

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOAT**  
**FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR**  
**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**



**MEMOIRE**

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de  
MAGISTER en Génie Mécanique  
Option : Energétique et environnement

**THEME**

***Analyse de stabilité globale en maillage curviligne pour  
un écoulement incompressible***

Par

BENZIANE Abdelkader

Soutenu le : 06 / 06 / 2013

Devant le jury :

Président	: Dr BENCHORMA Hadj Aissa	MC(A)	Université Amar Telidji Laghouat
Examineur	: Dr AOUISSI Mokhtar	MC(A)	Université Amar Telidji Laghouat
Examineur	: Dr BOUABDALLAH Saïd	MC(A)	Université Amar Telidji Laghouat
Encadreur	: Dr MEDJELLED Ahmed	MC(A)	Université Amar Telidji Laghouat

**-Année 2013-**

---

## ***DÉDICACES***

Je dédie ce modeste travail :

A la mémoire de mon père ,ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation .

A ma mère ,je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour .Puisse Dieu, le tout puissant , te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mes frères et ma sœur , et à toute ma famille.

A mes amis chacun par son nom.

---

# REMERCIEMENTS

Le remerciement infini avant tous est à dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'islam et de la Science.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **MEDJELLED Ahmed**, Maître de conférence à l'Université de Laghouat, encadreur de ce mémoire , pour son aide précieuse , sa confiance , ses encouragements , sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail .

Je tiens aussi à adresser ,mes vifs remerciements à Monsieur **BENHORMA Hadj Aissa** , Maître de Conférence à l'Université de Laghouat, qui ma fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire .

Mes remerciements vont également à Monsieur **AOUISSI Mokhtar** , Maître de conférence à l'Université de Laghouat, d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et d'être membre de jury .

Je remercie également Monsieur **BOUABDALLAH Saïd** , Maître de conférence à l'Université de Laghouat, pour avoir accepté d'examiner ce mémoire et prendre part à ce jury.

je n'oublie pas de remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation universitaire particulièrement la formation de poste de graduation .

En fin à tous ceux qui ont bien voulu m'aider, trouvent l'expression de mes vifs remerciements.

---

## Résumé

Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions et l'analyse de stabilité en écoulement incompressible.

Le principe de la méthode est exposé, ainsi que les différentes techniques utilisées. Parmi ces techniques on a choisi le modèle elliptique (équation de Poisson) qui est basé sur la résolution des équations aux dérivées partielles.

La méthode de génération de maillage est ensuite appliquée à un écoulement externe incompressible ainsi l'analyse de stabilité de schémas numérique SOR .

Pour effectuer la génération de maillage ainsi que la résolution des équations du problème physique étudié, on a élaboré deux codes de calcul ( GRID et FLOW) en langage C++.

En fin, des confrontations avec des résultats publiés dans la littérature ont permis de valider les résultats obtenus.

**Mots clés :** Méthodes numériques - Génération de maillage - Méthode des différences finies – Analyse de stabilité - Ecoulement potentiel incompressible.

## Abstract

This work was to make a study of the numerical method of two dimensional mesh generation and analysis of stability in incompressible flow.

The principle of the method is exposed, as well as the different techniques used. Among these techniques we have chosen the elliptical model (Poisson equation) which is based on the resolution of the partial differential equations.

Mesh generation method is then applied to an external flow incompressible thus the analysis of stability of numerical schemes SOR.

To perform the mesh generation and solving the equations of the studied physical problem, we developed two codes of computing (GRID and FLOW) in C++

At last, confrontations with published results in literature have permitted to validate the obtained results.

**Keywords:** Numerical methods - Grid generation -Finite differences method - Aerodynamics - Incompressible potential flow.

---

## ملخص

يهدف هذا العمل للقيام بدراسة حول الطرق الرقمية لإنشاء شبكة نقاط ثنائية الأبعاد و تحليل الاستقرار لتدفق غير قابل للانضغاط.

بعد عرض مبدأ الطريقة و كذا مختلف الطرق الرقمية المستعملة اخترنا طريقة بواسون التي تعتمد على حل المعادلات التفاضلية الجزئية .

بعد إنشاء شبكة النقاط ، نستعمل هذه الشبكة في حل معادلات تدفق خارجي غير قابل للانضغاط وكذا تحليل استقرار الطريقة الرقمية المستعملة .

لإنشاء شبكة النقاط و حل معادلات المسألة الفيزيائية المدروسة ، وضعنا برنامجين (Grid -Flow) في لغة C++

في الأخير ، و بالمقارنة مع نتائج أخرى منشورة ، تمكنا من تأكيد النتائج المتحصل عليها .

**الكلمات الرئيسية :** طرق رقمية – إنشاء شبكة نقاط – تحليل الاستقرار - تدفق غير قابل للانضغاط .

---

# SOMMAIRE

Dédicace.....	i
Remerciement.....	ii
Résumé.....	iii
Sommaire.....	v
Nomenclature.....	viii
Liste des figures .....	x
Liste des tableaux .....	xi

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
-----------------------------------	----------

## **Chapitre I : Génération de maillage**

I.1.Classification des techniques de génération de maillage .....	6
I.1.1.Transformations conforme .....	6
I.1.2.Méthodes algébriques.....	7
I.1.3.Méthodes numériques.....	7
I.2.Aspects physiques.....	9
I.2.1.Région simplement connexe.....	9
I.2.2.Région doublement (multi-) connexe.....	9
I.3.Transformation du domaine physique en domaine de calcul.....	9
I.3.1.Transformation des domaines simplement .....	10
I.3.2.Transformation des domaines doublements (multi-) connexes.....	13
I.3.2.1.Transformation des obstacles en sous régions.....	13
I.3.2.2.Transformation des obstacles en segments droits.....	13
I.3.2.3.Transformation des obstacles par coupure.....	13
I.4.Formulation et discrétisation des techniques de génération de maillage.....	16
I.4.1.Techniques algébriques.....	16
I.4.1.1.Fonction de condensation « Stretching » unidimensionnelles.....	16

---

I.4.1.2. Techniques de deux parois.....	17
I.4.1.3. Technique de Gilding.....	19
I.4.2. Génération de maillage par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles.....	22
I.4.2.1. Procédures de génération maillage elliptiques.....	23
I.4.2.1.1. Les équations de Poisson .....	25
I.4.2.1.2. Les équations de Laplace.....	27
I.4.2.2. Procédure de génération de maillage hyperbolique.....	28
I.4.2.3. Procédure de génération de maillage parabolique .....	28
I.4.3. Conditions aux limites.....	30

## **Chapitre II : Résolution numérique**

II.1. Formulation mathématique.....	32
II.1.1. Equations de poisson.....	32
II.1.2. Fonctions de contrôle.....	33
II.2. Traitement des conditions aux frontières.....	36
II.2.1. Répartition des points au contour du champ physique.....	36
II.2.2. Répartition des points au contour du champ transformé.....	36
II.3. Résolution numérique.....	39
II.3.1. Discrétisation des équations.....	39
II.3.2. Algorithme de résolution .....	40
II.3.3. Choix de maillage initial.....	41
II.3.4. Test de convergence .....	41
II.4. Présentation du code de génération de maillage « Grid » .....	41
II.4.1. Structure général .....	42
II.4.2. Principaux modules .....	42

## **Chapitre III : Simulation d'un écoulement incompressible**

III-1 Equations générales de base :.....	48
III-1-1 Equation de continuité.....	48
III-1-2 Equation de quantité de mouvement.....	48

III-1-3 Equation de l'énergie.....	49
III-2 Simulation d'un écoulement incompressible autour d'un profil d'aile.....	50
III-2-1 Hypothèses .....	50
III-2-2 Equations de l'écoulement .....	50
III-2-3 Transformation de domaine .....	52
III.2.4. Condition de Kutta-Joukowsky.....	53
III-2-5 Détermination de champ de vitesse.....	54
III-2-6 Détermination de coefficient de pression.....	54
III-3 Résolution numérique .....	56
III-3-1 Discrétisation de l'équation .....	56
III-3-2 Algorithme de résolution.....	57
III-3-3 Présentation de code Flow.....	58

## **Chapitre IV : Analyse des résultats**

IV.1. Génération de maillage.....	61
IV.1.1. Domaines d'étude .....	61
IV.1.1.1. Domaines simplement connexes .....	61
IV.1.1.2. Domaines doublement connexes .....	61
IV.1.1.3. Domaines multi-connexes .....	61
IV.1.2. Raffinement de maillage .....	68
IV.1.3. Répartition des lignes coordonnées .....	70
IV.2. Analyse de stabilité et convergence de schémas SOR .....	73
IV.2 .1 Effet de paramètre de relaxation .....	73
IV.2 .2 Effet de raffinement de maillage.....	75
IV .3 validation des Résultats .....	76
<b>Conclusion</b> .....	78
<b>Références bibliographiques</b> .....	80
<b>Annexes</b> .....	82

---

## NOMENCLATURE

- D** : Domaine physique.
- $\partial \mathbf{D}$  : Frontière du domaine physique.
- R** : Domaine computationnel (Domaine de calcul).
- $\partial \mathbf{R}$  : Frontière du domaine computationnel.
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  : Les coordonnées cartésiennes.
- $(\xi, \eta)$  : Les coordonnées curvilignes généralisées.
- $\xi^*, \eta^*$  : coordonnées normalisées.
- $\mathbf{P}(\xi, \eta)$  : Fonction de contrôle du maillage suivant  $\xi$ .
- $\mathbf{Q}(\xi, \eta)$  : Fonction de contrôle du maillage suivant  $\eta$ .
- J** : Le Jacobien.
- a1, b1** : Paramètres de la fonction de condensation « Stretching ».
- S** : Fonction de condensation « Stretching ».
- r** : Abscisse curviligne sur le profil.
- T1, T2** : Paramètres de contrôle du maillage orthogonal pour les méthodes algébriques.

$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \sigma \\ \tau \end{array} \right\}$  : Paramètres métriques liés au plan transformé.

$\omega_{opt}$  : Paramètre de relaxation optimal.

---

$C$	: Corde du profil.
$(i, j)$	: Repère lié à l'obstacle.
$(i1, j1)$	: Repère lié à la direction de la vitesse.
$u, v$	: Les composantes de la vitesse.
$C_p$	: Coefficient de pression..
$\theta$	: Angle d'incidence.
$V$	: Vitesse locale de l'écoulement du fluide.
$V_\infty$	: Vitesse de l'écoulement non perturbé (à l'infini).
$V_t$	: Vitesse tangentielle.
$V_n$	: Vitesse normale.
$p_\infty$	: Pression à l'infini (écoulement non perturbé).
$\rho$	: Masse volumique.
$\vec{F}$	: La force aérodynamique résultante.
$\Psi$	: Fonction de courant.
$\vec{n}$	: Le vecteur unitaire normal à la frontière de l'obstacle.
$\vec{\tau}$	: Le vecteur unitaire tangentiel à la frontière de l'obstacle.

---

## Liste des figures

<b>Figure(I.1):</b> Transformation d'un domaine simplement connexe délimité par quatre courbes en un simple rectangle dans le champ de calcul.....	10
<b>Figure(I.2) :</b> Transformation d'un domaine simplement connexe en forme .. de L en un domaine régulier possédant la même forme en L.....	10
<b>Figure(I.3) :</b> Transformation d'un domaine physique en forme de L en un rectangle monobloc .....	11
<b>Figure(I.4) :</b> Transformation par aplatissement de l'obstacle.....	11
<b>Figure(I.5) :</b> Transformation de l'obstacle en un plaque.....	12
<b>Figure(I.6) :</b> Transformation par aplatissement de l'obstacle avec une bonne résolution.....	12
<b>Figure(I.7) :</b> Transformation de l'obstacle en sous-région .....	13
<b>Figure(I.8) :</b> Transformation de l'obstacle en un segment de droite.....	14
<b>Figure(I.9) :</b> Transformation du domaine physique par coupure.....	15
(Configuration type C)	
<b>Figure(I.10):</b> Transformation du domaine physique par coupure.....	15
(Configuration type O).	
<b>Figure(I.11) :</b> Canal bidimensionnel curviligne.....	17
<b>Figure(I.12) :</b> Transformation du domaine physique en un .....	19
domaine rectangulaire par la technique de Gilding.	
<b>Figure(II.1) :</b> Attraction et répulsion des lignes coordonnées.....	34
<b>Figure(II.2) :</b> Transformation d'un domaine doublement connexe.....	37
<b>Figure(II.3) :</b> Transformation d'un domaine multi- connexe.....	38
<b>Figure(III.1) :</b> Le champ physique et le champ transformé.....	52
<b>Figure (IV.1) :</b> Maillage d'un domaine simplement connexe (écoulement dans une tuyère).....	62
<b>Figure (IV.2) :</b> Maillage d'un domaine simplement connexe(écoulement dans une conduite).....	62

---

<b>Figure (IV.3) :</b> Maillage autour d'un cylindre.....	63
<b>Figure (IV.4) :</b> Maillage autour d'un profil NACA0012 (avec une frontière externe de type « O »).....	64
<b>Figure (IV.5) :</b> Maillage autour d'un profil NACA0012(avec une frontière externe de type « C »).....	65
<b>Figure (IV.6) :</b> Maillage autour d'un profil NACA4412.....	66
<b>Figure (IV.7) :</b> Maillage autour de deux profils d'ailes.....	69
<b>Figure (IV.8) :</b> Maillage autour de deux cylindres.....	68
<b>Figure (IV.9) :</b> Raffinement de maillage.....	69
<b>Figure (IV.10)</b> condensation des lignes coordonnées sur le parois d'une tuyère .....	71
<b>Figure(IV.11)</b> condensation des lignes coordonnées à la sortie d'une tuyère.....	72
<b>Figure (IV.12)</b> Influence de paramètre de relaxation a la convergence de schémas SOR .....	74
<b>Figure (IV.13)</b> Influence de raffinement de maillage a la convergence de schémas SOR .....	75
<b>Figure (IV.14)</b> Evolution de coefficient de pression sur le profil NACA0012 ( $\alpha = 0$ ).....	76

### Liste des tableaux

<b>Tableau IV- 1</b> : Valeur des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (IV-10).....	71
<b>Tableau IV-2</b> : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (IV-11-).....	72
<b>Tableau IV-3</b> : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation ,pour la figure (IV-4) . L'erreur $e = 0.00001$ .....	73
<b>Tableau IV-4</b> : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation, pour la figure (IV-4). L'erreur $e = 0.0001$ .....	73

# Introduction générale

## **Introduction :**

L'utilisation des méthodes numériques dans les études de mécanique de fluide sert à fournir un moyen rapide et bon marché de simuler les écoulements des fluides ainsi qu'à mettre au point des outils complémentaires aux données obtenues dans les tunnels aérodynamiques. Les méthodes numériques mènent aussi à des modèles hybrides (théorie-expérience) qui favorisent la compréhension de phénomènes très complexes comme la turbulence et le décrochage dynamique. La simulation numérique, qui est en relation directe avec la physique (problèmes posés par la turbulence et le transfert de chaleur), les mathématiques (développement d'algorithmes toujours plus efficaces) et l'informatique (développement de langages, de compilateurs et d'ordinateurs toujours plus puissants), représente un moyen de recherche courant dans le domaine de mécanique de fluide et de transfert de chaleur. On reconnaît aujourd'hui la simulation numérique comme un moyen de conception efficace et indispensable à l'élargissement du champ d'application de mécanique de fluide. Dans la phase de conception d'un nouveau design d'avion, par exemple, la simulation numérique donne l'occasion :

- de simuler des phénomènes physiques complexes ;
- d'étudier les interactions de plusieurs disciplines (thermodynamique, aéroélasticité, etc.) ;
- d'améliorer les modèles théoriques en passant des fluides parfaits (équation d'Euler) aux fluides réels (équations de Navier-Stokes) ;
- de mieux optimiser l'appareil en tenant compte d'un plus grand nombre de paramètres, donc en se rapprochant de plus en plus de l'écoulement réel ;
- de raccourcir la durée de mise au point du prototype finale.

Parmi les méthodes numériques les plus utilisées la méthode de génération de maillage qui fait l'objet du présent travail.

La génération automatique de maillage s'est développée ces dernières années en une théorie à part. Elle a connu un progrès considérable dans le domaine de génération des systèmes de coordonnées résolus numériquement. Une grande variété de ces systèmes a été présentée dans la littérature. L'application des maillages obtenus a été généralisée à différents domaines d'écoulements externes et internes des fluides.

**Etude bibliographique :**

Une des premières étapes dans le calcul d'une solution numérique pour les équations qui décrivent un processus physique est la génération de maillage. Le domaine physique doit être recouvert d'un maillage, afin que les volumes discrets ou éléments sont identifiés. Un maillage bien structuré améliore considérablement la qualité de la solution, et inversement, un maillage mal structuré est un contributeur majeur aux mauvais résultats. Par exemple, le manque de stabilité ou de convergence au niveau désiré est souvent un résultat de maillage de mauvaise qualité.

La Génération de maillage structurée peut être considérée comme étant composée de trois catégories :

- méthodes de variable complexe.
- méthodes algébriques.
- technique des équations différentielles.

Les méthodes de variable complexe ont l'avantage que les transformations utilisées sont analytiques ou partiellement analytiques, par opposition aux méthodes qui sont entièrement numériques. Malheureusement, elles se limitent à deux dimensions. Pour plus de détails des méthodes de variable complexe, les recherches de **Churchill 1948**, **Moretti 1979** et **Ives 1982** devraient être consultées.

**Smith et Weigel 1980** a développé une méthode souple pour fournir directement un maillage en utilisant une interpolation entre des surfaces. Dans cette méthode le domaine est défini par une frontière supérieure et une frontière inférieure dans le plan physique. Dans la plupart des problèmes, les frontières ne sont pas des fonctions analytiques mais simplement prescrites comme un ensemble de points. Dans ce cas, la frontière doit être rapprochée par une procédure d'employer des maillages algébriques.

**Gordon et Hall 1973** décrivent l'interpolation transfinie, et **Rizzi et Eriksson 1981** a développé un maillage conforme aux limites avec l'interpolation algébrique. Cette interpolation correspondra à l'ensemble des points donnés nécessaires à un domaine fixe. Dans ce cas, il est possible de contrôler l'orthogonalité du maillage aux frontières, plus de détails peuvent être trouvés dans le travail de **Chawner et Anderson 1991**.

L'une des procédures les plus fréquemment utilisées et les plus développées est la méthode des équations différentielles. Si une équation différentielle partielle est utilisée pour générer un

maillage, On peut exploiter les propriétés de la solution de l'équation génératrice de maillage dans la production de la maille. Les équations aux dérivées partielles elliptiques ont la propriété que les solutions sont généralement très lisse, et pour cette raison, l'équation de Laplace est un bon choix.

Cette idée d'utiliser des équations différentielles elliptiques est basée sur les travaux de **Crowley 1962 et Winslow 1966** transforme le domaine physique dans le plan de calcul. où la mise en correspondance est contrôlé par une équation de Poisson. **Thompson et al 1974** ont beaucoup travaillé sur l'utilisation des équations elliptiques pour générer des maillages.

D'autres techniques pour le contrôle des espaces intérieurs points de maillage avec le contrôle de l'orthogonalité aux frontières ont été développées. **Sorenson et Steger 1983** et **Hilgenstock 1988** ont présenté des méthodes pour le contrôle de l'orthogonalité aux frontières et de l'espacement de l'intervalle de premier maillage à l'intérieur.

La Construction générale des maillages orthogonales en utilisant des méthodes elliptiques est également d'un grand intérêt, surtout si l'espacement maillage est également contrôlée. Cela peut être accompli dans les problèmes 2D, et les travaux de **Eiseman 1982** ,**Arina 1986** et **Anderson 1991** sont recommandés à lire.

De nombreux autres chercheurs ont contribué à l'état de l'art dans la génération de maillage elliptique, et le lecteur intéressé est invité à consulter les publications de nombreuses conférences sur la génération de maillage de **Thompson 1996**

**Sorenson et Steger 1980** décrit un procédé utilisant un système d'équations hyperboliques pour générer un maillage.

Comme c'était le cas pour les générateurs de maillage hyperboliques, les générateurs paraboliques devraient être utiles .**Nakamura 1982** et **Edwards 1985** ont développé les idées de base utilisés dans la génération de maillage parabolique, et ces techniques fournissent une autre moyen de génération de maillage acceptables.

**Hodge et al 1987** a donné quelques conseils dans le choix des termes sources dans l'équation de Poisson pour la génération de maillage parabolique.

La Génération de maillage parabolique a l'avantage de ne pas produire des chocs de maillage qu'il est possible dans le cas hyperbolique.

Comme pour toute méthode, il ya des avantages et des inconvénients. Toutefois, si une familiarité suffisante avec ces techniques est acquise par l'expérience, la génération de maillage parabolique peut être très efficace.

**Objectifs de travail :**

Notre travail présente les différentes techniques de génération de maillage curviligne quadrilatère en deux dimensions, et l'application de cette méthode à un écoulement incompressible ainsi l'analyse de stabilité et de convergence de schémas numérique utilisé.

**Plan de l'étude :**

Les différentes méthodes de génération de maillage sont présentées dans le chapitre 1. La formulation mathématique et la résolution numérique de la méthode choisie pour générer le maillage ainsi le code de génération de maillage sont présentées dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous présentons l'application de cette méthode à un écoulement incompressible autour d'un profil d'aile. En fin, des résultats de génération de maillage et de son application ainsi l'analyse de stabilité sont présentés dans le chapitre 4.

Chapitre I

# Génération de Maillage

**Introduction :**

La génération automatique de maillage consiste à générer un système de coordonnées curvilignes qui détermine le champ de calcul dans lequel seront exprimées toutes les équations du problème physique. Ce champ est un rectangle monobloc ou multi blocs obtenu par transformation du domaine physique. De nombreux développements des techniques de génération de maillage ont été effectués notamment en ce qui concerne les problèmes à deux dimensions pour des résolutions numériques utilisant soit les éléments finies soit les volumes finies ou les différences finies.

Les différentes méthodes de la génération de maillage diffèrent les unes des autres par les propriétés que vérifient les maillages générés par les modèles mathématiques correspondants. Il est alors nécessaire, avant tout choix de l'une de ces méthodes, de connaître les propriétés optimales que doit vérifier le maillage. Ces propriétés sont :

- bonne régularité du maillage (lissage) ;
- adaptation du maillage aux conditions aux frontières ;
- adaptation du maillage aux propriétés des différentes régions du domaine physique (les régions à forts gradients) ;
- orthogonalité.

Vu la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage qui existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application dans les domaines de mécanique des fluides et de transfert de chaleur. Ces travaux sont basés essentiellement sur les méthodes des différences finies.

Les approches les plus populaires pour la résolution du problème de valeur limite et la génération des points intérieures, sont les suivantes :

- approche utilisant les transformations conformes par interpolation linéaire des nœuds internes ;
- approche par interpolations linéaires des nœuds internes ;
- approche par résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles.

## I.1. Classification des techniques de génération de maillages :

### I.1.1. Transformations conformes :

Les approches les plus classiques dans la génération des maillages sont les transformations conformes. Elles utilisent les fonctions élémentaires dans le plan complexe. Dans ces techniques il est possible d'écrire la relation entre les domaines physique  $(x, y)$  et computationnel  $(\xi, \eta)$ , à deux dimensions, comme :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cos \theta & -h \sin \theta \\ h \sin \theta & h \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Avec,  $h$  : facteur scalaire.

$\theta$  : angle entre la tangente à la droite  $\xi$  et l'axe  $x$ .

Lorsqu'une transformation conforme est utilisée, le plan computationnel  $(\xi, \eta)$  est relié au plan physique  $(x, y)$  par les équations de **Laplace** :

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$$

Et les conditions de **Cauchy-Riemann**  $\xi_x = \eta_y$  et  $\xi_y = -\eta_x$ . Ainsi il est possible de construire les solutions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  par superposition et par des transformations conformes (**Milne-Thompson, 1968**) [1].

En utilisant les variables complexes,  $z = x + iy$  et  $\zeta = \xi + i\eta$ , une transformation conforme peut être exprimée symboliquement comme,  $Z = F(\zeta)$ , ou sous une forme plus pratique :

$$dZ = H d\zeta \quad \text{ou bien} \quad Z = \int H d\zeta$$

$$\text{où } H = h e^{i\theta} = h(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Nous savons que la transformation conforme est généralement utilisée afin d'obtenir les solutions d'écoulements potentiels bidimensionnels autour des configurations relativement complexes, en ramenant, par une transformation appropriée, le problème à celui d'un écoulement autour d'un obstacle simple tel qu'un cercle de rayon égale à l'unité. Comme dans toute technique de génération de maillage, une transformation conforme consiste à :

- la construction d'un schéma seul ou des schémas séquentiels pour obtenir la relation entre les points des frontières dans les plans physique et computationnel.
- la génération des points intérieurs dans le domaine physique.

Il est évident que conformément à la philosophie générale de génération de maillage, le domaine computationnel est typiquement un simple rectangle dans lequel les points intérieurs sont arrangés en un maillage régulier.

### **I.1.2. Méthodes algébriques :**

Les méthodes algébriques de génération de maillage produisent une description fonctionnelle directe de la transformation entre les domaines computationnel et physique. La méthode algébrique classique est une transformation conforme dans laquelle la forme des expressions analytiques est simple et le maillage orthogonal. Cependant, ces propriétés avantageuses sont contrebalancées par l'incapacité à spécifier les points de la frontière et la nature bidimensionnelle inhérente de la méthode.

Afin de lever ces restrictions, une classe de techniques de génération de maillages ont été développées et sont basées sur une interpolation linéaire explicite entre les frontières et/ou les surfaces intermédiaires dans le champ physique (plan ou espace). Ces techniques sont généralement appelées techniques de génération de maillages algébriques.

### **I.1.3. Méthodes Numériques :**

Dans un problème de génération de maillages à partir des valeurs des coordonnées et/ou de leurs dérivées aux frontières, différentes méthodes, autres que celles basées sur l'interpolation algébrique, peuvent être utilisées. Parmi ces méthodes, nous retrouvons les méthodes numériques qui constituent un thème d'étude à part. Les équations sont de type elliptique avec des conditions aux limites de type **Dirichlet** ou **Newman**. Elles sont hyperboliques ou paraboliques lorsque cette

spécification est sur une portion seulement des frontières. Ainsi, le système parabolique est appliqué pour générer un maillage entre deux frontières qui délimitent une région doublement connexe avec une spécification des coordonnées et/ou de leurs dérivées sur ces frontières. Quant au système hyperbolique, il ne permet la spécification des coordonnées (et/ou de leurs dérivées) qu'aux frontières internes, il est par conséquent utilisé pour la génération de maillage dans des domaines avec frontières externes arbitrairement localisées.

Les modèles hyperboliques ont été traités par **Starius** et **al.** Ils sont rapides et génèrent des maillages orthogonaux mais présentent l'inconvénient non généraux et de propager les discontinuités des frontières vers l'intérieur du champ d'étude.

Les modèles paraboliques sont aussi rapides que les modèles hyperboliques. Les maillages qu'ils génèrent sont plus réguliers que ceux des systèmes hyperboliques mais moins que ceux des systèmes elliptiques.

Quant aux modèles elliptiques, ils nécessitent généralement la résolution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles, souvent non linéaires, avec des conditions aux limites spécifiées sur toutes les frontières. Ces modèles sont plus difficiles à mettre en œuvre et plus lents que les modèles paraboliques ou hyperboliques mais d'un autre côté, ils présentent l'avantage d'être plus généraux, s'appliquer à des configurations de frontières un peu plus complexes. Par ailleurs, les maillages générés par ces modèles sont très réguliers même si les domaines considérés présentent des irrégularités sur les frontières ou distribution des points aux frontières non uniformes.

De plus, ces systèmes elliptiques ne propagent pas les discontinuités des frontières vers le champ étudié et génèrent des maillages dont l'orthogonalité est beaucoup mieux vérifiée que dans le cas des méthodes algébriques. En outre, la conformité des maillages est souvent requise avec des systèmes elliptiques, en particulier le système de **Laplace**. Cependant, vu la non linéarité des équations de ces systèmes, il est en général, nécessaire de leur joindre d'autres méthodes de génération de maillage, plus rapides, telles que les méthodes algébriques afin d'assurer une meilleure convergence de la solution.

L'utilisation de ce type de systèmes de coordonnées, a été initialement appliquée aux domaines bidimensionnels simplement connexes.

## I.2. Aspects physiques :

Avant d'entamer ces techniques, il convient d'éclaircir les relations existant entre le domaine computation (transformé) et le domaine physique. La schématisation d'une frontière typique entre les domaines physique et computationnel peut être interprétée comme étant la relation entre une région doublement connexe et simplement connexe.

### I.2.1 Région simplement connexe :

**Définition :** On dit d'un domaine  $D$  qu'il est simplement connexe si n'importe quelle surface fermée, dont tous les points sont contenus dans le domaine, délimite un sous-domaine contenu intégralement dans le domaine  $D$ , [7].

### I.2.2 Région doublement (multi-) connexe :

**Définition :** Une région est dit doublement connexe s'il n'existe que deux chemins non conciliables pour relier deux points quelconques. Dans cette région, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible [5].

On peut facilement généraliser ces concepts pour définir des régions multi-connexes en terme du nombre de contours irréductibles. Le nombre minimal de coupures nécessaires pour obtenir un domaine simplement connexe, auquel on ajoute 1, indique l'ordre de multiplicité :

$$N \text{ multiplicité} = N \text{ coupures} + 1$$

## I.3. Transformation du domaine physique en domaine de calcul :

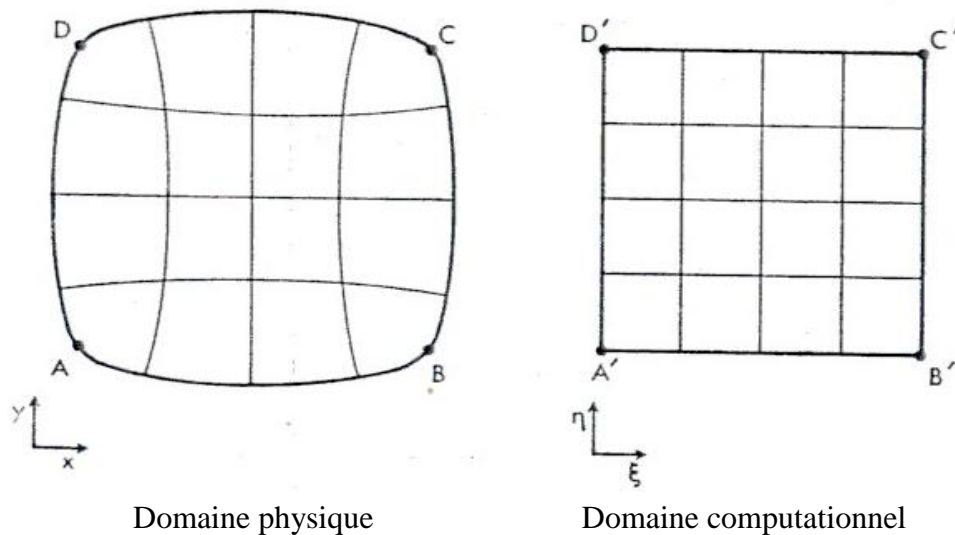
La génération de maillage a été initialement appliquée à des domaines simplement connexes (ne possédant pas d'obstacles). Cette théorie s'est généralisée aux domaines doublement connexes (ayant un obstacle) et aux domaines multiconnexes à plusieurs obstacles. Lors de la génération de maillage, il y a transformation du domaine physique en un domaine computationnel ou de calcul, dans lequel aura lieu la résolution numérique du modèle mathématique. Plusieurs méthodes de transformation existent. Nous présentons, dans ce qui suit, les méthodes de transformation les plus utilisées [1].

