

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية
الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي-الأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DE SCIENCES
قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



Domaine : Mathématiques et Informatique.

Filière : Mathématiques.

Option : Analyse Mathématique.

Par :

Chorana Aicha

Thème :

Polynômes orthogonaux.

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. Brahim Smail	M.C.A	Président
Mme. Nawal Abdesselam	M.C.B	Examineur
Mme. Chafika Belabbaci	M.C.A	Encadreur

Année Universitaire : 2021-2022



Remerciement



Tout d'abord je tiens à remercier Dieu, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la santé, la patience et la volonté d'accomplir ce modeste travail.

En premier lieu, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Dr. Chafika Belabbaci, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur scientifique et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury Dr. Brahim Smail et Dr. Nawal Abdesselam pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre mémoire en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, à mes amis, ma famille, merci.

Dédicace



Je dédie ce travail :

*À l'exemple de dévouement et de la source de tendresse
mes chers parents, qui ont toujours fait leur maximum
pour m'encourager, m'aider et me donner le support
moral tout au long de mes études. Aucun mot sur cette
page ne saurait exprimer ce que je vous dois, ni
combien je vous aime.*

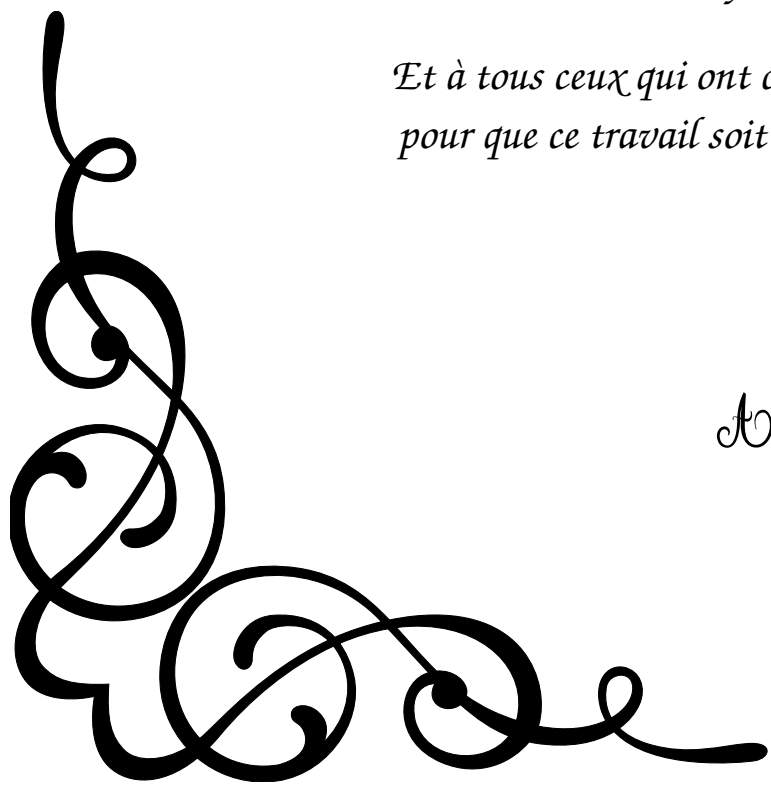
*Qu'Allah vous bénisse, vous assiste, vous vienne en
aide.*

*À ceux que j'aime beaucoup mon cher frère Rabeh et
mes chères soeurs,*

À toute ma famille, et mes amis,

*Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin
pour que ce travail soit possible, je vous dis merci.*

Micha & Chorana



Notations

E	Espace vectoriel.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
$\ \cdot \ _E$	Norme hilberienne.
\mathbb{C}, \mathbb{R}	Ensemble de nombres complexes, réels.
\Re	Partie réelle d'un nombre complexe.
$\omega(x)$	Fonction de poids.
Ω	Ensemble ouvert.
$\deg(p)$	Le plus grand indice.
$f^{(n)}$	Dérivées n-ème d'une fonction f .
$\delta_{m,n}$	Fonction delta Kronecker.
Γ	Fonction Gamma.
$Vec \langle \cdot, \cdot \rangle$	Famille génératrice.
$(U_n)_n$	Suite de fonctions.
H_n	Polynôme de Hermite.
L_n	Polynôme de Laguerre.
L_n^α	Polynôme de Laguerre généralisé.
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	Polynôme de Jacobi.
P_n	Polynôme de Legendre.
T_n	Polynôme de Tchebyshev du premier espèce.
U_n	Polynôme de Tchebyshev du deuxième espèce.
$C[a, b]$	Espace des fonctions continues sur $[a, b]$.
$\binom{n}{k}$	Combinaisons.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Espace de Hilbert	2
1.2 Quelques rappels sur les polynômes	4
1.3 Quelques rappels sur les fonctions réels	5
1.4 Orthogonalisation de Gram Schmidt	7
2 Polynômes orthogonaux	9
2.1 Propriétés générales d'un Polynôme orthogonal	9
2.2 Développement d'un polynôme quelconque suivant des polynômes orthogonaux	11
2.3 Unicité d'un système de polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné	12
2.4 Relation de récurrence	12
2.5 Formule de Darboux Christoffel	14
2.6 Polynômes de type hypergéométrique	16
2.7 Orthogonalité des polynômes du type hypergéométrique	24
3 Polynômes orthogonaux classiques	26
3.1 Polynômes de Hermite	26
3.2 Polynômes de Laguerre	31
3.3 Polynômes de Laguerre généralisé	37
3.4 Polynômes de Jacobi	38
3.5 Polynômes de Legendre	41
3.6 Polynômes de Tchebyshev	44
Bibliographie	50

Introduction

Les polynômes orthogonaux est un vaste sujet qui a été développé durant le *XIX* siècle par l'étude des fonctions continues par Stieltjes. Les suites des polynômes orthogonaux apparaissent fréquemment en physique mathématique en particulier au cours de la résolution d'équations aux dérivées partielles (Laplace, Schrödinger). L'orthogonalité impose que les polynômes orthogonaux aient en commun un certain nombre de propriétés, en particulier celles de vérifier une relation de récurrence, la formule de Christoffel et de vérifier une équation différentielle linéaire du second ordre.

L'objectif de ce travail est l'étude des propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux ainsi que quelques polynômes orthogonaux classiques. Ce mémoire est réparti en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels nécessaires pour les autres chapitres. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des propriétés des polynômes orthogonaux. En particulier, on étudie la relation de récurrence permettant de calculer un polynôme dans une suite à partir des deux précédents, la formule de Christoffel et la formule de Rodrigue. Les polynômes de type hypergéométrique sont aussi établis dans ce chapitre. Dans le dernier chapitre, on étudie quelques polynômes orthogonaux classiques importants (Hermite, Laguerre, Jacobi, Legendre, Tchebyshev).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions et propriétés importantes pour la suite de notre travail.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On appelle produit scalaire une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle; \end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- i) Pour tout x dans E , $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- ii) Pour tout x dans E , $\langle x, x \rangle \geq 0$.
- iii) Pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.
- iv) Pour tout x, y dans E , $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Remarque 1.1.1. Le produit scalaire définit une norme sur un espace E donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Propriétés 1.1.1. Pour $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
2. $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.
3. *Inégalité de Cauchy Schwarz :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 1.1.2. Si E est un espace vectoriel réel, on remplace la condition iv) par $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Définition 1.1.2. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.

Exemple 1.1.

- 1) L'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du produit scalaire définie par :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \\ &= \sum_{j=1}^n x_j y_j. \end{aligned}$$

est un espace de Hilbert.

- 2) On définit le produit scalaire dans l'espace unitaire \mathbb{C}^n par :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j. \end{aligned}$$

Alors \mathbb{C}^n est un espace de Hilbert.

- 3) Le produit scalaire le plus simple de fonction est l'intégrale du produit de ces fonctions sur un intervalle borné $[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

La norme associée est $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Définition 1.1.3. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul ; $\langle x, y \rangle = 0$.

- Une famille de vecteurs de E est dite orthogonale si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.
- Une famille de vecteurs est dite orthonormale si elle est orthogonale et tous ces vecteurs sont de norme 1.

Remarque 1.1.3.

- . D'une famille orthogonale $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ on peut facilement passer à une famille orthonormale en normalisant les vecteurs $e'_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$.
- . Soient v_1, v_2, \dots, v_k des vecteurs orthogonaux entre eux, alors on a

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_k\|^2.$$

Pour la remarque voir ([9]).

Exemple 1.2. Dans l'espace des fonctions continues $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, la famille $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ est orthogonale. La famille

$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\}$ est une famille orthonormale.

