

الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par:
LAHMER Khaoula

THEME

**Minimum d'une fonctionnelle d'énergie des opérateurs
définis positifs**

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. A. Belacel

M. Y. Boukhatem

Mr. A. Yagoub

Mr. Y. Belabbaci

M.C.A

M.C.A

M.C.B

M.C.A

Président

Examineur

Examineur

Encadreur

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

En premier lieu, je remercie le Dieu le Tout-Puissant et le Miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

*Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadreur, monsieur **Y.Belabbaci** d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour sa disponibilité et ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

*Un remerciement particulier va aux Mr. **Rahmoune Abdelaziz** pour leur tutelle à mes affaires et pour leur aide.*

*Un très grand merci aux professeurs : **A. Yagoub, Y.Boukhatem, A. Belacel** et qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

Ma dédicace s'adresse d'abord à ma mère et mon père et ma grand-mère pour leurs confiances et leurs encouragements.

A mes soeurs et mon frère pour leurs douceurs et leurs gentillesse.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis...

ملخص

نركز في هذا العمل على فضاء الطاقة المرتبط بالمؤثرات الايجابية محددا و تقليل دالي الطاقة. كتطبيق نظرنا في مؤثرات ستورم ليوفيل.

الكلمات الدلالية : مؤثر, مؤثر متناظر, المؤثر الذاتي ,مؤثر ايجابي, مؤثر ايجابي محددا ,مؤثر مغلق, مؤثر قابل للإغلاق; فضاء الطاقة ,دالي الطاقة;تمديد فريدريش.

Résumé :

Notre travail porte sur l'espace énergétique d'un opérateur défini positif ainsi que la minimisation de la fonctionnelle d'énergie associée. Comme application nous avons considéré l'opérateur de Sturm-Liouville.

Mots clés : opérateur, opérateur symétrique, opérateur auto-adjoint, opérateur positif, opérateur défini positif, opérateur fermé, opérateur fermable ; espace énergétique, fonctionnelle d'énergie ; extension de Friedrichs.

Abstract :

This work deals with the energetic space associated with positive definite operator and the minimisation of the functional of energy for the operator.

Key-words : operator, symmetric operator, self-adjoint operator, positive operator, positive definite operator, closed operator, closable operator ; energetic space, functional of energy ; Friedrichs'extension.

Table des matières

Introduction	3
1 Rappels et notions fondamentales	4
1.1 Normes et distances	4
1.2 Espace de Hilbert	7
1.3 Opérateurs bornés	10
1.3.1 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné	10
1.3.2 Inversibilité des opérateurs bornés	13
2 Opérateurs non bornés	16
2.1 Opérations sur les opérateurs non bornés	16
2.2 Opérateurs fermés	17
2.2.1 Graphe d'un opérateur	17
2.3 L'adjoint d'un opérateur non borné	18
2.3.1 Propriétés de l'adjoint	19
2.4 Opérateurs symétriques ,auto-adjoints	21
2.5 Inversibilité des opérateurs non bornés	22
3 Espace énergétique d'un opérateur défini positif	24
3.1 Opérateurs positifs et opérateurs définis positifs	24
3.2 Espace énergétique d'un opérateur défini positif	25
3.3 Minimum de la fonctionnelle d'énergie	28
3.4 Solution générale du problème du minimum	29
3.4.1 Solution généralisée	29
3.5 Extension d'un opérateur symétrique défini positif	33
3.5.1 Construction de $\hat{A}$	33
4 Application	37
4.1 Cas simple de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$	37
4.1.1 Propriétés de l'opérateur A	37
4.1.2 L'espace énergétique $\mathcal{H}_A$ associé à l'opérateur A	38
4.1.3 Fonctionnelle d'énergie de l'opérateur A	40
4.2 Cas général de l'opérateur $Ay = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y$	41
4.2.1 Propriétés de l'opérateur A	41

4.2.2	L'espace énergétique $\mathcal{H}_A$ associé à l'opérateur A	42
4.2.3	Fonctionnelle d'énergie de l'opérateur A	45
	Conclusion	46

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le problème de la recherche du minimum de la fonctionnelle d'énergie, d'un opérateur défini positif A . La résolubilité de ce problème est étudiée sur l'espace énergétique associé à l'opérateur A .

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres. Le premier chapitre porte sur quelques notions utiles et essentielles pour la suite. Ainsi on rappelle tout d'abord le théorème de la complétion d'un espace métrique ; ensuite nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Hilbert. Enfin on rappelle quelques propriétés fondamentales des opérateurs bornés.

Dans la deuxième chapitre on présente la théorie élémentaire des opérateurs non bornés et leurs propriétés, en particulier celles des opérateurs fermés, fermables, ainsi que celles de l'opérateur adjoint d'un opérateur non borné, et celles des opérateurs auto-adjoints...

Le troisième chapitre porte sur l'espace énergétique d'un opérateur défini positif, sur la minimisation de la fonctionnelle d'énergie associée à l'opérateur, et sur la méthode de Friedrichs.

Le quatrième chapitre porte sur l'application à l'opérateur de Sturm-Liouville.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Normes et distances

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E une application :

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\|\end{aligned}$$

qui vérifie :

N1) (Séparation) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) (homogénéité) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$

N3) (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$

Exemple 1.1. Sur $\mathbb{R}^n$ les normes suivantes sont les plus utilisées :

1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2) $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

3) $\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$.

Définition 1.2. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n).

Soit E un e.v.n l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui au couple $(x, y) \in E \times E$ associe $d(x, y) = \|x - y\|$ s'appelle distance de x à y induite par la norme .

Définition 1.3. soit E un ensemble non vide. On dit qu'une application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

est une distance sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

D1) (Séparation) $\forall (x, y) \in E \times E, x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

D2) (Symétrie) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$

D3) (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

On appelle espace métrique tout couple (E, d) où E est un ensemble non vide et d est une distance .

Exemple 1.2.

1) $E = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $d_1(x, y) = |x - y|$

2) $E = C([a, b])$ ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b]$
 $\forall f, g \in E :$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \text{ est une distance sur } E$$

Définition 1.4. Une suite d'éléments $(x_n)_n$ d'un espace métrique (E, d) est dite convergente vers un élément $x \in E$, si $d(x, x_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$

Définition 1.5. Une suite d'éléments $(x_n)_n$ d'un espace métrique (E, d) est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists N , \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposition 1.1. Toute suite convergente est de Cauchy .

Définition 1.6. Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente dans E .

Théorème 1.1. Soit E un espace métrique non complet. Alors il existe un espace métrique complet $\tilde{E}$, tel que E soit isométriquement isomorphe à une partie partout dense $\tilde{D}$ dans $\tilde{E}$ c'est-à-dire qu'il existe une bijection f de $E \longrightarrow \tilde{D}$ tel que $d(x, y) = \tilde{d}(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in E$.

Démonstration.

1) **La construction de $\tilde{E}$ (Existence) :** On peut construire $\tilde{E}$ comme un ensemble de classes d'équivalence des suites de Cauchy

- On commence par introduire une relation d'équivalence entre les suites de Cauchy. Soit (E, d) un espace métrique, soit $C[E]$ l'ensemble des suites de Cauchy sur E . Définir une relation $\sim$ sur $C[E]$ par :

$$x_n \sim y_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

- On note par $[x_n]$ la classe d'équivalence de la suite $(x_n)_n$.
- On considère $\tilde{E}$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation.
- On remarque que la distance entre $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tend vers une limite donnée pour $n \rightarrow +\infty$.
- On peut donc prendre pour distance sur $\tilde{E}$ la limite de la distance entre deux suites pour $n \rightarrow +\infty$ i.e $\tilde{d} : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{d}([x_n], [y_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

Il faut vérifier que :

- 1) $\tilde{d}$ est bien définie sur $\tilde{E}$: soit $(x_n)_n, (\tilde{x}_n)_n, (y_n)_n, (\tilde{y}_n)_n \in C[E]$ telles que : $(x_n)_n \sim (\tilde{x}_n)_n$ et $(y_n)_n \sim (\tilde{y}_n)_n$.

On a :

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| &= |d(x_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, y_n) + d(\tilde{x}_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \\ &\leq |d(x_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, y_n)| + |d(\tilde{x}_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \\ &\leq d(x_n, \tilde{x}_n) + d(y_n, \tilde{y}_n) \end{aligned}$$

et donc : $0 \leq |d(x_n, y_n) - d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)| \leq d(x_n, \tilde{x}_n) + d(y_n, \tilde{y}_n)$

En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

Mais cela signifie précisément que :

$$\tilde{d}([x_n], [y_n]) = \tilde{d}([\tilde{x}_n], [\tilde{y}_n])$$

- 2) $\tilde{d}$ est une métrique sur $\tilde{E}$, c'est-à-dire :

- i) soit $\tilde{d}([x_n], [y_n]) = 0$, ce qui signifie que : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$. Donc, par définition $(x_n) \sim (y_n)$ et $[x_n] = [y_n]$. comme d est une métrique, on trouve aussi immédiatement : $\tilde{d}([x_n], [y_n]) = 0$.

- ii)

$$\begin{aligned} \tilde{d}([x_n], [z_n]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)\} \quad d \text{ est une métrique.} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, z_n) \\ &= \tilde{d}([x_n], [y_n]) + \tilde{d}([y_n], [z_n]). \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\tilde{d}([x_n], [y_n]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) \quad d \text{ est une métrique.} \\ &= \tilde{d}([y_n], [x_n])\end{aligned}$$

- On peut prendre pour plongement la fonction qui à x associe la suite constante égale à x .

$$\begin{aligned}\varphi : E &\longrightarrow \tilde{E} \\ x &\longmapsto (x, x, \dots, x, \dots)\end{aligned}$$

- On constate facilement que ce plongement est une isométrie.
- On peut voir que l'image du plongement $\varphi(E)$ est dense dans $\tilde{E}$.
- On peut maintenant identifier E et son image.
- Nous arrivons maintenant à l'étape cruciale de montrer que $\tilde{E}$ est un espace complet. On considère une suite de Cauchy dans $\tilde{E}$ notée $(w_n)_n$.
- pour tout n on peut choisir $(x_n)_n$, suite de Cauchy, telle que la distance (dans $\tilde{E}$) entre x_n et w_n soit inférieure à $\frac{1}{n}$.
- La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $\tilde{E}$, et donc aussi dans E . Par définition de $\tilde{E}$, la limite de la suite x_n est la classe des suites dont la distance à x_n est nulle.
- Il ne reste plus qu'à voir que w_n tend aussi vers cette limite.

2) **L'unicité de $\tilde{E}$** : Soient $\tilde{E}$ et $\tilde{E}'$ deux complétions de E , il existe alors une bijection $\phi : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}'$ telle que :

i) ϕ se limite à l'identité sur x

$$\forall x \in E \quad : \phi(x) = x.$$

ii) ϕ conserve les métriques

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad : \quad \tilde{d}(x_1, x_2) = \tilde{d}'(\phi(x_1), \phi(x_2))$$

où $\tilde{d}'$ est la distance dans $\tilde{E}'$.

□

1.2 Espace de Hilbert

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

Définition 1.7. On dit que $(.,.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ si les propriétés sont vérifiées pour tous $x, y, z \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

i) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

ii) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

$$iii) (x, y) = \overline{(y, x)}$$

$$iv) (x, x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{H} \text{ et } (x, x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 0$$

Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Remarque 1.1.

1) $\overline{(x, y)}$ le conjugué du nombre (x, y) . Donc, si l'espace $\mathcal{H}$ est réel, alors $\overline{(x, y)} = (x, y) = (y, x)$

2) Les conditions (i) et (ii) de la définition impliquent que la fonction $(.,.)$ est linéaire par rapport la première variable x .

Il est facile de voir que $(.,.)$ est aussi linéaire par rapport la seconde variable y si $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel réel.