### I.3.1. Transformation des domaines simplement connexes :

L'exemple le plus simple qu'on peut citer, est la transformation d'un domaine simplement connexe en un domaine rectangulaire monobloc ou multi-blocs. Nous pouvons illustrer cette transformation à travers les différents types existants :

#### Type 1 :

Ce type de transformation est le plus simple et consiste à transformer un domaine délimité par quatre courbes en un rectangle dans le domaine de calcul. On obtient alors une correspondance entre les discontinuités du domaine transformé avec les sommets A,B,C et D du rectangle.

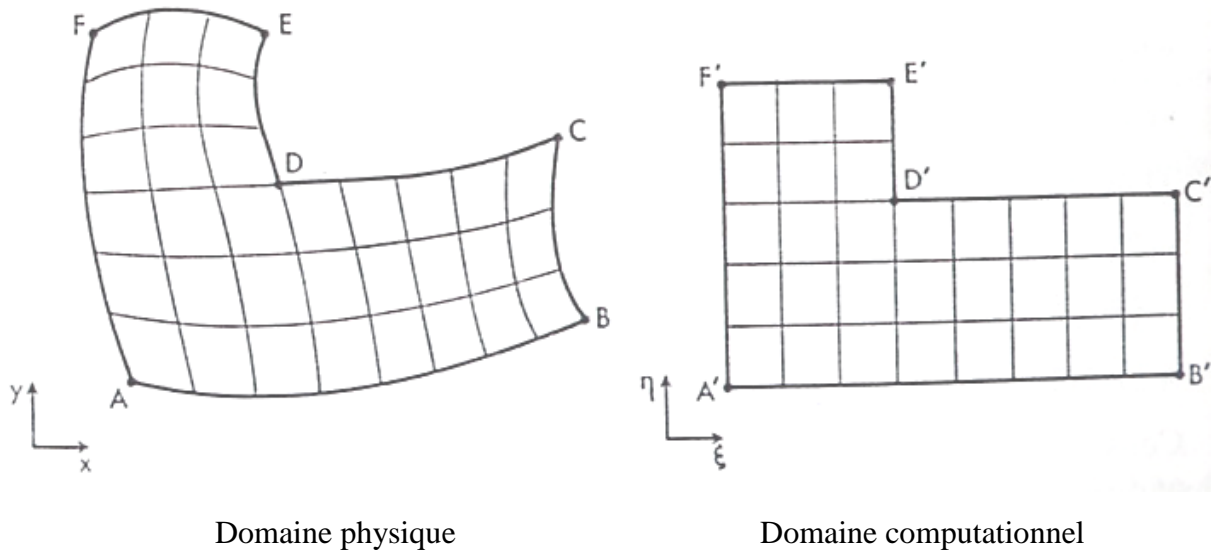


**Figure. (I.1). Transformation d'un domaine simplement connexe délimité par quatre courbes en un simple rectangle dans le champ de calcul**

#### Type 2 :

Ce type de transformation est un peu plus complexe du fait qu'on passe d'un domaine arbitraire de forme en L, qui peut être monobloc ou composé de plusieurs blocs, vers un autre plus régulier. Dans ce cas, deux types de configurations sont possibles :

- a) Transformation d'un domaine physique en forme de L tordu, en un domaine régulier ayant la même forme L dans le domaine de calcul.

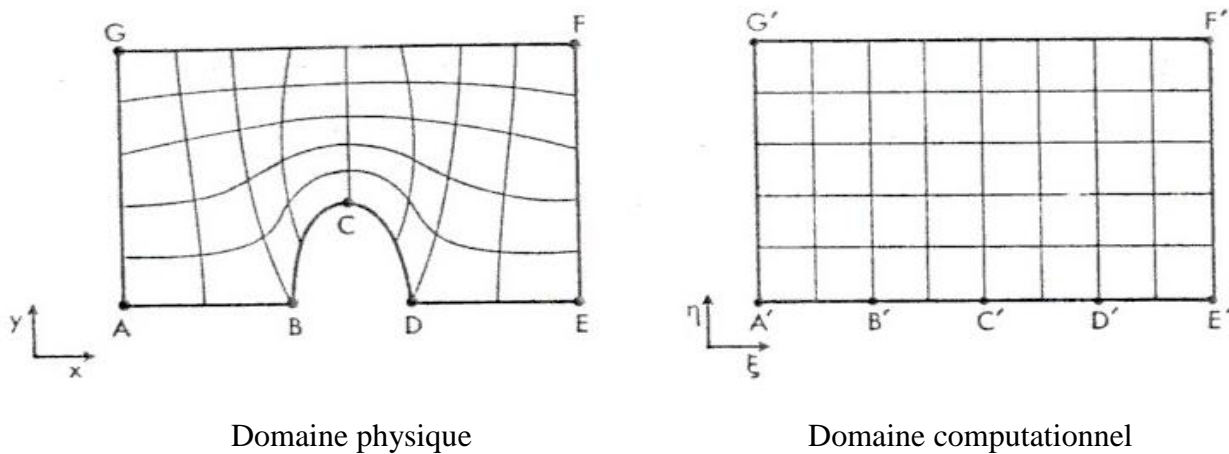


**Figure(I.3) :Transformation d'un domaine physique en forme de L en un rectangle monobloc**

**Type 3 :**

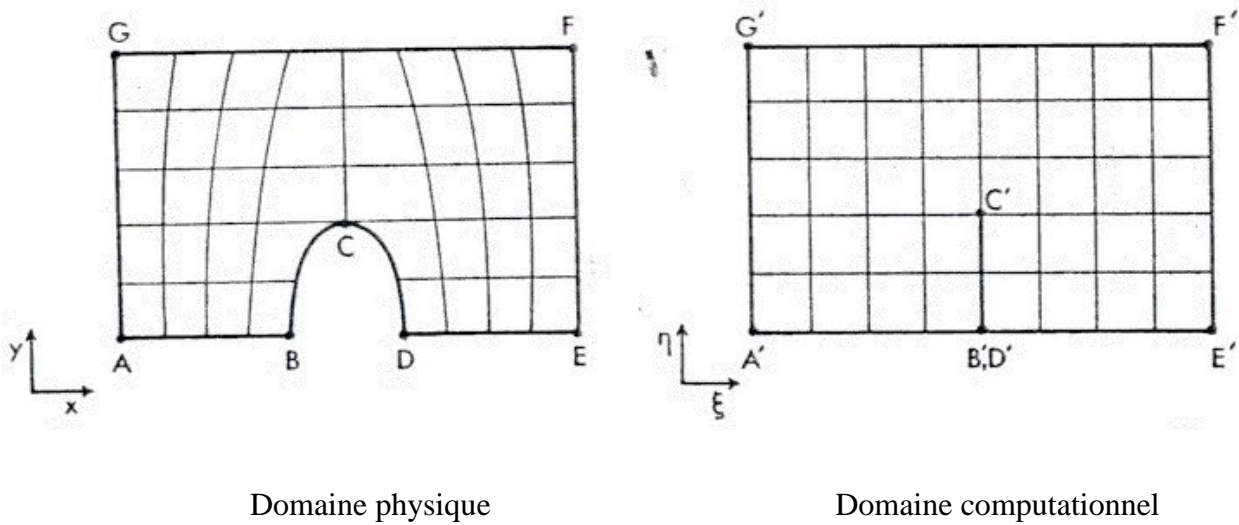
Lorsque la frontière du domaine physique est de forme plus compliquée, la configuration du champ transformé est plus variée .Ainsi pour le même domaine physique, plusieurs cas sont possibles comme illustré dans ce qui suit :

**a)** Le cas de la transformation de la figure (I.4) a lieu lorsqu'on a un écoulement autour d'un obstacle courbe ABD et dont les points A et D représentent les points d'arrêt Dans ce cas , ce type de transformation est très approprié.



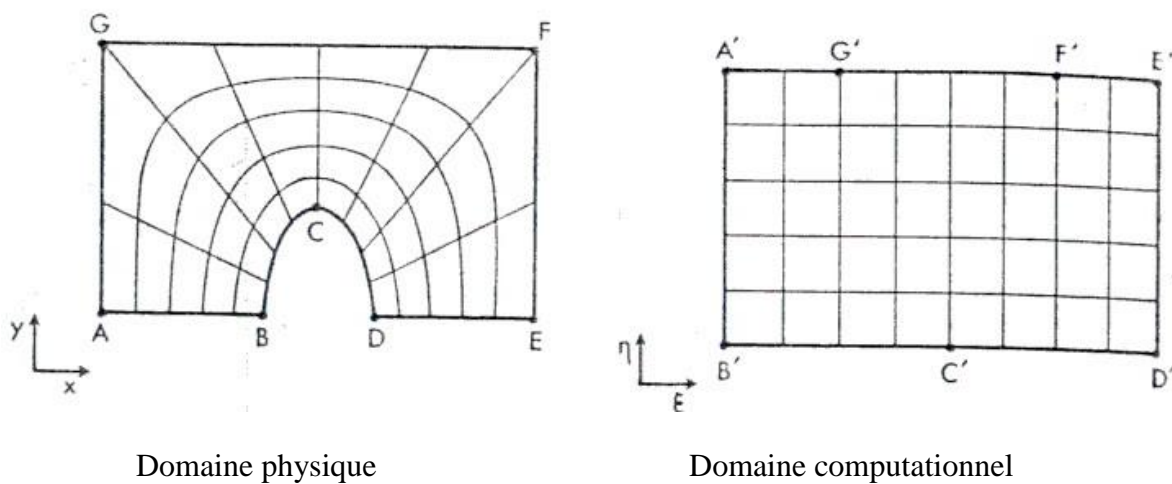
**Figure. (I.4). Transformation par aplatissage de l'obstacle.**

b) Le cas de la transformation de figure (I.5) se rencontre lorsque le point C subit une grande distorsion du fait qu'un grand nombre de points peuvent être attirés au voisinage de ce dernier.



**Figure. (I.5). Transformation de l'obstacle en un plaque.**

c) Ce type de configuration de est similaire à celui de Fig (I.3), à l'exception de la plus grande distorsion du maillage qui apparaît, dans ce cas ,aux points G et F au lieu des points B et D comme dans le cas de la Fig (I.3). En outre, puisque les points G et F se trouvent sur la frontière extérieure où règne l'écoulement uniforme, l'erreur en ces points est plus faible qu'aux points B et D.



**Figure. (I.6). Transformation par aplatissage de l'obstacle avec une bonne résolution.**

### I.3.2. Transformation des domaines doublements (multi-) connexes :

Nous avons déjà cité dans l'aspect physique les différents régions topologiques que l'on peut rencontrer et parmi les quelles on trouve les régions doublement connexes. L'exemple le plus typique est l'écoulement interne dans une conduite avec obstacles. En outre, on peut aussi citer l'écoulement externe autour d'un ou plusieurs obstacles comme dans le cas des ailettes d'une hélice ou les profils d'ailes et qui fait l'objet de la présente étude. Il est important de noter que ces transformations dépendent essentiellement de la forme des obstacles. Nous présentons maintenant quelques exemples illustratifs dans les paragraphes, qui suivent.

#### I.3.2.1. Transformation des obstacles en sous-régions :

Lorsqu'on possède un obstacle ayant une épaisseur relativement plus importante comparée à son allongement, il est plus approprié de le transformer dans ce cas en un rectangle, en essayant de conserver le même degré de connexité.

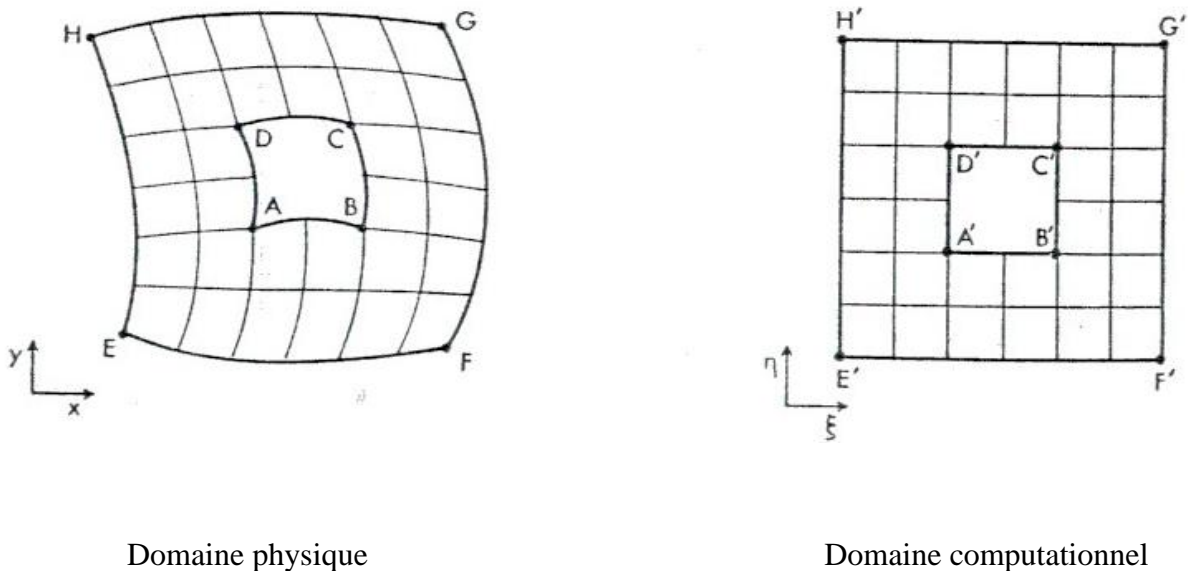
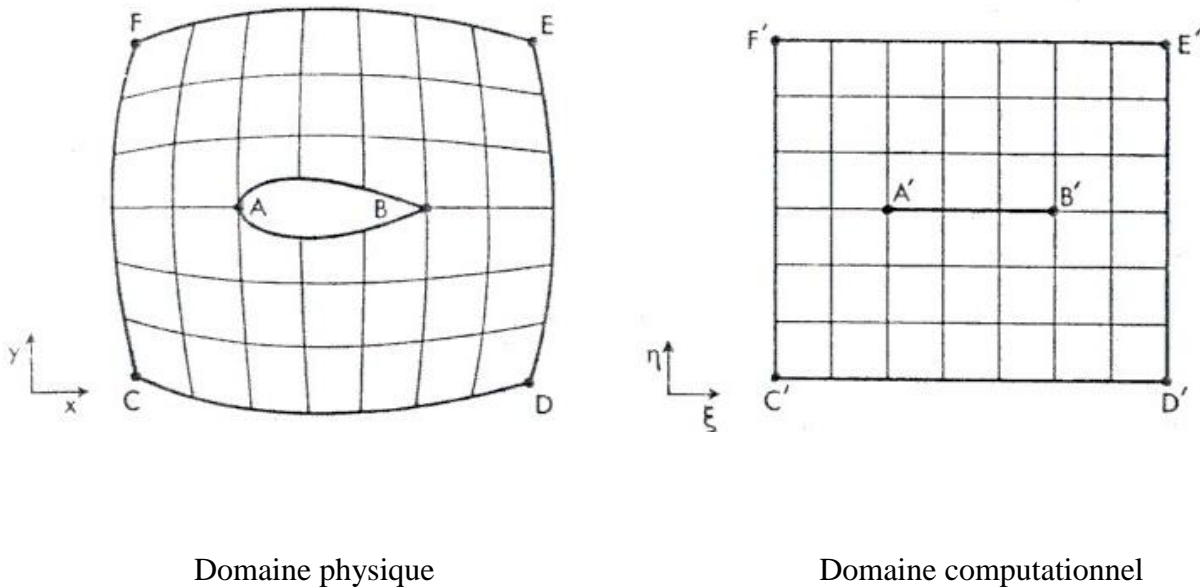


Figure. (I.7). Transformation de l'obstacle en sous-région.

### I.3.2.2. Transformation des obstacles en segments de droites :

Ce type de transformation s'effectue dans le cas où les obstacles considérés ont des épaisseurs relativement faibles. Un exemple d'illustration est donné dans ce cas :



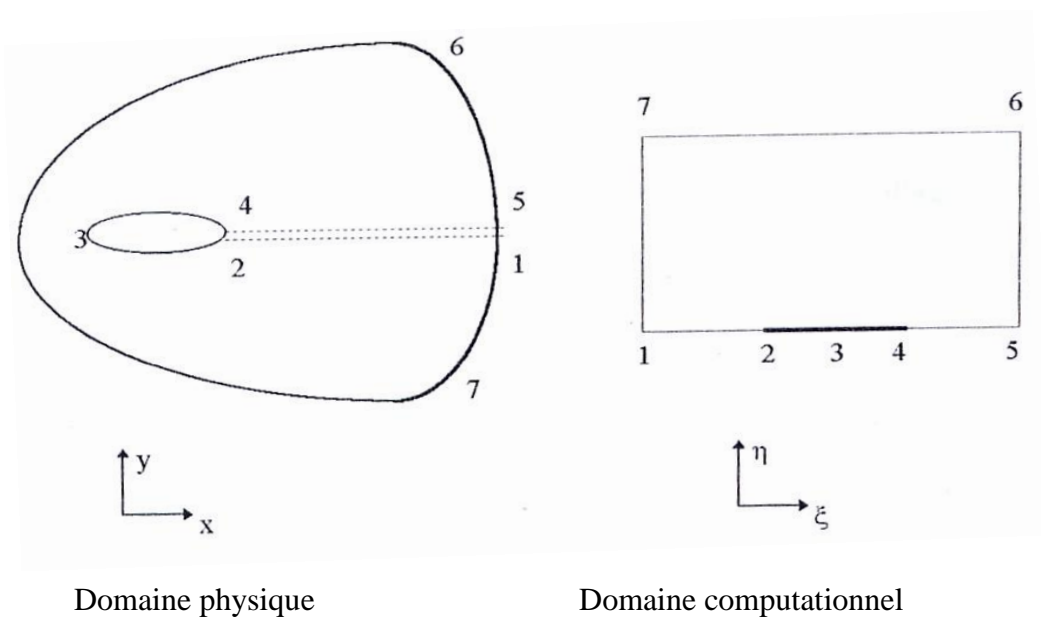
**Figure. (I.8). Transformation de l'obstacle en un segment de droite.**

### I.3.2.3. Transformation des obstacles par coupure :

Cette technique constitue un outil très efficace pour palier au problème de distorsion qui apparaît lors de la transformation de l'obstacle en une sous-région ou en segment dans le champ de calcul. Elle permet l'obtention d'un domaine transformé rectangulaire simplement connexe et cela peut être effectué par l'introduction d'une (ou plus) coupure dans le domaine physique.

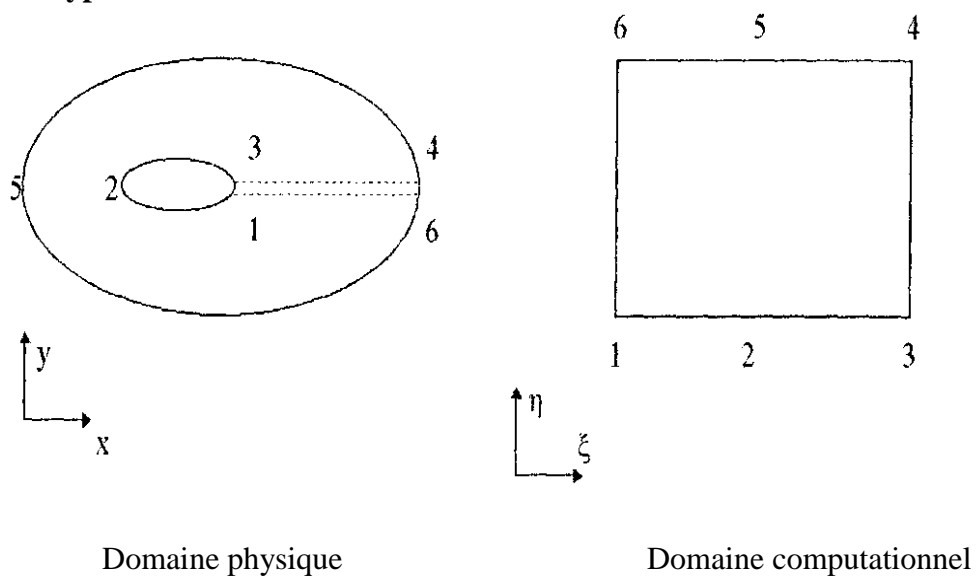
Les types de configurations les plus utilisées en aérodynamique externe sont le type "O" et le type "C".

**Configuration de type "C":**



**Figure. (I.9). Transformation du domaine physique par coupure  
(Configuration type C)**

**Configuration de type "O" :**



**Figure. (I.10). Transformation du domaine physique par coupure  
(Configuration type O).**

#### I.4. Formulation et analyse des techniques de génération de maillage :

Compte tenu de la grande variété des travaux relatifs à la génération de maillage existent dans la littérature, nous nous limiterons à ceux qui connaissent une grande application en aérodynamique. Nous présentons dans ce qui suit les techniques les plus utilisées pour générer le plan transformé :

##### I.4.1. Techniques algébriques :

Les méthodes algébriques les plus utilisées dans la génération des maillages sont celles qui interpolent les points des frontières pour générer les points intérieurs. L'interpolation explicite peut être en une dimension ou en deux dimensions.

La qualité demandée est que le maillage généré doit être bien conditionné en le variant doucement vers un maillage orthogonal, car ces techniques ont l'inconvénient de propager les discontinuités vers l'intérieur du domaine.

La distribution des points du maillage à l'intérieur est gouvernée par les fonctions de condensation, Stretching, aux frontières.

##### I.4.1.1. Fonctions de condensation « stretching » unidimensionnelles :

Les fonctions de condensation sont largement utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que des régions spécifiques (à forts gradients) du domaine qui nécessitent un traitement avec une grande précision. Pour les écoulements autour des corps, il est nécessaire d'introduire ces fonctions pour résoudre les problèmes où les gradients des variables physiques sont larges.

Il est désirable d'exprimer les variables dépendantes et indépendantes dans la fonction de condensation «Stretching » sous une forme normalisée. Dans ce cas, la variable indépendante appropriée est :

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \quad (I.3)$$

avec :  $0 \leq \eta^* \leq 1$  où  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$

Une fonction de condensation « Stretching » proposée par **Robert (1971)** et modifiée par **Eisemann (1979)** [1], est la suivante :

$$S = a_1 \eta^* + (1 - a_1) \left( 1 - \frac{\tanh[b_1(1 - \eta^*)]}{\tanh(b_1)} \right) \quad (\text{I.4})$$

où  $a_1$  et  $b_1$  sont des paramètres de condensation des lignes coordonnées.

#### I.4.1.2. Technique de deux parois :

Cette méthode est généralement illustrée par un canal bidimensionnel courbe, voir Fig. (I.11). Il est souvent nécessaire que les fonctions de condensation « Stretching »,  $S_{AD}(\eta^*)$  et  $S_{BC}(\eta^*)$  soient définies pour contrôler la distribution des points au dessous des frontières. Des équations équivalentes à celles de (I.4) sont utilisées pour générer  $S_{AD}(\eta^*)$  et  $S_{BC}(\eta^*)$ . Pour obtenir la valeur de  $S$  entre les surfaces AD et BC, une simple interpolation linéaire est recommandée, d'où :

$$S = S_{AD} + \xi^* (S_{BC} - S_{AD}) \quad (\text{I.5})$$

où

$$\xi^* = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

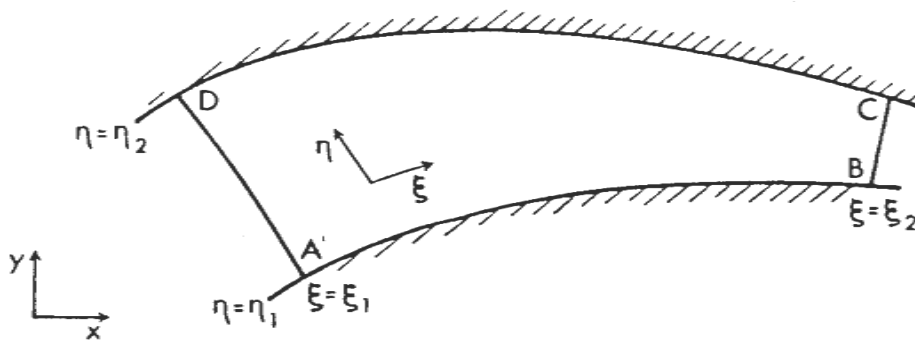


Figure.(I.11). Canal bidimensionnel curviligne.

De la même façon, la distribution des points le long des frontières AB et CD est contrôlée par les fonctions « Stretching »  $r_{DC}(\xi^*)$  et  $r_{AB}(\xi^*)$ . Si  $r_{AB}$  et  $r_{DC}$  sont considérées comme étant les coordonnées généralisées mesurées le long de la surface, alors  $X_{AB}(r_{AB})$  et  $Y_{AB}(r_{AB})$  se suivent directement. Il en est de même pour  $X_{DC}(r_{DC})$  et  $Y_{DC}(r_{DC})$ .

La technique des deux parois utilise des moyens d'interpolation pour générer les points intérieurs entre les deux frontières AB et DC. Une simple interpolation linéaire est donnée dans ce qui suit :

$$X(\xi, \eta) = (1-S)X_{AB}(r_{AB}) + S X_{DC}(r_{DC}) \quad (I.6)$$

$$Y(\xi, \eta) = (1-S)Y_{AB}(r_{AB}) + S Y_{DC}(r_{DC})$$

Où S est donné par (I.4).

La difficulté dans l'interpolation précédente réside dans le fait que les points du maillage, adjacents à la frontière, peuvent devenir tordus si les points sur les frontières correspondantes  $(X_{AB}, Y_{AB})$  et  $(X_{DC}, Y_{DC})$  sont en dehors de l'alignement. Par conséquent, il est préférable de remplacer (I.6) par :

$$X(\xi, \eta) = \mu_1(s)X_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)X_{DC}(r_{DC}) + T_1\mu_3(s)\left(\frac{dY_{AB}}{dr_{AB}}(r_{AB})\right) + T_2\mu_4(s)\left(\frac{dY_{DC}}{dr_{DC}}(r_{DC})\right)$$

$$Y(\xi, \eta) = \mu_1(s)Y_{AB}(r_{AB}) + \mu_2(s)Y_{DC}(r_{DC}) - T_1\mu_3(s)\left(\frac{dX_{AB}}{dr_{AB}}(r_{AB})\right) - T_2\mu_4(s)\left(\frac{dX_{DC}}{dr_{DC}}(r_{DC})\right)$$

où :

$$\mu_1(s) = 2s^3 - 3s^2 + 1 \quad , \quad \mu_2(s) = -2s^3 + 3s^2 \quad (I.7)$$

$$\mu_3(s) = s^3 - 2s^2 + s \quad , \quad \mu_4(s) = s^3 - s^2$$

Les paramètres  $T_1$  et  $T_2$  sont utilisés pour contrôler la distance à l'intérieur du maillage à partir de laquelle l'orthogonalité est renforcée.

### I.4.1.3. Technique de Gilding :

Dans ce paragraphe, une nouvelle technique de génération de maillage est développée pour répondre aux besoins de nombreux problèmes physiques pratiques.

Cette technique a été proposée par **B.H.Gilding (1988)** [5]. Comme dans toute technique algébrique, elle utilise les fonctions de condensation.

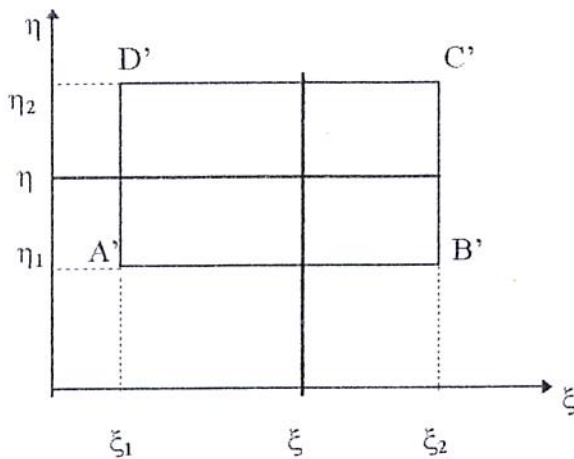
Considérons un domaine  $D$  simplement connexe dans le plan physique rapporté à un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Comme précédemment, on choisit une région de forme quadrilatérale.

$$R = \{(\xi, \eta) : \xi_1 < \xi < \xi_2, \eta_1 < \eta < \eta_2\}$$

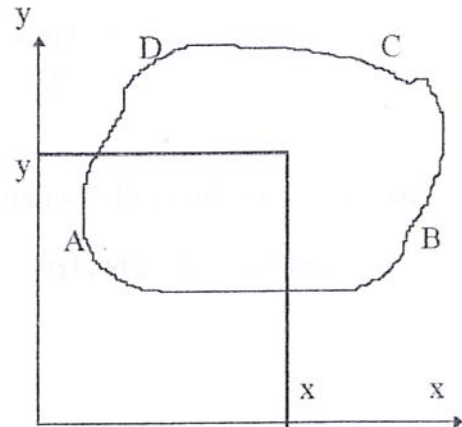
$$\begin{aligned} \partial D = & \{(x(\xi, \eta_1), y(\xi, \eta_1)) : \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2\} \cup \{(x(\xi_2, \eta), y(\xi_2, \eta)) : \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2\} \\ & \cup \{(x(\xi, \eta_2), y(\xi, \eta_2)) : \xi_2 \geq \xi \geq \xi_1\} \cup \{(x(\xi_1, \eta), y(\xi_1, \eta)) : \eta_2 \geq \eta \geq \eta_1\} \end{aligned}$$

Notre objectif est de trouver l'expression qui définit le domaine :

$$\overline{D} = \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \in \overline{R}\}$$



Domaine rectangulaire



Domaine simplement connexe

**Figure.(I.12). Transformation du domaine physique en un domaine rectangulaire par la technique de Gilding.**

Pour tout points  $(\xi, \eta) \in \overline{R}$ , on pose  $\alpha(\xi, \eta)$  la projection normale du points

$(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sur la ligne reliant les points  $(x(\xi_1, \eta), y(\xi_1, \eta))$  et  $(x(\xi_2, \eta), y(\xi_2, \eta))$  dans le plan physique. L'équation de la droite joignant les deux points, sus-mentionnés, est donnée par :

$$\delta_x(\eta)\{y - y(\xi_1, \eta)\} = \delta_y(\eta)\{x - x(\xi_1, \eta)\}$$

Avec :

(I.8)

$$\delta_x(\eta) = x(\xi_2, \eta) - x(\xi_1, \eta)$$

$$\delta_y(\eta) = y(\xi_2, \eta) - y(\xi_1, \eta)$$

D'autre part, l'équation de la normale à cette droite, obtenue en projetant le point

$(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sur elle, est donnée par :

$$\delta_y(\eta)\{y - y(\xi, \eta)\} = \delta_x(\eta)\{x - x(\xi, \eta)\} \quad (I.9)$$

Le Point  $(x_\alpha, y_\beta)$  d'intersection de la projection avec cette ligne, est défini par :

$$x_\alpha(\xi, \eta) = x(\xi_1, \eta) + \alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) \quad (I.10)$$

$$y_\alpha(\xi, \eta) = y(\xi_1, \eta) + \alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)$$

où :

$$\alpha(\xi, \eta) = \frac{\left[ \{x(\xi, \eta) - x(\xi_1, \eta)\}\delta_x(\eta) + \{y(\xi, \eta) - y(\xi_1, \eta)\}\delta_y(\eta) \right]}{\left[ \delta_x^2(\eta) + \delta_y^2(\eta) \right]}$$

De la même façon, on définit la projection normalisée du point  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  sur la ligne d'extrémité  $(x(\xi, \eta_1), y(\xi, \eta_1))$  et  $(x(\xi, \eta_2), y(\xi, \eta_2))$  comme :

$$x_\beta(\xi, \eta) = x(\xi, \eta_1) + \beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) \quad (\text{I.11})$$

$$y_\beta(\xi, \eta) = y(\xi, \eta_1) + \beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)$$

où :

$$\beta(\xi, \eta) = \frac{\{x(\xi, \eta) - x(\xi, \eta_1)\varepsilon_x(\xi) + \{y(\xi, \eta) - y(\xi, \eta_1)\varepsilon_y(\xi)\}}{[\varepsilon_x^2(\xi) + \varepsilon_y^2(\xi)]}$$

$$\varepsilon_x(\xi) = x(\xi, \eta_2) - x(\xi, \eta_1)$$

$$\varepsilon_y(\xi) = y(\xi, \eta_2) - y(\xi, \eta_1)$$

on pose :  $\alpha_i(\xi) = \alpha(\xi, \eta_i)$

avec:  $i = 1, 2$

$$\beta_i(\eta) = \beta(\xi_i, \eta)$$

On suppose que  $\alpha_i(\xi)$  et  $\beta_i(\eta)$  sont définis et continus sur :  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  et  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$  respectivement. De plus, on pose :

$$\alpha_i(\xi_1) = 0 \quad \alpha_i(\xi_2) = 0$$

et

avec:  $i = 1, 2$

$$\beta_i(\eta_1) = 0 \quad \beta_i(\eta_2) = 0$$

Ainsi, on définit la forme normalisée par :

$$\alpha(\xi, \eta) = \{1 - \beta(\xi, \eta)\} \alpha_1(\xi) + \beta(\xi, \eta) \alpha_2(\xi) \quad (\text{I.12})$$

$$\beta(\xi, \eta) = \{1 - \alpha(\xi, \eta)\} \beta_1(\eta) + \alpha(\xi, \eta) \beta_2(\eta)$$

Pour tout  $(\xi, \eta) \in R$ , en éliminant les deux inconnues dans les deux équations précédents, il vient :

$$\alpha(\xi, \eta) = \frac{\{1 - \beta_1(\eta)\} \alpha_1(\xi) + \beta_1(\eta) \alpha_2(\xi)}{d(\xi, \eta)}$$

$$\beta(\xi, \eta) = \frac{\{1 - \alpha_1(\xi)\} \beta_1(\eta) + \alpha_1(\xi) \beta_2(\eta)}{d(\xi, \eta)} \quad (\text{I.13})$$

$$\text{avec : } d(\xi, \eta) = 1 - \{\alpha_2(\xi) - \alpha_1(\xi)\}\{\beta_2(\eta) - \beta_1(\eta)\}$$

Finalement, notons que si  $\alpha_1(\xi) > 0$ ,  $\alpha_2(\xi) < 1$  et  $\beta_1(\eta) > 0$ ,  $\beta_2(\eta) < 1$ , alors le dénominateur  $d(\xi, \eta)$  dans (I.13) est différent de zéro. Par conséquent, il est clair que

$0 < \alpha(\xi, \eta) < 1$  et  $0 < \beta(\xi, \eta) < 1$ . En outre, si  $\alpha_1(\xi) = \alpha_2(\xi)$  pour quelques valeurs de

$\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ , alors l'expression de  $\alpha$  se réduit à  $\beta(\xi, \eta) = \beta_1(\xi, \eta) = \beta_2(\xi, \eta)$  pour tout  $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ .

De même, si  $\beta_1(\eta) = \beta_2(\eta)$  pour quelques valeurs de  $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ , alors

l'expression de  $\alpha$  se réduit à  $\beta(\xi, \eta) = \beta_1(\xi, \eta) = \beta_2(\xi, \eta)$  pour tout  $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$ . Avec

$\alpha(\xi, \eta)$  et  $\beta(\xi, \eta)$  définis par (I.13), l'inversion des équations (I.9) et (I.11) nous donne l'expression générale de tout point  $(x, y) \in D$ , comme :

$$x(\xi, \eta) = \frac{[x_\alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) + y_\alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)]\varepsilon_y(\xi) - [x_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) + y_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)]\delta_y(\eta)}{\Delta(\xi, \eta)}$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{[x_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_x(\xi) + y_\beta(\xi, \eta)\varepsilon_y(\xi)]\delta_x(\eta) - [x_\alpha(\xi, \eta)\delta_x(\eta) + y_\alpha(\xi, \eta)\delta_y(\eta)]\varepsilon_x(\xi)}{\Delta(\xi, \eta)}$$

$$\text{Avec : } \Delta(\xi, \eta) = \delta_x(\eta)\varepsilon_y(\xi) - \varepsilon_x(\xi)\delta_y(\eta)$$

(I.14)

#### I.4.2. Génération de maillages par la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles :

La majorité des problèmes de physique et de technologie peuvent être décrits en termes d'équations différentielles aux dérivées partielles. En outre, la plupart de ces problèmes s'inscrivent naturellement dans l'une des trois catégories suivantes :

- Problème d'équilibre.
- Problème à valeurs propres.
- Problème de propagation.

Avant de résoudre de tels problèmes par des méthodes, il faut générer le maillage. On peut alors opter pour la résolution d'un autre système d'équations différentielles aux dérivées partielles afin de déterminer le maillage. Les propriétés des maillages générés par cette approche sont notamment reliées aux propriétés des équations différentielles aux dérivées partielles utilisées comme équations de génération de maillage.

#### I.4.2.1. Procédure de génération de maillage elliptique :

##### I.4.2.1.1. Les équations de poisson :

##### I.4.2.1.1.a. Formulation mathématique :

La motivation pour l'utilisation des équations elliptiques comme générateurs de maillage peut être dérivée de nombreuses sources. La nature des équations elliptiques est d'adopter les données de la frontière et cela fournit la plus grande propriété désirée.

En fait, beaucoup d'équations elliptiques sont basées sur l'équation de Laplace, qui est bien connue comme un opérateur de filtrage. Dans le cas bidimensionnel, les équations de Laplace avec les conditions aux limites de type **Cauchy-Riemann**, peuvent être utilisées pour générer des représentations conformes. L'aspect essentiel qu'il faut exploiter dans la modélisation numérique en dynamique des fluides, est que l'écoulement incompressible, bidimensionnel et non visqueux est décrit en terme de l'équation de Laplace par la fonction potentiel « $\phi$ » ou la fonction de courant « $\psi$ » .

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$$

En donnant des conditions aux limites appropriées (I.15), la solution représente les lignes de courants et les équipotentielles d'un champ d'écoulement. Afin d'utiliser ces idées dans la génération de maillage, il est plus approprié de transformer ces équations, pour que  $x$  et  $y$  deviennent les variables dépendantes. Dans de tels cas, il est possible d'appliquer les conditions aux limites à  $x$  et  $y$ , qui sont en général les valeurs connues des coordonnées aux limites du domaine géométrique. Si les équations (I.15) sont généralisées pour inclure les fonctions sources  $P$  et  $Q$ ,

ainsi que pour une portée plus générale,  $\xi$  et  $\eta$  remplaçant  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement, alors ces dernières peuvent s'écrire comme :

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (\text{I.16})$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta)$$

où :

$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

Cependant, l'utilisation de ces équation conduit à un système d'équations non linéaires couplées en  $x$  et  $y$ , notées par :

$$\alpha_m x_{\xi\xi} - 2\beta_m x_{\xi\eta} + \gamma_m x_{\eta\eta} = -J^2(x_\xi P + x_\eta Q) \quad (\text{I.17})$$

$$\alpha_m y_{\xi\xi} - 2\beta_m y_{\xi\eta} + \gamma_m y_{\eta\eta} = -J^2(y_\xi P + y_\eta Q)$$

avec :

$$\alpha_m = x_\eta^2 + y_\eta^2$$

$$\beta_m = x_\xi y_\eta + y_\xi x_\eta \quad (\text{I.18})$$

$$\gamma_m = x_\xi^2 + y_\xi^2$$

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

Les équations (I.17) avec (I.18) ont été dérivées et popularisées par **Thompson et al (1974)** [1], en transformant le système d'équations suggéré, comme générateur de maillage. Il est à noter que  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  et  $\gamma_m$  sont les coefficients métriques. Dans le cas où  $\beta_m=0$ , le maillage est orthogonal. Il est alors conseillé de substituer  $\beta_m=0$  dans (I.17). Cependant, cette contrainte n'assure pas l'orthogonalité. Par contre, cela peut conduire à une intersection à angle droit des lignes coordonnées du maillage avec les frontières (surface du profile). La solution de ce système d'équations peut être obtenue par l'utilisation d'une linéarisation appropriée et d'une représentation des dérivées par des différences finies centrales.

**Remarque :**

Dans tout ce qui suivra, on pose  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$  dans le plan computationnel. Ce choix n'affecte pas le maillage dans le plan physique.

**I.4.2.1.1.b. Discrétisation et algorithme de calcul :**

La résolution du système (I.17) est effectuée dans le champ transformé muni des coordonnées curviligne  $(\xi, \eta)$ . Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux.

Pour  $P = Q = 0$ , le résidu en maillage carré pour  $\xi = ih$  ( $i=0, \dots, N$ ),  $\eta = jh$  ( $j=0, \dots, M$ ), peut être représenté comme :

$$R_{i,j}^k = \alpha_{mi,j}^k (U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k) - 2\beta_{mi,j}^k (U_{i+1,j+1}^k - U_{i-1,j+1}^k - U_{i+1,j-1}^k + U_{i-1,j-1}^k) + \gamma_{mi,j}^k (U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k) \quad (\text{I.19})$$

où  $U = U(x, y)$  représente l'inconnue au point  $(i, j)$  à l'itération direct  $k$ .

De même, les paramètres métriques  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  et  $\gamma_m$  sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux, d'où :

$$\begin{aligned} \alpha_{mi,j} &= 0.25 [ (X_{i,j+1}^k - X_{i,j-1}^k)^2 + (Y_{i,j+1}^k - Y_{i,j-1}^k)^2 ] \\ \beta_{mi,j} &= 0.25 [ (X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k)(Y_{i,j+1}^k - Y_{i,j-1}^k) + (Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k)(X_{i,j+1}^k - X_{i,j-1}^k) ] \\ \gamma_{mi,j} &= 0.25 [ (X_{i+1,j}^k - X_{i-1,j}^k)^2 + (Y_{i+1,j}^k - Y_{i-1,j}^k)^2 ] \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Il s'ensuit que la solution de (I.17) peut être obtenue en utilisant le schéma stationnaire linéaire de points successifs en surlaxation **SOR** :

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \frac{\omega_{opt} R_{i,j}^k}{2(\alpha_{mi,j} + \gamma_{mi,j})} \quad (I.21)$$

où  $\omega_{opt}$  est le paramètre de relaxation défini dans l'intervalle [1,2].

La même procédure est utilisée dans le cas où on introduit les fonctions de contrôle dans le résidu  $R_{i,j}^k$ .

#### I.4.2.1.1.c. Fonctions de contrôle de maillage :

Les propriétés de filtrage inhérentes aux équations de Laplace assurent que, dans le cas d'absence d'une frontière curviligne, les lignes coordonnées sont éventuellement espacées. Cependant, près des frontières convexes, l'espacement des mailles devient serré. Tandis que près des frontières concaves, l'espacement du maillage devient clairsemé. Ces propriétés ne sont pas, souvent, désirables pour la génération de maillage où il est essentiel que le maillage près de la frontière, réfléchit l'image de celle-ci. Le contrôle de l'espacement des lignes coordonnées peut être obtenu par l'introduction des fonctions sources dans l'équation de Laplace qui sont ainsi converties en équation de type Poisson. Le problème majeur, pour une génération de maillage automatique, est de choisir ces fonction sources d'une manière judicieuse. Des méthodes automatiques ont été développées (Thomas, Middlecoff et Steger 1979-1980), dans ce sens. Dans l'approche qui va suivre, une forme simplifiée des termes sources P et Q est donnée par [5] :

$$P = P_0(\xi)e^{-a(\eta-\eta_1)} \quad (I.22)$$

$$Q = Q_0(\xi)e^{-b(\eta-\eta_1)}$$

où  $\eta_1$  correspond à  $\eta_{min}$  de la frontière interne (profil),

$P_0, Q_0$  constantes qui varient dans la direction de  $\xi$

et  $a, b$  des constants usuelles.

Un autre type de fonctions sources toujours proposées par **T.D.Thomas** et **J.F.Middlecoff**, est le cas où les fonctions P et Q sont de type linéaire. L'idée de base de cette approche est d'utiliser les points aux frontières pour calculer ces fonctions sources, qui sont alors interpolées dans le champ. En utilisant les équations elliptiques Précédentes et en supposant que toutes les dérivées secondes qui traversent la frontière sont nulles, on obtient les équations suivantes [5] :

$$P = - \frac{(x_{\xi\xi} x_{\xi} + y_{\xi\xi} x_{\xi})}{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad (I.23)$$

$$Q = - \frac{(x_{\eta\eta} x_{\eta} + y_{\eta\eta} x_{\eta})}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2} (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

A partir d'ici et pour une distribution des points aux frontières parfaite, les fonctions de contrôles peuvent être calculées pour réfléchir cet espacement dans le champ.

#### 1.4.2.1.2. Equations de Laplace :

##### 1.4.2.1.2.a. Formulation mathématique :

Dans cette partie, un autre type de système elliptique est présenté. Cependant, **Ives (1982)** [1] recommande, pour générer les points intérieurs rapidement après avoir spécifié les points sur les frontières, la résolution des équations suivantes :

$$X_{\xi\xi} + X_{\eta\eta} = 0 \quad (I.24)$$

$$Y_{\xi\xi} + Y_{\eta\eta} = 0$$

Il convient de signaler que cette procédure peut être généralisée à plusieurs obstacles isolés tels que les profils d'aile et volets.

### 1.4.2.1.2.b. Discrétisation et algorithme de calcul :

Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux .Ainsi, nous obtenons les équations suivantes :

$$X_{i+1,j}^K - 2X_{i,j}^* + X_{i-1}^{K+1} + X_{i,j+1}^K - 2X_{i,j}^* + X_{i,j-1}^{K+1} = 0 \quad (I.25)$$

$$Y_{i+1,j}^K - 2Y_{i,j}^* + Y_{i-1}^{K+1} + Y_{i,j+1}^K - 2Y_{i,j}^* + Y_{i,j-1}^{K+1} = 0$$

En appliquant le schéma itératif **SOR** aux équations précédentes, on obtient :

$$X_{i,j}^{K+1} = \omega_{opt} X_{i,j}^K + (1 - \omega_{opt}) X_{i,j}^* \quad (I.26)$$

$$Y_{i,j}^{K+1} = \omega_{opt} Y_{i,j}^K + (1 - \omega_{opt}) Y_{i,j}^*$$

### I.4.2.2. Procédure de génération de maillage hyperbolique :

Ce type de procédure de génération de maillage est moins développé que ceux des procédures elliptiques bien qu'il possède des caractéristiques désirables. Cependant, le type, qu'on a utilisé, est celui développé par **Starius, Steger** et **Chaussee** , qui est donné par [5] :

$$\nabla \xi \cdot \nabla \eta = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = \varphi \quad (I.27)$$

$$\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = J$$

où J et  $\varphi$  Représentent le jacobien et la fonction sources respectivement.

L'orthogonalité est obtenue par une simple élimination de  $\varphi$  ( $\varphi=0$ ). L'inconvénient de cette technique est lié au manque de contrôle direct de la distribution des points sur les frontières extérieures.

### I.4.2.3. Procédure de génération de maillage parabolique :

#### I.4.2.3.a. Formulation mathématique :

La dernière procédure de génération de maillage numérique, qu'on a considérées, est celle basée sur la règle parabolique .Cette technique a été développée par **Nakamura** et qui est donnée par [5] :

$$x_{\eta} = Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + S_x \quad (I.28)$$

$$y_{\eta} = Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + S_y$$

où A et B sont des constantes positives et Sx et Sy sont des fonctions sources données par :

$$S_x|_{i,j} = \frac{x_{i,Nj} - x_{i,j}}{Nj - j} \quad (I.29)$$

$$S_y|_{i,j} = \frac{y_{i,Nj} - y_{i,j}}{Nj - j}$$

Les équations (I.28) sont paraboliques et doivent être calculées et démarrées à partir des données initiales ( $X_{i,1}$  ,  $Y_{i,1}$ ). Ces coordonnées initiales représentent la surface du profil et sont données par l'utilisateur.

#### I.4.2.3.b. Discrétisation et algorithme de calcul :

Les opérateurs de dérivation sont approchés par des schémas aux différences finies centrées d'ordre deux .En appliquant ces schémas au système (I.28), nous obtenons les équations discrètes suivantes pour  $X_{i,j}$  et  $Y_{i,j}$  :

$$x_{i,j}^* - x_{i,j-1}^{K+1} = A(x_{i-1}^{K+1} - 2x_{i,j}^* + x_{i+1,j}^K) - \frac{B(x_{i+1}^K - x_{i-1}^{K+1} - x_{i+1,j-1}^K + x_{i-1,j-1}^{K+1})}{2} + S_x \quad (I.30)$$

$$y_{i,j}^* - y_{i,j-1}^{K+1} = A(y_{i-1}^{K+1} - 2y_{i,j}^* + y_{i+1,j}^K) - \frac{B(y_{i+1}^K - y_{i-1}^{K+1} - y_{i+1,j-1}^K + y_{i-1,j-1}^{K+1})}{2} + S_y$$

Les équations algébriques discrètes obtenues précédemment sont linéaires, d'où un processus de calcul itératif est donc nécessaire. On a utilisé le schéma **SOR** en surrelaxation (par point) donné par (I.26), qui semble très approprié.

Par ailleurs, les valeurs de  $x_{i,j}^*$  et  $y_{i,j}^*$  sont données par :

$$x_{i,j}^* = \frac{x_{i,j-1}^{K+1} + (A+B)x_{i-1,j}^{K+1} + (A-B)x_{i+1}^K - B(x_{i-1,j-1}^{K+1} - x_{i+1,j-1}^K)}{1+2A} + S_x \quad (\text{I.31})$$

$$y_{i,j}^* = \frac{y_{i,j-1}^{K+1} + (A+B)y_{i-1,j}^{K+1} + (A-B)y_{i+1}^K - B(y_{i-1,j-1}^{K+1} - y_{i+1,j-1}^K)}{1+2A} + S_y$$

Pour les indices,  $i$  varie de 2 à  $\text{IMAX} - 1$  et  $j$  varie de 2 à  $\text{JMAX} - 1$

### I.4.3. Conditions aux limites :

La frontière externe, qui délimite le domaine physique, est prise de forme O (circulaire), de forme C ou de forme H. Par contre, le domaine computationnel obtenu est un domaine rectangulaire monobloc permettant ainsi de simplifier tout calcul basé sur lui. Ce dernier est obtenu par introduction d'une ou plusieurs coupures dans le domaine physique. Ces coupures, qui se trouvent à l'intérieur du champ physique, constituent alors des frontières fictives reliant la frontière externe aux contours des obstacles. Cependant, dans le domaine computationnel, ces coupures correspondent à des paires de segments superposables représentés sur les côtés du rectangle. Elles doivent vérifier un certain nombre de propriétés, qui sont :

- périodicité de la solution sur les coupures :

Les coordonnées et les caractéristiques physiques (fonction de courant, le nombre de Mach, la masse volumique,...) sont identiques sur les segments d'une même pair de coupures ;

- les segments d'une même paire de coupure  $(\xi, \eta)$ , ont des valeurs égales ou opposées.

D'autre part, les contours des obstacles et la frontière externe sont aussi représentés par des segments sur les côtés du domaine computationnel. Par ailleurs, sachant que la frontière externe

peut influencer sur la solution physique son éloignement ainsi que par sa configuration géométrique, un choix judicieux de cette frontière est alors indispensable.

En outre, l'existence de ces coupures impose une grande complexité dans la programmation. De ce fait, il est préférable d'évaluer les dérivées des fonctions au niveau de ces segments à part, comme par exemple dans le cas d'une frontière extérieure de type O où on a :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = x_{IMAX-1,j} - 2x_{1,j} + x_{2,j} \quad (I.32)$$

Cependant, les solutions pour  $I = 1$  et  $I = IMAX$  doivent être identiques, autrement dit, à chaque itération leur calcul doit être fait simultanément.

Chapitre II

# Résolution Numérique

Pour générer le maillage, nous avons choisi pour notre étude le modèle elliptique (par équation de poisson) parmi les méthodes de génération de maillage par résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, proposé par Thompson (1974) [1], et ce pour les propriétés qu'il vérifie qui sont :

- Adaptation du maillage aux frontières ;
- Distribution régulière des lignes coordonnées ;
- Transformation biunivoque du domaine physique au domaine d'étude (c'est-à-dire, le système ne propage pas les discontinuités des frontières vers le champ étudié) ;
- L'orthogonalité .

## II.1. Formulation mathématique :

### II.1.1. Equations de poisson :

Le modèle elliptique que nous avons choisi est constitué d'un système d'équation aux dérivées partielles non linéaires donné par :

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta) \quad (\text{II.1})$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta)$$

où P et Q sont des fonctions utilisées pour contrôler le maillage intérieur.

La résolution de ce système est effectuée dans le domaine transformé des coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ .

Ce système dans le domaine transformé est donné par :

$$\alpha X_{\xi\xi} - 2\beta X_{\xi\eta} + \gamma X_{\eta\eta} + \delta(PX_{\xi} + QX_{\eta}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\alpha Y_{\xi\xi} - 2\beta Y_{\xi\eta} + \gamma Y_{\eta\eta} + \delta(PY_{\xi} + QY_{\eta}) = 0$$

où :

$$\alpha = X_{\eta}^2 + Y_{\eta}^2$$

$$\beta = X_{\xi}Y_{\eta} + Y_{\xi}X_{\eta}$$

$$\gamma = X_{\xi}^2 + Y_{\xi}^2$$

$$\delta = (X_{\xi}Y_{\eta} - X_{\eta}Y_{\xi})^2$$

avec les condition aux frontières de type **Dirichlet** ,données par :

$$X = X_i(\xi, \eta) \tag{II.3}$$

$$Y = Y_i(\xi, \eta)$$

avec  $i = 1, N$ .

$N$  : nombre total de segments correspondant aux contours des obstacles, aux coupures et à la frontière externe.

### II.1.2. Fonctions de contrôle :

Pour contrôler le maillage nous avons choisi les fonctions proposées par Thompson et al (1977) [1] donnés par :

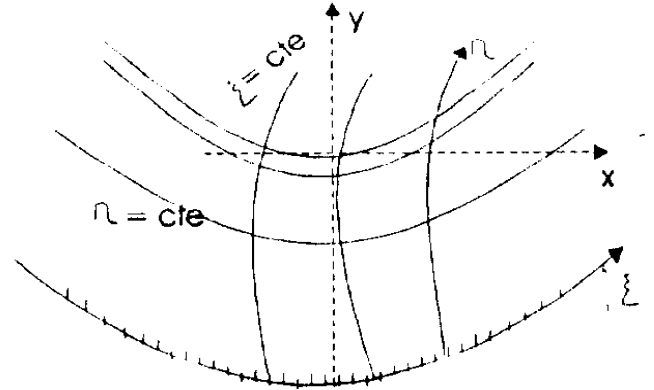
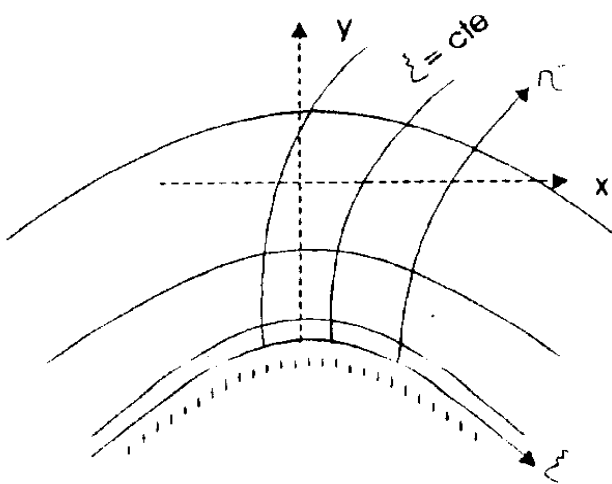
$$\begin{aligned}
 P(\xi, \eta) = & - \sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\xi - \xi_l) \exp(-c_l |\xi - \xi_l|) \\
 & - \sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\xi - \xi_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right] \\
 Q(\xi, \eta) = & - \sum_{l=1}^L a_l \operatorname{sgn}(\eta - \eta_l) \exp(-c_l |\eta - \eta_l|) \\
 & - \sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\eta - \eta_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right] \tag{II.4}
 \end{aligned}$$

La fonction  $\text{sgn}$  est définie par :

$\text{sgn}(x) = 1$  si  $x$  est positive,

$= 0$  si  $x = 0$ ,

$= -1$  si  $x$  est négative.



Attraction des ligne coordonnées de même

nature  $\eta$  vers la frontière convexe

Répulsion des lignes coordonnées de même

nature  $\eta$  de la frontière concave

**Figure.II .1. Attraction et répulsion des lignes coordonnées.**

Ces fonctions sont constituées de deux types de termes :

**Termes à attraction (répulsion) vers les lignes :**

Ils sont représentés par :

$$-\sum_{l=1}^L a_l \text{sgn}(\xi - \xi_l) \exp(-c_l |\xi - \xi_l|) \quad (\text{dans } P(\xi, \eta)),$$

$$-\sum_{l=1}^L a_l \text{sgn}(\eta - \eta_l) \exp(-c_l |\eta - \eta_l|) \quad (\text{dans } Q(\xi, \eta)).$$

Dans le premier terme, les lignes coordonnées du maillage, sur lesquelles la coordonnée curviligne  $\xi$  est constante, s'attirent ou se repoussent suivant le signe de P, vers les lignes coordonnées choisies de même type ( $\xi_l = cte \quad l = 1, L$ ).

Le même raisonnement est valable pour le deuxième terme avec les lignes coordonnées sur lesquelles la coordonnée curviligne  $\eta$  est constante.

### Termes à attraction (répulsion) vers des points :

Ils sont représentés par :

$$-\sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\xi - \xi_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \quad (\text{dans } P(\xi, \eta))$$

$$-\sum_{m=1}^M b_m \operatorname{sgn}(\eta - \eta_m) \exp\left[-d_m \left[(\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2\right]^{1/2}\right] \quad (\text{dans } Q(\xi, \eta)).$$

Dans le premier terme, les lignes du maillage sur lesquelles la coordonnée curviligne  $\xi$  est constante sont attirées ou repoussées vers des points choisis

$((\xi_m, \eta_m) \quad m = 1, M)$ .

Le même raisonnement est applicable au deuxième terme pour des lignes coordonnées sur lesquelles la variable  $\eta$  est constante.

Les amplitudes  $a_l, b_m$  de même que les coefficients d'amortissement  $c_l, d_m$ ,

peuvent avoir des valeurs différentes, dans les deux fonctions P et Q. Ces coefficients peuvent aussi être différentes sur les lignes ou sur les points choisis vers lesquels sont attirées ou repoussées les autres lignes.

## **II.2. Traitement des conditions aux frontières :**

### **II.2.1. Répartition des points sur les contours du champ physique :**

La répartition des points sur la frontière externe, les contours des obstacles et sur les coupures est effectuée par la fonction de condensation « Stretching ». Les coordonnées des points sont introduites, à partir d'une origine choisie, en partant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

### **II.2.2. Répartition des points sur les contours du champ transformé :**

La répartition des points dans le champ transformé dépend de la configuration choisie, une variété de configurations du champ transformé existe. Elle dépend essentiellement du type de domaine d'étude, celui-ci pouvant être simplement, doublement connexe ou multi-connexe. Par ailleurs, cette multitude de configurations dépend aussi d'une part du nombre de segments par lesquels sont représentés les contours des obstacles et la frontière externe, d'autre part du type de disposition des segments des contours et des coupures sur les côtés du rectangle (le champ transformé).

Pour cela, la première étape consiste à choisir les points localisés sur les frontières (fictives ou réelles) du domaine physique, qui correspondent aux extrémités du champ transformé (les points sommets du rectangle).