1.2 Quelques rappels sur les polynômes

Soit p_n un polynôme. Alors p_n s'écrit sous la forme $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Les propriétés générales d'un polynôme sont les suivantes :

- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.
- Si le polynôme $p(x) = \sum a_k x^k$ est non nul, le degré du polynôme, noté $\text{deg}(p)$ est le plus grand indice n tel que $a_n \neq 0$.
 - $\text{deg}(p + q) \leq \sup\{\text{deg}(p), \text{deg}(q)\}$.
 - $\text{deg}(p \times q) = \text{deg}(p) + \text{deg}(q)$.
 - $\text{deg}(\lambda p) = \text{deg}(p)$ pour $\lambda \neq 0$.

- Le coefficient dominant d'un polynôme non nul est le coefficient dont l'indice est égale au degré du polynôme.
- Un polynôme est unitaire ou normalisé si et seulement si son coefficient dominant est égale à un.

1.3 Quelques rappels sur les fonctions réels

Règle de Leibniz

Théorème 1.3.1. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, b]$ et ayant une dérivée d'ordre n sur $[a, b]$. Alors, la fonction produit $f.g$ est aussi n fois dérivable sur $[a, b]$ et on a la formule suivante dite formule de Leibniz :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Formule de Taylor

Soit f une fonction définie sur l'ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeur dans \mathbb{R} . Pour $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \Omega$ donnée et pour $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. La fonction ξ de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : t \rightarrow f(a + tb)$ est définie sur un voisinage de 0. On a $f(a + b) - f(a) = \xi(1) - \xi(0)$. On suppose que f admet des dérivées partielles continues jusqu'au rang p . Alors, on a la formule de Taylor à l'ordre m suivante :

$$f(a + b) = f(a) + \frac{1}{1!} N_1(b) + \frac{1}{2!} N_2(b) + \dots + \frac{1}{m!} N_m(b) + \lambda \|b\|_n^m.$$

où $\lambda \rightarrow 0$ avec $\|b\|_n$ et

$$N_k(b) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k} \frac{k!}{\alpha_1! + \alpha_2! + \dots + \alpha_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a) b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n}.$$

Fonctions génératrices

Définition 1.3.1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite, on appelle fonction génératrice associé à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, la fonction f définie par : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$.

On appelle fonction génératrice exponentielle associé à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, la fonction f définie par : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n!}$.

Fonction Gamma

La fonction Gamma, notée Γ , est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Pour des valeurs entières positives, la fonction Gamma généralise la notion de factoriel, on a

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad \text{car} \quad \Gamma(1) = 1.$$

La fonction Gamma possède plusieurs propriétés, on a

- $\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$.
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- La formule de complément : $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.
- La formule de duplication de la fonction Gamma

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z).$$

Pour plus de propriétés, consulter [12].

Fonction de poids

Définition 1.3.2. On appelle fonction continue de poids sur l'intervalle $[a, b]$, toute fonction $\omega(x)$ vérifiant les conditions suivantes :

- Pour tout $x \in [a, b]$, $\omega(x) > 0$.
- La convergence ; $\int_a^b \omega(x) dx < \infty$.

Remarque 1.3.1. La fonction de poids $\omega(x)$ est une fonction continue et positive dans $[a, b]$ telle que $a_n = \int_a^b x^n \omega(x) dx$ existe pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Définition 1.3.3. On dit que les deux fonctions f et g sont orthogonales relativement à la fonction de poids $\omega(x)$ sur $[a, b]$ si

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx = 0.$$

1.4 Orthogonalisation de Gram Schmidt

Le procédé de Gram Schmidt est un algorithme pour construire à partir d'une famille libre finie une base orthonormale du sous espace qu'elle engendre. Soit $\{a_i\}_i$ une famille libre, alors il existe un système de vecteur orthonormal $\{e_i\}_i$ tel que les étapes du algorithme de Gram Schmidt sont les suivantes :

- Première étape : le premier élément de la suite orthonormale e_1 , est obtenu à partir de $e_1 = \frac{1}{\|a_1\|}a_1$.
- Deuxième étape : toutes les étapes suivantes contient deux parties :
 - Créons d'abord le vecteur orthogonal aux vecteurs précédent, puis on le normalise.
 - Créons v_2 comme $v_2 = a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1$ puis on le normalise, $e_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2$.
- Troisième étape : créons v_3 comme $v_3 = a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle e_2$ puis on le normalise, $e_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3$.
- La n -ième étape : supposons $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est un ensemble orthonormal tel que $Vec \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle = Vec \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$. Le vecteur v_n est défini par :

$$v_n = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle a_n, e_k \rangle e_k,$$

et on le normalise $e_n = \frac{1}{\|v_n\|}v_n$.

Notons que v_n est un vecteur non nul, sinon a_n appartient à la famille génératrice $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ et cette dernière famille est libre. Notons encore que v_n est orthogonale à tous les vecteurs e_1, e_2, \dots, e_{n-1} . Par conséquent, on obtient une famille orthonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ avec $Vec \langle e_1, \dots, e_n \rangle = Vec \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Remarque 1.4.1. *On peut utiliser le procédé de Gram Schmidt sur une famille infinie dénombrable de vecteurs.*

Exemple 1.3. *Considérons l'ensemble $A = \{1, x, x^2\}$ et soit $a_1 = 1, a_2 = x, a_3 = x^2$. Le procédé de Gram Schmidt est utilisé pour obtenir un ensemble $\{e_1, e_2, e_3\}$ orthonormal par rapport au produit scalaire suivant :*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

En effet, on suit les étapes suivantes :

- Première étape : le premier élément de la suite orthonormal e_1 , est obtenu à parti de $e_1 = \frac{1}{\|a_1\|}a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Deuxième étape : créons v_2 et e_2

$$\begin{aligned}v_2 &= a_2 - \langle a_2, e_1 \rangle e_1 \\ &= x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = x.\end{aligned}$$

et on le normalise, $e_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$.

- Troisième étape : construisons le vecteur v_3 , on a

$$\begin{aligned}v_3 &= a_3 - \langle a_3, e_1 \rangle e_1 - \langle a_3, e_2 \rangle e_2 \\ &= x^2 - \left(\int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^1 x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x dx \right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &= x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3}{2} x \cdot 0 = x^2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Notons que

$$\|v_3\|^2 = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx = \frac{8}{45},$$

Par conséquent,

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

D'où la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est orthonormale.

Propriété du procédé de Gram Schmidt :

- Nous avons $e_n = a_n - p_n$; où p_n est la projection orthogonal du vecteur a_n sur le sous espace engendré par a_1, \dots, a_{n-1} .
- La norme $\|e_k\|$ est une distance de a_k à l'espace engendré par a_1, \dots, a_{k-1} et $\|e_k\| = \sqrt{\langle v_k, v_k \rangle}$.

Pour plusieurs d'autres propriétés voir ([9]).

Chapitre 2

Polynômes orthogonaux

Ce chapitre est consacré à l'étude des propriétés fondamentale des polynômes orthogonaux. En particulier, on étudie la formule de récurrence et la formule Darboux christoffel.

Les polynômes de type hypergéométrique sont aussi étudiés dans ce chapitre. Les ouvrages utilisés pour la réalisation de ce chapitre sont [13], [3], [7], [12], [14], [9].

2.1 Propriétés générales d'un Polynôme orthogonal

Définition 2.1.1. *Une suite de polynômes orthogonaux est une famille de polynômes (fini ou infini) $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$ avec $p_n(x)$ est de degré n tel que pour deux polynômes quelconque de cette famille sont orthogonaux dans $C[a, b]$. Autrement dit,*

$$\langle p_i, p_j \rangle = \int_a^b p_i(x)p_j(x)dx = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Définition 2.1.2. *Une famille de polynôme est dite orthogonale par rapport à la fonction de poids $\omega(x)$ dans $C[a, b]$ si*

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int p_n(x)p_m(x)\omega(x)dx = h_n\delta_{m,n}$$

où $h_n = \langle p_n, p_n \rangle$ et $\delta_{m,n}$ désigne la fonction delta Kronecker définie par

$$\begin{cases} 1 & \text{si } m = n; \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Théorème 2.1.1. *Étant donné une suite de polynôme orthogonal, chacun de ses polynôme est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur.*