En fait, nous avons :

$$a) (x, y + y') = (x, y) + (x, y') \quad \forall x, y, y' \in \mathcal{H}.$$

$$b) (x, \beta y) = \beta(x, y) \text{ pour le cas réel.}$$

Vérification :

a) $(x, y + y') = \overline{(y + y', x)}$ par la condition (iii) de la définition ; par la condition (i), $(y + y', x) = (y, x) + (y', x)$ et donc :

$(x, y + y') = \overline{(y + y', x)} = \overline{(y, x) + (y', x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(y', x)}$. d'après (1) et encore par la condition (iii) :

$$\overline{(y, x)} = (x, y) \text{ et } \overline{(y', x)} = (x, y') \text{ donc } (x, y + y') = (x, y) + (x, y').$$

b) $(x, \beta y) = \overline{(\beta y, x)}$ d'après le condition (iii), mais $(\beta y, x) = \beta(y, x)$ d'après le condition (ii), donc $(x, \beta y) = \overline{\beta(y, x)} = \overline{\beta(y, x)} = \overline{\beta(x, y)}$. En utilisant (1) et de le condition (iii) du produit scalaire, sur un espace vectoriel réel $\mathcal{H}$, le produit scalaire $(.,.)$ est également linéaire par rapport à l'argument y ; $(x, \beta y) = \beta(x, y)$.

Exemple 1.3.

1) Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien usuel est

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

où $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$

2) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et $C(\Omega)$ l'espace des fonctions sur Ω

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} ; \text{ continue}\},$$

$C(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

est un espace préhilbertien .

Rappelons que, dans un espace préhilbertien, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

Rappelons aussi que $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ est une norme .
Rappelons enfin "l'identité du parallélogramme" :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.8. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (x, y) et qui est complet pour la norme $(x, x)^{\frac{1}{2}}$*

Exemple 1.4. Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$

1) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

est un espace de hilbert réel .

2) $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$(u, v) = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}$$

est un espace de hilbert complexe .

3) soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $L^2(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions à carré intégrable sur Ω

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} ; \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert .

Définition 1.9. *Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ est dit dense dans $\mathcal{H}$ si :*

$\forall h \in \mathcal{H}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathcal{D}; \|a - h\| < \varepsilon$, ou de manière équivalente si tout élément h de $\mathcal{H}$ est limite d'une suite d'éléments a_n de $\mathcal{D} : \|a_n - h\| \longrightarrow 0$ (i.e $a_n \longrightarrow h$) .

Définition 1.10. *Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Définition 1.11. *Une famille $\{e_i, i \in I\}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ est dite orthonormée si :*

$$\forall i \in I, \forall j \in I, (e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 1.12. *Une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ ou base orthonormée est une famille orthonormée totale dans $\mathcal{H}$.*

Proposition 1.2. *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie possède une base hilbertienne (dénombrable).*

Une telle base est constituée d'une famille $(e_n)_n$ d'éléments orthonormés c'est-à-dire que deux éléments distincts quelconques sont orthogonaux; et tout élément e_n est de norme égale à 1 :

$$\forall n, \|e_n\| = 1, \text{ et } \forall n, m, n \neq m \quad (e_n, e_m) = 0$$

Théorème 1.2. *(de représentation de Riesz)*

Soit T une forme linéaire et continue sur $\mathcal{H}$. Alors il existe un unique $y_T \in \mathcal{H}$, tel que $T(x) = (x, y_T)$, pour tout $x \in \mathcal{H}$. De plus $\|y_T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|$.

1.3 Opérateurs bornés

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire scalaire noté $(.,.)$. Soit :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned}$$

un opérateur linéaire borné i.e, $\exists c > 0$ tel que :

$$\|T(x)\|_{\mathcal{H}} \leq c\|x\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

Un tel opérateur est continu, et inversement tout opérateur linéaire continu est borné.

Définition 1.13. *(Norme d'un opérateur)*

La plus petite des constantes c vérifiant la relation (1.1) est appelée norme de T et est notée $\|T\|$.

On peut montrer que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_{\mathcal{H}}}{\|x\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_{\mathcal{H}}$$

Notons aussi

$$\|T.S\| \leq \|T\|.\|S\|.$$

1.3.1 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.14. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Alors l'opérateur adjoint T^* est défini par :*

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Les propriétés de l'adjoint d'un opérateur sont résumées dans les propositions suivantes :

Proposition 1.3. T^* existe toujours .

Démonstration. Soit $(Tx, y) = f_y(x)$

$$\begin{aligned} f_y(x_1 + x_2) &= (T(x_1 + x_2), y) \\ &= (Tx_1, y) + (Tx_2, y) \\ &= f_y(x_1) + f_y(x_2) \end{aligned}$$

$$f_y(\alpha x) = (T(\alpha x), y) = \alpha(Tx, y) = \alpha f_y(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Comme , } |f_y(x)| = |(Tx, y)| &\leq \|Tx\| \|y\| \quad (\text{l'inégalité de Cauchy schwarz}) \\ &\leq \|T\| \|x\| \|y\| \\ &\leq k \|x\| \quad , \text{ pour } y \text{ fixé dans } \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Alors comme $f_y(x)$ est une forme linéaire et continue d'après le théorème de Riesz, il existe $y^* \in \mathcal{H}$ tel que :

$$(Tx, y) = f_y(x) = (x, y^*) \quad , \forall x \in \mathcal{H}.$$

Alors $y \longrightarrow y^* \equiv T^*y$ définit un opérateurs $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. □

Proposition 1.4. T^* est un opérateur linéaire borné .De plus il est unique .

En effet

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^2 &= (T^*x, T^*x) \\ &= (TT^*x, x) \\ &\leq \|TT^*x\| \|x\| \quad \text{D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz.} \end{aligned}$$

Comme T est borné alors il existe $k > 0$ tel que :

$$\|T(T^*x)\| \leq k \|T^*x\|$$

donc

$$\|T^*x\|^2 \leq k \|x\| \|T^*x\|$$

ou

$$\|T^*x\| \leq k\|x\|, \text{ et donc } T^* \text{ est borné.}$$

Pour tout $z \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (z, T^*(x+y)) &= (Tz, (x+y)) \\ &= (Tz, x) + (Tz, y) \\ &= (z, T^*x) + (z, T^*y) \\ &= (z, T^*x + T^*y) \end{aligned}$$

C'est-à-dire $(z, T^*(x+y) - [T^*x + T^*y]) = 0, \forall z \in \mathcal{H}$.

Ceci implique que $T^*(x+y) = T^*x + T^*y, \forall x, y \in \mathcal{H}$.

De même

$$\begin{aligned} (z, T^*(\alpha x)) &= (Tz, \alpha x) = \overline{\alpha}(Tz, x) \\ &= \overline{\alpha}(z, T^*x) \\ &= (z, \alpha T^*x) \end{aligned}$$

ou $(z, T^*(\alpha x) - \alpha T^*x) = 0, \forall z \in \mathcal{H}$. donc : $T^*(\alpha x) = \alpha T^*x \forall x \in \mathcal{H}$ et α un scalaire.

Par conséquent T^* est linéaire .

Supposons que, pour T donné, il existe deux opérateurs T_1^* et T_2^*

$$\begin{aligned} \text{telsque : } (Tx, y) &= (x, T_1^*y) \\ \text{et } (Tx, y) &= (x, T_2^*y) \\ \text{Alors : } (x, T_1^*y) - (x, T_2^*y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ou } (x, T_1^*y - T_2^*y) = 0, \forall x \in \mathcal{H}$$

Ceci implique : $T_1^*y = T_2^*y \forall y \in \mathcal{H}$; i.e $T_1^* = T_2^*$

Donc, l'adjoint de T est unique .

Proposition 1.5. *L'adjoint de T^* noté T^{**} coïncide avec T .*

En effet pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} (Tx, y) &= (x, T^*y) \\ &= \overline{(T^*y, x)} \\ &= \overline{(y, T^{**}x)} \\ &= (T^{**}x, y) \end{aligned}$$

Exemple 1.5. soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ un espace de Hilbert réel de dimension n , et $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit T défini par $Tx = y$ où $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, et $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, et (a_{ij}) est un

matrice $n \times n$; Alors T est un opérateur linéaire borné de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(Tx, y) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} y_j \right) \\ &= (x, T^* y)\end{aligned}$$

ou $T^* y = z$, $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$,

$$z_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} y_j$$

Par conséquent si T est un opérateur linéaire borné sur $\mathbb{R}^n$, représenté par une matrice $(n \times n)(a_{ij})$, l'opérateur adjoint T^* de T est représenté par la matrice transposée (a_{ji}) de la matrice (a_{ij}) .

Exemple 1.6. Soit $\mathcal{H} = \ell_2$ et $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ défini par :

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots)$$

Pour, $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty \in \ell_2$ et $y = \{\beta_k\}_{k=1}^\infty \in \ell_2$

$$(Tx, y) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \overline{\beta_{k+1}} = (x, T^* y)$$

où $T^* \{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots)\} = (\beta_2, \beta_3, \dots)$ Alors l'adjoint de T est T^* .

1.3.2 Inversibilité des opérateurs bornés

Définition 1.15. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et T un opérateur linéaire borné. On dit que T est inversible s'il existe un opérateur linéaire borné S tel que :

$$TS = ST = I$$

où I est l'opérateur d'identité dans $\mathcal{H}$. Un tel opérateur S (lorsqu'il existe) est unique, et est appelé opérateur inverse de T . On note S par T^{-1} .

Théorème 1.3. L'opération du passage à l'adjoint vérifie les propriétés suivantes :

1. $I = I^*$ où I désigne l'opérateur d'identité .
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$, où T et S sont des opérateurs linéaires bornés.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4. $(TS)^* = S^* T^*$.

5. $T^{**} = T$.
6. $\|T^*\| = \|T\|$.
7. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.
8. Si T est inversible alors T^* l'est aussi et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration.

1. On a $(Ix, y) = (x, y)$, et d'après la définition de I^* , $(Ix, y) = (x, I^*y)$. Donc $(Ix, y) = (x, I^*y)$ ou $(x, y - I^*y) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$. Alors, $y - I^*y = 0$ ou $I^*y = y$; i.e $I = I^*$.
2. $(T + S)^* = T^* + S^* \Leftrightarrow (T + S)^*(x) = T^*(x) + S^*(x) \quad \forall x \in \mathcal{H}$.
D'après la définition de $(T + S)^*$, $\forall x \in \mathcal{H}$, on a :

$$((T + S)z, x) = (z, (T + S)^*x).$$

D'autre part ,

$$\begin{aligned} ((T + S)z, x) &= (Tz + Sz, x) \\ &= (Tz, x) + (Sz, x) \\ &= (z, T^*x) + (z, S^*x) \end{aligned}$$

Alors $(z, (T + S)^*x) = (z, T^*x + S^*x) \quad \forall x \text{ et } z \in \mathcal{H}$. Donc
 $(T + S)^*x = T^*x + S^*x, \forall x \in \mathcal{H}$

3.

$$((\alpha T)z, x) = (z, (\alpha T)^*x)$$

$$((\alpha T)z, x) = \alpha(Tz, x) = \alpha(z, T^*x) = (z, \bar{\alpha}T^*x)$$

Les deux relations précédents montrent que :

$$(z, (\alpha T)^*x - \bar{\alpha}T^*x) = 0 \quad \forall x \text{ et } z \in \mathcal{H}. \text{ Donc } (\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*.$$

4.

$$\begin{aligned} ((TS)(x), y) &= (T(S(x)), y) \\ &= (Sx, T^*y) \\ &= (x, S^*(T^*(y))) \\ &= (x, (S^*T^*)(y)) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} ((TS)(x), y) &= (x, (TS)^*y) \\ (x, (S^*T^*)(y)) &= (x, (TS)^*y) \end{aligned}$$

Alors $(TS)^* = S^*T^*$.

5.

$$\begin{aligned}(Tx, y) &= (x, T^*y) \\ &= ((T^*)^*x, y)\end{aligned}$$

ou $((T - T^{**})x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}$, Alors $T^{**} = (T^*)^*$. Donc $T = T^{**}$.

6. $\|T\| = \|T^*\| \Leftrightarrow \|T\| \leq \|T^*\|$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. On a :

$$\begin{aligned}\|T^*(x)\|^2 &= (T^*x, T^*x) = (T(T^*x), x) \\ &\leq \|T(T^*x)\| \|x\| \\ &\leq \|T^*(x)\| \|T\| \|x\|\end{aligned}$$

Alors $\|T^*(x)\| \leq \|T\| \|x\|$.

Ceci implique que $\|T^*\| \leq \|T\|$. On applique cette relation à T^* . On trouve : $\|T^{**}\| \leq \|T^*\|$.

Comme $T = T^{**}$, alors on a $\|T\| \leq \|T^*\|$.