Pour les domaines doublement connexes, les segments correspondant à la frontière externe et au contour de l'obstacle sont représentés sur deux côtés opposés du champ transformé. Les deux autres côtés du rectangle correspondent, dans ce cas, à des segments de coupure (Figure.II.2)

Pour les domaines multi-connexes, le contour d'un obstacle ainsi que la frontière externe peuvent correspondre à un ou plusieurs segments dans le champ transformé. Ces segments ainsi que ceux des coupures peuvent être représentés soit sur plusieurs côtés soit sur le même côté du rectangle (Figure.II.3). Dans ce cas également, l'égalité du nombre de points sur les deux côtés opposés du rectangle est toujours vérifiée. Les segments de coupure d'une même paire sont positionnés nécessairement sur le même côté du rectangle ou sur deux côtés opposés

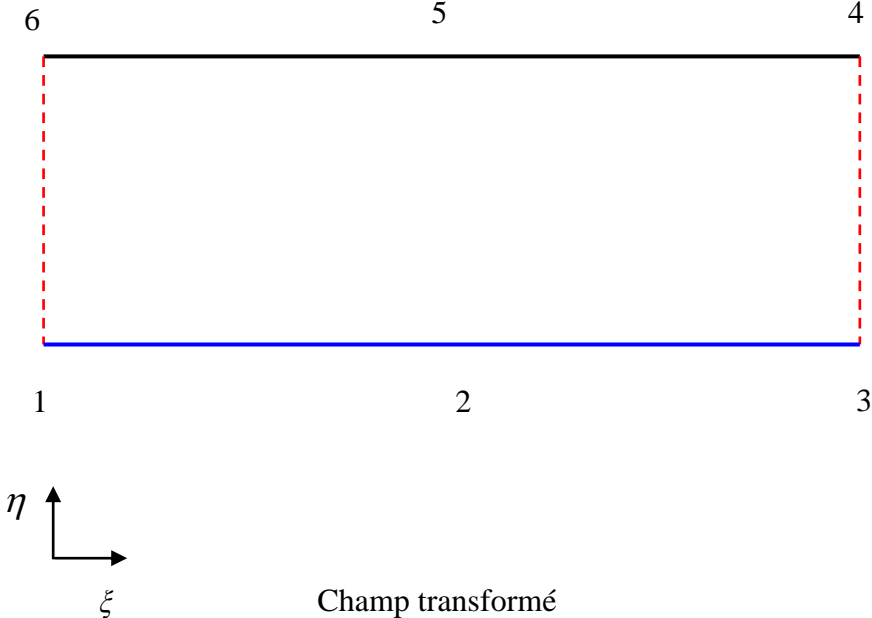
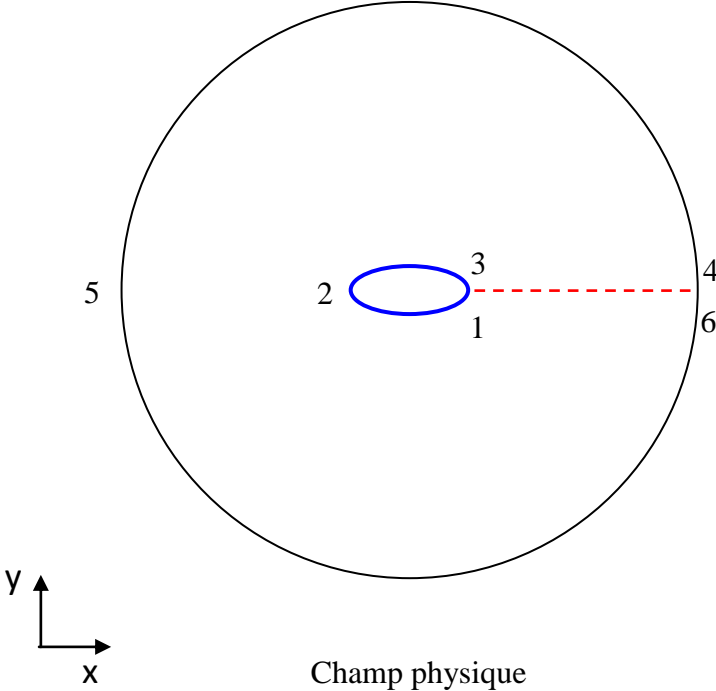
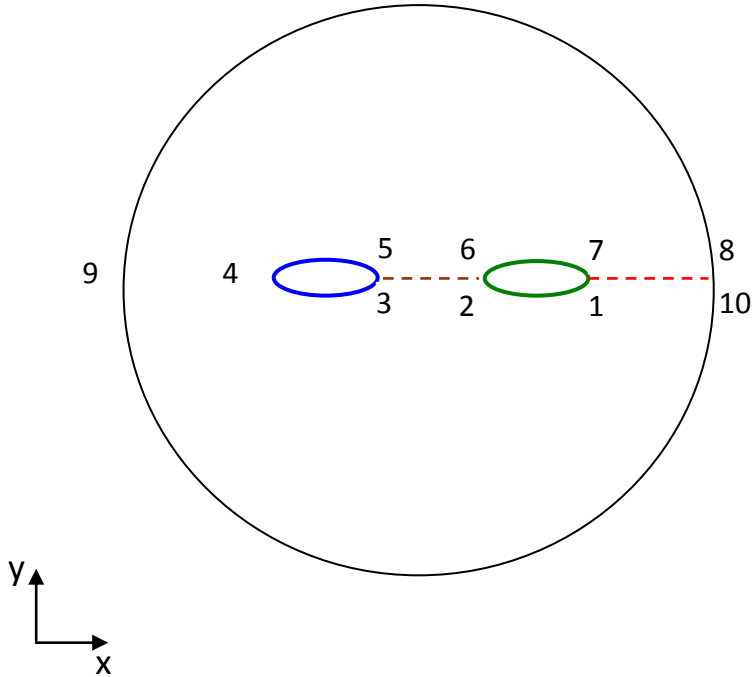
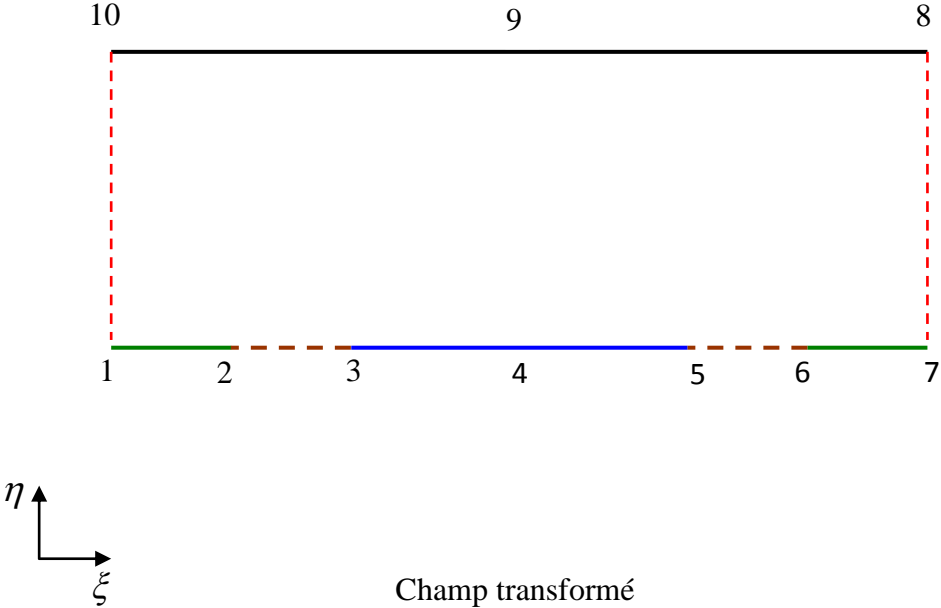


Figure.II.2. Transformation d'un domaine doublement connexe.



Champ physique



Champ transformé

Figure.II.3.Transformation d'un domaine multi-connexe

### II.3. Résolution numérique :

La résolution du système (II.2) est effectuée dans le champ transformé aux coordonnées curvilignes  $(\xi, \eta)$ . Le domaine discret est un rectangle monobloc.

Les segments sur les cotés correspondent aux frontières des obstacles et à la frontière du champ physique. Ils peuvent aussi correspondre à des frontières fictives obtenues par introduction d'une ou plusieurs coupures dans le domaine d'étude.

Notons que le domaine transformé est adimensionné en prenant les pas  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ , les variables indépendantes  $\xi$  et  $\eta$  se réduisent alors à des simples indices  $i, j$ .

#### II.3.1. Discrétisation des équations :

Les équations aux dérivées partielles sont approchées par des équations algébriques, en discrétisant les opérateurs de dérivation par des schémas aux différences finies centrées d'ordre 2, nous obtenons les équations suivantes pour  $x$  (de même pour  $y$ ) :

$$\begin{aligned} \alpha(X_{i+1,j} - 2X_{i,j} + X_{i-1,j}) - 0.5\beta(X_{i+1,j+1} - X_{i-1,j+1} - X_{i+1,j-1} + X_{i-1,j-1}) + \gamma(X_{i,j+1} - 2X_{i,j} + X_{i,j-1}) \\ + 0.5\delta P(X_{i+1,j} - X_{i-1,j}) + 0.5\delta Q(X_{i,j+1} - X_{i,j-1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

avec :

$$\alpha = 0.25[(X_{i,j+1} - X_{i,j-1})^2 + (Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1})^2] \quad (\text{II.6})$$

$$\beta = 0.25[(X_{i+1,j} - X_{i-1,j})(Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1}) + (Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})(X_{i,j+1} - X_{i,j-1})]$$

$$\gamma = 0.25[(X_{i+1,j} - X_{i-1,j})^2 + (Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})^2]$$

$$\delta = [(X_{i+1,j} - X_{i-1,j})(Y_{i,j+1} - Y_{i,j-1}) - (X_{i,j+1} - X_{i,j-1})(Y_{i+1,j} - Y_{i-1,j})]^2 / 16$$

Pour :  $i$  variant de 2 à  $I_{\max} - 1$  et  $J$  de 2 à  $J_{\max} - 1$ .

### II .3.2. Algorithme de résolution :

Les équations algébriques discrètes obtenues sont non linéaires ; un processus de calcul itératif est donc nécessaire. Un certain nombre d'algorithmes peuvent être utilisés pour résoudre ces équations, entre autres les méthodes SOR et ADI.

Pour notre étude nous avons choisi la méthode de surrelaxation SOR par points.

A l'aide de cette méthode, l'expression du nième +1 itération de x ou de y, au nœud (i , j) s'écrit :

$$X_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt})X_{i,j}^n + \omega_{opt} \frac{R_{X_{i,j}}^{n+1}}{2(\alpha + \gamma)} \quad (\text{II.7})$$

$$Y_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt})Y_{i,j}^n + \omega_{opt} \frac{R_{Y_{i,j}}^{n+1}}{2(\alpha + \gamma)}$$

avec :  $\omega_{opt}$  paramètre d'accélération de la convergence de la méthode SOR.

$R_{X_{i,j}}^{n+1}$  et  $R_{Y_{i,j}}^{n+1}$  sont les résidus, tel que :

$$R_X - 2 x (i,j) (\alpha + \gamma) = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$R_Y - 2 y (i,j) (\alpha + \gamma) = 0$$

et

$$\begin{aligned} R_X = & \alpha(x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) + 0.5\beta(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1} + x_{i-1,j-1}) + \gamma(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) \\ & + 0.5\delta P(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + 0.5\delta Q(x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

de même pour  $R_Y$ .

### II.3.3.Choix de maillage initial :

Le choix du maillage initial (x,y) avec lequel démarre le processus itératif est fondamental dans la mesure où il accélère la convergence du système non linéaire vers la solution optimale. Pour une compatibilité du maillage avec les conditions aux frontières, la détermination, du maillage initial à partir des coordonnées sur les frontières s'avère nécessaire.

Pour notre travail nous avons retenus comme vecteur initial, le maillage généré par la technique de deux parois.

### II.3.4.Test de convergence :

Les itérations de système (II.7) sont stoppées à la convergence, le critère de convergence est donné par :

$$\text{Max} \left( \left| \frac{X_{i,j}^{k+1} - X_{i,j}^k}{X_{i,j}^{k+1}} \right|, \left| \frac{Y_{i,j}^{k+1} - Y_{i,j}^k}{Y_{i,j}^{k+1}} \right| \right) \leq 10^{-4} \quad (\text{II.10})$$

### II.4. Présentation du code de génération de maillage « Grid » :

Nous présentons dans cette partie le code de calcul qu'on a élaboré, pour effectuer la génération de maillage. Nous avons conçu à cette opération un programme informatique édité en langage C++ a consisté à développer l'algorithme de technique de génération de maillage exposé dans ce chapitre ainsi que les algorithmes des techniques algébriques adoptées pour la génération de maillage initial, dans un seul code appelé « **Grid** ».

**II.4.1. Structure général :**

Le code « Grid » qu'on a développé, est conçu suivant une structure modulaire. Cette dernière signifie qu'il est composé d'une partie principale assurant la gestion globale et d'un ensemble de modules ou sous-programmes.

Dans ce code, le déroulement des calcul est effectué en deux étapes principales de calcul de  $(x,y)$ . La première étape, qui consiste elle-même en plusieurs sous-programmes, permet la détermination des points  $(x,y)$  sur toute la frontière du domaine (frontière externe, frontières des obstacles et les coupures) en partant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ensuite et une fois les coordonnées de toute la frontière déterminées, on passe à la deuxième étape qui permet la détermination des points intérieurs de maillage.

L'exploitation de ce code peut être effectuée pour la génération des maillages indépendamment de la résolution des équation physique.

**II.4.2. Principaux modules :**

Notre code « Grid » est constitué de cinq modules principaux gérés par un programme principal :

**Module 1 :**

Le sous-programme « Lregion », pour le calcul de la longueur d'une région spécifique, c'est-à-dire la longueur entre deux points de contrôle successifs sur la frontière, suivant  $x$  et  $y$ .

**Module 2 :**

Le sous-programme « Lcôte », pour le calcul de la longueur total de chaque côte, suivant  $x$  et  $y$ .

**Module 3 :**

Le sous-programme « Position », pour calculer les coordonnées  $(x, y)$  et déterminer les indices  $(i, j)$  de chaque point incrément sur la frontière.

**Module 4 :**

Le sous-programme « Minitial », pour générer le maillage initial.

**Module 5 :**

Le sous-programme «Poisson », pour déterminer la distribution des nœuds internes de maillage par résolution des équations de Poisson.

**II.4.3. Entrée du code :**

CHOIX : Choix de technique de génération de maillage.

$N, M$  : Les dimensions des tableaux  $x$  et  $y$ .

NNS : Le nombre de points spécifiques sur toute la frontière. XPC [NNS], YPC [NNS] : Les coordonnées des points spécifiques.

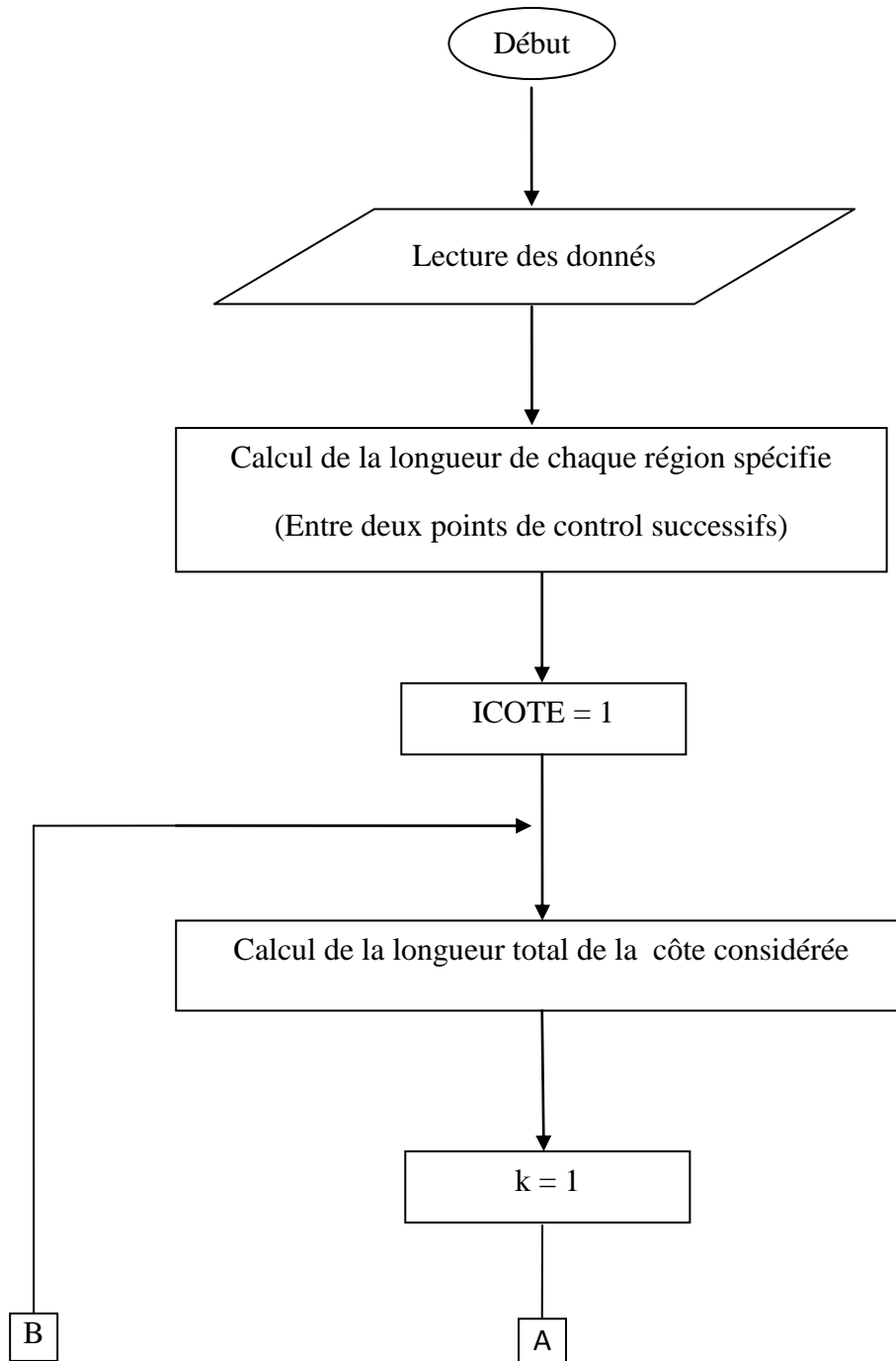
OMEGA : Le paramètre de relaxation du schéma itératif SOR.

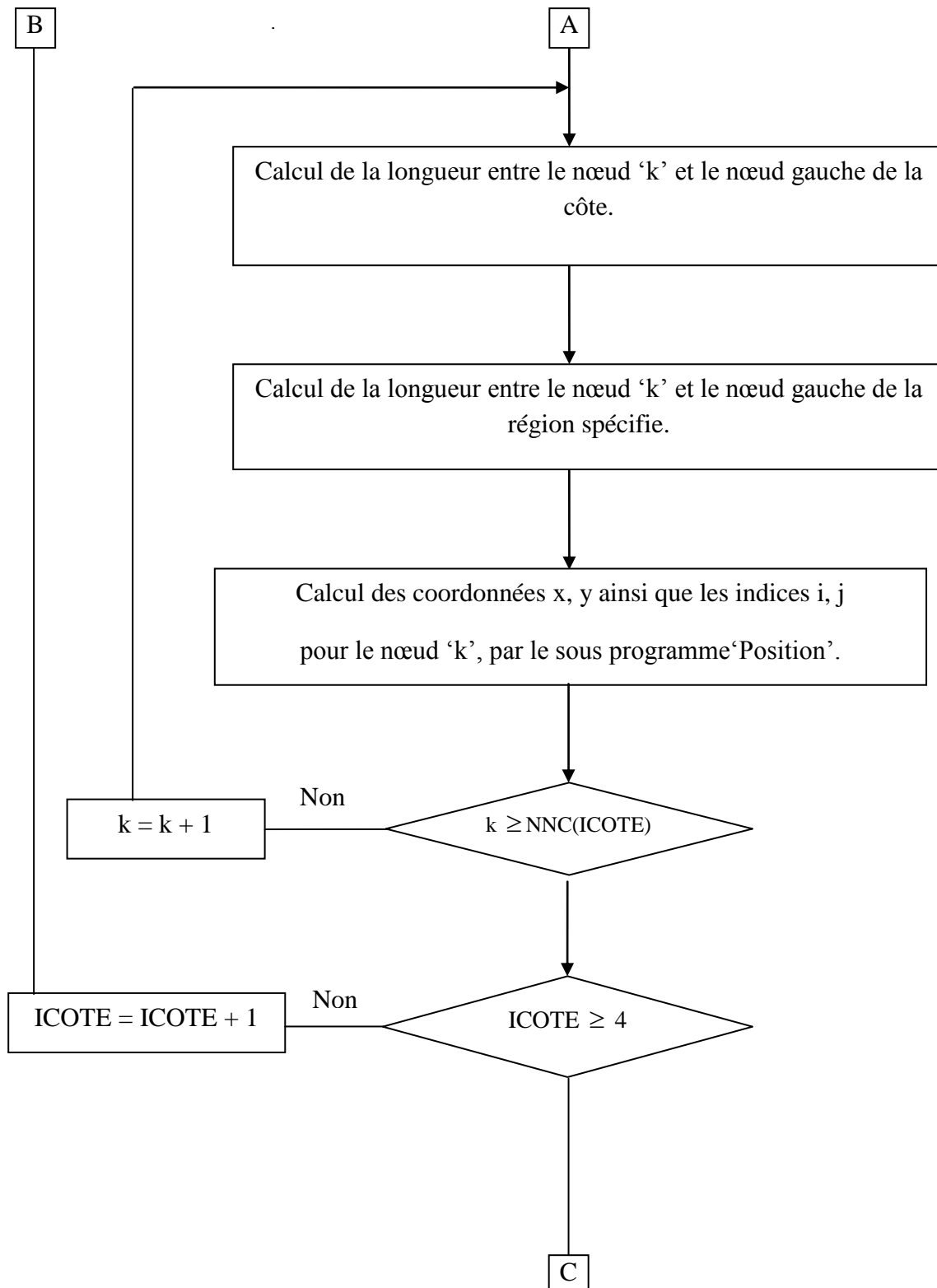
EPS : La précision voulue pour le schéma itératif SOR.

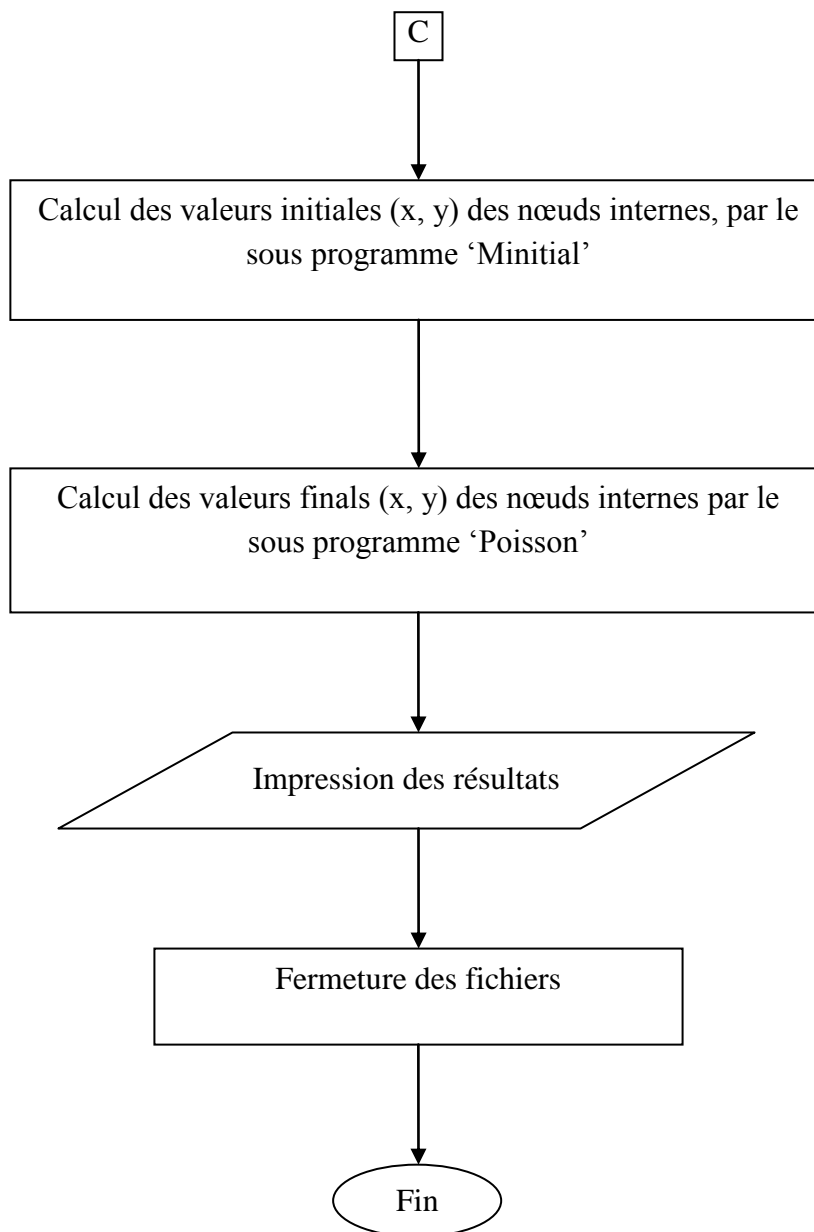
$a1 [4], b1[4]$  : Coefficients de la fonction de condensation Stretching pour chaque cote.

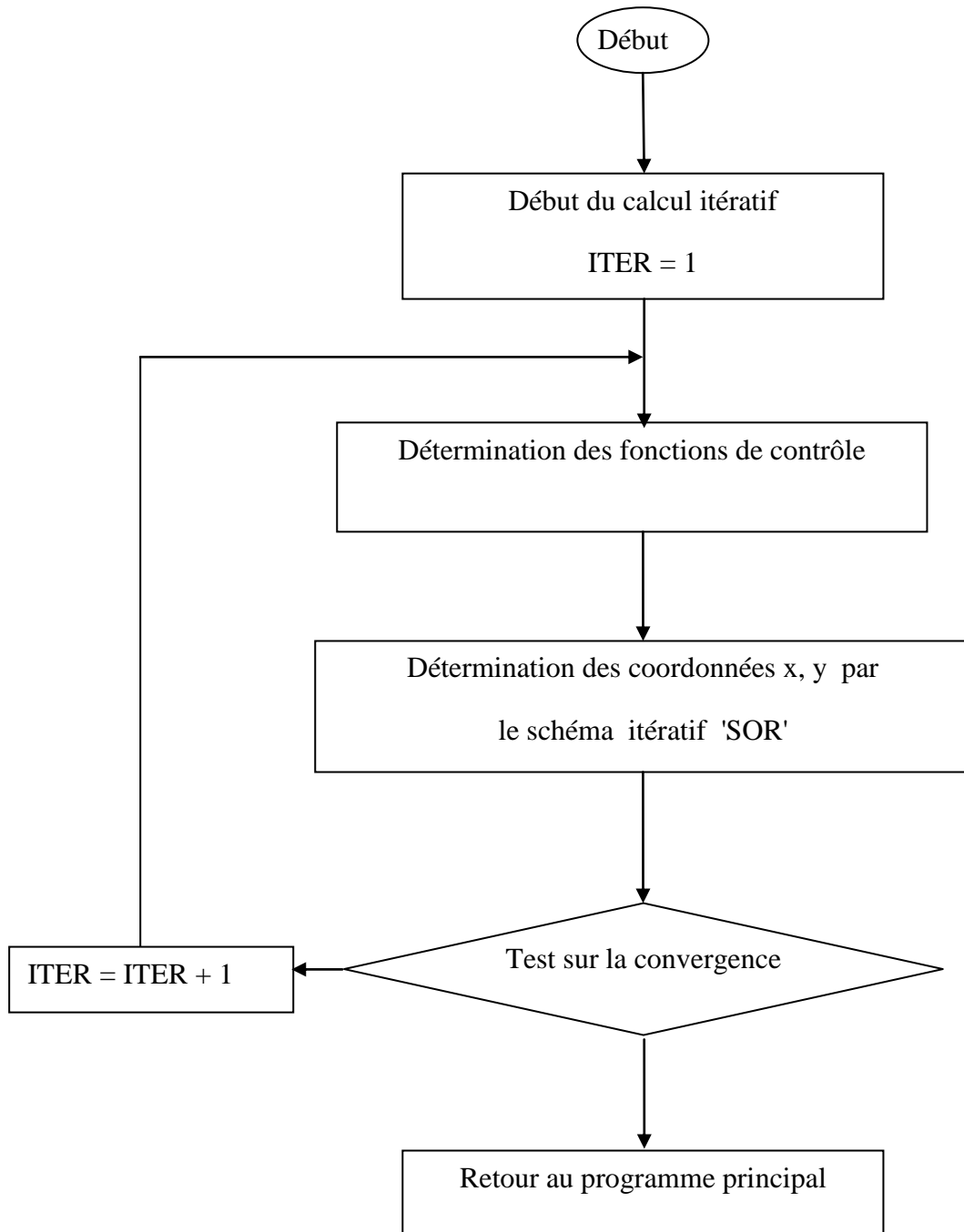
$L \max$	}	: Données utilisées pour les fonctions de contrôle.
$M \max$		
$LM$		
$AKSIP[LM]$		
$ETAP[LM]$		
$A[L \max]$		
$B[M \max]$		
$C[L \max]$		
$D[M \max]$		

Le cheminement de calcul du code 'GRID' est résumé par l'organigramme suivant :

**Organigramme de calcul de code « Grid » :**





**Organigramme du sous-programme «Poisson » :**

Chapitre III

Simulation d'un écoulement  
incompressible

**III-1 Equations générales de base :**

Les équations utilisées pour résoudre les écoulements incompressible dérivent, généralement des équations de Navier-Stokes et sont accompagnées d'hypothèses simplificatrices, associées à des considérations sur la géométrie ou les bilans énergétiques . En dehors du repère absolu, les équations peuvent aussi s'exprimer dans le repère relatif, en termes de la fonction de courant ou encore des variables exprimant sa courbure.

**III-1-1 Equation de continuité ( loi de conservation de la masse ) :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{III.1})$$

**III-1-2 Equation de quantité de mouvement (loi de conservation de la quantité de mouvement) :**

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left[ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho g + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right\} + \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \vec{V} \right] \quad (\text{III.2})$$

(1)            (2)            (3)            (4) (5)            (6)            (7)

Les termes 1, 2, et 3 de l'équation III.2 représentent l'accélération totale, convective, et locale. Le terme 4 représente la force de pression, le terme 5 la force de la pesanteur, les termes 6 et 7 les effets visqueux, où normalement la viscosité de dilatation est considérée comme nulle (c'est-à-dire  $\lambda = -\frac{2}{3} \mu$  d'après l'hypothèse de Stokes). Pour les écoulements laminaires incompressibles, la densité et la viscosité sont supposées constantes dans les équations III.1 et III.2. Ces équations représentent un ensemble complet de quatre équations pour quatre inconnues, à savoir, la pression et les trois composantes de la vitesse. Pour des écoulements non visqueux, les deux derniers termes dans l'équation III.2 sont nuls. Dans la plupart des écoulements , le cinquième terme de l'équation III.2,  $\rho g$ , est négligé.

**III-1-3 Equation de l'énergie (loi de conservation de l'énergie) :**

L'équation d'énergie est basée sur l'équation thermodynamique, elle s'utilise sous la forme:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \Phi \quad (\text{III.3})$$

où  $\Phi$  est le fonction de dissipation, représentant l'équivalent thermique de l'énergie mécanique liée à la dissipation visqueuse et les efforts de cisaillement :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \tau_{ij} \\ &= \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

Le premier terme de gauche de l'équation III.3 représente la variation d'enthalpie ;  $Dp/Dt$  et  $\Phi$  sont les taux de travail des efforts de pression et de cisaillement,  $\nabla \cdot (k \nabla T)$  le transfert de chaleur par conduction dans le fluide où  $k$  est le coefficient de conductivité thermique . Pour des écoulements compressibles, le transport et la génération d'énergie sont couplés à la dynamique du mouvement du fluide, et donc l'équation d'énergie (Eq. III.3) doit être résolue en même temps que les équations de continuité et de quantité de mouvement. En outre, une équation complémentaire associant la densité à la pression et à la température est nécessaire. Pour un gaz idéal, l'équation d'état est donnée par

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (\text{III.4})$$

Les équations III.1 à III.4 fournissent six équations (dans l'écoulement tridimensionnel) pour six inconnues :  $\vec{V}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ .

### III-2 Simulation d'un écoulement incompressible autour d'un profil d'aile :

Dans cette partie nous présentons l'application de la méthode de génération de maillage, développée précédemment, à un écoulement d'air subsonique autour d'un profil d'aile de type NACA 0012, pour déterminer les caractéristiques aérodynamiques.

#### III-2-1 Hypothèses :

Considérons l'écoulement bidimensionnel, stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait (homogène, incompressible et non visqueux). On supposera de plus qu'il n'y a pas de décollement de l'écoulement de la surface du corps.

La bidimensionalité de l'écoulement est assurée pour une section d'aile assez loin des extrémités, afin de négliger les effets de bord.

L'hypothèse d'irrotationnalité, qui suppose que le fluide part de l'état de repos ou d'écoulement uniforme sous l'influence de forces dérivant d'un potentiel.

L'écoulement résultant à chaque instant est alors irrotationnel.

#### III-2-2 Equations de l'écoulement :

Les équations qui régissent l'écoulement peuvent souvent être simplifiées pour fournir des formes plus appropriées pour le traitement analytique ou numérique.

Pour un écoulement incompressible stationnaire d'un gaz parfait, les gradients de viscosité sont faibles. Les termes visqueux des équations de quantité de mouvement peuvent alors être simplifiés et l'équation d'énergie n'est pas prise en compte. Dans ce dernier cas, l'équation de continuité est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{III.5})$$

et l'équation de quantité de mouvement, négligeant les effets de la pesanteur, par :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (\text{III.6})$$

Un autre niveau d'approximation est constitué par le principe d'irrotationnalité,  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \mathbf{0}$ . Pour le vecteur vitesse dont le rotationnel est nul, on démontre que la vitesse dérive d'un potentiel scalaire  $\phi$  :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \phi \quad (\text{III.6})$$

En substituant cette équation dans l'équation de continuité, on obtient :

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (\text{III.7})$$

Dans l'écoulement potentiel stationnaire et bidimensionnel, l'équation III-7 peut être simplifiée en définissant une nouvelle fonction en liaison avec le champ de vitesses. La fonction de courant pour l'écoulement stationnaire et bidimensionnel peut être définie par :

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{III.8})$$

$$V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

En adoptant ces équations, on satisfait automatiquement l'équation de continuité, qui peut être simplifiée pour donner :

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0 \quad (\text{III.9})$$

qui est l'équation de Laplace en fonction de courant pouvant être résolue sur un domaine par diverses techniques standard. Dans un écoulement bidimensionnel, il est avantageux de résoudre une équation aux dérivées partielles comme III-9 en  $\psi$  plutôt que de résoudre deux équations en  $V_x$  et  $V_y$ . Cette approche est donc largement répandue pour les écoulements bidimensionnels.