Démonstration. Supposons que $(p_n)_n$ la suite de polynôme orthogonal, soit p_m un polynôme tel que p_n et p_m sont orthogonaux,

$$\langle p_n, p_m \rangle = 0 \quad \text{si } m < n.$$

On a

$$\langle p_n, x^k \rangle = 0, \quad \text{pour } k < n.$$

D'autre part, nous avons

$$q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad \text{si } m < n.$$

Lequel

$$\begin{aligned} \int_a^b p_n(x) q_m(x) \omega(x) dx &= \int_a^b p_n(x) \left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right) \omega(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b p_n(x) x^k \omega(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \langle p_n, x^k \rangle \quad \text{si } m < n. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b p_n(x) q_m(x) \omega(x) dx = 0.$$

□

Remarque 2.1.1. *Le produit scalaire $\langle xp_{n-1}, p_n \rangle$ est encore le produit d'un polynôme de degré n , xp_{n-1} , par p_n ; si b_n désigne le coefficient de p_n dans le développement de xp_{n-1} , le produit scalaire considéré se réduit à :*

$$\langle xp_{n-1}, p_n \rangle = b_n \langle p_n, p_n \rangle \neq 0.$$

2.2 Développement d'un polynôme quelconque suivant des polynômes orthogonaux

Proposition 2.2.1. *Tout polynôme $q_n(x)$ de degré n est une combinaison linéaire des polynômes orthogonaux $p_k(x)$; ($k=0,1,2,\dots,n$).*

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,n} p_k(x). \quad (2.1)$$

Démonstration. Ceci est évident pour $n = 0$; pour $n > 0$, faisons une démonstration par récurrence. Supposons que chaque polynôme $q_{n-1}(x)$ à la représentation

$$q_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k,n-1} p_k(x). \quad (2.2)$$

Pour $q_n(x)$, choisissons la constante $a_{n,n}$ de sorte que le coefficient affectant le terme le plus haut degré du polynôme $q_n(x) - a_{n,n} p_n(x)$ soit nul, c'est à dire $q_n(x) - a_{n,n} p_n(x) = q_{n-1}(x)$. Utilisons (2.1), on obtient (2.2) pour $q_n(x)$.

Les coefficients $a_{k,n}$ dans (2.1) sont déterminés, par la propriété d'orthogonalité,

$$\int_a^b p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = 0 \quad \text{si } m \neq n, \quad (2.3)$$

par la formule

$$a_{k,n} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b q_n(x) p_k(x) \omega(x) dx \quad (2.4)$$

dans laquelle

$$d_k^2 = \int_a^b p_k^2(x) \omega(x) dx$$

est le carré de la norme. Montrons que la condition d'orthogonalité (2.3) est équivalente à

$$\int_a^b p_n(x) x^m \omega(x) dx = 0 \quad \text{si } m < n. \quad (2.5)$$

Effet, en développant dans l'intégrale (2.3) le polynôme $p_m(x)$ suivant les puissances de x , pour $m < n$, on prouve (2.3) à partir de (2.5). De même, en développant x^m suivant les polynômes orthogonaux $p_k(x)$, on prouve (2.5) si (2.3) est vrai. \square

2.3 Unicité d'un système de polynômes orthogonaux par rapport à un poids donné

La donnée d'un intervalle $]a, b[$ et une fonction de poids $\omega(x)$ suffit de définir des polynômes $p_n(x)$ vérifiant la relation d'orthogonalité (2.5). Supposons qu'il existe deux polynômes $p_n(x), \tilde{p}_n(x)$ vérifiant (2.5). On a

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{k,n} p_k(x).$$

D'après (2.4) et (2.5), nous avons $a_{k,n} = 0$ pour $k < n$, d'où la proportionnalité des polynômes $p_n(x)$ et $\tilde{p}_n(x)$. Il existe une représentation explicite de $p_n(x)$ sous forme d'un déterminant :

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

où A_n est une constante de normalisation et $a_k = \int_a^b x^k \omega(x) dx$. On peut vérifier que le polynôme (2.6) satisfait la condition d'orthogonalité (2.5).

Remarque 2.3.1. *Le coefficient de x^n dans (2.6) est distinct de zéro à chaque fois que $A_n \neq 0$, car il est proportionnel au déterminant de Gram pour les fonctions $1, x, \dots, x^{n-1}$. voir ([8]).*

2.4 Relation de récurrence

Pour toute suite de polynôme orthogonaux, il existe une relation de récurrence relativement à trois polynômes consécutifs.

Théorème 2.4.1. *Trois polynômes orthogonaux quelconques de degré successifs $p_{n-1}(x), p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ sont liés par une formule de récurrence :*

$$x p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x); \quad (2.7)$$

et $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ sont des constantes.

Démonstration. On a le développement

$$xp_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k,n} p_k(x). \quad (2.8)$$

D'après l'équation (2.4), on a

$$a_{k,n} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b p_k(x) xp_n(x) \omega(x) dx. \quad (2.9)$$

Puisque la fonction $xp_k(x)$ est un polynôme de degré $k+1$, en vertu de la propriété d'orthogonalité du polynôme $p_n(x)$ les coefficients $a_{k,n}$ s'annulent pour $(k+1) < n$. Ainsi le développement (2.8) peut s'écrire sous la forme

$$xp_n = \alpha_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \gamma_n p_{n-1}, \quad (2.10)$$

et $\alpha_n = a_{n+1,n}$, $\beta_n = a_{n,n}$, $\gamma_n = a_{n-1,n}$. Les coefficients α_n , β_n , γ_n se laissent exprimer en fonction du carré de la norme d_n^2 et des coefficients a'_n , b_n affectant les puissances n -ième et $(n-1)$ -ième du polynôme $p_n(x)$:

$$p_n(x) = a'_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots (a'_n \neq 0).$$

Il réduit de (2.9) que $d_k^2 a_{k,n} = d_n^2 a_{n,k}$. Puisque $\alpha_{n-1} = a_{n,n-1}$ et $\gamma_n = a_{n-1,n}$ on obtient, en posant, $k = n-1$ que

$$\gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \quad (2.11)$$

D'autre part, en utilisant (2.10), on déduit les coefficient $a'_n = \alpha_n a'_{n+1}$ et $b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a'_n$. Par conséquent,

$$\alpha_n = \frac{a'_n}{a'_{n-1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a'_n} - \frac{b_{n+1}}{a'_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a'_{n-1}}{a'_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \quad (2.12)$$

Ainsi donc, connaissant les coefficient a'_n et b_n et le carré de la norme d_n^2 des polynômes orthogonaux quelconques $p_n(x)$, on peut définir par récurrence les polynômes p_{n-1} à partir des polynômes p_n et p_{n-1} .

□

Considérons une relation de récurrence du type (2.7)

$$zu_n(z) = \alpha_n u_{n+1}(z) + \beta_n u_n(z) + \gamma_n u_{n-1}(z); \quad (2.13)$$

et z est une valeur complexe. Une des solutions des cette relation est fournie par les polynômes $p_n(z)$ orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\omega(x)$. Une autre solution, pour $z \notin [a, b]$, est représentée par les fonctions

$$q_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s)\omega(s)}{s-z} ds.$$

En effet, il suffit d'intégrer la relation de récurrence pour les polynômes $p_n(s)$ sur l'intervalle $]a, b[$ avec le poids $\frac{\omega(s)}{s-z}$ et d'appliquer l'égalité

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{sp_n(s)\omega(s)}{s-z} ds &= \int_a^b \left(1 + \frac{z}{s-z}\right) p_n(s)\omega(s) ds \\ &= \int_a^b p_n(s)\omega(s) ds + z \int_a^b \frac{p_n(s)\omega(s)}{s-z} ds = zq_n(z) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

A la fonction $q_n(z)$ est étroitement liée la fonction

$$r_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(s) - p_n(z)}{s-z} \omega(s) ds.$$

On voit que c'est un polynôme de degré $n-1$, qu'on l'appelle polynôme de deuxième espèce. Si $z \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} r_n(z) &= \int_a^b \frac{p_n(s) - p_n(z)}{s-z} \omega(s) ds \\ &= \int_a^b \frac{p_n(s)\omega(s)}{s-z} ds - p_n(z) \int_a^b \frac{\omega(s)}{s-z} ds \\ &= q_n(z) - \frac{1}{a_0'} p_n(z) q_0(z). \end{aligned}$$

Si $z \notin [a, b]$ les fonctions $p_n(z)$, $q_n(z)$ vérifient la même relation (2.13) on conçoit que les polynômes $r_n(z)$ vérifient cette relation eux aussi. Or, en vertu de la continuité, ils vérifient également pour $z \in [a, b]$.

2.5 Formule de Darboux Christoffel

De la relation de récurrence découle immédiatement une formule importante de la théorie des polynômes orthogonaux dite la formule de Darboux Christoffel.

Théorème 2.5.1. *La formule de Darboux Christoffel est donnée par :*

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (2.14)$$

où $d_k^2 = \int_a^b p_k^2(x)\omega(x)dx$.