7. $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$. On a :

$$\begin{aligned}\|T^*T(x)\| &\leq \|T^*\| \|T\| \|x\| \\ &= \|T\|^2 \|x\|\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) &= (x, T^*Tx) \\ &\leq \|T^*Tx\| \|x\| \\ &\leq \|T^*T\| \|x\|^2\end{aligned}$$

Alors $\|Tx\| \leq \sqrt{\|T^*T\|} \|x\|$, et donc $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. D'où $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

8. On a $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, $(TT^{-1})^* = (I)^* = I$ d'après (4), $(TT^{-1})^* = (T^{-1})^*(T)^*$. Alors $(T^{-1})^*(T)^* = I$ et par conséquent $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. $\square$

Définition 1.16. Soit T un opérateur linéaire borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Alors

- a) T est dit auto-adjoint (ou symétrique) si $T = T^*$.
- b) un opérateur T est dit positif si $(Tx, x) \geq 0 \quad , \forall x \in \mathcal{H}$. Un opérateur T positif est dit strictement positif si $(Tx, x) = 0$ seulement pour $x = 0$.

Exemple 1.7.

- 1) T donné dans l'exemple 1.5 est auto-adjoint si la matrice (a_{ij}) est symétrique, c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i$ et j .
- 2) L'opérateur d'identité I est auto-adjoint.
- 3) L'opérateur nul 0 est auto-adjoint.

Chapitre 2

Opérateurs non bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, T une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel strict $D(T)$ de $\mathcal{H}$ qui, à tout $x \in D(T)$, associe un élément $T(x)$ de $\mathcal{H}$. On dit alors que T est un opérateur (non-borné) de $\mathcal{H}$ de domaine $D(T)$.

Exemple 2.1. Soit T l'opérateur de multiplication par x défini de $L_2(\mathbb{R})$ dans $L_2(\mathbb{R})$ par

$$Tf(x) = xf(x).$$

T a pour domaine

$$D(T) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) / xf(x) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

Le produit scalaire sur $L_2(\mathbb{R})$ est défini par :

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}dx$$

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L_2(\mathbb{R})$$

mais $xf(x) \notin L_2(\mathbb{R})$ car $\int xf(x)dx$ est divergente. T est alors un opérateur qui n'est pas défini sur tout l'espace $L_2(\mathbb{R})$. Il est donc non borné.

2.1 Opérations sur les opérateurs non bornés

Définition 2.1. Soit T , S et R des opérateurs de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ alors :

1. La somme $S + T$ est définie par :

$$\begin{aligned} D(S + T) &= D(S) \cap D(T), \\ (S + T)(x) &= Sx + Tx, \quad \forall x \in D(S + T). \end{aligned}$$

2. L'opérateur produit (ou composition) RT est défini par :

$$\begin{aligned} D(RT) &= \{x \in D(T) \text{ tel que } Tx \in D(R)\}, \\ (RT)x &= R(Tx), \quad \forall x \in D(RT). \end{aligned}$$

2.2 Opérateurs fermés

2.2.1 Graphe d'un opérateur

Définition 2.2. (Graphe d'un opérateur)

Soit T un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le graphe de T est le sous espace vectoriel de l'espace produit $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ noté $\Gamma(T)$ défini par :

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\}$$

Ici la norme dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est la suivante

$$\|(x, y)\| = (\|x\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}}^2)^{\frac{1}{2}}$$

qui est issue du produit scalaire

$$(z, z') = (x, x') + (y, y') \text{ où } z = (x, y) \text{ et } z' = (x', y')$$

Remarque 2.1. Un sous-espace quelconque de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ n'est pas forcément le graphe d'un opérateur .

Proposition 2.1. Un sous-espace $\Gamma \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si $(0, y) \in \Gamma \Rightarrow y = 0$, pour tout y .

Définition 2.3. On dit qu'un opérateur non borné T est un opérateur fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ défini précédemment .

Notons que tout opérateur linéaire continu est fermé. cependant la réciproque est fausse.

Proposition 2.2. Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire non borné. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

1. T est fermé .
2. Pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_n = y$ on a $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Définition 2.4. On dit que l'opérateur S est une extension (ou prolongement) de l'opérateur T si $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$. On dit aussi que T est une restriction de S . En d'autres termes S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tx = Sx$, pour $x \in D(T)$.

Définition 2.5. On dit qu'un opérateur T est fermable s'il admet une extension fermée .

Proposition 2.3. Soit T un opérateur fermable. Alors T admet une extension fermée minimale $\tilde{T}$ c'est-à-dire $\tilde{T} \subset S$ pour toute extension fermée S de T . De plus

$$\Gamma(\tilde{T}) = \overline{\Gamma(T)}.$$

Démonstration. 1. Puisque T est fermable alors T admet une extension fermée. Définissons $\tilde{T}$ par $\Gamma(\tilde{T}) = \overline{\Gamma(T)}$. Si on montre que $\overline{\Gamma(T)}$ est un graphe alors c'est le graphe de $\tilde{T}$ qui est alors fermé puisque $\Gamma(\tilde{T}) = \overline{\Gamma(T)}$, et comme $\Gamma(T) \subset \overline{\Gamma(T)}$ alors $\tilde{T}$ est une extension fermée de T . Elle minimale en ce sens que si S est une extension fermée de T alors $\tilde{T} \subset S$ i.e $\Gamma(\tilde{T}) \subset \Gamma(S)$. En effet $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$ et donc $\overline{\Gamma(T)} \subset \overline{\Gamma(S)} = \Gamma(S)$ i.e $\Gamma(\tilde{T}) \subset \Gamma(S)$.

2. $\overline{\Gamma(T)}$ est un graphe signifie qu'il ne contient aucun élément de la forme $(0, y)$ avec $y \neq 0$. En d'autres termes $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow y = 0$ signifie que $\overline{\Gamma(T)}$ est un graphe .

3. T fermable signifie que $(u_n \in D(T), u_n \rightarrow 0 \text{ et } Tu_n \rightarrow y) \Rightarrow y = 0$. Par conséquent si $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)}$ alors $y = 0$ ce qui exprime (d'après 2.) que $\overline{\Gamma(T)}$ est un graphe .

□

Définition 2.6. L'extension $\tilde{T}$ de T est appelée fermeture de T .

2.3 L'adjoint d'un opérateur non borné

Soit T un opérateur linéaire non borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ de domaine $D(T)$.
Soit

$$D^* = \{y \in \mathcal{H} \exists z \in \mathcal{H} \text{ t.q } (Tx, y) = (x, z) \forall x \in D(T)\}$$

$D^* \neq \emptyset$ car $0 \in D^*$.

On définit l'opérateur T^* comme suit : $D(T^*) = D^*$ et $T^*y = z$, $\forall y \in D(T^*)$.

Définition 2.7. L'opérateur T^* est appelé adjoint de T . On done, par définition même ,

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in D(T) , y \in D(T^*).$$

En général l'élément z n'est pas unique. Cependant si $D(T)$ est partout dense dans $\mathcal{H}$, z est unique et T^* est défini aussi de manière unique .

Exemple 2.2. Soit $\mathcal{H} = L_2(a, b)$ et T défini par :

$$(Tf)(t) = \frac{df}{dt}$$

et $D(T) = \{f \in \mathcal{H} \mid f \text{ est absolument continu avec } \frac{df}{dt} \in \mathcal{H} \text{ et } f(a) = 0\}$.

Alors :

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= \int_a^b \frac{df}{dt} g(t) dt \\ &= [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) \frac{dg}{dt} dt \\ &= (f(b)g(b)) - \int_a^b f(t) \frac{dg}{dt} dt \\ &= (f, T^*g) \end{aligned}$$

où $(T^*g)(t) = -\frac{dg}{dt}.$

et $D(T^*) = \{g \in \mathcal{H} \mid g \text{ est absolument continu avec } \frac{dg}{dt} \in \mathcal{H} \text{ et } g(b) = 0\}.$

2.3.1 Propriétés de l'adjoint

Soient T_1 et T_2 des opérateurs sur $\mathcal{H}$ dont les domaines sont denses et $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(\lambda T_1)^* = \bar{\lambda} T_1^*.$
2. Si le domaine de $T_1 + T_2$ est dense, alors :

$$T_1^* + T_2^* \subseteq (T_1 + T_2)^*.$$

3. Si le domaine de $T_2 T_1$ est dense alors :

$$T_1^* T_2^* \subseteq (T_2 T_1)^*.$$

4. Si $T_2 \subseteq T_1$ alors $T_2^* \supseteq T_1^*.$

Démonstration. 1. si $\lambda \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} (T_1 x, y) = (x, T_1^* y) &\Leftrightarrow (\lambda T_1 x, y) = (x, \bar{\lambda} T_1^* y) \\ &\Leftrightarrow (x, (\lambda T_1)^* y) = (x, \bar{\lambda} T_1^* y) \end{aligned}$$

2. Soit $y \in D(T_1^* + T_2^*) = D(T_1^*) \cap D(T_2^*)$, Alors pour tout $x \in D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2)$, on a

$$\begin{aligned} (x, (T_1^* + T_2^*)y) &= (x, T_1^* y) + (x, T_2^* y) \\ &= (T_1 x, y) + (T_2 x, y) \\ &= ((T_1 + T_2)x, y). \end{aligned}$$

Par conséquent $y \in D((T_1 + T_2)^*)$ et $(T_1^* + T_2^*)y = T_1^* y + T_2^* y$, donc $T_1^* + T_2^* \subseteq (T_1 + T_2)^*.$

3. Montrons que les opérateurs $T_1^* T_2^*$ et $T_2 T_1$ sont adjoints l'un de l'autre
En effet, soit $y \in D(T_1^* T_2^*)$ et $x \in D(T_2 T_1)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} D(T_1^* T_2^*) &= \{y \in D(T_2^*) \mid T_2^* y \in D(T_1^*)\}, \\ \text{et } D(T_2 T_1) &= \{x \in D(T_1) \mid T_1 x \in D(T_2)\}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de l'adjoint, il s'ensuit :

$$(T_2 T_1 x, y) = (T_1 x, T_2^* y) = (x, T_1^* T_2^* y)$$

pour tout $x \in D(T_1)$ t.q $T_1x \in D(T_2)$ et tout $y \in D(T_2^*)$ t.q $T_2^*y \in D(T_1^*)$
D'autre part,

$$(T_2T_1x, y) = (x, (T_2T_1)^*y)$$

Par conséquent ,

$$(x, T_1^*T_2^*y) = (x, (T_2T_1)^*y)$$

4. Par définition de T_1^*

$$(T_1x, y) = (x, T_1^*y) \quad (2.1)$$

pour tout $x \in D(T_1)$ et tout $y \in D(T_1^*)$. Comme $T_2 \subset T_1$, alors :

$$(T_2x, y) = (x, T_1^*y) \quad (2.2)$$

pour tout $x \in D(T_2)$ et tout $y \in D(T_1^*)$. Par définition de T_2^*

$$(T_2x, y) = (x, T_2^*y) \quad (2.3)$$

pour tout $x \in D(T_2)$ et tout $y \in D(T_2^*)$. De cela et [2.2](#) nous concluons que $D(T_1^*) \subset D(T_2^*)$

□

Théorème 2.1. *Soit T un opérateur de domaine dense. Alors les propriétés suivantes ont lieu :*

- i) T^* est fermé .
- ii) T est fermable si et seulement si $D(T^*)$ est dense. Dans ce cas $\tilde{T} = T^{**}$.
- iii) si T est fermable alors $(\tilde{T})^* = T^*$.