Donc l'étude de l'écoulement potentiel consiste essentiellement à résoudre l'équation de **Laplace** pour la fonction de courant  $\Psi$  (III-9), avec les conditions aux frontières :

- Sur la frontière de l'obstacle :

$$\Psi(x, y) = cte$$

- A l'infini :

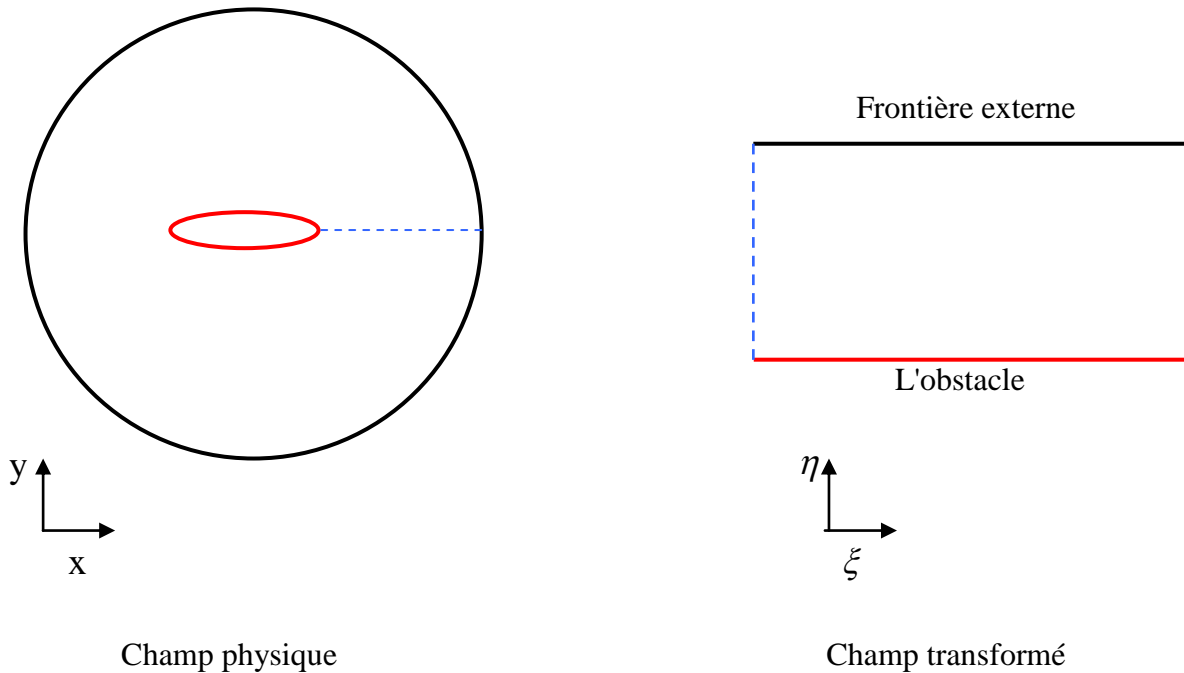
dans le cas générale, l'écoulement arrive avec une vitesse  $V_\infty$  et incidence  $\theta$ , d'où :

$$\Psi(x, y) = y \cos \theta - x \sin \theta$$

La fonction de courant  $\Psi(x, y)$  est adimensionnée relativement à la corde  $C$  du profil d'aile et à la vitesse  $V_\infty$  du fluide à l'infini.

### III-2-3 Transformation de domaine :

Le système, composé de l'équation III-9 et des conditions aux frontières est défini en maillage curviligne, il est nécessaire d'y adjoindre un système de transformation de coordonnées afin d'autoriser les maillages curvilignes. On distingue ainsi un domaine physique  $(x, y)$ , correspondant à la réalité de l'écoulement, et un domaine de calcul  $(\xi, \eta)$ .



**Figure(III.1). Le champ physique et le champ transformé**

le passage de l'un à l'autre étant assuré par le système de transformation de coordonnées

L'équation de Laplace décrivant l'écoulement potentiel, exprimée en fonction des coordonnées curvilignes est donnée par, dans le cas d'un maillage généré sans fonctions de contrôle :

$$\alpha \Psi_{\xi\xi} - 2\beta \Psi_{\xi\eta} + \gamma \Psi_{\eta\eta} + \sigma \Psi_{\eta} + \tau \Psi_{\xi} = 0 \quad (\text{III.10})$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$  et  $\tau$  sont des coefficients obtenus lors de la transformation (Annexe-B-).

avec les conditions aux limites:

- $\Psi(\xi, \eta_1) = \Psi_0$  , sur la paroi du profil.
- $\Psi(\xi, \eta_2) = y(\xi, \eta_2) \cos \theta - x(\xi, \eta_2) \sin \theta$  , Sur la frontière externe.

$\eta_1$  et  $\eta_2$  correspondant à la valeur de l'ordonnée curviligne  $\eta$  du profil et de la surface externe du domaine d'étude, respectivement.

#### III.2.4. Condition de Kutta-Joukowski :

Cette condition provient de l'étude de l'écoulement autour du bord de fuite observé pour la première fois par le mathématicien allemand Wilhelm Kutta en 1902 et qui permet de trouver une valeur unique de la circulation au bord de fuite du profil [7]. .

Afin d'examiner l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible, nous tiendrons compte de deux formes différentes pour la géométrie du bord de fuite du profil et nous exprimerons la condition de Kutta comme suit :

a) Pour un profil se terminant par un dièdre, le bord de fuite lui-même est un point d'arrêt.

Soit les vitesses de l'écoulement au bord de fuite, BF,  $V_e$  tangente à l'extrados et  $V_i$  tangente à l'intrados ; on a deux vitesses de directions différentes en un même point BF, ce qui n'est possible que si les deux vitesses sont nulles et que le point BF est un point d'arrêt où

$$V_e = V_i = 0.$$

b) Pour un profil se terminant par un point de rebroussement, la vitesse à l'extrados et à l'intrados au bord de fuite a la même valeur finie. Dans ce cas, les vitesses  $V_e$  et  $V_i$  ont la même direction au point BF et ont toutes deux une valeur finie. Cependant, la pression au bord de fuite a une valeur unique  $P_{BF}$  et l'équation de Bernoulli, appliquée à l'extrados et à l'intrados du profil dans la proximité du bord de fuite, conduit à :

$$P_{BF} + \frac{1}{2} \rho V_e^2 = P_{BF} + \frac{1}{2} \rho V_i^2$$

Il en résulte que  $V_e = V_i$ ,

**III-2-5 Détermination de champ de vitesse :**

La détermination de la fonction de courant  $\Psi$  nous permettra de déterminer les composantes du vecteur vitesse dont les expressions dans le plan transformé sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{(x_{\xi} \Psi_{\eta} - x_{\eta} \Psi_{\xi})}{J} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{(y_{\xi} \Psi_{\eta} - y_{\eta} \Psi_{\xi})}{J} \end{array} \right. \quad (\text{III.11})$$

La paroi de l'obstacle confondue avec la ligne coordonnée  $\eta = \eta_1$ , correspond à une ligne de courant, d'où  $\Psi_{\xi} = 0$ . De là, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{x_{\xi} \Psi_{\eta}}{J} \\ v = \frac{y_{\xi} \Psi_{\eta}}{J} \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

**III-2-6 Détermination de coefficient de pression :**

Le coefficient de pression  $C_p$  permet d'indiquer les pressions sous forme adimensionnelle. Il s'agit du rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie .

$$C_p = \frac{\Delta p}{\left( \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \right)} \quad (\text{III.13})$$

où :  $\Delta p = p - p_{\infty}$

$p$  = pression local .

L'application de l'équation de Bernoulli donnée par :

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte \quad (\text{III.14})$$

entre l'infini et un point quelconque sur la frontière de l'obstacle donne :

$$\begin{aligned}
 p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 &= p + \frac{1}{2} \rho V_t^2 \\
 \Rightarrow p - p_\infty &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \left( 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2} \right) \\
 \Rightarrow \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} &= 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2} \quad (\text{III.15})
 \end{aligned}$$

$$(\text{III.13}) \text{ et } (\text{III.15}) \Rightarrow C_P = 1 - \frac{V_t^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \Psi_\eta^2$$

En fin, on peut écrire :

$$C_P = 1 - \frac{\gamma}{J^2} \Psi_\eta^2 \quad (\text{III.16})$$

**III-3 Résolution numérique :****III-3-1 Discrétisation de l'équation :**

Par application des schémas aux différences finies à l'équation (III.10) on obtient l'équation discrète suivante pour la fonction de courant  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} = & \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}) - \frac{\beta}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j+1} - \Psi_{i+1,j-1} - \Psi_{i-1,j+1} + \Psi_{i-1,j-1}) \\ & + \frac{\gamma}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) + \frac{\tau}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}) + \frac{\sigma}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

avec  $i$  varie de 2 à  $i_{\max} - 1$  et  $j$  de 2 à  $j_{\max} - 1$ .

Les opérateurs de dérivation de l'équation (III.10) sont également approchés à la coupure par des schémas aux différences finies d'ordre deux. Cependant, vu que la coupure est considérée comme frontière fictive, une transformation de ces schémas est alors nécessaire. Cette transformation, basée sur la vérification de la propriété de continuité à la coupure, est fonction de la disposition des segments de cette coupure sur les cotés du rectangle (champ transformé).

L'équation précédente, discrétisée à la coupure, est donnée pour le premier segment de coupure par :

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j} = & \frac{\alpha}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j} + \Psi_{i_{\max}-1,j}) - \frac{\beta}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j+1} - \Psi_{2,j-1} - \Psi_{i_{\max}-1,j+1} + \Psi_{i_{\max}-1,j-1}) \\ & + \frac{\gamma}{2(\alpha + \gamma)} (\Psi_{1,j+1} + \Psi_{1,j-1}) + \frac{\tau}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{2,j} - \Psi_{i_{\max}-1,j}) + \frac{\sigma}{4(\alpha + \gamma)} (\Psi_{1,j+1} - \Psi_{1,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Pour  $i = 1$  et  $j$  allant de 2 à  $j_{\max} - 1$ .

La même discrétisation pour le deuxième segment de coupure ( $i = i_{\max}$ ), puisque les deux segments sont superposés

**III-3-2 Algorithme de résolution :**

Les équations discrétisées (III.17) et (III.18) de la fonction de courant  $\Psi$  sont résolues numériquement par la méthode de surelaxation (SOR) par points.

A l'aide de cette méthode, l'expression du nième +1 itération de  $\Psi$ , au nœud (i, j)

S'écrit :

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega_{opt})\Psi_{i,j}^n + \omega_{opt} \Psi_{i,j}^n$$

où :

$\omega_{opt}$  : Coefficient d'accélération de convergence de la méthode de surelaxation SOR.

$\Psi_{i,j}^n$  : Donnée par les équations (III.17) et (III.18).

La vérification de la convergence de la solution de  $\Psi$  est effectuée par le test suivant :

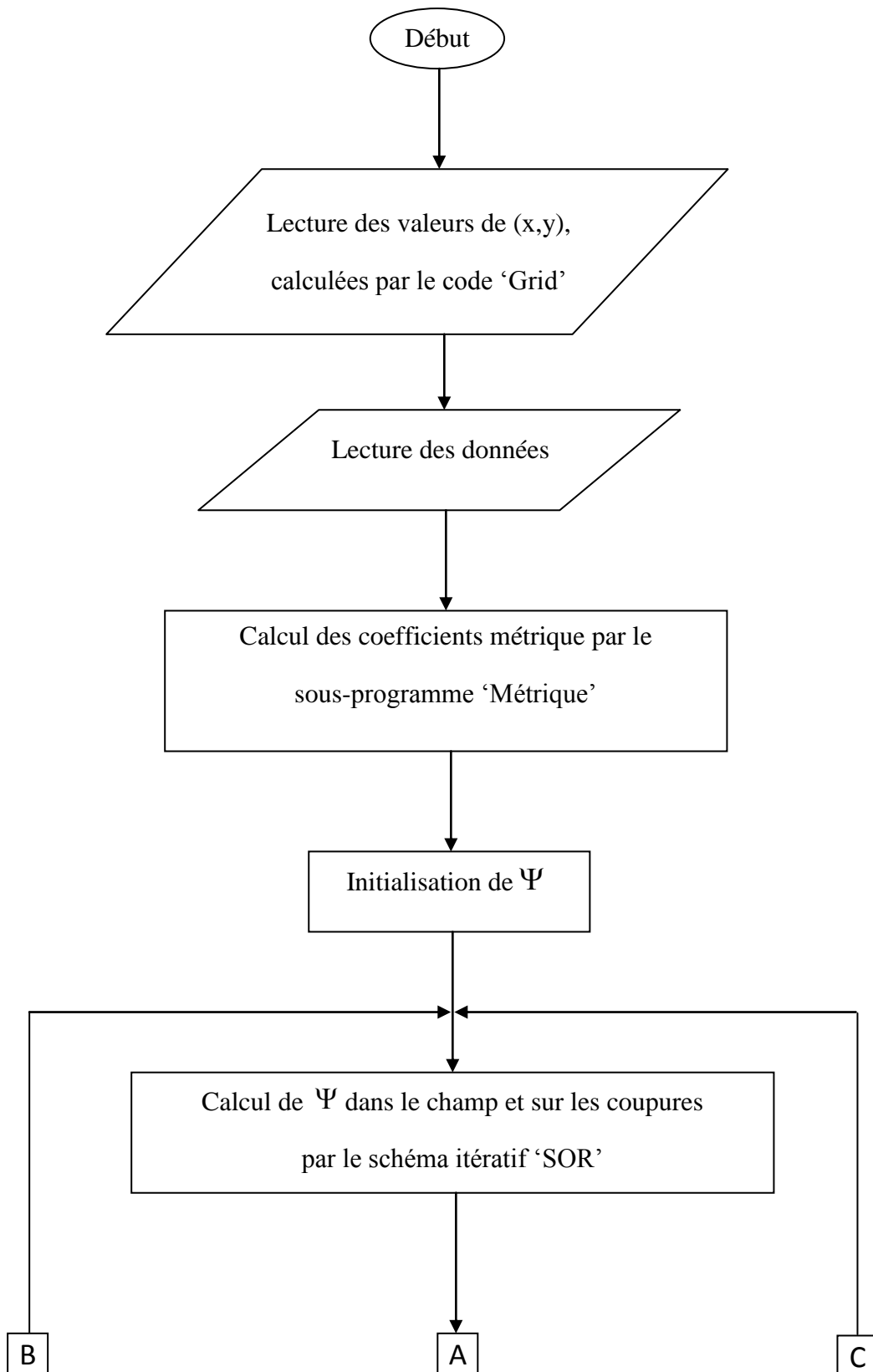
$$\text{Max} \left| \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n}{\Psi_{i,j}^{n+1}} \right| \leq 10^{-4}$$

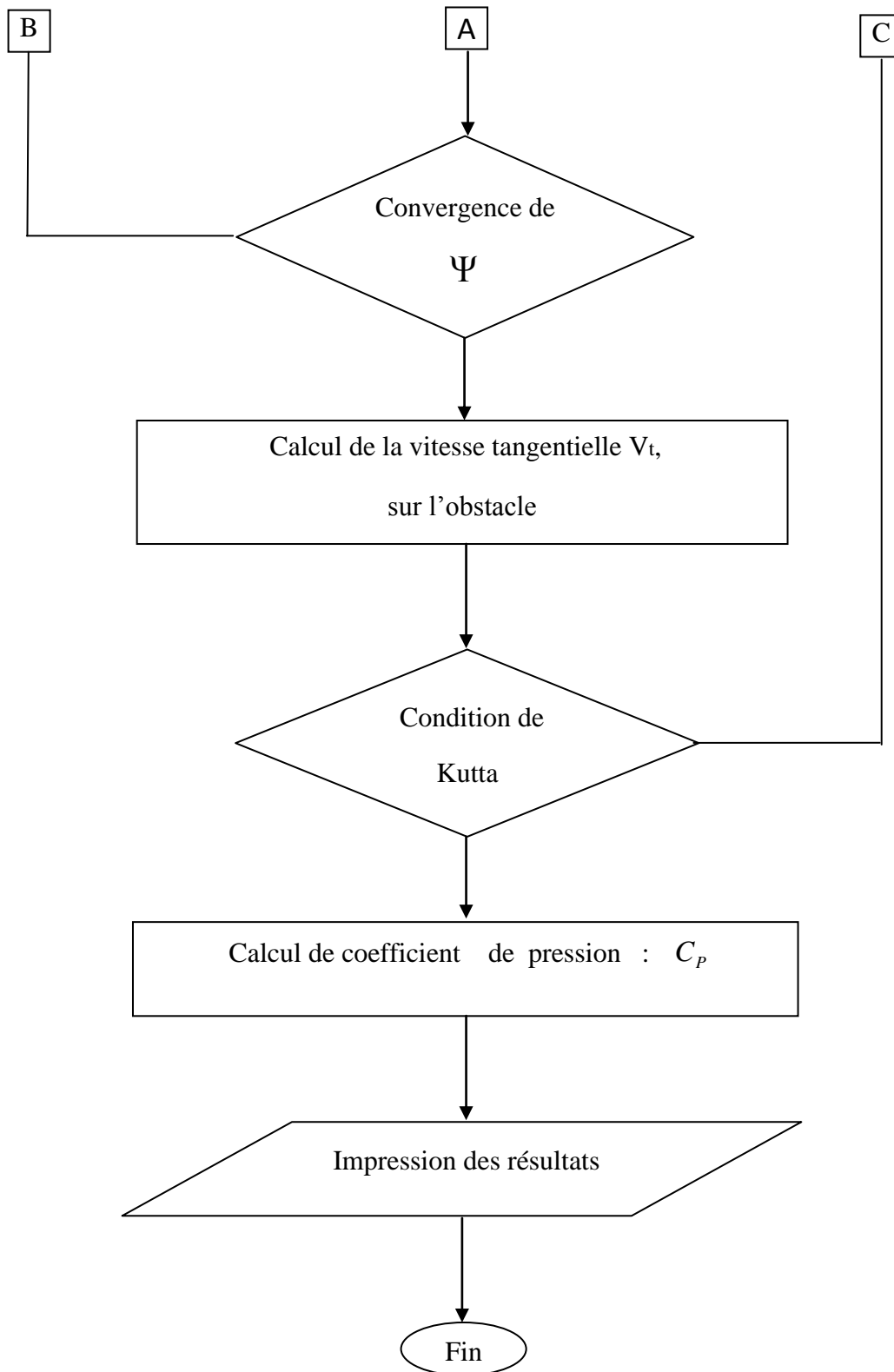
**III-3-3 Présentation de code Flow :**

Le code 'Flow' qu'on a conçu permet la résolution de l'équation de courant  $\Psi$  dans le champ transformé par application de la méthode de génération de maillage, ainsi que la détermination de coefficient de pression.

Ce code est composé de trois modules principaux, le premier permet de calculer les coefficients métriques aux différents points du maillage généré par le premier code ( grid) ,le calcul de ces coefficients est effectué par des schémas approchés aux différences finies. Ces schémas diffèrent les uns des autres suivant la position du point étudié, à l'intérieur de domaine physique, sur les coupures ou sur le contour des obstacles. Le deuxième module permet de calculer ' $\Psi$ ' à l'intérieur du domaine et sur les coupures par le schéma itératif 'SOR' et le troisième module permet de déterminer le coefficient de pression.

Le cheminement de calcul du code 'Flow' est résumé par l'organigramme suivant :

**Organigramme de calcul de code « Flow » :**



Chapitre IV

# Analyse des Résultats

Nous exposons, dans ce chapitre, quelques résultats que nous avons obtenus par utilisation de code « Grid » décrit dans le chapitre II, pour la génération de maillage et le code « Flow » décrit dans le chapitre III pour la détermination de l'écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile, ainsi l'analyse de stabilité et convergence du schémas SOR.

La méthode de génération de maillage est mise en valeur par les maillages que nous avons générés pour des domaines d'études simplement connexes, doublement connexes ou multi-connexes. Nous présentons également les maillages obtenus par l'utilisation de la fonction de condensation. D'autre part le raffinement de maillage est étudié.

En fin une mise en valeur de la méthode de génération de maillage est effectuée par son application à un écoulement potentiel incompressible stationnaire autour d'un profil d'aile avec une configuration de la frontière externe du domaine de type « O ». Les résultats ont été comparés avec les résultats publiés dans la littérature.

#### **IV.1. Génération de maillage :**

##### **IV.1.1. Domaines d'étude :**

###### **IV.1.1.1. Domaines simplement connexes :**

La méthode de génération de maillage est appliquée et testé sur plusieurs domaines simplement connexes de forme rectangulaire courbée qui représente l'écoulement interne dans une tuyère (Fig.IV.1) ou dans une conduite (Fig.IV.2).

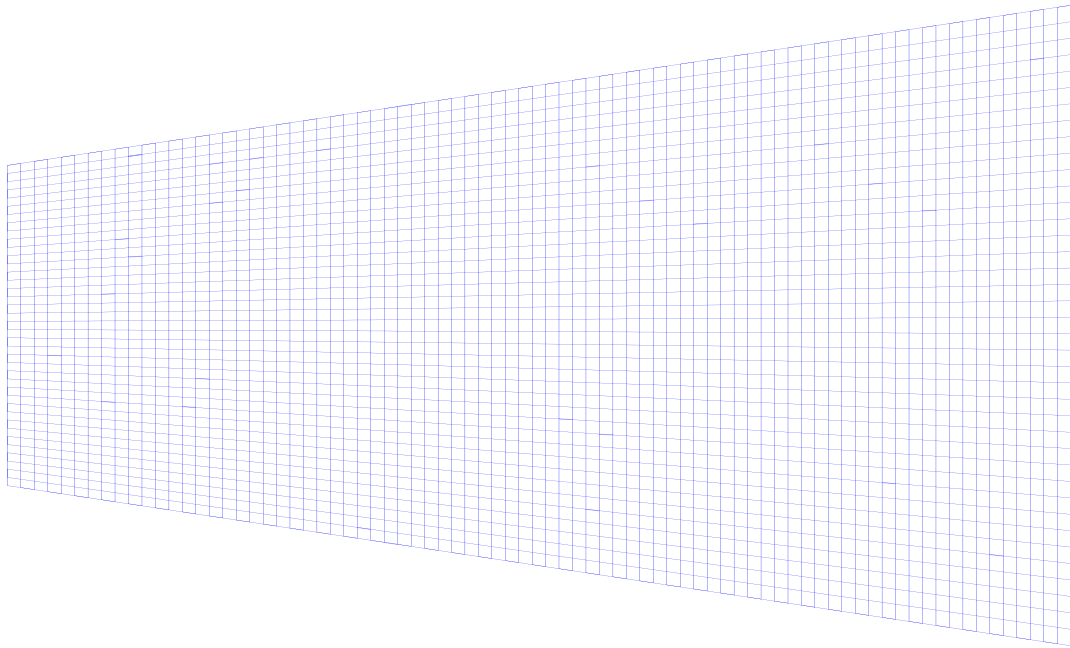
###### **IV.1.1.2. Domaines doublement connexes :**

La génération de maillage est ensuite appliquée au domaines doublements connexes (à un obstacle), pour différentes formes géométriques d'obstacles ; forme cylindrique (Fig.IV.3), forme d'un profil d'aile NACA0012 (Fig.IV.4), (Fig.IV.5) et NACA4412 (Fig.IV.6).

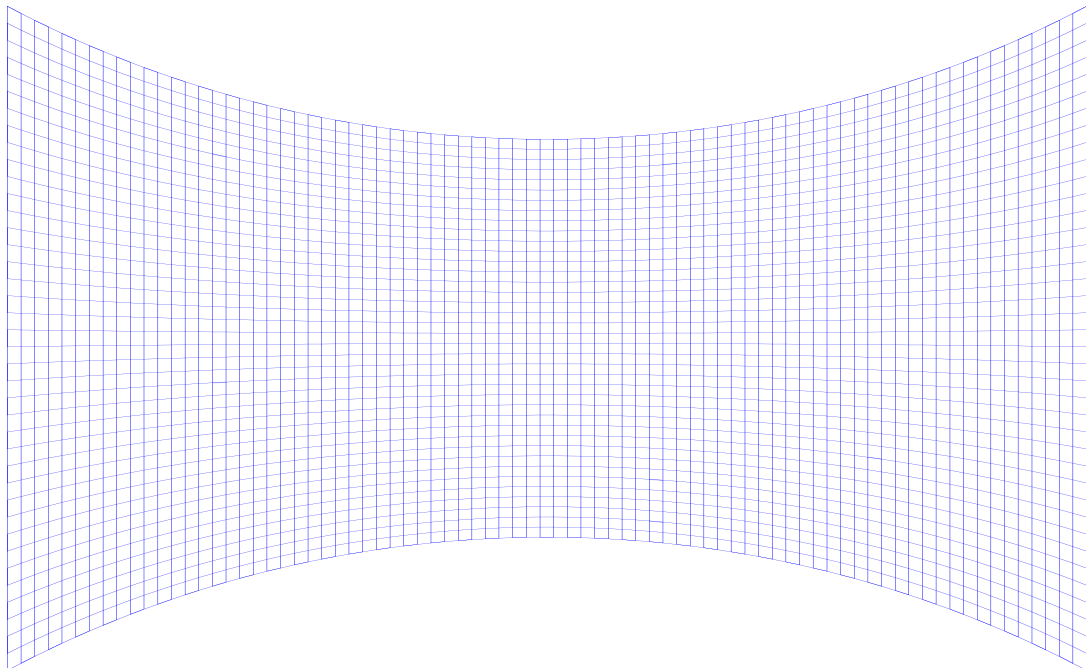
###### **IV.1.1.3. Domaines multi-connexes :**

Les domaines multi-connexes (à deux ou plusieurs obstacles) représentent en générale les champs où la génération de maillages réguliers peut s'avérer très difficile lorsqu'elle s'effectue par des méthodes autres que la méthode elliptique, en particulier par les méthodes algébriques.

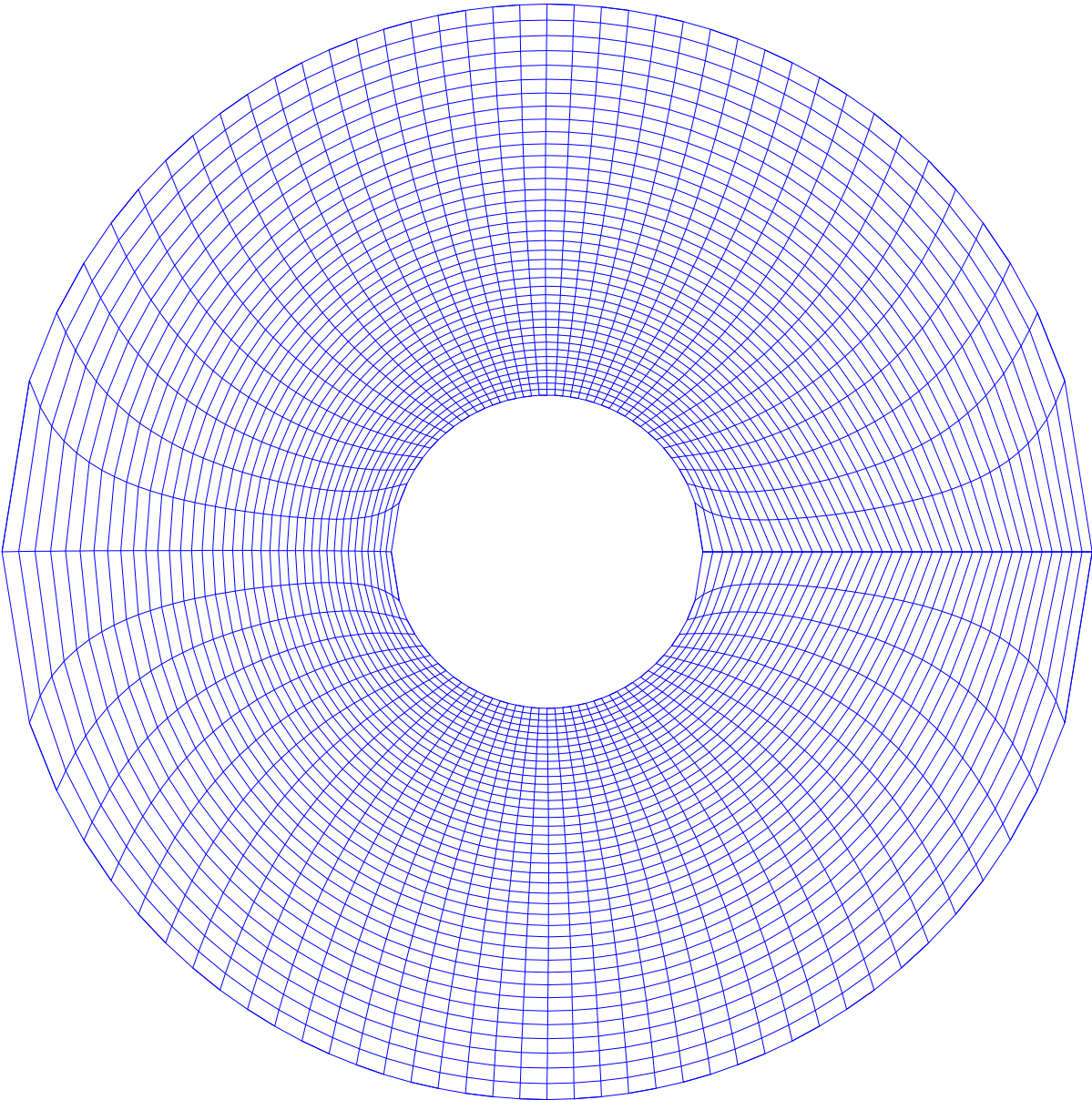
Nous avons représenté dans la figure (Fig.IV.7) L'écoulement autour d'une combinaison aile-empennage, puis l'écoulement autour de deux cylindres (Fig.IV.8).