Démonstration. D'après la relation de récurrence, on a

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x);$$

et d'après la formule (2.11), on a

$$xp_k(x) = \alpha_k p_{k+1}(x) + \beta_n p_k(x) + \alpha_{k-1} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} p_{k-1}(x).$$

De même,

$$yp_k(y) = \alpha_k p_{k+1}(y) + \beta_n p_k(y) + \alpha_{k-1} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} p_{k-1}(y).$$

Pour $k = 0$ ces relation restent vraies si on pose $\frac{\alpha_{-1}}{d_{-1}^2} = 0$ et $p_{-1}(x) = 0$. Multiplions la première par $p_k(y)$, la seconde par $p_k(x)$, divisons chacune des relations par d_k^2 et faisons la soustraction terme à terme. On obtient,

$$(x-y) \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2} = A_k(x, y) - A_{k-1}(x, y),$$

avec

$$A_k(x, y) = \frac{\alpha_k}{d_k^2} [p_{k+1}(x)p_k(y) - p_k(x)p_{k-1}(y)].$$

En déduire par la sommation de $k = 0$ à $k = n$,

$$(x-y) \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2} = A_n(x, y).$$

Cette dernière formule obtenue est équivalente à (2.14), car $\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. \square

Dans le théorème suivant, on étudie les propriétés des zéros d'un polynôme orthogonal.

Théorème 2.5.2. *Tout les zéros x_j du polynôme $p_n(x)$ sont simple et contenus à l'intérieur de l'intervalle $]a, b[$.*

Démonstration. Supposons que le polynôme $p_n(x)$ change de signe sur $]a, b[$ en passant par k points. On a évidemment $0 \leq k \leq n$. Pour que la propriété proposée ait lieu, il faut que $k = n$. Posons

$$q_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0; \\ \prod_{j=1}^k (x - x_j) & \text{si } 0 < k \leq n. \end{cases}$$

Dans ce cas, x_j sont les points en lesquels le polynôme $p_n(x)$ change de signe. Le produit $p_n(x)q_k(x)$ garde le signe pour $a < x < b$, on a donc

$$\int_a^b p_n(x)q_k(x)\omega(x)dx \neq 0.$$

On déduit que $k = n$, car pour $k < n$ on a d'après l'équation (2.3)

$$\int_a^b p_n(x)q_k(x)\omega(x)dx = 0.$$

On montre que les zéros des polynômes $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ alternent .

Considérons un cas particulier de la formule de Darboux Christoffel (2.14) qui se réalise quand on fait un passage à la limite y vers x :

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k^2(x)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n-1}} [\dot{p}_{n+1}(x)p_n(x) - \dot{p}_n(x)p_{n+1}(x)]. \quad (2.15)$$

Considérons x_j pour $j = 1, \dots, n + 1$ les zéros du polynôme $P_{n+1}(x)$. Le signe du produit $\dot{p}_{n+1}(x)p_n(x)$ dans les zéros x_j du polynôme $p_{n+1}(x)$ est indépendant de j . Or le premier facteur $\dot{p}_{n+1}(x)$ change de signe en passant, de x_j à x_{j+1} ; c'est la même chose pour le second facteur. Par conséquent, $p_n(x)$ s'annule au moins dans un point de l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$. Puisque il y 'a n intervalles dont chacun contient au moins un des n zéros du polynôme $p_n(x)$ et deux zéros successifs du polynôme $p_{n+1}(x)$ en cadrent exactement un zéro du polynôme $p_n(x)$. \square

2.6 Polynômes de type hypergéométrique

De nombreux problèmes de mathématiques appliquées et de physique conduisant à des équations de la forme :

$$p(x)y'' + q(x)y' + \lambda y = 0, \quad (2.16)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes au plus de second et du premier degré respectivement, et λ est une constante.

Définition 2.6.1. *On appelle l'équation (2.16) une équation de type hypergéométrique et ses solutions des fonctions de type hypergéométrique.*

Pour toute solution de l'équation (2.16), la propriété fondamentale suivante est satisfaite.

Théorème 2.6.1. *Toutes les dérivées des fonctions de type hypergéométrique sont aussi des fonctions de type hypergéométrique.*

Démonstration. En effet, dérivons l'équation (2.16). On obtient une fonction $v_1(x) = y'(x)$ qui vérifie l'équation

$$p(x)v_1'' + q_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0 \quad (2.17)$$

dans laquelle

$$q_1(x) = q(x) + p'(x),$$

$$\mu_1 = \lambda + q'(x).$$

Puisque $q_1(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1 et μ_1 est indépendant de x , alors l'équation (2.17) est bien une équation du type hypergéométrique.

La réciproque est aussi vraie : chaque solution de l'équation (2.17) pour $\lambda \neq 0$ est dérivée d'une solution de l'équation (2.16). Soit $v_1(x)$ une solution de (2.17). Si elle était dérivée d'une solution $y(x)$ de l'équation (2.16), ces deux fonctions doivent vérifier la relation suivante (voir (2.16)) :

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} [p(x)v_1' + q(x)v_1].$$

Montrons que la fonction $y(x)$ définie par cette formule satisfait l'équation (2.16) et que sa dérivée est égale à v_1 . On a

$$\lambda y' = -[p(x)v_1'' + q_1(x)v_1' + q'(x)v_1] = \lambda v_1.$$

D'où $y' = v_1(x)$. En portant $v_1 = y'$ dans l'expression initiale de $y(x)$, on retrouve l'équation (2.16) pour $y(x)$.

D'une façon analogue, on peut obtenir par récurrence, pour toute fonction $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, une équation du type hypergéométrique

$$p(x)v_n'' + q_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0 \quad (2.18)$$

dans laquelle

$$q_n(x) = q(x) + np'(x), \quad (2.19)$$

$$\mu_n = \lambda + nq' + \frac{1}{2}n(n-1)p''.$$

Ici, chaque solution de (2.18) pour $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) peut être représentée sous la forme $v_n(x) = y^{(n)}(x)$ où $y(x)$ est une solution de l'équation (2.16). \square

Dérives du polynôme de type hypergéométrique

La propriété de l'équation (2.16) considérée ci dessus permet de construire une famille de solutions particulières de l'équation (2.16) pour des valeurs déterminées de λ . En effet, lorsque $\mu_n = 0$ l'équation (2.18) admet une solution particulière $v_n(x) = \text{const.}$ Puisque $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, cela signifie que pour

$$\lambda = \lambda_n = -nq' - \frac{1}{2}n(n-1)p'',$$

l'équation de type hypergéométrique admet une solution particulière $y(x) = y_n(x)$ qui est un polynôme de degré n . De telles solutions seront appelées polynômes de type hypergéométrique.

Les polynômes $y_n(x)$ sont les solutions de l'équation (2.16). Afin d'expliciter le polynôme $y_n(x)$, multiplions les équations (2.16) et (2.18) par des fonctions $\omega(x)$ et $\omega_n(x)$ telles que

$$(p\omega)' = q\omega, \quad (2.20)$$

$$(p\omega_n)' = q_n\omega_n. \quad (2.21)$$

permettent d'écrire ces équation sous la forme

$$(p\omega y')' + \lambda\omega y = 0.$$

$$(p\omega_n v_n')' + \mu\omega_n v_n = 0. \quad (2.22)$$

En faisant intervenir l'expression explicite de $p_n(x)$, on établit une relation entre les fonctions $\omega_n(x)$ et $\omega_0(x) = \omega(x)$. Utilisons les équations (2.19), (2.20) et (2.21), on obtient

$$\frac{(p\omega_n)'}{\omega_n} = q + np' = \frac{(p\omega)'}{\omega} + np'.$$

Alors $\frac{(p\omega_n)'}{\omega_n} = \frac{(p\omega)'}{\omega} + np'$. Ceci est équivalent à

$$\frac{p'\omega_n + \omega_n'p}{\omega_n} = \frac{p'\omega + \omega'p}{\omega} + np',$$

c'est à dire

$$p' + \frac{p\omega_n'}{\omega_n} = p\frac{\omega'}{\omega} + p' + np'.$$

Divisons par p , on voit que

$$\frac{\omega_n'}{\omega_n} = \frac{\omega'}{\omega} + n\frac{p'}{p}.$$

Intégrons les deux membres de cette dernière égalité, on obtient

$$\ln \omega_n = \ln \omega + n \ln p.$$

Utilisons les propriétés de logarithme, $\ln \omega_n = \ln \omega + \ln p^n$, ou encore $\ln \omega_n = \ln \omega p^n$,
Donc

$$\omega_n(x) = p^n(x)\omega(x), \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.23)$$