Démonstration. On définit un opérateur unitaire $V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ par

$$V(x, y) = (-y, x)$$

On vérifie que V est unitaire et donc $V(E^\perp) = V(E)^\perp$ pour tout sous-espace E .

i) Soit T un opérateur linéaire sur $\mathcal{H}$, et $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in V[\Gamma(T)]^\perp &\Leftrightarrow ((x, y), (-Tz, z)) = 0 \quad , \forall z \in D(T) \\ &\Leftrightarrow (x, Tz) = (y, z) \quad , \forall z \in D(T) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma(T^*) \end{aligned}$$

par conséquent $V[\Gamma(T)]^\perp = \Gamma(T^*)$. Comme $V[\Gamma(T)]^\perp$ est toujours fermé on conclut que T^* est fermé.

ii) Supposons que $D(T^*)$ est dense. Alors :

$$\overline{\Gamma(T)} = (\Gamma(T)^\perp)^\perp = (V^2\Gamma(T)^\perp)^\perp = (V(V\Gamma(T))^\perp)^\perp = (V\Gamma(T^*))^\perp = \Gamma(T^{**}) \quad (2.4)$$

Il en résulte que $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur et donc T est fermable. D'autre part si $D(T^*)$ n'est pas dense alors il existe $y \neq 0$ appartenant à $D(T^*)^\perp$. Ainsi, on vérifie que $(y, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$ et que $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)} = V\Gamma(T^*)^\perp$. Par conséquent T n'est pas fermable puisque $\overline{\Gamma(T)}$ n'est pas le graphe d'un opérateur vu qu'il contient $(0, y)$ avec $y \neq 0$.

iii) Il résulte de 2.4 que $T^{**} = \tilde{T}$. En utilisant ceci avec le point (i), on voit que :

$$T^* = \tilde{T}^* = (T^*)^{**} = (T^{**})^* = (\tilde{T})^*.$$

□

2.4 Opérateurs symétriques ,auto-adjoints

Définition 2.8. Soit $T : D(T) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur de domaine dense dans $\mathcal{H}$. On dit que T est symétrique si $T \subseteq T^*$, c'est-à-dire $D(T) \subset D(T^*)$ et :

$$Tx = T^*x \quad , \forall x \in D(T).$$

Définition 2.9. On dit qu'un opérateur T est auto-adjoint si $T = T^*$, c'est-à-dire si T est symétrique et $D(T) = D(T^*)$.

Proposition 2.4. Un opérateur symétrique est toujours fermable.

En effet $T \subset T^*$ et T^* est fermé.

Corollaire 2.4.1. 1. Si T est un opérateur symétrique fermé alors

$$T = T^{**} \subset T^*$$

2. Si T est auto-adjoint alors

$$T^* = T = T^{**} \subset T^* \quad , \text{ c'est-à-dire } T = T^{**} = T^*.$$

En effet $T \subset T^*$ et donc $T^{**} \subset T^*$, d'après la propriété (4). Comme T est symétrique alors $D(T^*) \supseteq D(T)$ et donc $D(T^*)$ est dense dans $\mathcal{H}$. D'après le théorème précédent $T^{**} = \tilde{T}$ et donc

$$T \subset \tilde{T} = T^{**} \subset T^*$$

Proposition 2.5. Soit T un opérateur symétrique fermé. Alors T est auto-adjoint si et seulement si T^* est symétrique .

Démonstration. 1. Si T est auto-adjoint alors $T = T^*$ et donc T est symétrique et fermé (car T^* est toujours fermé) c'est-à-dire que T^* est symétrique (puisque c'est T).

2. Inversement si T^* est symétrique alors

$$T^* \subset (T^*)^*$$

Or pour T symétrique fermé on a

$$T = T^{**} \subset T^*$$

Par conséquent $T = T^*$ i.e que T est auto-adjoint .

□

Exemple 2.3. Soit $\mathcal{H} = L_2(a, b)$, et T définie par :

$$(Tf)(t) = \frac{d^2 f}{dt^2}.$$

et $D(T) = \{f \in \mathcal{H} | f \text{ et } \frac{df}{dt} \text{ sont absolument continues avec } \frac{d^2 f}{dt^2} \in \mathcal{H} \text{ et } f(a) = f(b) = 0\}$.
Alors :

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= \int_a^b \frac{d^2 f}{dt^2} g(t) dt. \\ &= \left[\frac{df}{dt} g(t) \right]_a^b - \left[f(t) \frac{dg}{dt} \right]_a^b + \int_a^b f(t) \frac{d^2 g}{dt^2} dt. \\ &= \left(\frac{df}{dt} \right)_{t=b} g(b) - \left(\frac{df}{dt} \right)_{t=a} g(a) + \int_a^b f(t) \frac{d^2 g}{dt^2} dt. \end{aligned}$$

Alors : $(T^*g)(t) = \frac{d^2 g}{dt^2}.$

où $D(T^*) = \{g \in \mathcal{H} | g \text{ et } \frac{dg}{dt} \text{ sont absolument continues avec } \frac{d^2 g}{dt^2} \in \mathcal{H} \text{ et } g(a) = g(b) = 0\} = D(T)$. Donc T est auto-adjoint .

2.5 Inversibilité des opérateurs non bornés

Nous étendons le concept d'inverse à la notion générale d'opérateur, comme suit
Soit un opérateur $T : D(T) \subset \mathcal{H} \longrightarrow R(T) \subset \mathcal{H}$ injectif i.e si pour tous $x, y \in D(T)$,
 $Tx = Ty$ implique $x = y$. Alors l'opérateur inverse de T noté T^{-1} sera défini par :

$$\begin{aligned} T^{-1} : R(T) \subset \mathcal{H} &\longrightarrow D(T) \subset \mathcal{H} \\ Tx &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Définition 2.10. (Inverse d'opérateur non borné) :

soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T : D(T) \longrightarrow R(T)$ un opérateur linéaire injectif, on définit l'opérateur T^{-1} défini sur $D(T^{-1}) = R(T)$ par :

$$T^{-1}(T(x)) = x, \forall x \in D(T).$$

L'opérateur T^{-1} est dit l'inverse de T .

Remarque 2.2. L'inverse T^{-1} , s'il existe, est unique .

Théorème 2.2. L'inverse d'un opérateur fermé est fermé .

Démonstration. soit $T : D(T) \longrightarrow R(T)$ un opérateur fermé alors son graphe

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) \quad , x \in D(T)\}$$

est fermé. D'où le graphe de T^{-1} ,

$$\Gamma(T^{-1}) = \{(Tx, x) \quad , x \in D(T)\}$$

est fermé. Ceci montre que T^{-1} est fermé. □

Théorème 2.3. (inverse de l'opérateur adjoint)

Soit $T : D(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire de domaine dense dans $\mathcal{H}$. De plus, supposons T injectif et $R(T)$ dense dans $\mathcal{H}$. Alors T^* est injectif et :

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \quad (2.5)$$

Démonstration. T^* existe puisque $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$. De plus T^{-1} existe puisque T est injectif. $(T^{-1})^*$ existe aussi puisque $D(T^{-1}) = R(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$. Nous devons montrer que $(T^*)^{-1}$ existe et satisfait [2.5](#). Soit $y \in D(T^*)$. Alors, pour tout $x \in D(T^{-1})$, nous avons $T^{-1}x \in D(T)$ et :

$$(T^{-1}x, T^*y) = (TT^{-1}x, y) = (x, y) \quad (2.6)$$

D'autre part, par définition même de l'opérateur adjoint de T^{-1} nous avons :

$$(T^{-1}x, T^*y) = (x, (T^{-1})^*T^*y)$$

pour tout $x \in D(T^{-1})$. Cela montre que $T^*y \in D((T^{-1})^*)$.

Par suite $(x, y) = (x, (T^{-1})^*T^*y) \quad \forall x \in D(T^{-1})$. Comme $D(T^{-1}) = R(T)$ est dense alors

$$(T^{-1})^*T^*y = y \quad \forall y \in D(T^*) \quad (2.7)$$

Par suite si $T^*y = 0$ alors $y = 0$ et donc $(T^*)^{-1} : R(T^*) \longrightarrow D(T^*)$ existe. De plus, puisque $(T^*)^{-1}T^*$ est l'opérateur d'identité sur $D(T^*)$, d'après [2.7](#) on voit que

$$(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^* \quad (2.8)$$

Pour établir [2.5](#), il suffit donc de montrer que

$$(T^*)^{-1} \supset (T^{-1})^* \quad (2.9)$$

Soit $x \in D(T)$ et $y \in D((T^{-1})^*)$, Alors $Tx \in R(T) = D(T^{-1})$

$$\text{et} \quad (Tx, (T^{-1})^*y) = (T^{-1}Tx, y) = (x, y) \quad (2.10)$$

D'autre part, par définition même de l'opérateur adjoint de T nous avons :

$$(Tx, (T^{-1})^*y) = (x, T^*(T^{-1})^*y)$$

pour tout $x \in D(T)$. Par conséquent $(Tx, (T^{-1})^*y) = (T^{-1}Tx, y) = (x, y)$, $\forall x \in D(T)$ et $(Tx, (T^{-1})^*y) = (x, T^*(T^{-1})^*y)$. Donc $(T^{-1})^*y \in D(T^*)$ et $T^*(T^{-1})^*y = y$, $\forall y \in D((T^{-1})^*)$ car $D(T)$ est dense. Cette dernière relation exprime que

$$(T^*)^{-1} \supset (T^{-1})^*.$$

□

Chapitre 3

Espace énergétique d'un opérateur défini positif

3.1 Opérateurs positifs et opérateurs définis positifs

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel et A un opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ de domaine $D(A)$ et d'image $R(A)$:

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow R(A) \subset \mathcal{H}$$

On suppose que A est symétrique. Par conséquent $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et

$$(Ay, z) = (y, Az) \quad \forall y, z \in D(A)$$

De plus $(u, v) \mapsto f(u, v) = (Au, v)$ définit une fonctionnelle bilinéaire symétrique pour tous $u, v \in D(A)$

Définition 3.1. *Un opérateur symétrique A est dit positif, si la forme quadratique associée à f est définie positive c'est-à-dire*

$$\forall u \in D(A), (Au, u) \geq 0 \quad \text{et} \quad (Au, u) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad u = 0$$

Définition 3.2. *Un opérateur symétrique A est dit défini positif (ou coercif ou encore coercitif) s'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$(Au, u) \geq \delta \|u\|^2$$

.

ce qui revient à dire :

$$\inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} > 0$$

Il est clair que tout opérateur défini positif est positif, mais la réciproque est fausse, en général.

Exemple 3.1.

1) $\mathcal{H} = L_2((0, 1), \mathbb{R})$

$$Ay = -y''$$

$$D(A) = \{y \in C^2(0, 1) : y(0) = y(1) = 0\}$$

A est un opérateur défini positif.

2) $\mathcal{H} = L_2((0, +\infty), \mathbb{R})$

$$By = -y''$$

$$D(B) = \{y \in C^2[0, +\infty) \text{ tel que } y(0) = 0 \text{ et } \text{supp } y \text{ est borné}\}$$

B est positif mais il n'est défini positif.

3.2 Espace énergétique d'un opérateur défini positif

Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow R(A) \subset \mathcal{H}$ un opérateur défini positif. Pour tous $u, v \in D(A)$ posons :

$$(u, v)_A = (Au, v)$$

Proposition 3.1. $(u, v)_A$ définit un produit scalaire sur $D(A)$.

Démonstration. $(u, v)_A$ définit un produit scalaire c'est-à-dire

1. $(u, v)_A$ bilinéaire : $\forall u, u', v, v' \in D(A), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

i)

$$(u + u', v)_A = (u, v)_A + (u', v)_A$$

$$(\lambda_1 u, v)_A = \lambda_1 (u, v)_A$$

ii)

$$(u, v + v')_A = (u, v)_A + (u, v')_A$$

$$(u, \lambda_2 v)_A = \lambda_2 (u, v)_A$$

2. $(u, v)_A$ est symétrique : $(u, v)_A = (v, u)_A$ pour tout $u, v \in D(A)$

3. $(u, v)_A$ est défini positif :

$(u, u)_A \geq 0$ pour tout $u \in D(A)$, et $(u, u)_A = 0$ si et seulement si $u = 0$

Comme on a $(u, v) \longmapsto f(u, v) = (Au, v)$ définit une fonctionnelle bilinéaire symétrique pour tous $u, v \in D(A)$. Alors :

1.

i)

$$(u + u', v)_A = (A(u + u'), v) = (Au, v) + (Au', v) = (u, v)_A + (u', v)_A$$

$$(\lambda_1 u, v)_A = (A(\lambda_1 u), v) = \lambda_1 (Au, v) = \lambda_1 (u, v)_A$$

ii)

$$(u, v + v')_A = (Au, v + v') = (Au, v) + (Au, v') = (u, v)_A + (u, v')_A$$

$$(u, v)_A = (Au, \lambda_2 v) = \lambda_2 (Au, v) = \lambda_2 (u, v)_A$$

$$2. (u, v)_A = (Au, v) = f(u, v) = f(v, u) = (Av, u) = (v, u)_A$$

3. Comme A est un opérateur défini positif donc A est positif, alors la forme quadratique est définie positive i.e :

$$\forall u \in D(A), (Au, u) \geq 0 \text{ et } (Au, u) = 0 \text{ si et seulement si } u = 0$$

□

Par conséquent $(D(A), (u, v)_A)$ est un espace préhilbertien. Sa complétion, notée $\mathcal{H}_A$, est appelée espace énergétique associé à l'opérateur A . Notons par $\|u\|_A$ la norme induite par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_A$. Ainsi, on a :

$$\|u\|_A = \sqrt{(Au, u)};$$

$$\|u\|_A^2 \geq \delta \|u\|^2$$

On appellera $(u, v)_A$ le produit scalaire énergétique des éléments u et v , et $\|u\|_A$ la norme énergétique de u .