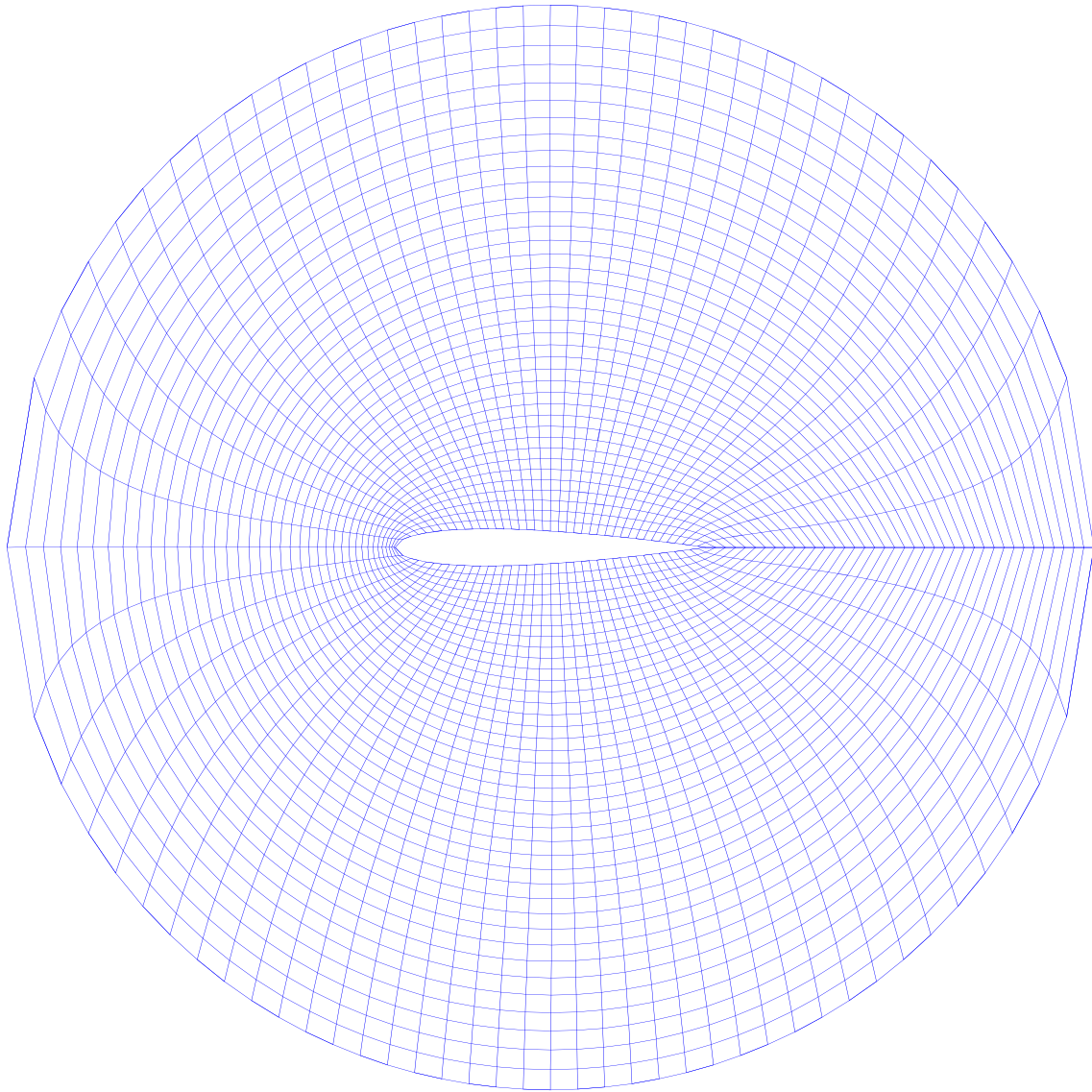
**Fig.IV.1.Maillage d'un domaine simplement connexe  
(écoulement dans une tuyère)**



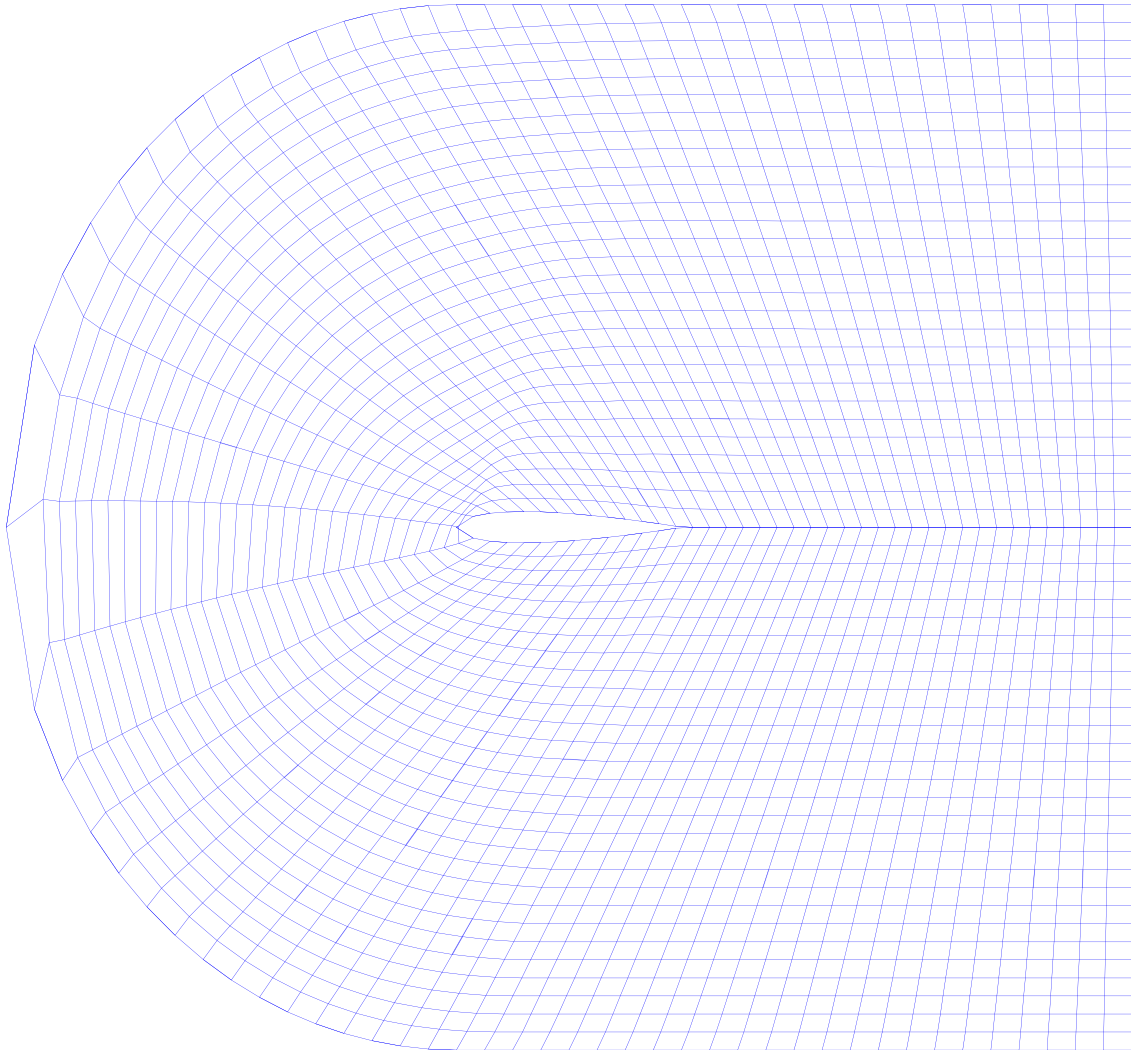
**Fig.IV.2.Maillage d'un domaine simplement connexe  
(écoulement dans une conduite)**



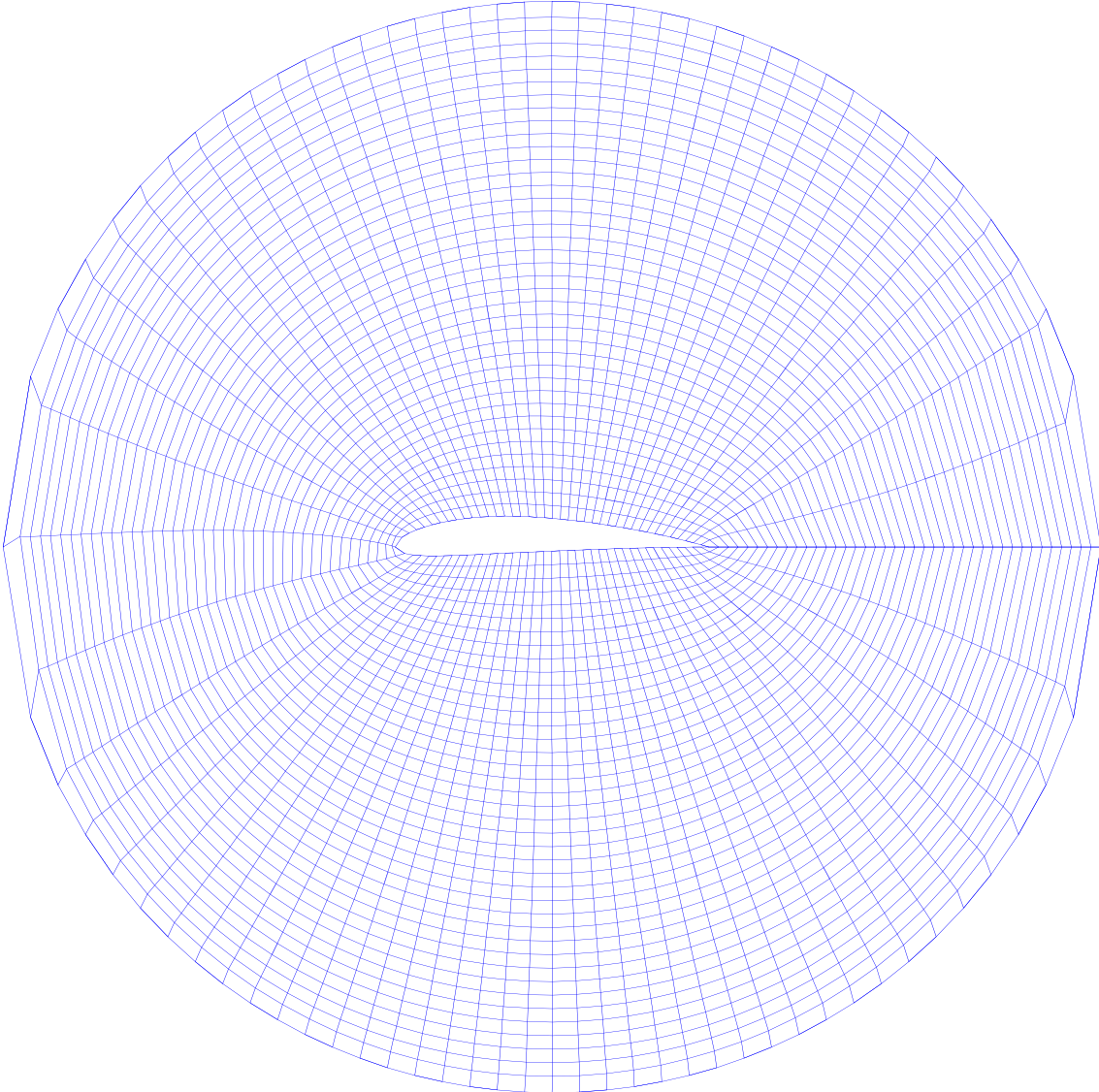
**Fig.IV.3. Maillage autour d'un cylindre.**



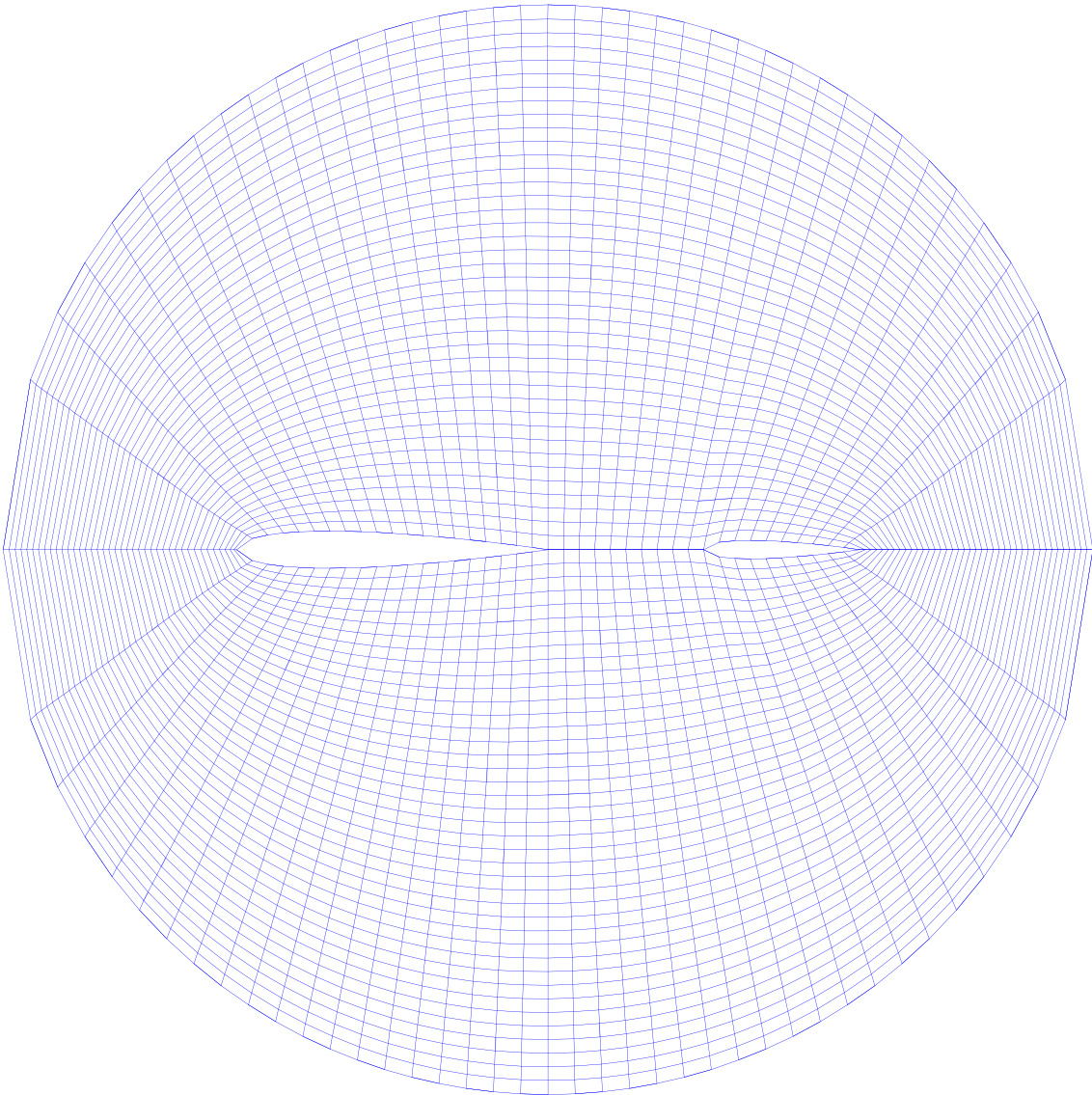
**Fig.IV.4. Maillage autour d'un profil NACA0012  
(avec une frontière externe de type « O »)**



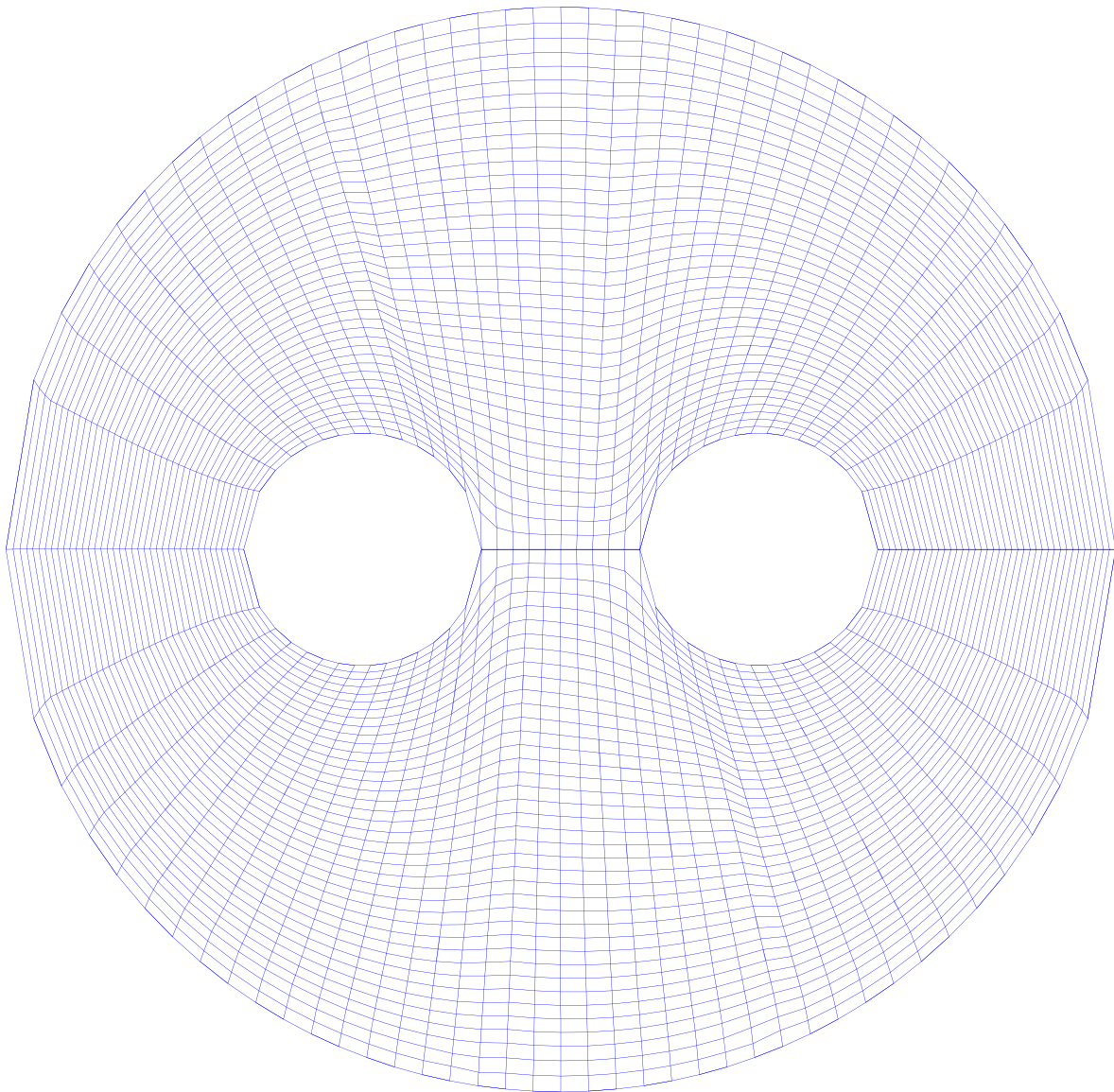
**Fig.IV.5. Maillage autour d'un profil NACA0012  
(avec une frontière externe de type « C »)**



**Fig.IV.6. Maillage autour d'un profil NACA 4412**



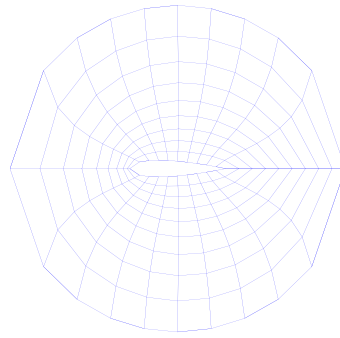
**Fig.IV.7. Maillage autour de deux profils d'ailes**



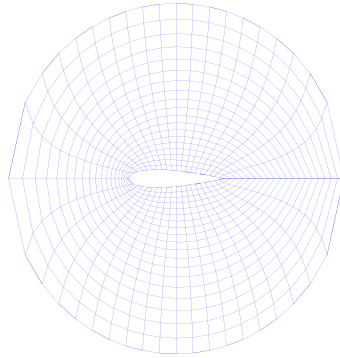
**Fig.IV.8. Maillage autour de deux cylindres**

#### **IV.1.2. Raffinement de maillage :**

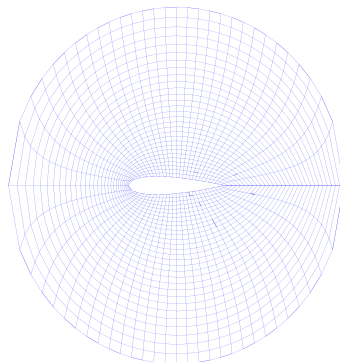
Dans certains problèmes physiques où la précision des calculs est demandée le raffinement de maillage peut jouer un rôle très important. On appelle la solution standard le type de maillage très raffiné, c'est-à-dire qu'au delà de ce raffinement la solution finale (optimale) du problème physique ne change pas. D'autre part, si le problème physique étudié est plus simple et ne nécessite pas la précision des calculs, il est préférable d'utiliser un maillage moins raffiné permet de gagner beaucoup de temps et d'espace mémoire.



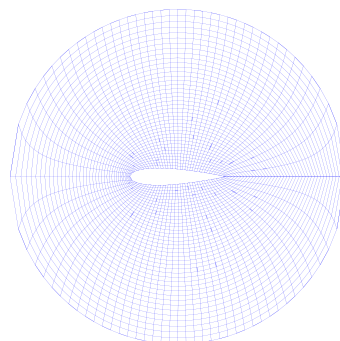
Maillage 21x10



Maillage 41x20



Maillage 61x30



Maillage 81x40

**Fig.IV.9. Raffinement de maillage.**

### IV.1.3. Répartition des lignes coordonnées :

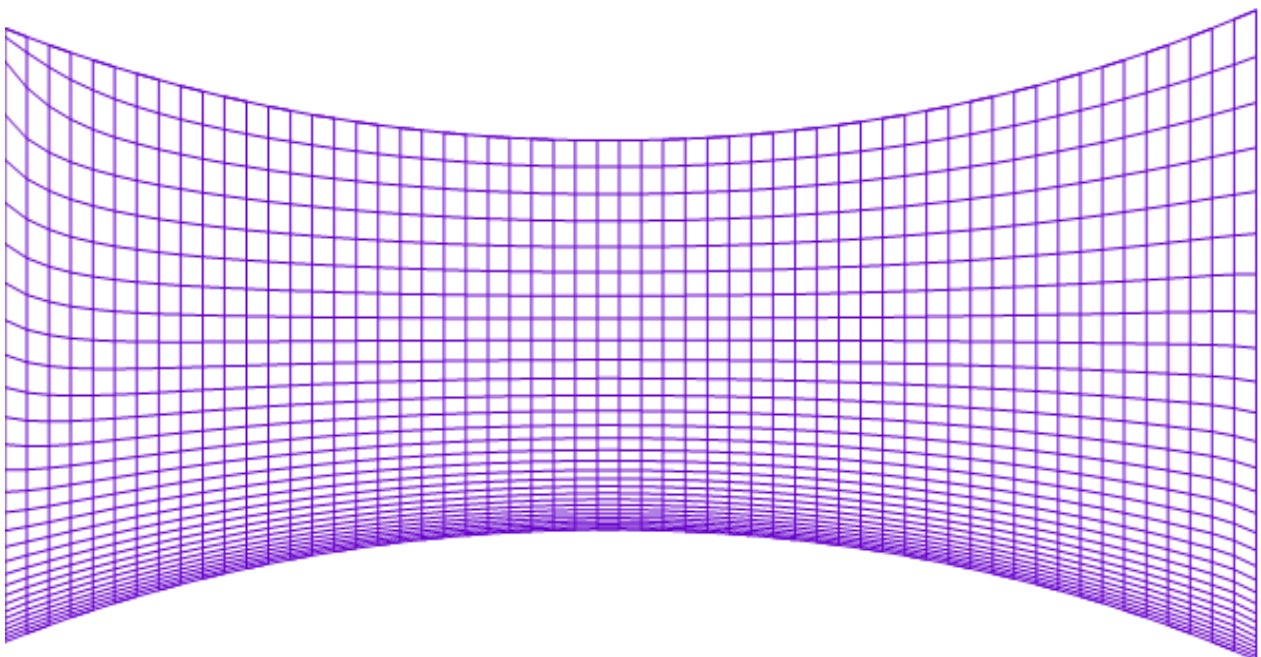
La répartition des lignes coordonnées dans le maillage peut jouer un rôle très important dans certains problèmes physiques. Cette répartition des lignes coordonnées est traduite par la condensation de ces dernières dans des zones bien définies et suivant une direction ( $\xi$  et  $\eta$ ), selon la nature du problème à traiter, tel que des problèmes de couche limite ou de l'apparition d'onde de choc.

Nous avons utilisé la fonction de condensation « Stretching » dans certaines zones de maillage comme, les parois d'une tuyère (Fig.IV.10), où la sortie d'une tuyère (Fig.IV.11). D'après ces figures, on peut constater la régularité de maillage intérieur, cette régularité ne peut être obtenue que par un choix judicieux des paramètres  $a_1$  et  $b_1$  intervenant dans la fonction de condensation « Stretching ». Généralement, ces paramètres sont déterminés après plusieurs essais, en les faisant varier de chaque côté du rectangle (champ transformé).

Les valeurs de ces paramètres, relatives aux exemples que nous avons présentés sont regroupées dans les tableaux suivants :

COTE	COTE 1	COTE 2	COTE 3	COTE 4
a1	1.0	0.1	1.0	0.1
b1	2.0	2.0	2.0	2.0

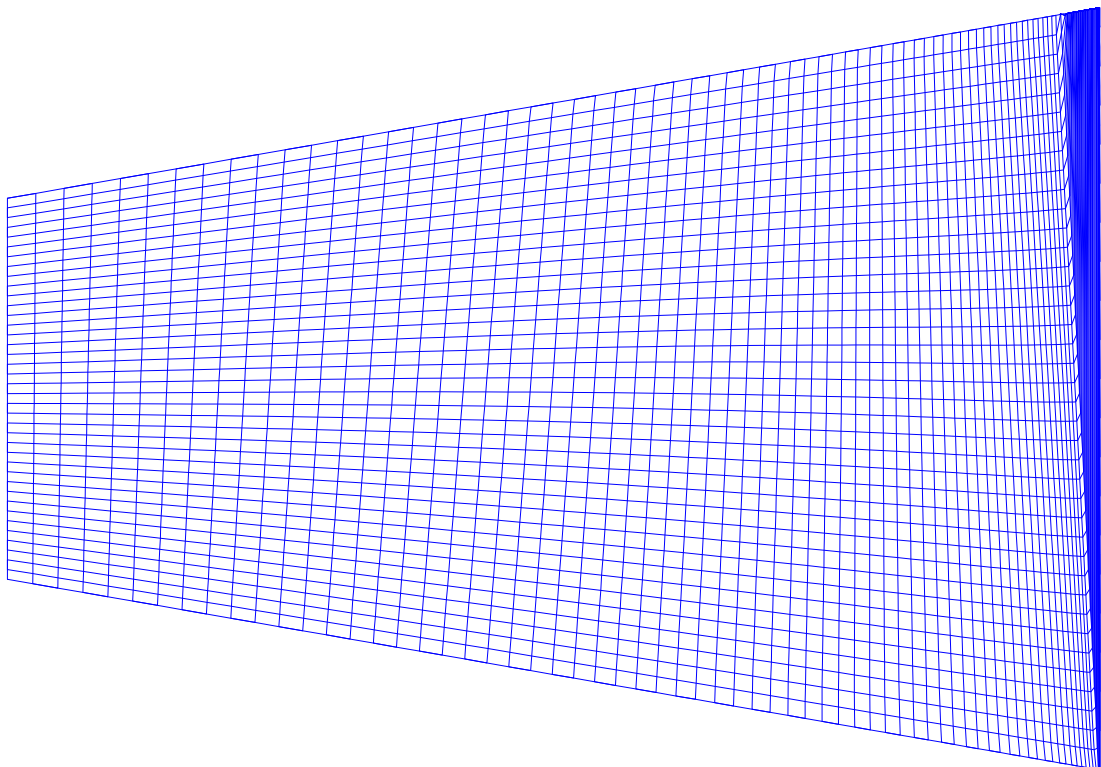
**Tableau IV- 1 : Valeur des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (IV-10)**



**Fig.IV.10. condensation des lignes coordonnées sur le parois d'une tuyère .**

COTE	COTE 1	COTE 2	COTE 3	COTE 4
a1	2.0	1.0	0	1.0
b1	2.0	2.0	2.0	2.0

**Tableau IV-2 : Valeurs des paramètres de la fonction Stretching pour la figure (IV-11-).**



**Fig.IV.11. condensation des lignes coordonnées à la sortie d'une tuyère**

### IV.2 Analyse de stabilité et convergence de schémas SOR :

La convergence du schémas SOR dépend de plusieurs paramètres parmi ces paramètres le facteur de relaxation et le maillage utilisé.

#### IV.2 .1 Effet de paramètre de relaxation :

Nous résumons les résultats concernant les temps du convergence pour différentes valeurs du paramètre de relaxation dans les tableaux suivants :

Paramètre de relaxation $\omega$	1.62	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95	2.2
Nombre d'itérations	178	172	163	141	112	92	98	142	divergence

**Tableau IV-3 : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation ,pour la figure (IV-4).**

**L'erreur  $e = 0.00001$**

Paramètre de relaxation $\omega$	1.62	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90	1.95	2.15
Nombre d'itérations	128	125	108	99	82	66	68	89	divergence

**Tableau IV-4 : Evolution de la convergence en fonction du paramètre de relaxation, pour la figure (IV-4).**

**L'erreur  $e = 0.0001$**

## Nombres d'itérations

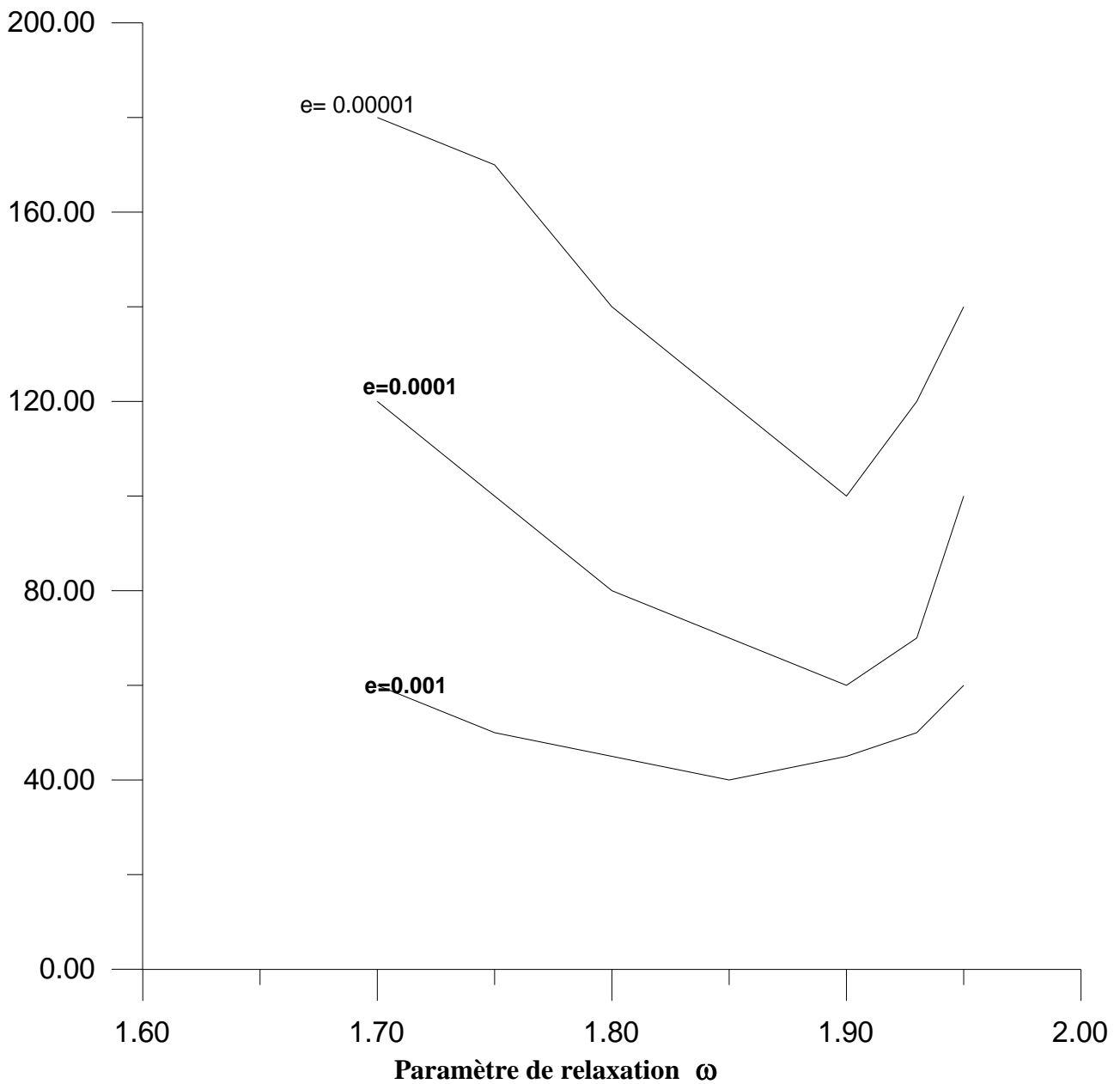
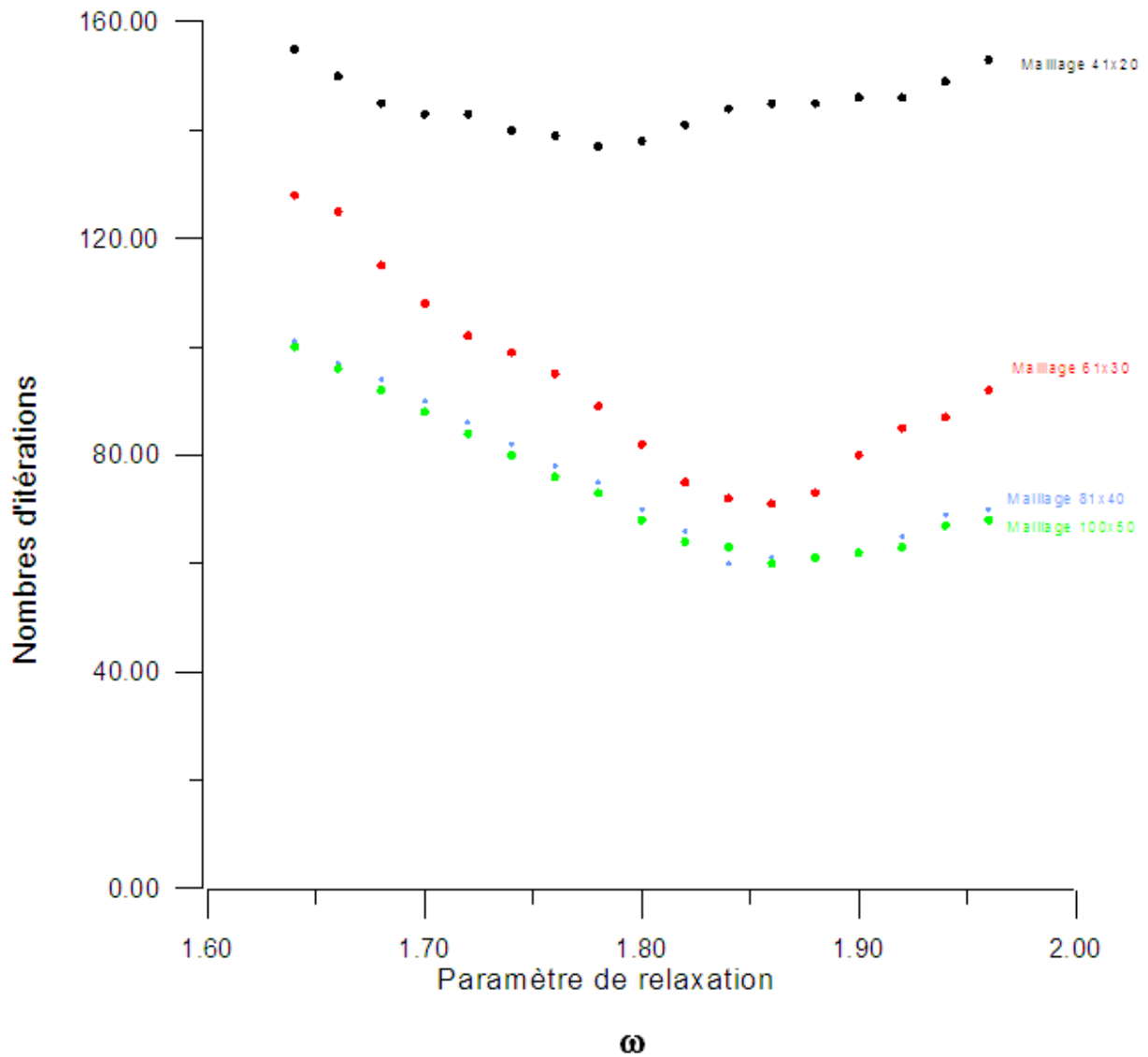


Fig.IV.12. Influence de paramètre de relaxation a la convergence de schémas SOR .