Cherchons maintenant l'expression explicite des polynômes de type hypergéométrique $y_n(x)$. Comme $p\omega_n = \omega_{n+1}$ et $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, l'équation (2.22) s'écrit sous la forme

$$\omega_n v_n = -\frac{1}{\mu_n} (\omega_{n+1} v_{n+1})'. \quad (2.24)$$

D'où, pour $m < n$, on déduit successivement

$$\begin{aligned} \omega_m v_m &= -\frac{1}{\mu_m} (\omega_{m+1} v_{m+1})' \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right) (\omega_{m+2} v_{m+2})'' = \dots = \frac{A_m}{A_n} (\omega_n v_n)^{(n-m)}, \end{aligned}$$

où

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \quad (2.25)$$

Si $y(x)$ est un polynôme de degré n , $y = y_n(x)$, il vient alors

$$v_n(x) = y^{(n)}(x) = \text{const.}$$

On exprime $y_n^{(m)}(x)$ par

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\omega_m(x)} [\omega_n(x)]^{(n-m)}, \quad (2.26)$$

avec

$$A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}, \quad B_n = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(x). \quad (2.27)$$

Cas particulier, pour $m = 0$ on obtient une expression explicite des polynômes du type hypergéométrique $y_n(x)$

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\omega(x)} [p^n(x)\omega(x)]^{(n)} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.28)$$

Ainsi les solutions polynômiales de l'équation (2.16) sont définis de manière unique par (2.28) à une constante arbitraire près. Ces solutions correspondent aux valeurs $\mu_n = 0$, c'est à dire

$$\lambda = \lambda_n = -nq' - \frac{1}{2}n(n-1)p''. \quad (2.29)$$

Définition 2.6.2. L'équation (2.28) est appelée la formule de Rodrigue.

Remarque 2.6.1. Les dérivées $y_n^{(m)}(x) = v_{mn}(x)$ sont des polynômes de type hypergéométrique, car elles sont des polynômes de degré $(n-m)$ satisfont à l'équation

$$p(x)v_{mn}''(x) + q(x)v_{mn}'(x) + \mu_m v_{mn}(x) = 0. \quad (2.30)$$

La formule de Rodrigue pour $y_n^{(m)}(x)$ s'écrit sous la forme

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_{mn}B_n}{p^m(x)\omega(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [p^n(x)\omega(x)], \quad (2.31)$$

où

$$\mu_{kn} = \mu_k(\lambda_n).$$

Puisque

$$\begin{aligned} \mu_{kn} &= \lambda_n - \lambda_k \\ &= \lambda_n + kq' + \frac{k(k-1)}{2}p'' \\ &= -(n-k) \left(q' + \frac{n+k-1}{2}p'' \right). \end{aligned}$$

On a

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)} \prod_{k=0}^{m-1} \left(q' + \frac{n+k-1}{2}p'' \right). \quad (2.32)$$

Lorsqu'on considère la fonction de poids ψ suivante

$$\psi(x) = \frac{1}{p(x)} \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{q(t)}{p(t)} dt\right).$$

Alors la suite des polynômes orthogonaux solutions de l'équation différentielle (2.16) est donnée par la formule de Rodrigue (anciennement appelée formule de Ivory-Jacobi)

$$P_n(x) = \frac{c_n}{\psi(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\psi(x)[p(x)]^n),$$

où c_n est une constante de normalisation qui sera déterminée par la condition suivante

$$\int_a^b p_n(x) p_n(x) \psi(x) dx = 1.$$

Démonstration. Posons $\varphi(x) = \psi(x)[p(x)]^n$ et montrons que $\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^n}{dx^n} \varphi(x)$ est une solution de l'équation (2.16). Calculons d'abord

$$\begin{aligned} \psi' &= \left(-\frac{p'}{p^2} + \frac{1}{p} \cdot \frac{q}{p}\right) \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{q(t)}{p(t)} dt\right) \\ &= \frac{q - p'}{p} \psi. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi^{(n)}}{\psi}\right)' &= \frac{\varphi^{(n+1)}\psi - \varphi^{(n)}\psi'}{\psi^2} = \frac{\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}\left(\frac{q-p'}{p}\right)}{\psi} \\ &= \frac{\varphi^{(n+1)}}{\psi} + \frac{(p' - q)\varphi'}{\psi p}. \end{aligned}$$

En suite,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi^{(n)}}{\psi}\right)'' &= \left(\frac{\varphi^{(n+1)}}{\psi}\right)' + \left(\frac{(p' - q)\varphi'}{\psi p}\right)' \\ &= \frac{\varphi^{(n+2)}}{\psi} + \frac{(p' - q)\varphi^{n+1}}{\psi p} + \frac{[(p' - q)\varphi^n]'\psi p - (p' - q)\varphi^n \psi p}{(\psi p)^2} \\ &= \frac{\varphi^{(n+2)}}{\psi} + 2\frac{(p' - q)\varphi^{n+1}}{\psi p} + \left[\frac{(p'' - q')}{\psi p} - \frac{[(p' - q)q]}{(\psi p)^2}\right] \varphi^{(n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$p \left[\frac{\varphi^{(n)}}{\psi} \right]'' + q \left[\frac{\varphi^{(n)}}{\psi} \right]' + \lambda \left[\frac{\varphi^{(n)}}{\psi} \right] = \frac{p}{\psi} \varphi^{(n+2)} + \frac{2p' - q}{\psi} \varphi^{(n+1)} + \left[\frac{(p'' - q')}{\psi} + \frac{\lambda}{\psi} \right] \varphi^{(n)}. \quad (2.33)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} p\varphi' &= p(\psi p^n)' \\ &= p(\psi' p^n + n\psi p^{n-1} p') \\ &= \psi' p^{n+1} + n\psi p^n p' \\ &= \left(\frac{q - p'}{p} \right) \psi p^{n+1} + n\psi p^n p' \\ &= (q - p' + np') \varphi \\ &= (q + (n-1)p') \varphi. \end{aligned}$$

Dérivons $(n+1)$ fois l'égalité précédente et utilisons la règle de Leibniz, on obtient,

$$\begin{aligned} &p\varphi^{(n+2)} + (n+1)p' \varphi^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} p'' \varphi^{(n)} \\ &= [q + (n-1)p'] \varphi^{(n+1)} + (n+1) [q' + (n+1)p''] \varphi^{(n)}. \end{aligned}$$

Après avoir organisé ce qui précède, on conclut que

$$\begin{aligned} &p\varphi^{(n+2)} + [(n+1)p' - (q + (n-1)p')] \varphi^{(n+1)} + \left[\frac{n(n+1)}{2} p'' - (n+1)(q' + (n-1)p'') \right] \varphi^{(n)} \\ &= p\varphi^{(n+2)} + (2p' - q) \varphi^{(n+1)} + \left(p'' - q' + \left(\frac{n-n^2}{2} \right) p'' - nq' \right) \varphi^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

Comparons cela avec (2.33), on voit que la fonction $\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^n}{dx^n} \varphi(x)$ est une solution de l'équation (2.16). □

Réciproquement, on a le théorème suivant.

Théorème 2.6.2. *Soit $P_n(x)$ une suite de polynômes orthogonaux définie à l'aide d'une formule de Rodrigue. Alors $P_n(x)$ satisfait pour $n \geq 0$ l'équation (2.16).*

Démonstration. D'une part, la règle de Leibniz nous donne (posons $D = \frac{d}{dx}$)

$$\begin{aligned} D^{n+1} [XD(\psi X^n)] &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} D^{n+1} [D(\psi X^n)], \text{ or } X^0 = X \\ &= X^{(k)} D^{n+2}(\psi X^n) + (n+1)X' D^{n+1}(\psi X^n) + \frac{(n+1)n}{2} X'' D^n(\psi X^n) \end{aligned}$$

car $X^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$

On utilise maintenant le fait que $D^n(\psi X^n) = K_n \psi P_n$ pour déduire que

$$D^{n+1} [XD(\psi X^n)] = K_n \left[XD^2(\psi P_n) + (n+1)X' D(\psi P_n) + \frac{(n+1)n}{2} X''(\psi P_n) \right].$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} D^{n+1} [XD(\psi X^n)] &= D^{n+1} [X^{n+1} D\psi + nX' X^n \psi] \\ &= D^{n+1} [X^n (XD\psi + nX' \psi)] \\ &= D^{n+1} [X^n (D(X\psi) + (n-1)\psi X')], \end{aligned}$$

mais $D(X\psi) = K_1 \psi P_1$ (formule de Rodrigue pour $n=1$) donc

$$D^{n+1} [XD(\psi X^n)] = D^{n+1} [X^n (K_1 P_1 + (n-1)\psi X')]$$

Développons, en utilisant la formule de Leibniz, alors

$$\begin{aligned} D^{n+1} [XD(\psi X^n)] &= D^{n+1} (X^n \psi) (K_1 P_1 + (n-1)X') + (n+1) D^n (X^n \psi) \\ &\quad (K_1 P_1' + (n+1)X'') \\ &= K_n \left[D(\psi P_n) (K_1 P_1 + (n-1)X') + (n+1) (\psi P_n) \right. \\ &\quad \left. (K_1 P_1' + (n-1)X'') \right]. \end{aligned}$$