Notons que, par définition même, $u \in \mathcal{H}_A$ signifie qu'il existe $(u_n) \in D(A) : u_n \longrightarrow u$ pour la norme énergétique (si $u \in D(A)$ on prend $u_n = u$, $\forall n$).

Théorème 3.1. $\mathcal{H}_A \hookrightarrow \mathcal{H}$ c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme entre $\mathcal{H}_A$ et un sous-espace de $\mathcal{H}$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{H}_A \exists (u_n) \in D(A) : \|u_n - u\|_A \longrightarrow 0$ (u_n) est donc de Cauchy et $\|u_n - u_m\|_A \geq \sqrt{\delta} \|u_n - u_m\|$. Par conséquent $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$. Par suite $u_n \longrightarrow u' \in \mathcal{H}$ (dans $\|\cdot\|$) c'est-à-dire $\|u_n - u'\| \longrightarrow 0$

Soit $\varphi : \mathcal{H}_A \longrightarrow \mathcal{H}$
 $u \longmapsto \varphi(u) = u'.$

φ répond au problème :

1. φ est bien définie c'est-à-dire u' est unique. En effet supposons qu'il existe une autre suite $(v_n) \in D(A)$ tel que $\|v_n - u\|_A \longrightarrow 0$. Alors comme précédemment $(v_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}_A$, et ensuite dans $\mathcal{H}$; et donc il existe $v' \in \mathcal{H}$ telle que $\|v_n - v'\| \longrightarrow 0$. par suite $\|u_n - v_n\|_A = \|(u_n - u) - (v_n - u)\|_A \leq \|u_n - u\|_A + \|v_n - u\|_A$ comme $\|u_n - u\|_A \longrightarrow 0$ et $\|v_n - u\|_A \longrightarrow 0$ alors $\|u_n - v_n\|_A \longrightarrow 0$. Par conséquent $\sqrt{\delta} \|u_n - v_n\| \leq \|u_n - v_n\|_A \longrightarrow 0$ implique par passage à la limite, $\|u' - v'\| = 0$ c'est-à-dire $u' = v'$.

2. φ est linéaire : pour montrer que φ est linéaire il faut vérifiée que :

i)

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{H}_A &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (u+v) &\longrightarrow \varphi(u+v) = u' + v' = \varphi(u) + \varphi(v) \quad , \forall u, v \in \mathcal{H}_A\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{H}_A &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \lambda u &\longrightarrow \varphi(\lambda u) = \lambda u' = \lambda \varphi(u) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in \mathcal{H}_A\end{aligned}$$

En effet

i) Soit $u \in \mathcal{H}_A$, $\exists (u_n) \subset D(A) : \|u_n - u\|_A \longrightarrow 0$ (u_n) est donc de Cauchy et $\|u_n - u_m\|_A \geq \sqrt{\delta} \|u_n - u_m\|$. Par conséquent $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$. Par suite $u_n \longrightarrow u' \in \mathcal{H}$ (dans $\|\cdot\|$) c'est-à-dire $\|u_n - u'\| \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\text{soit} \quad \varphi : \mathcal{H}_A &\longrightarrow \mathcal{H} \\ u &\longmapsto \varphi(u) = u'.\end{aligned}$$

soit $v \in \mathcal{H}_A$ $\exists (v_n) \in D(A) : \|v_n - v\|_A \longrightarrow 0$ (v_n) est donc de cauchy et $\|v_n - v_m\|_A \geq \sqrt{\delta} \|v_n - v_m\|$ par conséquent $(v_n)_n$ est de cauchy dans $\mathcal{H}$. Par suite $v_n \longrightarrow v' \in \mathcal{H}$ (dans $\|\cdot\|$) c'est-à-dire $\|v_n - v'\| \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\text{soit} \quad \varphi : \mathcal{H}_A &\longrightarrow \mathcal{H} \\ v &\longmapsto \varphi(v) = v'.\end{aligned}$$

Donc $(u_n + v_n) \longrightarrow u + v$ dans $\mathcal{H}_A$, $(u_n + v_n)_n$ est donc de cauchy, par conséquent $(u_n + v_n)_n$ est de cauchy dans $\mathcal{H}$. Par suite $(u_n + v_n) \longrightarrow u' + v'$, dans $\mathcal{H}$, Alors

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{H}_A &\longrightarrow \mathcal{H} \\ u + v &\longmapsto \varphi(u + v) = u' + v' = \varphi(u) + \varphi(v).\end{aligned}$$

ii) comme $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{H}_A$, et donc $\lambda u_n \longrightarrow \lambda u$, alors $(\lambda u_n)_n$ est de cauchy, par conséquent $(\lambda u_n)_n$ est de cauchy dans $\mathcal{H}$. Par suite $\lambda u_n \longrightarrow \lambda u'$ dans $\mathcal{H}$, Alors

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{H}_A &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \lambda u &\longmapsto \varphi(\lambda u) = \lambda u' = \lambda \varphi(u).\end{aligned}$$

3. φ est injective c'est-à-dire : $\forall u, v \in \mathcal{H}_A, \varphi(u) = \varphi(v) \implies u = v$

$$\begin{aligned}\|u_n - v_n\| &= \|(u_n - u') - (v_n - u')\| \leq \|u_n - u'\| + \|v_n - u'\| \\ &\leq \|u_n - \varphi(u)\| + \|v_n - \varphi(u)\| \\ &\leq \|u_n - \varphi(u)\| + \|v_n - \varphi(v)\| \\ &\leq \|u_n - u'\| + \|v_n - v'\|\end{aligned}$$

comme $\|u_n - u'\| \longrightarrow 0$ et $\|v_n - v'\| \longrightarrow 0$ par conséquent $\|u_n - v_n\| \longrightarrow 0$, par passage à la limite $\|u - v\| = 0$ c'est-à-dire $u = v$.

□

Conséquences

Notons les inclusions (algébriques)

$$D(A) \subset \mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}.$$

Par conséquent $\mathcal{H}_A$ est aussi partout dense dans $\mathcal{H}$.

Proposition 3.2. $\|u\|_A^2 \geq \delta \|u\|^2, \forall u \in \mathcal{H}_A$.

Notons que cette proposition a été déjà établie pour $u \in D(A)$.

Démonstration. soit $u \in \mathcal{H}_A \ni (u_n) \subset D(A)$ tel que $(u_n) \rightarrow u$ dans $\mathcal{H}_A$ et (comme précédemment $\delta \|u_n - u\|^2 \leq \|u_n - u\|_A^2$) $\|u_n - u\| \rightarrow 0$

Comme on a aussi $\delta \|u_n\|^2 \leq \|u_n\|_A^2$ alors, par passage à la limite $\delta \|u\|^2 \leq \|u\|_A^2$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 3.3. $(u, v)_A = (Au, v) \forall u \in D(A)$ et $\forall v \in \mathcal{H}_A$

Démonstration. soit $v \in \mathcal{H}_A \ni (v_n) \subset D(A) : v_n \rightarrow v$ dans $\mathcal{H}_A$ et $v_n \rightarrow v$ dans $\mathcal{H}$.

Pour u et v_n (éléments de $D(A)$) on a $(u, v_n)_A = (Au, v_n)$. Par passage à la limite on obtient $(u, v)_A = (Au, v)$ car le produit scalaire est continue. □

3.3 Minimum de la fonctionnelle d'énergie

Soit A un opérateur positif, et $f \in \mathcal{H}$ donné.

Définition 3.3. La fonctionnelle

$$u \mapsto J(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

est appelée fonctionnelle d'énergie de l'opérateur A . Elle est définie sur $D(A)$.

Théorème 3.2. J atteint son minimum en $u_0 \in D(A)$ si et seulement si $Au_0 = f$.

L'élément u_0 est unique.

Démonstration. Si u_0 réalise le minimum de J sur $D(A)$, soit η un élément arbitraire de $D(A)$ et t un nombre réel arbitraire. $J(u_0 + t\eta)$ une fonction de t , atteint un minimum à $t = 0$, et donc :

$$\frac{d}{dt} J(u_0 + t\eta)|_{t=0} = 0$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned}
J(u_0 + t\eta) &= (A(u_0 + t\eta), u_0 + t\eta) - 2(u_0 + t\eta, f) \\
&= (Au_0 + At\eta, u_0 + t\eta) - 2(u_0, f) - 2(t\eta, f) \\
&= (Au_0, u_0) + (Au_0, t\eta) + (At\eta, u_0) + (At\eta, t\eta) - 2(u_0, f) - 2(t\eta, f) \\
&= J(u_0) + (At\eta, t\eta) - 2(t\eta, f) + 2(Au_0, t\eta) \\
&= J(u_0) + (At\eta, t\eta) - 2(f, t\eta) + 2(Au_0, t\eta) \\
&= J(u_0) + (At\eta, t\eta) + 2(Au_0 - f, t\eta)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J(u_0 + t\eta)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} J(u_0)|_{t=0} + \frac{d}{dt} (At\eta, t\eta)|_{t=0} + 2\frac{d}{dt} (Au_0 - f, t\eta)|_{t=0} \\
&= 2t(A\eta, \eta)|_{t=0} + 2(Au_0 - f, \eta)
\end{aligned}$$

Par conséquent : $(Au_0 - f, \eta) = 0$. Ainsi, l'élément $Au_0 - f$ est orthogonale à un élément quelconque de l'ensemble $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert donné, il en résulte que $Au_0 - f = 0$, c'est-à-dire que u_0 vérifie $Au_0 = f$

Supposons u_0 est solution de $Au = f$, soit $u \in D(A)$, $u \neq u_0$, posons $u = u_0 + \eta$ avec $\eta \neq 0$, on a alors :

$$J(u) = J(u_0 + \eta) = J(u_0) + 2(Au_0 - f, \eta) + (A\eta, \eta)$$

(en utilisant la variation de J) c'est-à-dire : $J(u) = J(u_0) + (A\eta, \eta)$. Comme A est définie positif et $\eta \neq 0$ alors : $(A\eta, \eta) > 0$ et donc $J(u) > J(u_0)$.

Montrons que u_0 est unique supposons qu'il y en ait un autre u_1 . Alors $J(u_1) > J(u_0)$ (en faisant $u = u_1$) pour les même raisons $J(u_0) > J(u_1)$, ce qui est contradiction. $\square$

3.4 Solution générale du problème du minimum

3.4.1 Solution généralisée

Soit A défini positif. La fonctionnelle d'énergie de A :

$J(u) = (Au, u) - 2(u, f)$ définie sur $D(A)$ peut être prolongée à $\mathcal{H}_A$ on a :

$$J(u) = \|u\|_A^2 - 2(u, f)$$

Le première terme $\|u\|_A^2$ est défini pour $u \in \mathcal{H}_A$.

Le deuxième terme (u, f) est défini pour $u \in \mathcal{H}$ (et donc aussi pour $u \in \mathcal{H}_A$). On peut donc définir J sur tout $\mathcal{H}_A$.

Théorème 3.3. Dans $\mathcal{H}_A$ la fonctionnelle d'énergie J atteint son minimum en un et un seul point u_0 .

Démonstration. Soit $\ell : u \mapsto \ell(u) = (u, f)$. On a :

$$\begin{aligned} |(u, f)| &\leq \|u\| \cdot \|f\| && (\text{inégalité de Cauchy Schwarz}) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|u\|_A \cdot \|f\| && (\text{car } \|u\|^2 \leq \frac{1}{\delta} \|u\|_A^2) \\ \text{i.e. } |(u, f)| &\leq c \|u\|_A, && (c = \frac{\|f\|}{\sqrt{\delta}}) \end{aligned}$$

par conséquent ℓ est une fonctionnelle linéaire et bornée. D'après le lemme de Riesz il existe $u_0 \in \mathcal{H}_A$ unique $(u, f) = (u, u_0)_A, \forall u \in \mathcal{H}_A$
par conséquent :

$$J(u) = \|u\|_A^2 - 2(u, u_0)_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

D'où J atteint son minimum pour $u = u_0$ et

$$\min_{u \in \mathcal{H}_A} J(u) = -\|u_0\|_A^2$$

□

Définition 3.4. L'élément $u_0 \in \mathcal{H}_A$ qui réalise le minimum de J est appelé solution généralisée de l'équation $Au = f$.