D'après ses résultats on peut constater que la valeur optimum du facteur de relaxation  $\omega$  est entre 1.85 et 1.90.

### IV.2.2 Effet de raffinement de maillage :

Pour différents maillages les résultats concernant les temps de convergence pour différentes valeurs du paramètre de relaxation est exposés dans la figure (Fig.IV.13)



**Fig.IV.13. Influence de raffinement de maillage a la convergence de schémas SOR .**

D'après ses résultats on peut conclure que le maillage le plus raffiné accélère la convergence, mais à certain maillage les résultats ne change pas .

### IV .3. Validation des résultats :

#### IV.3.1. Distribution de la pression pariétale :

La méthode de génération de maillage est mise en valeur par application à un écoulement autour d'un profil d'aile NACA 0012 . Le figure (IV.13) représente l'évolution de la pression pariétale sur le profil.

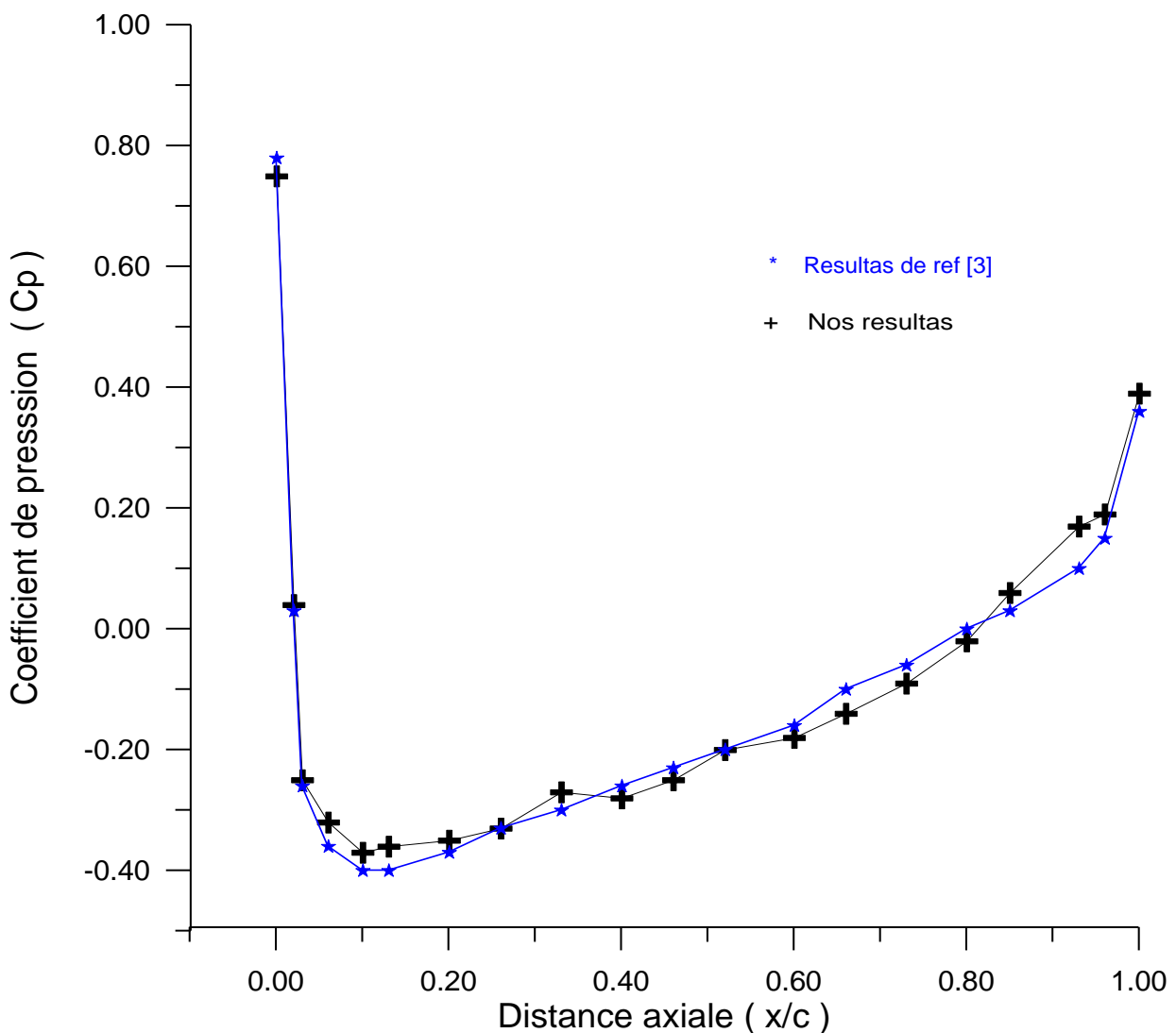


Fig.IV.14. Evolution de coefficient de pression sur le profil NACA0012 .

( $\alpha = 0$ )

La connaissance du coefficient de pression ( $C_p$ ), permet la détermination de la distribution de la vitesse, cette distribution dépend principalement de la courbure de profil. En effet, la pression chute dans un premier temps jusqu'à une valeur minimale (0.4) suite à l'augmentation de la vitesse et à la diminution de la pression (gradient de pression négatif favorable), puis elle augmente (gradient de pression positif défavorable) jusqu'à une valeur de (0.38), suite à la diminution de la vitesse potentielle sur le deuxième tronçon de profil.



Conclusion

Ce travail a consisté à faire une étude de la méthode numérique de génération de maillage en deux dimensions. En particulier, nous avons développé et appliqué la méthode à coordonnées curvilignes régie par un modèle elliptique (équation de poisson).

Outre cette méthode, nous nous sommes également intéressés à un certain nombre de techniques algébriques de génération de maillage, ces méthodes se distinguent des méthodes à coordonnées curvilignes essentiellement par la simplicité et la rapidité avec laquelle les maillages sont générés. Cependant et contrairement à la méthode à coordonnées curvilignes, elliptique, l'application d'une de ces méthodes algébriques peut être conditionnée par le type de configuration du domaine choisi. Par ailleurs les maillages correspondants peuvent comporter des irrégularités dues principalement à la propagation des discontinuités à partir des frontières vers l'intérieur du champ. Les maillages obtenus par ces méthodes ont servi essentiellement à accélérer la convergence de la solution de modèle elliptique.

Par ailleurs, afin d'obtenir une meilleure adaptation du maillage, les fonctions de condensation sont utilisées pour la distribution des points le long des frontières particulières ainsi que des régions spécifiques du domaine qui nécessitent un traitement avec une grande précision.

D'après les résultats de maillage obtenus, nous avons pu conclure que la méthode à coordonnées curvilignes elliptique est générale, pouvant s'appliquer dans des domaines d'étude simplement connexes, doublement connexes ou multi-connexes. Par ailleurs, cette méthode est applicable avec des formes arbitraires d'obstacles et de la frontière externe.

En plus l'analyse de stabilité et la convergence de schémas SOR sont étudiées, et nous avons conclu que la convergence du schéma dépend de plusieurs paramètres parmi ces paramètres le facteur de relaxation et le maillage utilisé.

Et comme l'objectif de l'étude de tous problèmes de génération de maillage est son application à un problème physique réel, nous avons appliqué cette méthode à coordonnées curvilignes, associée aux techniques algébriques à un écoulement potentiel, incompressible, autour d'un profil d'aile.

L'analyse des résultats de cette application nous a révélé que cette méthode de génération de maillage constitue un très bon outil de calcul numérique, permettant de décrire les phénomènes physiques avec une très bonne approche des résultats expérimentaux. Il a noter également que l'application de la méthode de génération de maillage est indépendante de la nature mathématique

des équations qui régissent le problème physique et qui peut être : elliptique, parabolique ou hyperbolique. De ce fait, lors de l'application de cette méthode, aucune condition n'est imposée sur la nature physique du problème à étudier. Ce qui permet d'avancer que cette méthode pourrait s'appliquer à des problèmes physiques autre que celui de l'écoulement potentiel, tels que les problèmes de transfert de chaleur ou d'écoulement visqueux.

# References Bibliographiques

**Références bibliographiques**

- [1]. **C. A. J. Fletcher**, Computational Techniques for Fluid Dynamics 2, Springer-Verlage, Heidelberg, 1991.
- [2]. **Rajesh K. Kundu**, Fluid Mechanics Second Edition, Elsevier Science (USA), 2002.
- [3]. **John C. Dale A. Anderson**, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer second Edition, Taylor and Francis, USA, 1997.
- [4]. **H.K. Versteeg and W. Malalasekera**, An introduction to computational fluid dynamics, The finite volume method, Longman Group Ltd, London, 1995.
- [5]. **Toufik EL AICHI**, Application des techniques de génération de maillages pour le calcul d'écoulements potentiels transsoniques stationnaires, thèse de magister, Université de Blida, Mars 1997.
- [6]. **Latifa BOUNAR**, Etude des techniques de génération de maillage, application en aérodynamique externe, thèse de magister, Université des sciences et de la technologie "HOUARI Boumedienne" d'Alger, Février 1995.
- [7]. **ION Paraschivoiu**, Aérodynamique subsonique, édition de l'école polytechnique de Montréal, 1998.
- [8]. **John D. Anderson**, Computational Fluid Dynamics, Mc Graw-Hill, USA, 1995.
- [9]. **Anil W Date**, introduction to computational fluid dynamics, Cambridge University 2005.
- [10]. **Pieter Wesseling**, Principles of computational fluid dynamics, Cambridge University 2000.

- [11]. **J.H.Ferziger ,M.Peric.** computational methods for fluid dynamics.3<sup>rd</sup> edition.Springer-Verlag.  
New York 2002.
- [12]. **Suhas V.Patankar.** Numerical heat transfer and fluid flow. Hemispher Publishing corporation,  
USA.1980.
- [13]. **Sedat Biringen , Chuen – Yen Chow.** An introduction to computational fluid mechanics by exemple.John Wiley and Sons .New Jersey ,2011.
- [14]. **Aslak Tveito , Ragnar Winther.** Introduction to Partial Differential Equations: A computational Approach .Springer-Verlag New York .1998
- [15]. **X. Merle and J.-Ch. Robinet.** Efficient numerical method for global linear stability problem. AIAA Paper 2007-3978, 2007.
- [16]. **X. Merle and J.-Ch. Robinet.** Schémas aux différence finis appliquée à l’analyse de stabilité global en maillage curviligne pour écoulements incompressibles. Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers (ENSAM) PARISTECH Paris.2009
- [17]. **V. Theofilis.** Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. Progress in Aerospace Sciences, Gottingen, Germany, 2003.
- [18]. **V. Theofilis.** Globally unstable Basic flows in open cavities. AIAA Paper 2000.
- [19]. **F. Dabbene , H. Paillere .** Initiation à la simulation numérique en mécanique des fluides : Elément d’analyse numérique .cours ENSTA MF307. Juin 2003.
- [20].**S. Benissaad, M. Kadja.** Génération de maillages orthogonaux pour la simulation des écoulement dans des géométries complexes. Sciences et Technologie ,pp. Juin 1999.



# Annexes

Annexe - A-Codes de calcul GRID et FLOW**A-1 Le code de génération de maillage GRID :**

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include <stdlib.h>
#include<conio.h>
#include<string.h>
#include<dos.h>
#include<iostream.h>
int sgn(float x)
{
if(x>0) return 1.0;
if(x<0) return -1.0;
return 0.0;
}
float max(float x,float y)
{
if(x>=y) return x;
if(x<y) return y;
return 0.0;
}

void main()
{
float X[160][100], Y[160][100];
float XPC[100], YPC[100], ALRX[100], ALRY[100], DETAKS[4];
float A[20], B[20], C[20], D[20], AKSIP[20], ETAP[20], z;
float ALRRX, ALRRY, ALX, ALY, ALRSX, ALRSY, ALLX, ALLY, S, ETAKS;
float OMEGA, EPS, SKSI0, SKSI1, Vi, x, y, xo, C1, OMF, SOMX, SOMY;
float DX1, DY1, EX1, EY1, DX2, DY2, EX2, EY2, DXY1, DXY2, EXY1, EXY2;
float KSI, EX, EY, ALP11, ALP12, ALPHA1, ALP21, ALP22, ALPHA2, AL21, ETA;
float DX, DY, BET11, BET12, BETA1, BET21, BET22, BETA2, DD, ALPHA, BETA;
float XALPHA, YALPHA, XBETA, YBETA, DELTA, DELT[160][100], X1, X2, Y1, Y2, GAMMA, TR;
float P, Q, AA, EE, AR, XE, YE, XK, YK, XX, YY, U, V, ERX, ERY, ER, TOL, ITER;
int ICOTE, NA[4], NNC[4], a1[4], b1[4], IRN[100], IND, IG1, CHOIX, choix;
int NNS, NNS1, I, J, IPOS, IPOS1, IPOS2, ICOTE1, I2, k, IPOS21;
int Lmax, Mmax, LM, l, m, IG, i, j, N, M, NM1, MM1, IM1, IP1, JM1, JP1, L, K;
FILE *fp;
FILE *f1, *f2;
char filename[20];
/*****
//*                               Lecture des données                               *
/*****

cout<<endl<<endl;

cout<<" CHOIX DE LA TECHNIQUE DE GENERATION DE MAILLAGE : "<<endl<<endl;
cout<<" CHOIX = 1 : MAILLAGE PAR EQUATIONS DE POISSON,LE VECTEUR INITIAL"
<<" EST GENERE                PAR LA TECHNIQUE DE GILDING."<<endl;
cout<<" CHOIX = 2 : MAILLAGE PAR EQUATIONS DE POISSON,LE VECTEUR INITIAL"
<<" EST GENERE                PAR LA TECHNIQUE DE DEUX PAROIS. "<<endl;
cout<<" CHOIX = 3 : MAILLAGE PAR EQUATIONS DE POISSON,LE VECTEUR INITIAL"
<<" est Vi = cte."<<endl;

```

```
cout<<" CHOIX = 4 : MAILLAGE PAR LA TECHNIQUE DE GILDING. "<<endl;
cout<<" CHOIX = 5 : MAILLAGE PAR LA TECHNIQUE DE DEUX PAROIS."<<endl;
cout<<endl;
cout<<" CHOIX = ";
cout<<endl;
cout<<" NOMBRE DES NOEUDS SUR LA COTE 1 : N = ";
NNC[1]=80;
cout<<endl;
cout<<" NOMBRE DES NOEUDS SUR LA COTE 2 : M = ";
NNC[2]=40;
cout<<endl;
NNC[3]=NNC[1];
NNC[4]=NNC[2];
cout<<" NOMBRE DES NOEUDS DE CONTROLE : NNS = ";
NNS=6;
cout<<endl;
XPC[1]=1;
XPC[2]=0;
XPC[3]=1;
XPC[4]=11;
XPC[5]=-10;
XPC[6]=11;

YPC[1]=0;
YPC[2]=0;
YPC[3]=0;
YPC[4]=0;
YPC[5]=0;
YPC[6]=0;

NA[1]=1;
NA[2]=3;
NA[3]=4;
NA[4]=6;

cout<<" COEFFICIENTS DE LA FONCTION DE CONDENSATION a1 , b1 :";
cout<<endl<<endl;
a1[1]=1;
a1[2]=1;
a1[3]=1;
a1[4]=1;
b1[1]=2;
b1[2]=2;
b1[3]=2;
b1[4]=2;

if(CHOIX==4)goto etiq10;
if(CHOIX==5)goto etiq10;
if(CHOIX==3)
{
cout<<" LE VALEUR INITIAL DE x ,y POUR LE SYSTEME ITERATIF : Vi = ";
cin>>Vi;
}
cout<<endl;
cout<<" LA PRECISION VOULUE POUR LA SOLUTION DE SYSTEME ITERATIF: EPS=";
EPS=0.0001;
cout<<endl;
cout<<" FACTEUR DE RELAXATION POUR LE SCHEMAS ITERATIF SOR: OMEGA = ";
OMEGA=1.85;
cout<<endl<<endl;
```

```

cout<<" L'UTILISATION DES FONCTIONS DE CONTROLE  :"<<endl<<endl;
cout<<" choix = 0 : MAILLAGE SANS UTILISATION DES FONCTIONS DE CONTROLE";
cout<<endl;
cout<<" choix = 1 : MAILLAGE AVEC UTILISATION DES FONCTIONS DE CONTROLE";
cout<<endl<<endl;
cout<<" choix = ";

choix=0;

if(choix==0)goto etiq10;
cout<<" Lmax = ";
cin>>Lmax;
cout<<" Mmax = ";
cin>>Mmax;
cout<<endl;
for (l=1;l<=Lmax;l++)
{
cout<<" A["<<l<<"] = ";
cin>>A[l];
cout<<endl;
}
for (m=1;m<=Mmax;m++)
{
cout<<" B["<<m<<"] = ";
cin>>B[m];
cout<<endl;
}
for (l=1;l<=Lmax;l++)
{
cout<<" C["<<l<<"] = ";
cin>>C[l];
cout<<endl;
}
for (m=1;m<=Mmax;m++)
{
cout<<" D["<<m<<"] = ";
cin>>D[m];
cout<<endl;
}
LM=max (Lmax,Mmax) ;
for (I=1;I<=LM;I++)
{
cout<<" AKSIP["<<I<<"] = ";
cin>>AKSIP[I];
cout<<" ETAP["<<I<<"] = ";
cin>>ETAP[I];
cout<<endl;
}

etiq10:

//*****
for (I=1;I<=4;I++)
{
DETAKS[I]=1./ (NNC[I]-1.);
}

//*****
//*          Sous programme"LREGION":          *

```

```

/* pour calculer la longueur entre deux points de controle successifs *
/*****
NNS1=NNS-1;
for (I=1;I<=NNS1;I++);
{
  IP1=I+1;
  ALRX[I]=fabs(XPC[IP1]-XPC[I]);
  ALRY[I]=fabs(YPC[IP1]-YPC[I]);
}
ALRX[NNS]=fabs(XPC[NNS]-XPC[1]);
ALRY[NNS]=fabs(YPC[NNS]-YPC[1]);

/*****
/*
          Remplissage de vecteur "IRN"
/*****
IPOS=1;
J=NA[1];
etiql:
IRN[IPOS]=J;
IPOS++;
J++;
if (J>NNS) J=J-NNS;
if (IPOS<=NNS) goto etiql;
IPOS1=1;
/*****
/*
          Distribution des Noeuds dans chaque cote
/*****

for (ICOTE=1; ICOTE<=4; ICOTE++)
{
/*****
/*Détermination des deux numéros des noeuds de l'extrémité de chaque *
/* cote dans le sens antihoraire noté par I1,I2 respectivement. *
/*****
//I1=NA[ICOTE];
ICOTE1=ICOTE+1;
if (ICOTE1>4)
{
  I2=NA[1] ;
}
else
{
  I2=NA[ICOTE1];
}

/*****
/* Détermination des positions de (I1,I2) dans le vecteur "IRN" noté *
/* par (IPOS1,IPOS2) respectivement. *
/*****
J=IPOS1;
etiql3:
if (IRN[J]==I2) goto etiql2;
if (J<=NNS)
{
  J++;
  goto etiql3;
}
else
{
  J=1;
}

```

```

etiq2:
IPOS2=J;

//*****
//*          Détermination de la longueur total de chaque cote          *
//*****

ALRRX=0.0;
ALRRY=0.0;
IPOS21=IPOS2-1;
if (IPOS2==1) IPOS21=NNS;
for (I=IPOS1; I<=IPOS21; I++)
{
ALRRX=ALRRX+ALRX [ IRN [ I ] ];
ALRRY=ALRRY+ALRY [ IRN [ I ] ];
}

//*****
//*Détermination de la longueur de segment joignant le noeud considéré *
//*          "k" et le noeud gauche de la cote considérée          *
//*****

for (k=1; k<=NNC [ ICOTE ] ; k++)
{

ETAKS=(k-1)*DETAKS [ ICOTE ] ;
cout<<endl;
S=tanh (b1 [ ICOTE ] *(1-ETAKS)) /tanh (b1 [ ICOTE ] );
S=a1 [ ICOTE ] *ETAKS+(1-a1 [ ICOTE ] )*(1-S);
S=tanh (2*(1-ETAKS)) /tanh (2);
S=1*ETAKS+(1-1)*(1-S);
ALX=S*ALRRX;
ALY=S*ALRRY;
//*****
//* Détermination du numéro de la region(noeud gauche) pour la quelle *
//* le noeud k se trouve a l'interieur, noté par"IG".          *
//* Ainsi la longueur de toutes les regions précédentes.          *
//*****

J=IPOS1;
ALRSX=0.0;
ALRSY=0.0;
etiq5:
cout<<IRN [ J ] ;
IND=IRN [ J ] ;
cout<<IND;
ALRSX=ALRSX+ALRX [ IND ] ;
ALRSY=ALRSY+ALRY [ IND ] ;
if (ALX<=ALRSX) goto etiq4;
J++;
if (J>NNS) J=J-NNS;
goto etiq5;
etiq4:
IG=IRN [ J ] ;

//*****
//*          Sous programme " Position " :          *

```

```

/*      Détermination de la longueur entre le noued k et le noued "IG" *
/*      Ainsi les coordonnées du noued "k", et la position de ce      *
/*      noued dans les tableaux X,Y notée par i et j                  *
/*****
IG1=IG+1;
ALLX=ALX-ALRSX+ALRX[IRN[J]];
ALLY=ALY-ALRSY+ALRY[IRN[J]];
if (IG==NNS) IG1=1;
if (ALRX[IG]==0)
{
x=XPC[IG];
if (YPC[IG]>YPC[IG1])
{
y=YPC[IG]-ALLY;
}
else
{
y=YPC[IG]+ALLY;
}
}
else
{
if (XPC[IG]>XPC[IG1])
{
x=XPC[IG]-ALLX;
goto etiq70;
}
else
{
x=XPC[IG]+ALLX;
}
}
etiq70:

/*****
/*
/*      Profil NACA 0012
/*
/*****

switch (IG)
{
case 1:
z=x/1;
y=-1*(.12/.2)*( .2969*pow(z,.5)-.1260*z-.3537*z*z+.2843*z*z*z-
.1015*z*z*z*z);
break;

case 2:
z=x/1;
y=1*(.12/.2)*( .2969*pow(z,.5)-.1260*z-.3537*z*z+.2843*z*z*z-
.1015*z*z*z*z);
break;

case 3:
y=0.0;
break;

case 4:
xo=x-(XPC[1]/2);
y=(XPC[4]-XPC[5])/2;

```

```

y=sqrt(y*y-xo*xo);
break;

case 5:
xo=x-(XPC[1]/2);
y=(XPC[4]-XPC[5])/2;
y=-sqrt(y*y-xo*xo);
break;

case 6:
y=0.0;
break;

}
}
switch(ICOTE)
{
case 1:
i=k;
j=1;
break;
case 2:
i=NNC[1];
j=k;
break;
case 3:
i=NNC[3]-k+1;
j=NNC[2];
break;
case 4:
i=1;
j=NNC[4]-k+1;
break;
}
cout<<x;
X[i][j]=x;
Y[i][j]=y;

}
IPOS1=IPOS2;
}

N=NNC[1];
M=NNC[2];
NM1=N-1;
MM1=M-1;

if(CHOIX==2)goto etiq30;
if(CHOIX==3)goto etiq40;
if(CHOIX==5)goto etiq30;
/******
/**                               Sous programme "Minitial"                               *
/******
/**                               Génération de maillage par la technique de Gilding                               *
/******
DX1=X[N][1]-X[1][1];
DY1=Y[N][1]-Y[1][1];
EX1=X[1][M]-X[1][1];
EY1=Y[1][M]-Y[1][1];

```

```

DX2=X[N] [M] -X [1] [M] ;
DY2=Y[N] [M] -Y [1] [M] ;
EX2=X[N] [M] -X[N] [1] ;
EY2=Y[N] [M] -Y[N] [1] ;

DXY1=DX1*DX1+DY1*DY1;
DXY2=DX2*DX2+DY2*DY2;
EXY1=EX1*EX1+EY1*EY1;
EXY2=EX2*EX2+EY2*EY2;
for (I=2; I<=NM1; I++)
{

EX=X[I] [M] -X[I] [1] ;
EY=Y[I] [M] -Y[I] [1] ;
ALP11=(X[I] [1] -X [1] [1]) *DX1;
ALP12=(Y[I] [1] -Y [1] [1]) *DY1;
ALPHA1=(ALP11+ALP12) /DXY1;
ALP21=(X[I] [M] -X [1] [M]) *DX2;
ALP22=(Y[I] [M] -Y [1] [M]) *DY2;
ALPHA2=(ALP21+ALP22) /DXY2;
AL21=ALPHA2-ALPHA1;
for (J=2; J<=MM1; J++)
{

DX=X[N] [J] -X [1] [J] ;
DY=Y[N] [J] -Y [1] [J] ;
BET11=(X [1] [J] -X [1] [1]) *EX1;
BET12=(Y [1] [J] -Y [1] [1]) *EY1;
BETA1=(BET11+BET12) /EXY1;
BET21=(X[N] [J] -X[N] [1]) *EX2;
BET22=(Y[N] [J] -Y[N] [1]) *EY2;
BETA2=(BET21+BET22) /EXY2;
DD=1-AL21*(BETA2-BETA1) ;
ALPHA=(ALPHA1+BETA1*AL21) /DD;
BETA=( (1-ALPHA1) *BETA1+ALPHA1*BETA2) /DD;
XALPHA=X [1] [J] +ALPHA*DX;
YALPHA=Y [1] [J] +ALPHA*DY;
XBETA=X [I] [1] +BETA*EX;
YBETA=Y [I] [1] +BETA*EY;

DELTA=DX*EY-EX*DY;
X1=XALPHA*DX+YALPHA*DY;
X2=XBETA*EX+YBETA*EY;
Y1=XALPHA*EX+YBETA*EY;
Y2=XALPHA*DX+YALPHA*DY;
cout<<I;
cout<<J;
cout<<DELTA<<endl;
X[I] [J]=(X1*EY-X2*DY) / DELTA;
Y[I] [J]=(Y1*DX-Y2*EX) / DELTA;
}
}
if(CHOIX==1) goto etiq50;
if(CHOIX==4) goto etiq60;

etiq30:
/*****
/* Génération de maillage par la technique de deux parois horizontales *
*****/
for (I=2; I<=NM1; I++)
{

```

```

KSI=(I-1)*DETAKS[1];
for(J=2;J<=MM1;J++)
{
ETA=(J-1)*DETAKS[2];
SKSI0=tanh(b1[4]*(1-ETA))/tanh(b1[4]);
SKSI0=a1[4]*ETA+(1-a1[4])*(1-SKSI0);
SKSI1=tanh(b1[2]*(1-ETA))/tanh(b1[2]);
SKSI1=a1[2]*ETA+(1-a1[2])*(1-SKSI1);
S=SKSI0+KSI*(SKSI1-SKSI0);

X[I][J]=(1-S)*X[I][1]+S*X[I][M];
Y[I][J]=(1-S)*Y[I][1]+S*Y[I][M];
}
}
if(CHOIX==2)goto etiq50;
if(CHOIX==5)goto etiq60;

etiq40:
for(I=2;I<=NM1;I++)
{
for(J=2;J<=MM1;J++)
{
X[I][J]=Vi;
Y[I][J]=Vi;
}
}

etiq50:
//*****
//*                               Sous programme "POISSON"                               *
//*                               Résolution des équations de "POISSON"                               *
//*****
ITER=1;
etiq7 :
TOL=1.0;
cout<<"ITER="<<ITER<<endl;
for(I=2;I<=NM1;I++)
{
IM1=I-1;
IP1=I+1;
KSI=(I-1)*DETAKS[1];
for(J=2;J<=MM1;J++)
{
JM1=J-1;
JP1=J+1;
ETA=(J-1)*DETAKS[2];
P=0.0;
Q=0.0;
if(choix==0)goto etiq80;
for(L=1;L<=Lmax;L++)
{
AA=KSI-AKSIP[L];
EE=ETA-ETAP[L];
P=P+A[L]*sgn(AA)*exp(-C[L]*fabs(AA));
Q=Q+A[L]*sgn(EE)*exp(-C[L]*fabs(EE));
}

for(L=1;L<=Mmax;L++)
{
AA=KSI-AKSIP[L];
EE=ETA-ETAP[L];

```

```

AR=-D[L]*pow((AA*AA+EE*EE),.5);
P=P-B[L]*sgn(AA)*exp(AR);
Q=Q-B[L]*sgn(EE)*exp(AR);
}
eti980:
XE=X[I][JP1]-X[I][JM1];
YE=Y[I][JP1]-Y[I][JM1];
XK=X[IP1][J]-X[IM1][J];
YK=Y[IP1][J]-Y[IM1][J];