On identifie ces deux valeurs de $D^{n+1} [XD(\psi X^n)]$

$$\begin{aligned} &XD^2(\psi P_n) + (n+1)X' D(\psi P_n) + \frac{(n+1)n}{2} X''(\psi P_n) \\ &= D(\psi P_n) (K_1 P_1 + (n-1)X') + (n+1) (\psi P_n) (K_1 P_1' + (n-1)X''). \end{aligned}$$

Lequel

$$\begin{aligned} XD^2(\psi P_n) + D(\psi P_n) [(n+1)X' - K_1 P_1 - (n-1)X'] + \left[(\psi P_n) \frac{(n+1)n}{2} X'' \right. \\ \left. - (\psi P_n) ((n+1)K_1 P_1' - (n+1)(n-1)X'') \right] = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$XD^2(\psi P_n) + D(\psi P_n) [2X' - K_1 P_1] + (\psi P_n) \left[-\frac{(n^2 + n + 2)}{2} X'' - (n + 1) K_1 P_1' \right] = 0$$

$$\text{et } D(\psi P_n) = \psi' P_n + \psi P_n', \quad D^2(\psi P_n) = \psi'' P_n + 2\psi' P_n' + \psi P_n''.$$

Donc

$$\begin{aligned} X\psi P_n'' + P_n' [2\psi' X - K_1 P_1] &+ [P_n (X\psi'' + \psi' (2X' - K_1 P_1) + \psi) \\ &- P_n \left(\frac{(n^2 + n + 2)}{2} X'' - \psi (n + 1) K_1 P_1' \right)] = 0. \end{aligned}$$

On divise par ψ (non nul sur $[a, b]$) :

$$XP_n'' + K_1 P_1 P_n' + \left[K_1 P_1' - \frac{\psi'}{\psi} K_1 P_1 - \frac{(n^2 + n)}{2} X'' - (n + 1) K_1 P_1' \right] P_n = 0$$

On a

$$XP_n'' + K_1 P_1 P_n' + \left[-\frac{n}{2} (n - 1) X'' - n K_1 P_1' \right] P_n = 0$$

Finalement,

$$\begin{cases} p(x) = X(x) \\ q(x) = K_1 P_1 \\ \lambda_n = n \left(\frac{(n - 1)}{2} X'' - K_1 P_1' \right). \end{cases}$$

□

2.7 Orthogonalité des polynômes du type hypergéométrique

Théorème 2.7.1. *Supposons que la fonction $\omega(x)$ vérifie, aux extrémités d'un intervalle $]a, b[$ la condition*

$$p(x)\omega(x)x^k|_{x=a,b} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.34)$$

Alors les polynômes du type hypergéométrique $y_n(x)$ correspondant aux différentes valeurs de λ_n sont orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ par rapport au poids $\omega(x)$. Autrement dit,

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)\omega(x)dx = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n).$$

Démonstration. Considérons les équations différentielles pour les polynômes $y_n(x)$ et $y_m(x)$:

$$[p(x)\omega(x)y_n']' + \lambda_n\omega(x)y_n = 0,$$

$$[p(x)\omega(x)y_m']' + \lambda_m\omega(x)y_m = 0.$$

Multiplions la première par $y_m(x)$ et la seconde par $y_n(x)$. En suite, retranchons la deuxième égalité de la première et intégrons le résultat entre a et b . Puisque

$$\begin{aligned} y_m(x)[p(x)\omega(x)y_n'(x)]' - y_n(x)[p(x)\omega(x)y_m'(x)]' \\ = \frac{d}{dx} [p(x)\omega(x)W[y_m(x), y_n(x)]], \end{aligned}$$

où $W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ est le Wronskien. Alors on obtient

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m(x)y_n(x)\omega(x)dx = p(x)\omega(x)W[y_m(x), y_n(x)]_a^b. \quad (2.35)$$

Puisque $W[y_m(x), y_n(x)]$ est un polynôme en x , le seconde membre de l'égalité (2.35) obtenue s'annule en vertu de la condition (2.34). Il vient que pour $\lambda_m \neq \lambda_n$,

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\omega(x)dx = 0. \quad (2.36)$$

□

Chapitre 3

Polynômes orthogonaux classiques

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques polynômes orthogonaux classiques Hermite, Laguerre, Jacobi, Legendre et Tchebyshev. Les principaux ouvrages utilisés pour la rédaction de ce chapitre sont [3], [4], [5], [9], [10], [12].

Définition 3.0.1. *Les polynômes orthogonaux classiques sont tout polynôme de type hypergéométrique $y_n(x)$ pour lesquels la fonction $\omega(x)$ vérifie la condition (2.34).*

3.1 Polynômes de Hermite

Les polynômes de Hermite, notés $H_n(x)$, sont orthogonaux sur \mathbb{R} par rapport au produit scalaire

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\omega(x)dx.$$

La fonction de poids est $\omega(x) = e^{-x^2}$. Ils peuvent être définis au moyen de la formule de Rodrigue.

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n d^n}{\omega(x) dx^n}(\omega(x)), \quad (3.1)$$

où D désigne l'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dx}$, alors

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n (e^{-x^2}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

- Les polynômes de Hermite s'écrivent

$$\text{Si } n = 0, \text{ alors } H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} D^0 e^{-x^2} = (1)(1) = 1.$$

Si $n = 1$, alors $H_1(x) = (-1)e^{x^2} D^1 e^{-x^2} = (-1)e^{x^2} (-2xe^{-x^2}) = 2x$.

Si $n = 2$,

$$\begin{aligned} H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2} D^2 e^{-x^2} = -2e^{x^2} [Dxe^{-x^2}] \\ &= -2e^{x^2} (-2x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}) \\ &= 4x^2 - 2. \end{aligned}$$

Si $n = 3$,

$$\begin{aligned} H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} D^3 e^{-x^2} = (-1)e^{x^2} [D^2(-2xe^{-x^2})] \\ &= 2e^{x^2} [D^2(xe^{-x^2})] \\ &= 2e^{x^2} [D(-2x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2})] \\ &= 2e^{x^2} [4x^3 e^{-x^2} - 6xe^{-x^2}] \\ &= 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

Si $n = 4$, alors $H_4(x) = (-1)^4 e^{x^2} D^4 e^{-x^2} = 16x^4 - 48x^2 + 12$.

Si $n = 5$, alors $H_5(x) = (-1)^5 e^{x^2} D^5 e^{-x^2} = 32x^5 - 160x^3 + 120x$.

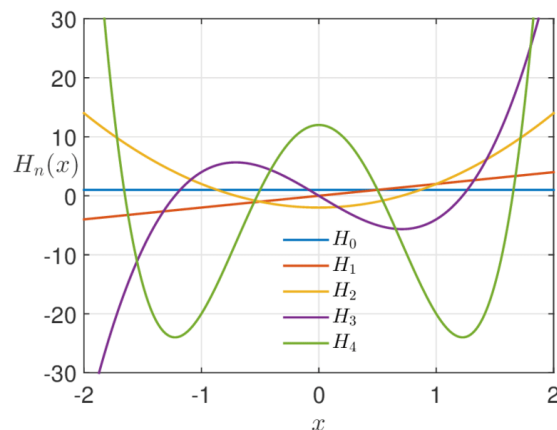


FIGURE 3.1 – Polynômes de Hermite pour $n=0,1,2,3,4$.