Si $u_0 \in D(A)$ c'est la solution (ordinaire) de l'équation $Au = f$, d'après le théorème [3.2](#).

Lorsque $\mathcal{H}_A$ est séparable la solution généralisée peut être facilement construite.

Théorème 3.4. Soit A défini positif. Alors $\mathcal{H}_A$ est séparable si et seulement si $\mathcal{H}$ est séparable.

Démonstration. Supposons $\mathcal{H}_A$ séparable il existe donc $E = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots\}$ dense (partout) dans $\mathcal{H}_A$. Montrons que E est aussi (partout) dense dans $\mathcal{H}$.
soit $u \in \mathcal{H}$, comme $\mathcal{H}_A$ est partout dense dans $\mathcal{H}$ (voir conséquences du théorème [3.1](#)), alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists u' \in \mathcal{H}_A$ tel que $\|u - u'\| < \frac{\varepsilon}{2}$, par suite pour $\frac{\varepsilon\sqrt{\delta}}{2} \exists \psi_k$ tel que $\|u' - \psi_k\|_A \leq \frac{\varepsilon\sqrt{\delta}}{2}$,
par conséquent $\|u' - \psi_k\| \leq \frac{\|u' - \psi_k\|_A}{\sqrt{\delta}} < \frac{\varepsilon}{2}$, et donc $\|u - \psi_k\| \leq \|u - u'\| + \|u' - \psi_k\| < \varepsilon$,
c'est-à-dire $\mathcal{H}$ est séparable.

Supposons $\mathcal{H}$ séparable et soit $\{f_n\}$ une suite infinie totale dans $\mathcal{H}$. on a :

Lemme 3.1. La suite $(\varphi_n)_n$ de solutions généralisée de l'équation $A\varphi_n = f_n$ est totale dans $\mathcal{H}_A$.

Retournons à la démonstration du théorème [3.4](#), et montrons que l'ensemble des combinaisons linéaires rationnelles finies $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ est dense dans $\mathcal{H}_A$ ($\alpha_k \in \mathbb{Q}$).
 Notons d'abord que, d'après le lemme, $\{\varphi_n\}_n$ est totale dans $\mathcal{H}_A$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \forall u \in \mathcal{H}_A, \exists N \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\|u - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k\|_A < \varepsilon$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ on peut approcher chaque a_k par un α_k

$$\begin{aligned} \|u - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k\|_A &= \|u - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k + \sum_{k=1}^N (a_k - \alpha_k) \varphi_k\|_A \\ &\leq \|u - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k\|_A + \sum_{k=1}^N |a_k - \alpha_k| \|\varphi_k\|_A \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N |a_k - \alpha_k| \|\varphi_k\|_A \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir les α_k tel que $\sum_{k=1}^N |a_k - \alpha_k| \|\varphi_k\|_A < \varepsilon$, on aura alors $\|u - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k\|_A < 2\varepsilon$.

Démonstration du lemme

Il faut montrer que tout $u \in \mathcal{H}_A$ peut être approximé par une combinaison linéaire d'éléments $\{\varphi_n\}$.

il faut d'abord le démontrer pour $u \in D(A)$ et ensuite utiliser le fait que $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}_A$.

i) soit $u \in D(A)$, posons $Au = v \in \mathcal{H}$.

soit $S_N = \sum_{k=1}^N a_k f_k$ et $\sigma_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$. (on rappelle que $A\varphi_k = f_k$) $\|u - \sigma_N\|_A^2 = (u - \sigma_N, u - \sigma_N)_A = (u - \sigma_N, \eta)_A$ où $\eta = u - \sigma_N$

$$\begin{aligned} i.e \quad \|u - \sigma_N\|_A^2 &= (u, \eta)_A - (\sigma_N, \eta)_A \\ &= (Au, \eta) - (\sigma_N, \eta)_A \\ &= (v, \eta) - \sum_{k=1}^N a_k (\varphi_k, \eta)_A \\ &= (v, \eta) - \sum_{k=1}^N a_k (A\varphi_k, \eta) \\ &= (v, \eta) - \sum_{k=1}^N a_k (f_k, \eta) \\ &= (v, \eta) - (\sum_{k=1}^N a_k f_k, \eta) \\ &= (v - S_N, \eta) \end{aligned}$$

Ainsi : $\|u - \sigma_N\|_A^2 = (v - S_N, \eta)$.

comme (f_n) totale dans $\mathcal{H}$. On peut pour tout $\varepsilon > 0$ choisir N et a_k tel que $\|v - S_N\| < \varepsilon$, par suite :

$$\begin{aligned} \|u - \sigma_N\|_A^2 &= \|(v - S_N, \eta)\| \\ &\leq \|v - S_N\| \|\eta\| \\ &\leq \varepsilon \frac{\|\eta\|_A}{\sqrt{\delta}} \end{aligned}$$

D'où $\|u - \sigma_N\|_A^2 \leq \varepsilon \frac{\|\eta\|_A}{\sqrt{\delta}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}} \|u - \sigma_N\|_A$
c'est-à-dire $\|u - \sigma_N\|_A^2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}}$

ii) Soit $u \in \mathcal{H}_A$, $\exists u' \in D(A)$ tel que $\|u - u'\|_A < \varepsilon$ pour u' , d'après i), il existe a_k et N tel que :
 $\|u' - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k\|_A < \varepsilon$ et donc $\|u - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k\|_A < 2\varepsilon$. $\square$

Conséquence :

Construction de la solution généralisée lorsque $\mathcal{H}$ est séparable (donc aussi $\mathcal{H}_A$), alors il existe dans $\mathcal{H}_A$ un système orthonormal dénombrable $\{\Psi_n\}$ total $(\Psi_i, \Psi_j)_A = \delta_{ij}$.

Si u_0 est la solution généralisée décomposons la en série de Fourier par rapport au système $(\Psi_n)_n$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n \quad (3.1)$$

où a_n sont les coefficients de fourier de u_0 c'est-à-dire $a_n = (u_0, \Psi_n)_A = (f, \Psi_n)$.
et $u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, \Psi_n)_A \Psi_n$ dans $\|\cdot\|_A$ i.e. $\|u_0 - \varphi_n\|_A \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow \infty$.

Traisons la preuve de la formule [3.1](#).

Rappelons que u_0 est déterminée à partir de la relation :

$$(u, f) = (u, u_0)_A \quad (3.2)$$

Il suffit de prouver que la série [3.1](#) converge dans $\mathcal{H}_A$, et que sa somme vérifie la relation [3.2](#).

On a $(f, \Psi_n) = a_n$, Prouvons que la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (3.3)$$

converge. Nous avons

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \Psi_k, f \right) = \sum_{k=1}^n a_k (\Psi_k, f) = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k|^2 &\leq \|f\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^n a_k \Psi_k \right\| \\ &\leq \frac{\|f\|_A}{\sqrt{\delta}} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \Psi_k \right\|. \end{aligned}$$

puisque Ψ_n est orthonormée dans $\mathcal{H}_A$ alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \Psi_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}.$$

substituant cela dans la dernière inégalité, on trouve :

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\delta}.$$

Ainsi les sommes partielles de la série [3.3](#) sont limitées et cette série converge, ceci implique la convergence de la série [3.1](#) dans $\mathcal{H}_A$.

Soit

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Psi_n \text{ avec } \alpha_n = (u, \Psi_n)_A$$

Considérons la somme partielle $u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Psi_k$

Alors :

$$\begin{aligned} (u, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\alpha_k \Psi_k, f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{a_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k = (u, u_0). \end{aligned}$$

3.5 Extension d'un opérateur symétrique défini positif

Soit A un opérateur défini positif agissant dans $\mathcal{H}$. On sait qu'un tel opérateur admet une extension fermée, d'après les résultats du chapitre 2. Nous utilisons la méthode de Friedrichs pour construire l'extension fermée $\widehat{A}$ de l'opérateur A . Cette extension $\widehat{A}$ est appelée extension de Friedrichs de l'opérateur A .

3.5.1 Construction de $\widehat{A}$

On a vu, au théorème [3.3](#), que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$ il existe $u_0 \in \mathcal{H}_A$ t.q.

$$(u, f) = (u, u_0)_A, \quad \forall u \in \mathcal{H}_A$$

(u_0 réalise le minimum de la fonctionnelle $J(u)$).

Considérons alors l'opérateur $G : f \mapsto u_0$, défini sur $\mathcal{H}$ tout entier par $Gf = u_0$. Ainsi $D(G) = \mathcal{H}$, $R(G) \subset \mathcal{H}_A$.

Proposition 3.4. *G est un opérateur borné symétrique.*

Démonstration. 1. On a $(u, f) = (u, Gf)_A$, $\forall u \in \mathcal{H}_A$.

En particulier, pour $u = Gh$ avec $h \in \mathcal{H}_A$ quelconque on obtient $(Gh, f) = (Gh, Gf)_A = (Gf, Gh)_A$. Pour les mêmes raisons $(Gf, h) = (Gh, Gf)_A = (Gf, Gh)_A$. Par conséquent $(Gh, f) = (Gf, h) = (h, Gf)$ qui exprime que G est symétrique.

2. Pour $u = Gf$ on obtient $\|Gf\|_A^2 = (Gf, f)$. D'où $\|Gf\|_A^2 = (Gf, f) \leq \|Gf\| \cdot \|f\|$, d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz. Par conséquent

$$\delta \|Gf\|^2 \leq \|Gf\| \cdot \|f\|,$$

c'est-à-dire que G est borné et $\|Gf\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|$ qui exprime que $\|G\| \leq \frac{1}{\delta}$.

□

Proposition 3.5. G est inversible.

Démonstration. Montrons que G est injectif. Supposons $Gf = 0$ et montrons que $f = 0$. On a $(u, f) = (u, Gf)_A = 0$, $\forall u \in \mathcal{H}_A$. Comme $\mathcal{H}_A$ est dense alors $(u, f) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}$. En particulier, pour $u = f$, $\|f\|^2 = 0$; et donc $f = 0$.

□

L'opérateur G^{-1} existe donc. Il est défini sur $R(G) \subset \mathcal{H}_A$ et son image $R(G^{-1})$ coïncide avec $D(G) = \mathcal{H}$.

Dans toute la suite G^{-1} sera noté par $\hat{A}$.

Proposition 3.6. $\hat{A}$ est auto-adjoint.

Démonstration. Comme G est symétrique et $D(G) = \mathcal{H}$ alors G est auto-adjoint. Par suite d'après le théorème 2.3 $(G^{-1})^* = (G^*)^{-1} = G^{-1}$ i.e $\hat{A}$ est auto-adjoint.

□

Théorème 3.5. 1. L'opérateur $\hat{A}$ est une extension de A .

2. $\hat{A}$ défini positif. De plus $\inf_{u \neq 0} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} = \inf_{u \neq 0} \frac{\|u\|_{\hat{A}}^2}{\|u\|^2}$.

3. Pour tout $f \in \mathcal{H}$ l'équation $\hat{A}u = f$ admet une solution unique.

Démonstration. 1. $A \subset \hat{A}$. En effet

i) Si $u_0 \in D(A)$ alors u_0 réalise le minimum de $J(u)$. Si $Au_0 = f$, et donc $u_0 = Gf$ i.e $f = \hat{A}u_0$ c'est-à-dire $u_0 \in D(\hat{A})$ on a donc $D(A) \subset D(\hat{A})$.

ii) Si $u_0 \in D(A)$ alors $Au_0 = f = \hat{A}u_0$. Par conséquent on a bien $A \subset \hat{A}$.

2. Comme $A \subset \hat{A}$ alors $\inf_{u \in D(\hat{A})} \frac{\|u\|_{\hat{A}}^2}{\|u\|^2} \leq \inf_{u \in D(A)} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} = \delta$.

On a donc $\|u\|_A^2 \geq \delta \|u\|^2$, $\forall u \in \mathcal{H}_A$.