ALPHA=.25*(XE*XE+YE*YE);
BETA=.25*(XK*XE+YK*YE);
GAMMA=.25*(XK*XK+YK*YK);
DELTA=fabs(pow((XK*YE-XE*YK),2))/16;
TR=2*(ALPHA+GAMMA);

XX=X[IP1][JP1]-X[IM1][JP1]-X[IP1][JM1]+X[IM1][JM1];
XX=ALPHA*(X[IM1][J]+X[IP1][J])-.5*BETA*XX;
XX=XX+GAMMA*(X[I][JM1]+X[I][JP1]);
XX=(XX+.5*DELTA*(P*XK+Q*XE))/TR;

YY=Y[IP1][JP1]-Y[IM1][JP1]-Y[IP1][JM1]+Y[IM1][JM1];
YY=ALPHA*(Y[IM1][J]+Y[IP1][J])-.5*BETA*YY;
YY=YY+GAMMA*(Y[I][JM1]+Y[I][JP1]);
YY=(YY+.5*DELTA*(P*YK+Q*YE))/TR;
U=(1-OMEGA)*X[I][J]+OMEGA*XX;
V=(1-OMEGA)*Y[I][J]+OMEGA*YY;

ERX=fabs(1-X[I][J]/U);
ERY=fabs(1-Y[I][J]/V);

ER=max(ERX,ERY);
if(ER<TOL)TOL=ER;
X[I][J]=U;
Y[I][J]=V;
}
}
if(TOL<EPS)goto eti960;
// if(ITER>1000)goto eti98;
ITER++;
//cout<<X[2][2];
goto eti97;
eti98 :
////////////////////////////////////
//          OPTION REMAILLGE (FILTRAGE DES POINTS )          //
////////////////////////////////////

OMF=0.2;
C1=OMF/(N*M);
ITER=1;
eti933:
TOL=1.0;
for(I=2;I<=NM1;I++)
{
for(J=2;J<=MM1;J++)
{
SOMX=0.0;
SOMY=0.0;
for(K=1;K<=N;K++)
{
for(L=1;L<=M;L++)

```

```

{
SOMX=SOMX+(X[K][L]-X[I][J]);
SOMY=SOMY+(Y[K][L]-Y[I][J]);
}
}
U=X[I][J]+C1*SOMX;
V=Y[I][J]+C1*SOMY;
ERX=fabs(1-X[I][J]/U);
ERY=fabs(1-Y[I][J]/V);
ER=max(ERX,ERY);
if(ER<TOL)TOL=ER;
X[I][J]=U;
Y[I][J]=V;
}
}
if(TOL<EPS)goto etiq60;
ITER++;
goto etiq33;

cout<<" NOMBRE D'ITERATIONS = "<<ITER<<endl<<endl;

etiq60:

cout<<" NOMBRE D'ITERATIONS = "<<ITER<<endl<<endl;

if ((f1= fopen("1NACA 0012", "w")) == NULL)
{
fprintf(stderr,"Erreur à l'ouverture du fichier %s en mode w.\n\n",
filename);
exit(1);
}

for(J=1;J<=M;J++)
{
if((J%2)==1)
{
for(I=1;I<=N;I++)
{
fprintf(f1, "%f",X[I][J]);
fprintf(f1, " ");
fprintf(f1, "%f",Y[I][J]);
fprintf(f1, "\n");
}
}
else
{
for(I=N;I>=1;I--)
{
fprintf(f1, "%f",X[I][J]);
fprintf(f1, " ");
fprintf(f1, "%f",Y[I][J]);
fprintf(f1, "\n");
}
}
}

if ((f2= fopen("2NACA 0012", "w")) == NULL)
{
fprintf(stderr,"Erreur à l'ouverture du fichier %s en mode w.\n\n",
filename);
}

```

```

exit(1);
}

for(I=1;I<=N;I++)
{
  if((I%2)==1)
  {
    for(J=1;J<=M;J++)
    {
      fprintf(f2,"%f",X[I][J]);
      fprintf(f2," ");
      fprintf(f2,"%f",Y[I][J]);
      fprintf(f2,"\n");
    }
  }
  else
  {
    for(J=M;J>=1;J--)
    {
      fprintf(f2,"%f",X[I][J]);
      fprintf(f2," ");
      fprintf(f2,"%f",Y[I][J]);
      fprintf(f2,"\n");
    }
  }
}
//puts("Indiquez un nom pour le fichier : ");
//gets(filename);
if ((fp = fopen("GridResultats", "w")) == NULL)
{
  fprintf(stderr,"Erreur à l'ouverture du fichier %s en mode w.\n\n",
filename);
  exit(1);
}

for(I=1;I<=N;I++)
{
  for(J=1;J<=M;J++)
  {
    fprintf(fp, "%f",X[I][J]);
    fprintf(fp, " ");
    fprintf(fp, "%f",Y[I][J]);
    fprintf(fp, "\n");
  }
}
fclose(fp);
fclose(f1);
fclose(f2);
cin>>N;

}

```

## A- 2 Le code FLOW:

```

#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include<string.h>
#include<dos.h>
#include<iostream.h>
#define PI 3.14159265
float max(float x,float y)
{
if(x>=y) return x;
return y;
}
void main()
{
double V;
int I,J,N,M,NM1,NM2,MM1,IM1,IP1,JM1,JP1,ITER,NM,ITE;
float X[160][100],Y[100][100],ALPHA[160][100],BETA[160][100];
float SIGMA[160][100],TAU[160][100],GAMMA[160][100],PSIE[160][100];
float XE,YE,XK,YK,DX,DY,XEE,YEE,XKK,YKK,XEK,YEK,JAC[160][100],THETA;
float EPS,OMEGA,PSI[160][100],T,TOL1,TOL2,TOL,U,ER,ER1,ER2,Vi;
float Vt[160],Cp[160],Cl,Cd,Cm,Cm1,Cm2,Somme,xk[160],yk[160],C ;
//char filename[20];

//cout<<"la Precision voulue pour la solution de systeme iteratif: EPS = ";
//cin>>EPS;
EPS=0.0003;
//cout<<endl;
//cout<<"Facteur de relaxation pour le systeme iteratif SOR : OMEGA = ";
//cin>>OMEGA;
//cout<<endl;
OMEGA=1.75;
//cout<<endl;
//cout<<"L'angle d'incidence(en degre) : THETA =";
THETA=10 ;//cin>>THETA;
THETA=(PI*THETA)/180;
//cout<<"La corde de profil : C = ";
//cin>>C;
C=1;
N=80;
M=40;
//*****
//*sous programme "METRIQUE" pour le calcul des coefficients metriques *
//*****

//*****
//*coefficients metriques dans le champ *
//*****
FILE *fp ;
//puts("Indiquez le nom du fichier de résultats du code GRID : ");
//gets(filename);
//filename='ALI';
if ((fp = fopen("GridResultats", "r")) == NULL)
{
fprintf(stderr,"Erreur à l'ouverture du fichier %s en mode r.\n\n", "GRID");
exit(1);
}

```

```

}

for (I=1; I<=N; I++)
{
for (J=1; J<=M; J++)
{
fscanf (fp, " %f", &X[I][J]);
fscanf (fp, " %f", &Y[I][J]);
}
}

NM1=N-1;
NM2=N-2;
MM1=M-1;

for (I=2; I<=NM1; I++)
{
IM1=I-1;
IP1=I+1;
for (J=2; J<=MM1; J++)
{
JM1=J-1;
JP1=J+1;
XE=X[I][JP1]-X[I][JM1];
YE=Y[I][JP1]-Y[I][JM1];
XK=X[IP1][J]-X[IM1][J];
YK=Y[IP1][J]-Y[IM1][J];
XEE=X[I][JP1]-2*X[I][J]+X[I][JM1];
YEE=Y[I][JP1]-2*Y[I][J]+Y[I][JM1];
XKK=X[IP1][J]-2*X[I][J]+X[IM1][J];
YKK=Y[IP1][J]-2*Y[I][J]+Y[IM1][J];
XEK=X[IP1][JP1]-X[IM1][JP1]-X[IP1][JM1]+X[IM1][JM1];
YEK=Y[IP1][JP1]-Y[IM1][JP1]-Y[IP1][JM1]+Y[IM1][JM1];

ALPHA[I][J]=.25*(XE*XE+YE*YE);
BETA[I][J]=.25*(XK*XK+YK*YK);
GAMMA[I][J]=.25*(XK*XK+YK*YK);
DX=ALPHA[I][J]*XKK-.5*BETA[I][J]*XEK+GAMMA[I][J]*XEE;
DY=ALPHA[I][J]*YKK-.5*BETA[I][J]*YEK+GAMMA[I][J]*YEE;
JAC[I][J]=.25*(XK*YE-XE*YK);
SIGMA[I][J]=.5*(YK*DX-XK*DY)/JAC[I][J];
TAU[I][J]=.5*(XE*DY-YE*DX)/JAC[I][J];

}
}

//*****
//*coefficients metriques sur les coupures *
//*****

for (J=2; J<=MM1; J++)
{
JM1=J-1;
JP1=J+1;

XE=X[1][JP1]-X[1][JM1];
YE=Y[1][JP1]-Y[1][JM1];
XK=X[2][J]-X[NM1][J];
YK=Y[2][J]-Y[NM1][J];
XEE=X[1][JP1]-2*X[1][J]+X[1][JM1];
YEE=Y[1][JP1]-2*Y[1][J]+Y[1][JM1];

```

```

XKK=X[2][J]-2*X[1][J]+X[NM1][J];
YKK=Y[2][J]-2*Y[1][J]+Y[NM1][J];
XEK=X[2][JP1]-X[NM1][JP1]-X[2][JM1]+X[NM1][JM1];
YEK=Y[2][JP1]-Y[NM1][JP1]-Y[2][JM1]+Y[NM1][JM1];

ALPHA[1][J]=.25*(XE*XE+YE*YE);
BETA[1][J]=.25*(XK*XE+YK*YE);
GAMMA[1][J]=.25*(XK*XK+YK*YK);
DX=ALPHA[1][J]*XKK-2*BETA[1][J]*XEK+GAMMA[1][J]*XEE;
DY=ALPHA[1][J]*YKK-2*BETA[1][J]*YEK+GAMMA[1][J]*YEE;
JAC[I][J]=.25*(XK*YE-XE*YK);

SIGMA[1][J]=.5*(YK*DX-XK*DY)/JAC[I][J];
TAU[1][J]=.5*(XE*DY-YE*DX)/JAC[I][J];
}

for(J=2;J<=MM1;J++)
{
ALPHA[N][J]=ALPHA[1][J];
BETA[N][J]=BETA[1][J];
GAMMA[N][J]=GAMMA[1][J];
SIGMA[N][J]=SIGMA[1][J];
TAU[N][J]=TAU[1][J];
}
//*****
//Coefficients métriques sur l'obstacle *
//*****
for(I=2;I<=NM1;I++)
{
IP1=I+1;
IM1=I-1;
XK=X[IP1][1]-X[IM1][1];
YK=Y[IP1][1]-Y[IM1][1];
XE=- (X[I][3]-4*X[I][2]+3*X[I][1]);
YE=- (Y[I][3]-4*Y[I][2]+3*Y[I][1]);
GAMMA[I][1]=.25*(XK*XK+YK*YK);
JAC[I][1]=.25*(XK*YE-XE*YK);
}
XK=X[2][1]-X[NM1][1];
YK=Y[2][1]-Y[NM1][1];
XE=- (X[1][3]-4*X[1][2]+3*X[1][1]);
YE=- (Y[1][3]-4*Y[1][2]+3*Y[1][1]);
GAMMA[1][1]=.25*(XK*XK+YK*YK);
GAMMA[N][1]=GAMMA[1][1];
JAC[1][1]=.25*(XK*YE-XE*YK);
JAC[N][1]=JAC[1][1];

//*****
//*Détermination de PSI sur la frontière externe et sur l'obstacle *
//*****
for(I=1;I<=N;I++)
{
PSI[I][M]=Y[I][M]*cos(THETA)-X[I][M]*sin(THETA);
PSI[I][1]=0.0;
}

//*****
//*Calcul itératif de PSI dans le champ et sur les coupures *
//*****

for(J=2;J<=MM1;J++)

```

```

{
for (I=1; I<NM1; I++)
{
  PSI [I] [J]=Y [I] [J]*cos (THETA)-X [I] [J]*sin (THETA);
}
}
//for (J=2; J<=MM1; J++)
//{
//for (I=NM; I<=NM1; I++)
//{
//PSI [I] [J]=J*42/M;
// }
ITER=1;
ITE=1;
TOL1=1;
TOL2=1;
etiq20:
for (I=2; I<=NM1; I++)
{
  IM1=I-1;
  IP1=I+1;
  for (J=2; J<=MM1; J++)
  {
    JM1=J-1;
    JP1=J+1;
    T=1/(4*(ALPHA [I] [J]+GAMMA [I] [J]));
    U=PSI [IP1] [JP1]-PSI [IP1] [JM1]-PSI [IM1] [JP1]+PSI [IM1] [JM1];
    U=BETA [I] [J]*T*U;
    U=2*ALPHA [I] [J]*T*(PSI [IP1] [J]+PSI [IM1] [J])-U;
    U=U+2*GAMMA [I] [J]*T*(PSI [I] [JP1]+PSI [I] [JM1]);
    U=U+TAU [I] [J]*T*(PSI [IP1] [J]-PSI [IM1] [J]);
    U=U+SIGMA [I] [J]*T*(PSI [I] [JP1]-PSI [I] [JM1]);
    V=(1-OMEGA)*PSI [I] [J]+OMEGA*U;
    ER1=fabs (1-PSI [I] [J]/V);
    ER=min (ER1, TOL1);
    TOL1=ER;
    PSI [I] [J]=V;
  }
}

for (J=2; J<=MM1; J++)
{
  // I=1;
  JM1=J-1;
  JP1=J+1;
  T=1/(4*(ALPHA [I] [J]+GAMMA [I] [J]));
  U=PSI [2] [JP1]-PSI [2] [JM1]-PSI [NM1] [JP1]+PSI [NM1] [JM1];
  U=BETA [I] [J]*T*U;
  U=2*ALPHA [I] [J]*T*(PSI [2] [J]+PSI [NM1] [J])-U;
  U=U+2*GAMMA [I] [J]*T*(PSI [1] [JP1]+PSI [1] [JM1]);
  U=U+TAU [I] [J]*T*(PSI [2] [J]-PSI [NM1] [J]);
  U=U+SIGMA [I] [J]*T*(PSI [1] [JP1]-PSI [1] [JM1]);
  V=(1-OMEGA)*PSI [I] [J]+OMEGA*U;
  ER2=fabs (1-(PSI [I] [J]/V));
  ER=min (ER2, TOL2);
  TOL2=ER;
  PSI [1] [J]=V;
  PSI [N] [J]=V;
}
TOL=max (TOL1, TOL2);

```

```

    if(TOL<EPS)goto etiq10;
    cout<<" NOMBRE D'ITERATIONS="<<ITER<<endl;
//cout<<PSI[60][20]<<endl;
    ITER++;
    //if(ITER<10)goto etiq20;
    //ITER++;
    // cout<<" NOMBRE D'ITERATIONS="<<ITER<<endl;

    goto etiq20;
    etiq10:
    cout<<" NOMBRE D'ITERA="<<ITER<<endl;

//*****
//*Détermination de la vitesse tangentielle sur la frontière de l'obstacle *
//*****

    for (I=2;I<=NM1;I++)
    {
    PSIE[I][1]=-(PSI[I][3]-4*PSI[I][2]+3*PSI[I][1])/2;
    Vt[I]=PSIE[I][1]*sqrt(GAMMA[I][1])/JAC[I][1];
    }
    Vt[1]=Vt[2];//-Vt[3];

    Vt[N]=Vt[NM1];//-Vt[NM2];

    ITE++;
    cout<<"NOMBRE D'ITE="<<ITE<<endl;

    // if(Vt[1]!=Vt[N])goto etiq20;
    //if(fabs(fabs(Vt[2])-fabs(Vt[99]))>0.0001)goto etiq20;
//*****
//*          Calcul des coefficients aérodynamique *
//*****

    for (I=1;I<=N;I++)
    {
    Cp[I]=1-(Vt[I])*(Vt[I]);
    }
    for (I=2;I<=NM1;I++)
    {IP1=I+1;
    IM1=I-1;
    xk[I]=(X[IP1][1]-X[IM1][1])/2;
    yk[I]=(Y[IP1][1]-Y[IM1][1])/2;
    }
    xk[1]=(X[2][1]-X[NM1][1])/2;
    xk[N]=xk[1];
    yk[1]=(Y[2][1]-Y[NM1][1])/2;
    yk[N]=yk[1];
    Somme=0;
    for (I=2;I<=NM1;I++)
    {
    Somme=Somme-Cp[I]*xk[I];
    }
    Cl=Somme-(Cp[1]*xk[1]+Cp[N]*xk[N])/2;
    Somme=0;
    for (I=2;I<=NM1;I++)
    {Somme=Somme+Cp[I]*yk[I];
    }
    Cd=Somme+(Cp[1]*yk[1]+Cp[N]*yk[N])/2;
    Somme=0;

```

```
for (I=2; I<=NM1; I++)
{ Somme=Somme+Cp[I]*xk[I]*X[I][1];
}
Cm1=Somme+(Cp[1]*xk[1]*X[1][1]+Cp[N]*xk[N]*X[N][1])/2;
Somme=0;
for (I=2; I<=NM1; I++)
{ Somme=Somme+Cp[I]*yk[I]*Y[I][1];
}
Cm2=Somme+(Cp[1]*yk[1]*Y[1][1]+Cp[N]*yk[N]*Y[N][1])/2;

Cm=(Cm1+Cm2)/C;
cout<<"Coefficient de portance : Cl = ";
cout<<Cl;
cout<<endl;
cout<<"Coefficient de trainee : Cd = ";
cout<<Cd;
cout<<endl;
cout<<"Coefficient de moment : Cm = ";
cout<<Cm;
cout<<endl;
cin>>M;
}
```

**Annexe -B-****Transformations du plan de coordonnées cartésiennes(x,y) aux plan de coordonnées généralisées(  $\xi, \eta$  ) :**

La transformation du domaine (x,y) au domaine (  $\xi, \eta$  ) se fait par le passage de plusieurs étapes et à l'aide des différentes procédures. On présente dans cette partie quelques procédures de ce passage. Nous supposons dans ce qui suit :

$f(x,y)$  : est une fonction deux fois continûment dérivable.

$F(x,y)$  : est une fonction vectorielle continûment dérivable, donnée par :

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y) \vec{i} + F_2(x,y) \vec{j}$$

**B-1 Dérivées :****B-1-1 Dérivées de  $\xi(x,y)$  et  $\eta(x,y)$  :**

Préliminaire :

La transformation du champ (x,y) en champ s'effectue par :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{cases} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{cases}$$

On détermine les dérivées de  $\xi$  et  $\eta$  par :

$$\begin{cases} d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \\ d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy \end{cases}$$

La matrice de passage est :

$$J_1 = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$$

La transformation inverse, si elle existe est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{cases}$$

De la même manière, on détermine les dérivées de x et y :

$$\begin{cases} dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \\ dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \end{cases}$$

La matrice inverse  $J_2$ , de la matrice de passage  $J_1$ , est :

$$J_2 = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}$$

Soit  $J = \det J_2 = x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta$

La relation entre les deux matrices est :

$J_1 = \frac{1}{J}$  (la matrice transposée des cofacteurs de  $J_2$ )

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix}$$

D'où les expressions des dérivées premières :

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{y_\eta}{J} & \xi_y &= -\frac{x_\eta}{J} \\ \eta_x &= -\frac{y_\xi}{J} & \eta_y &= \frac{x_\xi}{J}\end{aligned}$$

Et des dérivées secondes :

$$\begin{aligned}\xi_{xx} &= (\xi_x y_{\xi\eta} + \eta_x y_{\eta\eta})/J - (\xi_x^2 J_\xi + \xi_x \eta_x J_\eta)/J \\ \xi_{yy} &= -(\eta_y x_{\eta\eta} + \xi_y x_{\xi\xi})/J - (\xi_y \eta_y J_\eta + \xi_y^2 J_\xi)/J \\ \xi_{xy} &= (\eta_y y_{\eta\eta} + \xi_y y_{\xi\eta})/J - (\xi_x \xi_y J_\xi + \xi_x \eta_x J_\eta)/J \\ \eta_{xx} &= -(\xi_x y_{\xi\xi} + \eta_x y_{\xi\eta})/J - (\eta_x \xi_x J_\xi + \eta_x^2 J_\eta)/J \\ \eta_{yy} &= (\eta_y x_{\xi\eta} + \xi_y x_{\xi\xi})/J - (\xi_y \eta_y J_\xi + \eta_y^2 J_\eta)/J \\ \eta_{xy} &= (\eta_y y_{\xi\eta} + \xi_y y_{\xi\xi})/J - (\eta_x \eta_y J_\eta + \xi_x \eta_x J_\xi)/J\end{aligned}$$

**B-1-2 Dérivées de  $f(x,y)$  :**

$$f_x = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)/J$$

$$f_y = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = (x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi)/J$$

**B-2 Transformation des dérivées des vecteurs :**

**Laplacien de  $f$  :**

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta})/J^2 + (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})(y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi)/J^3 \\ &+ (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})(x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi)/J^3\end{aligned}$$

Cette expression est équivalente à :

$$\nabla^2 f = (\alpha f_{\xi\xi} - 2\beta f_{\xi\eta} + \gamma f_{\eta\eta} + \sigma f_{\eta} + \tau f_{\xi}) / J^2$$

Avec :

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

$$\beta = x_{\xi} y_{\eta} + y_{\xi} x_{\eta}$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

$$\sigma = (y_{\xi} dx - x_{\xi} dy) / J$$

$$\tau = (x_{\eta} dy - y_{\eta} dx) / J$$

$$dx = \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}$$

$$dy = \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}$$

**Gradient de  $f$  :**

$$\vec{\nabla} f = (y_{\eta} f_{\xi} - y_{\xi} f_{\eta}) / J \vec{i} + (y_{\xi} f_{\eta} - y_{\eta} f_{\xi}) / J \vec{j}$$

**Divergent de  $\vec{F}$  :**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = [y_{\eta} (F_1)_{\xi} - y_{\xi} (F_1)_{\eta} + x_{\xi} (F_2)_{\eta} - x_{\eta} (F_2)_{\xi}] / J$$

**B-3 Les vecteurs tangents et normale dans le champ  $(\xi, \eta)$  :**

Les vecteurs tangent et normal à la courbe  $f(x,y)$  sont données par :

$$\vec{n}^{(f)} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

Pour  $f(x,y)$  correspondant à  $\eta(x,y)$ , cette expression devient :

$$\vec{n}^{(\eta)} = \frac{\nabla \eta}{|\nabla \eta|}$$

En utilisant l'équation de gradient de  $f$ , le vecteur unitaire normal à une ligne  $\eta = \text{cte}$  est donné par :

$$\vec{n}^{(\eta)} = (-y_\xi \vec{i} + x_\xi \vec{j}) / \sqrt{\gamma}$$

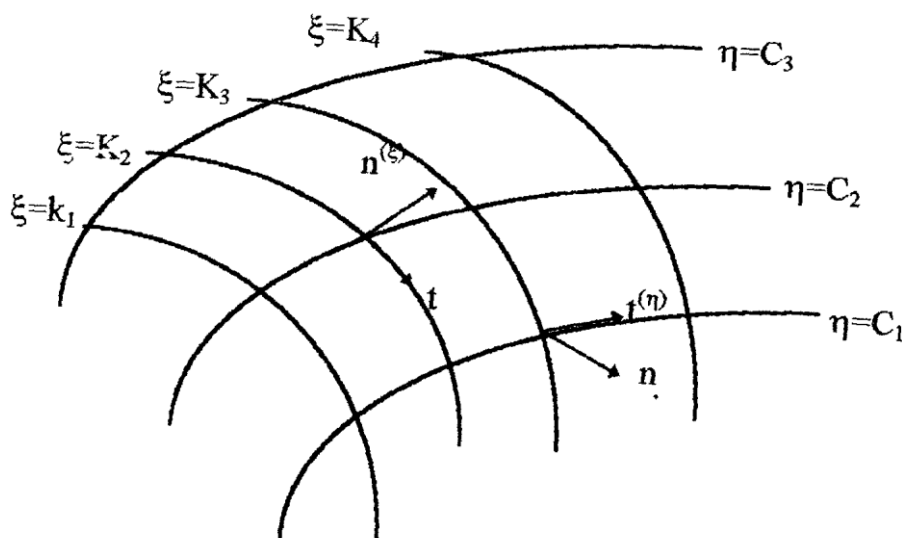
De la même manière, on définit l'expression du vecteur unitaire normal à une ligne coordonnée  $\xi = \text{cte}$  :

$$\vec{n}^{(\xi)} = \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|} = (y_\eta \vec{i} - x_\eta \vec{j}) / \sqrt{\alpha}$$

Les vecteurs tangents à la ligne coordonnée  $\eta = \text{cte}$ , respectivement à la ligne  $\xi = \text{cte}$  sont donnés par :

$$\vec{t}^{(\eta)} = \vec{n}^{(\eta)} * K = (x_\xi \vec{i} + y_\xi \vec{j}) / \sqrt{\gamma}$$

$$\vec{t}^{(\xi)} = \vec{n}^{(\xi)} * K = -(x_\eta \vec{i} + y_\eta \vec{j}) / \sqrt{\alpha}$$



**Annexe -C-****Approximation par la méthode des différences finies****C-1 Approximation par les différences centrées d'ordre 2 :**

Soit une fonction deux fois continûment dérivable  $f(\xi, \eta)$ , définie pour :

$$2 \leq i \leq I_{\max} - 1$$

$$2 \leq j \leq J_{\max} - 1$$

L'approximation des dérivées premières donné :

$$(f_{\xi})_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})/2$$

$$(f_{\eta})_{i,j} = (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})/2$$

L'approximation des dérivées secondes donné :

$$(f_{\xi\xi})_{i,j} = f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}$$

$$(f_{\xi\eta})_{i,j} = (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1})/4$$

$$(f_{\eta\eta})_{i,j} = f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}$$

**C-2 Approximation par les différences décentrées d'ordre 2, des dérivées premières:**

Cette approche est appliquée sur les segments correspondant aux frontières d'obstacles ou de frontière externe. Suivant la position du segment sur le coté du rectangle, nous obtenons:

**C-2-1 Sur le coté bas:**

$$\begin{array}{ccc} I_1 & & I_2 \\ \hline & & J=1 \end{array}$$

Pour  $I_1 \leq I \leq I_2$  :

$$f_{\eta} = -0.5(f(I,3) - 4f(I,2) + 3f(I,1))$$

Au point  $(I_1,1)$  :

$$f_{\xi} = -0.5(f(I_1 + 2,1) - 4(I_1 + 1,1) + 3f(I_1,1))$$

Au point  $(I_2,1)$  :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_2 - 2,1) - 4(I_2 - 1,1) + 3f(I_2,1))$$

### C-2-2 Sur le coté haut:



Pour  $I_1 \leq I \leq I_2$  :

$$f_{\eta} = 0.5(f(I, J_{\max} - 2) - 4(I, J_{\max} - 1) + 3f(I, J_{\max}))$$

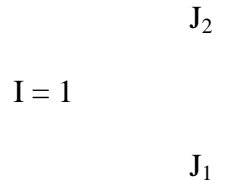
Au point  $(I_1,1)$  :

$$f_{\xi} = -0.5(f(I_1 + 2, J_{\max}) - 4(I_1 + 1, J_{\max}) + 3f(I_1, J_{\max}))$$

Au point  $(I_2,1)$  :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_2 - 2, J_{\max}) - 4(I_2 - 1, J_{\max}) + 3f(I_2, J_{\max}))$$

### C-2-3 Sur le coté gauche:



Pour  $J_1 \leq J \leq J_2$  :

$$f_{\xi} = -0.5(f(3, J) - 4(2, J) + 3f(1, J))$$

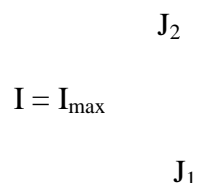
Au point  $(1, J_1)$  :

$$f_{\eta} = -0.5(f(1, J_1 + 2) - 4(1, J_1 + 1) + 3f(1, J_1))$$

Au point  $(1, J_2)$  :

$$f_{\eta} = 0.5(f(1, J_2 - 2) - 4(1, J_2 - 1) + 3f(1, J_2))$$

### C-2-4 Sur le coté droit:



Pour  $J_1 \leq J \leq J_2$  :

$$f_{\xi} = 0.5(f(I_{\max} - 2, J) - 4(I_{\max} - 1, J) + 3f(I_{\max}, J))$$

Au point  $(I_{\max}, J_1)$  :

$$f_{\eta} = -0.5(f(I_{\max}, J_1 + 2) - 4(I_{\max}, J_1 + 1) + 3f(I_{\max}, J_1))$$

Au point  $(1, J_2)$  :

$$f_{\eta} = 0.5(f(I_{\max}, J_2 - 2) - 4(I_{\max}, J_2 - 1) + 3f(I_{\max}, J_2))$$

### C-3 Approximations par les différences centrées d'ordre 2 aux coupures :

Les segments de coupure d'une même paire peuvent être disposés sur le même côté du rectangle (champ transformé) qui correspond à une même ligne coordonnée où sur des côtés opposés. Nous donnons ci-dessous les schémas aux différences finies correspondant aux différentes dispositions des segments de coupure sur les côtés du rectangle.

#### C-3-1 Un segment en bas, un autre en haut :

$$\begin{array}{ccc} \text{I3} & & \text{I4} \\ \text{-----} & & \text{-----} \\ & & j = j_{\max} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \text{-----} \\ & & j = 1 \\ \text{I1} & & \text{I2} \end{array}$$

Sur le coté bas :  $I1 < i < I2$

$$x_{\xi} = 0.5(x(i+1,1) - x(i-1,1))$$

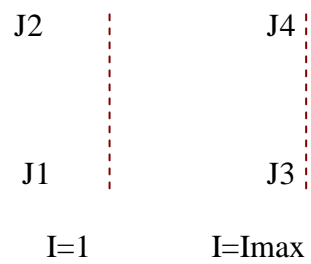
$$x_{\eta} = 0.5(x(i,2) - x(i, J_{\max} - 1))$$

$$x_{\eta\eta} = x(i,2) - 2x(i,1) + x(i, J_{\max} - 1)$$

$$x_{\xi\eta} = 0.25(x(i+1,2) - x(i+1, J_{\max} - 1) + x(i-1, J_{\max} - 1) - x(i-1,2))$$

Les valeurs de dérivées pour le coté haut sont identiques à celles du coté bas à cause de la superposition des deux segments disposés sur les deux côtés.

### C-3-2 Un segment à gauche, un autre à droite :



Sur le coté gauche :  $J1 < j < J2$

$$x_{\xi} = 0.5(x(2, j) - x(I_{\max} - 1, j))$$

$$x_{\eta} = 0.5(x(1, j+1) - x(1, j-1))$$

$$x_{\xi\xi} = x(2, j) - 2(1, j) + x(I_{\max} - 1, j)$$

$$x_{\xi\eta} = 0.25(x(2, j+1) - x(2, j-1) + x(I_{\max} - 1, j-1) - x(I_{\max} - 1, j+1))$$