- Les polynômes de Hermite sont donnés par la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}.$$

En effet, considérons la fonction

$$f(t) = e^{-(x-t)^2} = e^{-x^2} e^{2xt-t^2}$$

Le développement en série de Taylor de la fonction f est donnée par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)t^n}{n!}.$$

Avec le changement de variable $x - t = u$, on obtient pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \left[\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{du^n} e^{-u^2} \right]_{u=x} \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = e^{-x^2} H_n(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-x^2} e^{2xt-t^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)t^n}{n!} \\ &= e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'où

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

- Formule explicite des polynômes de Hermite ; utilisons la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{xt} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^m (xt)^k}{2^m m! k!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^k t^{2m+k}}{2^m m! k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2j+k=n} \frac{(-1)^m x^k t^n}{2^m m! k!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m x^{n-2m}}{2^m m! (n-2m)!} \right) t^n. \end{aligned}$$

Finalement,

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (x)^{n-2m}}{2^m m! (n-2m)!}.$$

- Les dérivées n -ième du polynôme de Hermite sont données par

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= 2n H_{n-1}(x). \\ H_n''(x) &= 2n(H_{n-1}'(x)) = 2n[2(n-1)H_{n-2}(x)] \\ &= 2^2 n(n-1)H_{n-2}(x). \\ H_n'''(x) &= 2^2 n(n-1) \frac{d}{dx} [H_{n-2}(x)] \\ &= 2^2 n(n-1)2(n-2)H_{n-3}(x) \\ &= 2^3 n(n-1)2(n-2)H_{n-3}(x). \end{aligned}$$

Par suite, $H_n^n(x) = 2^n n(n-1)(n-2) \dots \times 1 \times H_0(x) = 2^n n!$.

- Les polynômes de Hermite satisfont la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n \sqrt{\pi} n! \delta_{m,n}.$$

Démonstration.

- i) Si $m \neq n$, à partir de ce qu'on a étudié dans le chapitre 2 on trouve que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0.$$

- ii) Si $m = n$, utilisons la formule de Rodrigue (3.2)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) [H_n(x) e^{-x^2}] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) [(-1)^n e^{-x^2} e^{x^2} D^n e^{-x^2}] dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) [D^n e^{-x^2}] dx \end{aligned}$$

Faisons n fois une intégration par partie, alors

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} H_n(x) dx.$$

Puisque $\frac{d^n}{dx^n} H_n(x) = 2^n n!$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n \sqrt{\pi} n!.$$

□

- Les polynômes de Hermite vérifient la relation de récurrence

$$\begin{cases} H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} & n = 1, 2, \dots \\ H_0(x) = 1 \\ H_1(x) = 2x. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$H_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} d^{n+1}}{\omega(x) dx^{n+1}}(\omega(x)).$$

En effet, on a $\omega(x) = e^{-x^2}$, sa dérivée est égale à $\omega'(x) = -2x\omega(x)$.

On a $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, utilisons la règle de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} D^{n+1}\omega(x) &= D^n\omega'(x) = D^n[-2x\omega(x)] \\ &= -2xD^n\omega(x) - 2nD^{n-1}\omega(x). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

- Les polynômes de Hermite sont solution de l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2xy' - 2ny = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Démonstration. Utilisons l'opérateur différentielle $D^{n+1} = DD^n$, on obtient

$$\begin{aligned} D^{n+1}\omega(x) &= D[D^n\omega(x)] = (-1)^n D[\omega(x)H_n(x)] \\ &= (-1)^n [\omega'(x)H_n(x) + \omega(x)H'_n(x)] \\ &= (-1)^{n+1}\omega(x)[2xH_n(x) + H'_n(x)] \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

En combinant (3.3) et (3.5), on voit

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Dérivons l'équation (3.5), alors

$$H'_{n+1}(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

D'après l'équation (3.6), on a $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$. Remplaçons dans l'équation (3.7), on trouve

$$2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x).$$

Ceci implique que $H_n(x)$ satisfait l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$H''_n - 2xH'_n - 2nH_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

□

3.2 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre, notés $L_n(x)$, sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, \infty[$ par rapport à la fonction de poids $\omega(x) = e^{-x}$. Ils peuvent être définis par la formule de Rodrigue.

$$L_n(x) = \frac{d^n}{n! \omega(x) dx^n} (\omega(x) x^n) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n). \quad (3.8)$$

En effet, utilisons la formule de Leibniz

$$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n \frac{d^k}{dx^k} e^{-x},$$

$$\frac{d^p}{dx^p} x^q = q(q-1)(q-2) \dots (q-p+1) x^{q-p} = \frac{q!}{(q-p)!} x^{q-p},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n &= \frac{n!}{k!} x^k, \\ \frac{d^k}{dx^k} e^{-x} &= (-1)^k e^{-x}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n! (-1)^k}{(k!)^2 (n-k)!} x^k = L_n(x). \end{aligned}$$

- Les polynômes de Laguerre s'écrivent

$$\text{Si } n = 0, \text{ alors } L_0(x) = \frac{1}{0!} e^x D^0 [x^0 e^{-x}] = (1)(1) = 1.$$

$$\text{Si } n = 1, \text{ alors } L_1(x) = \frac{1}{1!} e^x D^1 [x e^{-x}] = e^x (-x e^{-x} + e^{-x}) = -x + 1.$$

Si $n = 2$,

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{1}{2!} e^x D^2 [x^2 e^{-x}] = \frac{1}{2!} e^x D [-x^2 e^{-x} + 2x e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} e^x D (-x^2 e^{-x} + 2x e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} e^x (x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} + 2e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2). \end{aligned}$$

Si $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 L_3(x) &= \frac{1}{3!} e^x D^3 [x^3 e^{-x}] = \frac{1}{3!} e^x D^2 [-x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x}] \\
 &= \frac{1}{6} e^x D [(x^3 e^{-x} - 6x^2 e^{-x} + 6x e^{-x})] \\
 &= \frac{1}{6} e^x (-x^3 e^{-x} + 9x^2 e^{-x} - 18x e^{-x} + 6) \\
 &= \frac{1}{6} (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6).
 \end{aligned}$$

Si $n = 4$, alors

$$L_4(x) = \frac{1}{24} (x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).$$

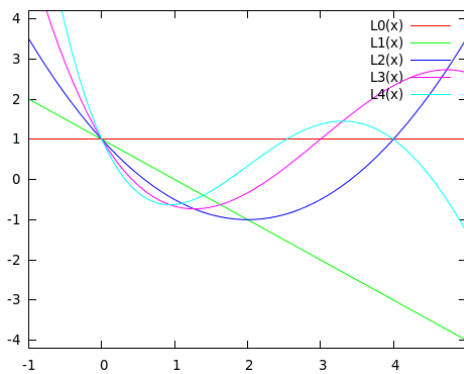


FIGURE 3.2 – Polynômes de Laguerre pour $n=0,1,2,3,4$.

- La fonction génératrice des polynômes de Laguerre est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{e^{-xt}}{1-t}. \quad (3.97)$$

Démonstration. En utilisant le développement de Taylor, on a :

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^k}{k!} \left(\frac{1}{1-t} \right)^k.$$

Donc

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^k}{k!} \left(\frac{1}{1-t} \right)^{k+1}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-t}\right)^{k+1} &= \frac{1}{0!} + \frac{(k+1)t}{1!} + \frac{(k+1)(k+2)t^2}{2!} + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)t^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+r)!}{k!r!} t^r, \end{aligned}$$

alors on aboutit à

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k+r)! t^r}{k!r!}.$$

On pose $n = k + r$, ceci implique que $r = n - k$, et $k = n - r$.

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! x^k}{(k!)^2 (n-k)!} \right) t^n.$$

On voit d'après la formule de Rodrigue de Laguerre, que

$$\frac{e^{-xt}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$

□

- Formule explicite des polynômes de Laguerre ; utilisons la règle de Leibniz on

a

$$\begin{aligned} D^n [e^{-x} x^n] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k e^{-x} D^{n-k} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} n(n-1) \dots (k+1) x^k \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)} x^k \end{aligned}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1), k = 1, 2, \dots, n.$$

Par conséquent, on a

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Les polynômes de Laguerre satisfont la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{m,n}.$$

Démonstration. Soient $L_m(x), L_n(x)$ deux polynômes de Laguerre. On distingue deux cas :

i) Pour $m \neq n$, on démontre que $\int_0^\infty e^{-x^2} L_m(x) L_n(x) dx = 0$. D'après la fonction génératrice du polynôme de Laguerre, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{e^{-xt}}{1-t}.$$

De même,

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) s^m = \frac{e^{-xs}}{1-s}.$$

Faisons la multiplication membre à membre, on aboutit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} L_n(x) L_m(x) t^n s^m dx = \frac{e^{-x\left(\frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)}}{(1-t)(1-s)}.$$

Multiplions les deux membres par e^{-x} , on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) t^n s^m dx = \frac{e^{-x\left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)}}{(1-t)(1-s)}.$$

Intégrons les deux membres de 0 à ∞ et posons $r_1 = 1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx \right] t^n s^m &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty e^{-xr_1} dx \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{e^{-xr_1}}{-r_1} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \cdot \frac{(1-t)(1-s)}{1-st} \\ &= \frac{1}{1-st} = 1 + st + (st)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx \right] t^n s^m = \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n.$$