Comme $(u, f) = (u, Gf)_A$, $\forall u \in \mathcal{H}_A$ alors pour $u = Gf$ (et donc $f = \hat{A}u$), on obtient $(u, \hat{A}u) = (u, Gf)_A = (Au, u) = \|u\|_A^2 \geq \delta \|u\|^2$.

Par conséquent $\frac{(\hat{A}u, u)}{\|u\|^2} \geq \delta$, et $\hat{A}$ est donc défini positif. De plus

$\inf_{u \in D(\hat{A})} \frac{(\hat{A}u, u)}{\|u\|^2} \geq \delta = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}$ ce qui prouve l'égalité des bornes inf.

3. Soit $f \in \mathcal{H} = D(G) = R(\hat{A})$. Donc il existe $u_0 \in D(\hat{A})$ t.q $f = \hat{A}u_0$. Ceci prouve l'existence de la solution. L'unicité découle du fait que $\hat{A}$ est défini positif (voir théorème [3.2](#) et [3.3](#)) .

□

Corollaire 3.5.1. *Soit A un opérateur défini positif. Alors l'extension $\hat{A}$ de Friedrichs de A est auto-adjointe, définie positive et conserve la borne $\inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}$.*

Remarque 3.1. *L'opérateur A peut admettre d'autres extensions auto-adjointes. Cependant seulement pour $\hat{A}$ on a $D(\hat{A}) \subset \mathcal{H}_A$. Le théorème suivant montre l'intérêt de $\hat{A}$.*

Théorème 3.6. *Soit A un opérateur défini positif, et $\hat{A}$ son extension de Friedrichs. Alors, pour toute extension symétrique B de A t.q, $D(B) \subset \mathcal{H}_A$, $B \subset \hat{A}$.*

Démonstration. Voir [4](#)

□

Théorème 3.7. *Soient A un opérateur défini positif, et $\hat{A}$ son extension de Friedrichs. Alors les espaces énergétiques de A et $\hat{A}$ coïncident.*

Démonstration. On montre que $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{\hat{A}}$ et que $\|u_0\|_{\hat{A}} = \|u_0\|_A \forall u \in \mathcal{H}_A$

1. Soit $u_0 \in \mathcal{H}_A$
 - i) Si $u_0 \in D(A)$ alors $u_0 \in D(\hat{A}) \subset \mathcal{H}_{\hat{A}}$ et $\|u_0\|_A^2 = (Au_0, u_0) = (\hat{A}u_0, u_0) = \|u_0\|_{\hat{A}}^2$.
 - ii) Si $u_0 \in \mathcal{H}_A \exists (u_n) \subset D(A)$ t.q $\|u_n - u_m\|_A^2 \rightarrow 0$ et $\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ (et donc aussi $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$). D'après i) $u_n, u_m \in D(\hat{A})$ et

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_A^2 &= (A(u_n - u_m), u_n - u_m) = (\hat{A}(u_n - u_m), u_n - u_m) \\ &= \|u_n - u_m\|_{\hat{A}}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent $\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ et $\|u_n - u_m\|_{\hat{A}}^2 \rightarrow 0$ qui signifie que $u_0 \in \mathcal{H}_{\hat{A}}$. Ainsi $\|u_n - u_0\|_A \rightarrow 0$ et $\|u_n - u_0\|_{\hat{A}} \rightarrow 0$. D'où $\|u_0\|_A = \lim \|u_n\|_A = \lim \|u_n\|_{\hat{A}} = \|u_0\|_{\hat{A}}$.

2. Inversement on redémontre la même chose dans l'autre sens. Soit $u_0 \in \mathcal{H}_{\hat{A}}$ $\exists (u_n) \subset D(\hat{A})$ t.q $\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ et $\|u_n - u_m\|_{\hat{A}} \rightarrow 0$. Comme $D(\hat{A}) \subset \mathcal{H}_A$ alors $(u_n) \subset \mathcal{H}_A$ et donc, d'après le point 1 précédent $\|u_n - u_m\|_{\hat{A}} = \|u_n - u_m\|_A$. Par conséquent $\exists (u_n) \subset \mathcal{H}_A$ t.q $\|u_n - u_0\| \rightarrow 0$ et $\|u_n - u_m\|_A \rightarrow 0$ qui exprime que $u_0 \in \mathcal{H}_A$.

□

Remarquons que, d'après la proposition [3.3](#),

$$(u, v)_A = (Au, v) \quad \forall u \in D(A), \forall v \in \mathcal{H}_A$$

Cette proposition se généralise comme suit

Proposition 3.7.

$$(u, v)_A = (\hat{A}u, v) \quad , \quad \forall u \in D(\hat{A}) \quad , \quad \forall v \in \mathcal{H}_A$$

Démonstration. Si $u \in D(\hat{A})$ et $v \in \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{\hat{A}}$ alors, d'après la proposition 3.3 $(u, v)_{\hat{A}} = (\hat{A}u, v)$. Comme les normes dans $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_{\hat{A}}$ coïncident alors, en vertu de la relation générale dans tout espace de hilbert $(a, b) = \frac{1}{4}\{\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2\}$.

$$\begin{aligned} (u, v)_{\hat{A}} &= \frac{1}{4}\{\|u + v\|_{\hat{A}}^2 - \|u - v\|_{\hat{A}}^2\} \\ &= \frac{1}{4}\{\|u + v\|_A^2 - \|u - v\|_A^2\} \\ &= (u, v)_A. \end{aligned}$$

Par conséquent on a bien $(u, v)_A = (\hat{A}u, v)$.

□

Chapitre 4

Application

4.1 Cas simple de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$

Considérons l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ défini dans $\mathcal{H} = L_2[0, 1]$, de domaine $D(A) = \{u \in C^{(2)}[0, 1] : u(0) = u(1) = 0\}$.
Notons que $D(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

4.1.1 Propriétés de l'opérateur A

Les propriétés de l'opérateur A sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 4.1. *L'opérateur A vérifie les propriétés suivantes :*

1. A est symétrique .
2. A est défini positif .

Démonstration. 1. $\forall u, v \in D(A)$

$$\begin{aligned}(Au, v) &= (-u'', v) \\&= \int_0^1 -u''(x)v(x)dx \\&= -[u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \\&= [u(x)v'(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v''(x)dx \\&= -\int_0^1 v''(x)u(x)dx \\&= (u, Av)\end{aligned}$$

2. A est défini positif

$$(Au, u) = \int_0^1 -u''(x)u(x)dx = \int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq 0$$

i.e. A est positif .

D'autre part $u(x) = \int_0^x u'(t)dt$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_0^x u'(t)dt\right)^2 = \left(\int_0^x 1 \cdot u'(t)dt\right)^2 \leq x \cdot \int_0^x (u'(t))^2 dt \\ &\leq 1 \cdot \int_0^1 (u'(t))^2 dt \\ &= \int_0^1 (u'(t))^2 dt \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, 1]$ on obtient l'inégalité

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \int_0^1 (u'(x))^2 dx$$

Donc $\|u\|^2 \leq (Au, u)$ A est alors défini positif avec $\delta = 1$.

□

4.1.2 L'espace énergétique $\mathcal{H}_A$ associé à l'opérateur A

Proposition 4.2. *L'espace énergétique $\mathcal{H}_A$ associé à l'opérateur A est constitué de fonction u vérifiant les propriétés suivantes :*

1. u est absolument continue sur $[0, 1]$.
2. $u' \in L_2[0, 1]$.
3. $u(0) = u(1) = 0$.

Démonstration. 1. Notons d'abord $(u, v)_A = (Au, v)$ pour $u, v \in D(A)$

$$\begin{aligned} (u, v)_A &= (-u'', v) \\ &= \int_0^1 -u''v dx \\ &= [-u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v' dx \\ &= \int_0^1 u'v' dx \end{aligned}$$

où $\|u\|_A^2 = \int_0^1 u'^2 dx \quad \forall u \in D(A)$.

Soit $u \in \mathcal{H}_A$. Alors $u \in \mathcal{H} = L_2(0, 1)$ et $\exists (u_n) \subset D(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ pour $\|\cdot\|_A$ et donc aussi $u_n \rightarrow u$ pour $\|\cdot\|$ de $\mathcal{H}$.
pour tout n , $u_n \in D(A)$ et donc

$$u_n(x) = u_n(x) - u_n(0) = \int_0^x u'_n(t)dt \tag{4.1}$$

La suite (u_n) convergente dans $\mathcal{H}_A$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}_A$; et :
 $\|u_n - u_m\|_A^2 = (A(u_n - u_m), u_n - u_m) = (-u_n'' + u_m'', u_n - u_m)$ Par suite

$$\begin{aligned}\int_0^1 -u_k'' u_k dx &= + \int_0^1 u_k'^2(x) dx \\ \int_0^1 -u_k'' u_\ell dx &= [-u_k' u_\ell]_0^1 + \int_0^1 u_k' u_\ell' dx = \int_0^1 u_k' u_\ell' dx\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|_A^2 &= \int_0^1 (u_n'^2(x) + u_m'^2(x)) dx - 2 \int_0^1 u_n' u_m' dx \\ &= \int_0^1 (u_n'(x) - u_m'(x))^2 dx \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que (u_n') est de Cauchy dans $\mathcal{H} = L_2(0, 1)$.

D'où $u_n' \longrightarrow v$ dans $L_2(0, 1)$, $v \in L_2(0, 1)$, par passage à la limite on obtient $u(x) = \int_0^x v(t) dt$ (avec $v(x) \in L_2(0, 1)$ et donc $v(x) \in L_1(0, 1)$), le théorème de Lebesgue montre u est absolument continue. $u'(x) = v(x)$ p.p et $v(x) \in L_2(0, 1)$.

$u(0) = 0$. aux mêmes conclusions avec $u(1) = 0$.

En écrivant $u_n(x) = -(u_n(1) - u_n(x)) = -\int_x^1 u_n'(t) dt$.

Par conséquent si $u \in \mathcal{H}_A$, alors :

- (a) u est absolument continue .
- (b) $u' \in L_2(0, 1)$.
- (c) $u(0) = u(1) = 0$.

2. Inversement si u vérifie ces trois conditions on peut montrer que $u \in \mathcal{H}_A$ On a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{sur } [0, \ell]$$

où

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad n = 0, 1, \dots$$

Alors

$$u'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \quad \ell = 1$$

où

$$a_0 = 2 \int_0^1 u'(x) dx = 2[u(1) - u(0)] = 0$$

Donc

$$u'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \quad \text{et} \quad a_n = 2 \int_0^1 u'(x) \cos n\pi x dx$$

Si $u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ dans $L_2[0, 1]$

$u(x) - u(0) = u(x) = \int_0^x u'(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\pi} \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ dans $L_2[0, 1]$
 avec $b_n = \frac{a_n}{n\pi}$. On a donc par définition même

$u_N(x) \equiv \sum_{n=1}^N b_n \sin n\pi x \longrightarrow u(x)$ quand $N \longrightarrow +\infty$ dans $L_2[0, 1]$

On a $u_N(x) \in D(A)$, $u_N(x) \longrightarrow u(x)$.

