), vous êtes passés du statut d'observateur à celui de concepteur. Vous avez vu comment modifier structurellement un processus pour le forcer à respecter un cahier des charges exigeant, tout en gérant le compromis fondamental de l'automatique entre stabilité, rapidité et précision.

Les compétences acquises à travers ces travaux dirigés constituent le socle de la régulation industrielle classique. Cependant, l'évolution technologique permanente impose d'aller encore plus loin.

Si nous nous sommes concentrés ici sur des systèmes continus et des régulateurs analogiques, les architectures modernes reposent aujourd'hui sur des calculateurs embarqués. La suite naturelle de votre parcours consistera donc à transposer ces principes théoriques vers le domaine de la **commande numérique**. L'échantillonnage des signaux, la gestion des boucles de rétroaction par microprocesseur et l'implémentation d'algorithmes digitaux constitueront vos prochains défis pour maîtriser les systèmes de demain.

Nous espérons que ce document vous aura fourni une base de réflexion solide et intuitive, indispensable pour la suite de votre formation en ingénierie électronique.

Bibliographie

[1] Pr. M. Boutoubat, *« Polycopié de Cours : Systèmes Asservis Continus Linéaires »*, Département d'Électronique, Université Amar Telidji de Laghouat, destiné aux étudiants de 3ème année Licence Électronique.

[2] M. Rivoire, *« Cours d'automatique, Tome 1 : Signaux et systèmes »*, Edition Chihab.

[3] M. Rivoire, *« Cours d'automatique, Tome 2 : Asservissement-régulation-commande analogique »*, Edition Chihab.

[4] K. Ogata, *"Automatic Control Engineering"*, Prentice Hall, fifth edition, 2010.

[5] B.C. Kuo, *"Automatic Control Systems"*, Prentice Hall, ninth edition, 2009.

[6] J. Di Stefano, *« Systèmes asservis : cours et problèmes »*, McGraw Hill Edition.