Pour montrer que $u(x) \in \mathcal{H}_A$ il suffit de prouver que $\{u_N(x)\}_N$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}_A$. On a : $u_N(x) - u_K(x) \in D(A)$ et

$$\|u_N - u_K\|_A^2 = \int_0^1 (u'_N - u'_K)^2 dx$$

Si $N > K$

$$u'_N(x) - u'_K(x) = \sum_{n=1}^N a_n \cos n\pi x - \sum_{n=1}^K a_n \cos n\pi x = \sum_{n=K+1}^N a_n \cos n\pi x$$

implique

$$\begin{aligned} \|y_N - y_K\|_A^2 &= \int_0^1 \left(\sum_{n=K+1}^N a_n \cos n\pi x \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=K+1}^N a_n \cos n\pi x \right) \left(\sum_{p=K+1}^N a_p \cos p\pi x \right) dx \end{aligned}$$

Pour $n \neq p$ $\int_0^1 \cos n\pi x \cos p\pi x dx = 0$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos^2 n\pi x dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 nt dt \quad (\pi x = t) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car

$$\int_{-\pi}^\pi \left(\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dt = 1.$$

Par conséquent $\|u_N - u_K\|_A^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=K+1}^N a_n^2 \longrightarrow 0$

□

4.1.3 Fonctionnelle d'énergie de l'opérateur A

$$\begin{aligned} J(u) &= (Au, u) - 2(u, f) \\ &= (-u'', u) - 2(u, f) \\ &= \int_0^1 -u''(x)u(x) dx - 2 \int_0^1 u(x)f(x) dx \\ &= \int_0^1 u'^2(x) dx - 2 \int_0^1 u(x)f(x) dx \\ &= \int_0^1 (u'(x))^2 - 2u(x)f(x) dx \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation d'Euler : $\Phi_u - \frac{d}{dx}(\Phi_{u'}) = 0$ (où $\Phi(u, u') = (u'(x))^2 - 2u(x)f(x)$)
Donc, l'équation d'Euler est écrite sur la forme

$$\begin{aligned}\Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'} = 0 &\Leftrightarrow -2f(x) - \frac{d}{dx}(2u'(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2f(x) - 2u''(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow u''(x) + f(x) = 0.\end{aligned}$$

4.2 Cas général de l'opérateur $Ay = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y$

Considérons l'opérateur de Sturm-Liouville $Ay = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y$ défini dans $L_2[a, b]$

On suppose que $p \in C^1[a, b]$, $q \in C^0[a, b]$ et que $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$.

$$D(A) = \{y \in C^2[a, b] : y(a) = y(b) = 0\}$$

Par conséquent $p_0 \leq p(x) \leq p_1$, $0 \leq q(x) \leq q_1$, $\forall x$

On sait que $D(A)$ est dense dans $L_2[a, b] \equiv \mathcal{H}$.

4.2.1 Propriétés de l'opérateur A

Les propriétés de l'opérateur A sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 4.3. *A vérifie les propriétés suivantes :*

1. *A est symétrique .*
2. *A est défini positif .*

Démonstration. 1. $\forall y, z \in D(A)$

$$\begin{aligned}(Ay, z) &= \int_a^b -\frac{d}{dx}(p(x)y'(x))z(x)dx + \int_a^b q(x)y(x)z(x)dx \\ &= [p(x)y'(x)z(x)]_a^b + \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx + \int_a^b q(x)y(x)z(x)dx \\ &= \int_a^b [p(x)y'(x)z'(x) + q(x)y(x)z(x)]dx \quad (\text{car } z(a) = z(b) = 0) \\ &= (y, Az)\end{aligned}$$

2. $(Ay, y) = \int_a^b (p(x)y'^2 + q(x)y^2)dx \geq 0$. i.e. A est positif. De plus

$$(Ay, y) \geq \int_a^b p(x)y'^2(x)dx \geq p_0 \int_a^b y'^2(x)$$

D'autre part

$$\int_a^x y'(t)dt = y(x) - y(a) = y(x)$$

D'où

$$\begin{aligned} y^2(x) &\leq \int_a^x y'^2(t)dt \cdot \int_a^x 1^2 dt \\ &= (x-a) \int_a^x y'^2(t)dt \\ &\leq (b-a) \int_a^b y'^2(t)dt \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \int_a^b y^2(x)dx \\ &\leq \int_a^b (b-a) \int_a^b y'^2(t)dt dx \\ &= (b-a)^2 \int_a^b y'^2(t)dt \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{p_0 \|y\|^2}{(b-a)^2} \leq p_0 \int_a^b y'^2(t)dt \leq (Ay, y)$$

i.e $(Ay, y) \geq \delta_0^2 \|y\|^2$ où $\delta_0 = \frac{\sqrt{p_0}}{b-a}$. A est alors défini positif .

□

4.2.2 L'espace énergétique $\mathcal{H}_A$ associé à l'opérateur A

Proposition 4.4. *L'espace énergétique $\mathcal{H}_A$ associé à l'opérateur A est constitué de fonction y vérifiant les propriétés suivantes :*

1. y est absolument continue sur $[a, b]$.
2. $y' \in L_2[a, b]$.
3. $y(a) = y(b) = 0$.

Démonstration. 1. Soit $y \in \mathcal{H}_A$ $\exists y_n \in D(A)$ t.q $y_n \rightarrow y$ dans $\mathcal{H}$ et $\|y_n - y_m\|_A \rightarrow 0$
On vu que

$$(Au, u) = \int_a^b (p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x))dx \quad \forall u \in D(A).$$

En particulier, pour $u = y_n - y_m$, on obtient

$$\|y_n - y_m\|_A^2 = \int_a^b [p(x)(y'_n - y'_m)^2 + q(x)(y_n - y_m)^2]dx$$

comme $\|y_n - y_m\|_A \rightarrow 0$ alors chaque terme tend vers zéro. D'où $\int_a^b p(x)(y'_n - y'_m)^2 dx \rightarrow 0$. Par suite, puisque $p_0 \leq p(x) \leq p_1$, $\int_a^b (y'_n - y'_m)^2 dx$ qui exprime que $\{y'_n\}$ est de Cauchy dans $L_2[a, b]$. Il existe donc $u \in L_2[a, b]$ t.q $y'_n \rightarrow u$ dans $L_2[a, b]$ (et donc $\int_a^x y'_n(t)dt \rightarrow \int_a^x u(t)dt$). Comme $y_n(x) = y_n(x) - y_n(0) = \int_a^x y'_n(t)dt$.

Par passage à la limite on obtient donc

$$y(x) = \int_a^x u(t)dt \quad \text{avec } u \in L_2[a, b]$$

i.e y est absolument continue, $y'(x) = u(x)$ p.p dans $L_2[a, b]$.

$y(a) = 0$. On a aussi $-y_n(x) = y_n(b) - y_n(x) = \int_x^b y'_n(t)dt$ et, avec le même raisonnement, $y(b) = 0$; y absolument continue et $y'(x) \in L_2[a, b]$.

Par conséquent si $y \in \mathcal{H}_A$, alors y est absolument continue, $y'(x) \in L_2[a, b]$ et $y(a) = y(b) = 0$.

2. Inversement soit y absolument continue t.q $y' \in L_2[a, b]$, et $y(a) = y(b) = 0$. Alors montrons que $y \in \mathcal{H}_A$.

Notons d'abord que la formule

$\|u\|_A^2 = \int_a^b (p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x))dx$ prouvée ci-dessus pour $u \in D(A)$ reste valable

pour $u \in \mathcal{H}_A$. La démonstration est analogue à celle de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ sur $[0, 1]$

. Comme $y' \in L_2[a, b]$ décomposons la en série de Fourier cosinus :

$$y'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b y'(x)dx = \left[\frac{y(x)}{b-a} \right]_{x=a}^b = 0$$

Intégrons terme à terme

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(b-a)}{n\pi} \sin n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

La somme partielle

$$y_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n(b-a)}{n\pi} \sin n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

On a donc par définition même

$y_N(x) \equiv \sum_{n=1}^N \frac{a_n(b-a)}{n\pi} \sin n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \rightarrow y(x)$ quand $N \rightarrow +\infty$ dans $L_2[a, b]$

On a $y_N(x) \in D(A)$, $y_N(x) \rightarrow y(x)$.

Pour montrer que $y(x) \in \mathcal{H}_A$ il suffit de prouver que $\{y_N(x)\}$ est de Cauchy dans

$\mathcal{H}_A$. On a : $y_N(x) - y_K(x) \in D(A)$ et

$$\begin{aligned}
\|y\|_A^2 &= \int_a^b p(x)y'^2(x) + q(x)y^2(x)dx \\
&\leq \int_a^b p_1 y'^2(x) + q_1 y^2(x)dx \\
&\leq \int_a^b p_1 y'^2(x) + q_1(b-a)^2 y'^2(x)dx \quad (\text{Nous avons vu } \|y\|^2 \leq (b-a)^2 \int_a^b y'^2(x)dx) \\
&= c \int_a^b y'^2(x)dx
\end{aligned}$$

Donc

$$\|y_N - y_K\|_A^2 \leq c \int_a^b (y'_N - y'_K)^2 dx$$

Si $N > K$

$$y'_N(x) - y'_K(x) = \sum_{n=1}^N a_n \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) - \sum_{n=1}^K a_n \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) = \sum_{n=K+1}^N a_n \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right)$$

implique

$$\begin{aligned}
\|y_N - y_K\|_A^2 &= \int_a^b \left(\sum_{n=K+1}^N a_n \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right)^2 dx \\
&= \int_a^b \left(\sum_{n=K+1}^N a_n \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \left(\sum_{p=K+1}^N a_p \cos p\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) dx
\end{aligned}$$

$$\text{Pour } n \neq p \quad \int_a^b \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \cos p\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\int_a^b \cos n\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) dx &= \frac{b-a}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 nt dt \quad \left(\pi \left(\frac{x-a}{b-a} \right) = t \right) \\
&= \frac{b-a}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent } \|y_N - y_K\|_A^2 = \frac{b-a}{2} \sum_{n=K+1}^N a_n^2 \longrightarrow 0$$

□

4.2.3 Fonctionnelle d'énergie de l'opérateur A

$$\begin{aligned}
J(y) &= (Ay, y) - 2(y, f) \\
&= \int_a^b -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y dx - 2(y, f) \\
&= \int_a^b p(x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q(x)y^2(x) dx - 2 \int_a^b y(x)f(x) dx \\
&= \int_a^b p(x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q(x)y^2(x) - 2y(x)f(x) dx
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation d'Euler : $\Phi_y - \frac{d}{dx}(\Phi_{y'}) = 0$ (où $\Phi(y, y') = p(x) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + q(x)y^2(x) - 2y(x)f(x)$)

Donc, l'équation d'Euler est écrite sur la forme

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y(x) - f(x) = 0$$

Pour l'extension de Friedrichs $\hat{A}$ de A , on a $D(\hat{A}) \supset D(A)$ et $D(\hat{A}) = R(G) \subset \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{\hat{A}}$.

Pour l'opérateur de Sturm-Liouville A

$$Ay = -\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y(x) = f$$

avec les hypothèse précédentes, et $f \in L_2[a, b]$

$$J(y) = \int_a^b (p(x)y'^2(x) + q(x)y^2(x) - 2y(x)f(x)) dx$$

On peut alors montrer que $y \in D(\hat{A})$ (voir [9](#)) si et seulement si y vérifie les propriétés suivantes

1. y absolument continue .
2. y' absolument continue .
3. $y'' \in L_2[a, b]$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons d'abord étudié les propriétés essentielles des opérateurs non bornés, et en particulier celles des opérateurs fermés. Nous avons, par la suite, étudié et caractérisé l'espace énergétique d'un opérateur défini positif. Nous avons abordé le problème de minimisation de la fonctionnelle d'énergie associée à cet opérateur. Comme application nous avons considéré l'opérateur de Sturm-Liouville.

Bibliographie

- [1] A. Kolmogorov & S. Fomine .*Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* 2^{ème} édition .Édition mir (1954) .
- [2] F.Riesz & B.SZ-Nagy . *Functional Analysis* translated from the 2nd French edion by Leo F.Beron (1955) .
- [3] K.Yosida . *Functional Analysis. Vol. 123 of Grundlehren der Mathematischen .Wissenschaften [Fundamental principles of Mathematical sciences]*. Springer-verlag ,Berlin ,sixth edition ,1980.
- [4] L.V Kantorovich & G.P.Akilov.*Functional analysis*-Pergamon Press, Elsevier Ltd (1982).
- [5] M.Reed & B.Simon . *Methods of Modern Mathematical Physics. Functional Analysis. Vol. 1* -Academic Press (1980).
- [6] Mikhlin,S.G., *Direct methods in mathematical physics*, Moscow, 1950. (Russian)(See also *Variational methods to solve problems of mathematical physics*, Usp. Mat. Nauk, 5,6(40)(1950)).(Russian and its Romanian translation can be found in Russian-Romanian Annals)
- [7] Mikhlin,S.G, *The problem of the minimum of a quadratic functional*,HoldenDay, San Francisco,1965.(First Russian ed.Gostehizdat, Moscow-Leningrad,1952)
- [8] Mikhlin,S.G., *Variational methods in mathematical physics*, International Series of Monographs Pure and Applied Mthematics 50, Pergamon, Oxford, 1964. (First Russian ed.,Gostehizdat, Moscow, 1957 ;2nd Russian ED.,Nauka, Moscow,1970.It is a REvised and enlarged version of [6].)
- [9] Mikhlin,S.G., *Mathematical physics, an advanced course*, North Holland, Amsterdam, 1970.(First Russian ed. was published at Fizmatlit, Moscow, 1968.)