Simplifions les coefficients de $t^n s^n$ des deux membres de cette dernière équation, on obtient à

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0.$$

ii) Pour $m = n$, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = 1.$$

On combinons

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{m,n}.$$

□

- Les polynômes de Laguerre satisfont la relation de récurrence

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) & n = 1, 2, \dots \\ L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = 1 - x. \end{cases}$$

Démonstration. Dérivons la fonction génératrice (3.9) par rapport à t , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n &= \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}. \\ \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} &= \left(\frac{-x(1-t) - xt}{(1-t)^2} \right) \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}(1-t) + e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^2} \\ &= \frac{-x + xt - xt}{(1-t)} e^{-\frac{xt}{1-t}} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^2} - \frac{x e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{x t e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{x t e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^2} - \frac{x e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)} \frac{1}{(1-t)^2} \\ &= \frac{1}{(1-t)} \left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} \right) - \left(\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} \right) \frac{x}{(1-t)^2}. \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.9), on voit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) n t^{n-1} = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \frac{x}{(1-t)^2} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$

Multiplicons les deux membres de cette dernière équation par $(1-t)^2 = t^2 - 2t + 1$, alors

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \\ & \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n+1} = \\ & \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1}. \end{aligned}$$

En récrivant toute les séries en puissance de t^n ce qui donne la relation précédente

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+1) L_{n+1}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1-x) L_n(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n L_{n-1}(x) t^n.$$

Puis égalisons les coefficients de t^n des deux membres de l'équation ci-dessus, on trouve

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x). \quad (n \geq 1)$$

Ceci implique que

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x).$$

□

- Les polynômes de Laguerre sont solutions de l'équation différentielle suivante

$$n y'' + (1-x) y' + n y = 0.$$

3.3 Polynômes de Laguerre généralisé

Les polynômes de Laguerre généralisé, notés $L_n^\alpha(x)$, sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, \infty[$ par rapport à la fonction de poids $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$. Ils peuvent être définis par la formule de Rodrigue.

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \frac{d^n}{n! x^\alpha \omega(x) dx^n} [x^{n+\alpha} \omega(x)] \\ &= \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x D^n [x^{n+\alpha} e^{-x}]. \end{aligned}$$

- Les polynômes de Laguerre associés s'écrivent

$$\text{Si } n = 0, \text{ alors } L_0^\alpha(x) = \frac{1}{0!} x^{-\alpha} e^x D^0 [x^{0+\alpha} e^{-x}] = x^{-\alpha} e^x (x^{-\alpha} e^x) = 1.$$

Si $n = 1$, alors

$$\begin{aligned} L_1^\alpha(x) &= \frac{1}{1!} x^{-\alpha} e^x D^1 [x^{1+\alpha} e^{-x}] \\ &= x^{-\alpha} e^x [(1 + \alpha)x^\alpha e^{-x} - x^{1+\alpha} e^{-x}] \\ &= -x + 1 + \alpha. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, alors

$$\begin{aligned} L_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2!} x^{-\alpha} e^x D^2 [x^{2+\alpha} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} x^{-\alpha} e^x D [(2 + \alpha)x^{1+\alpha} e^{-x} - x^{2+\alpha} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} x^{-\alpha} e^x [(2 + \alpha)(1 + \alpha)x^\alpha e^{-x} - 2(2 + \alpha)x^{1+\alpha} e^{-x} + x^{2+\alpha} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [x^2 - 2(2 + \alpha)x + (2 + \alpha)(1 + \alpha)]. \end{aligned}$$

Si $n = 3$,

$$\begin{aligned} L_3^\alpha(x) &= \frac{1}{3!} x^{-\alpha} e^x D^3 [x^{3+\alpha} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{3!} x^{-\alpha} e^x D^2 [(3 + \alpha)x^{2+\alpha} e^{-x} - x^{3+\alpha} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{6} x^{-\alpha} e^x D [(x^{3+\alpha} e^{-x} - 2(3 + \alpha)x^{2+\alpha} e^{-x} + (3 + \alpha)(2 + \alpha)x^{1+\alpha} e^{-x})] \\ &= \frac{1}{6} x^{-\alpha} e^x [-x^3 + (3 + \alpha)(3x^2 + (2 + \alpha)(-3x + 1))] x^\alpha e^{-x} \\ &= \frac{1}{6} [-x^3 + (3 + \alpha)(3x^2 + (2 + \alpha)(-3x + 1))]. \end{aligned}$$

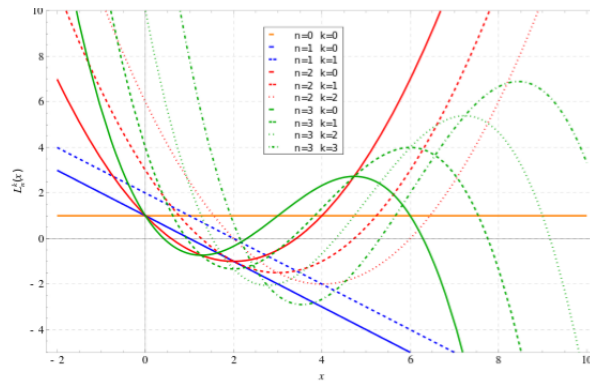


FIGURE 3.3 – Polynômes de Laguerre généralise pour $n=0,1,2,3,4$.

- Les polynômes de Laguerre généralise sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$ny'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0.$$

3.4 Polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi, notés $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ pour la fonction de poids $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$; $\alpha, \beta > -1$. Ils peuvent être définis au moyen de la formule de Rodrigue

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! \omega(x)} D^n \left(\omega(x) (1-x^2)^n \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} D^n \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] \quad (3.10)$$

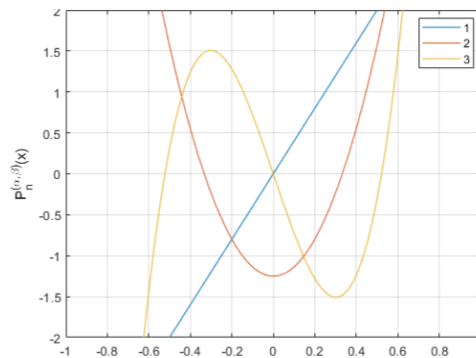


FIGURE 3.4 – Polynômes de jacobi pour $n=1,2,3$.

- La fonction génératrice des polynômes de Jacobi est donné par

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-t)^\alpha(1+R+t)^\beta},$$

où $R = \sqrt{1 - 2xt + t^2}$.

- Formule explicite des polynômes de Jacobi ; utilisons la réglé de Leibniz

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k. \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} D^n \left[(1-x)^{n-\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k (1-x)^{n+\alpha} D^{n-k} (1+x)^{n+\beta} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k M \\ &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (1-x)^{n+\alpha-k} (1+x)^{\beta+k} \end{aligned}$$

où

$$M = (n+\alpha)(n+\alpha-1) \dots (n+\alpha-k+1)(1-x)^{n+\alpha-k} (n+\beta)(n+\beta-1) \dots (\beta+k+1)(1+x)^{\beta+k}.$$

Ceci implique que

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k, \quad n = 0, 1, \dots$$

□

- Les polynômes de Jacobi satisfont la relation d'orthogonalité,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \delta_{m,n}$$

Pour $\alpha > -1$ et $\beta > -1$; $m, n = \{0, 1, 2, \dots\}$

Démonstration. Soient $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ et $P_m^{\alpha,\beta}(x)$ deux polynômes de Jacobi.

Pour $\alpha > -1$, $\beta < -1$ et $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Utilisons la formule de Rodrigue

(3.10) et faisons une intégrale par partie.

Si $m = n$ alors

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) D^n [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] dx \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 D^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx \\
 &= \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{2^{2n} n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx \\
 &= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1) 2^{2n} n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx.
 \end{aligned}$$

Remplaçons $1-x$ par $2t$, alors

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx &= \int_0^1 (2t)^{n+\alpha} (2-2t)^{n+\beta} 2dt \\
 &= 2^{2n+\alpha+\beta+1} \int_0^1 t^{n+\alpha} (1-t)^{n+\beta} dt \\
 &= 2^{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \\
 &= 2^{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}.
 \end{aligned}$$

□

- Les polynômes de Jacobi vérifient la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta} = \\ (2n+\alpha+\beta+1)[(\alpha^2-\beta^2)+(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{\alpha,\beta} \\ -2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta} \quad n=1,2,\dots \\ P_0^{\alpha,\beta}(x) = 1 \\ P_1^{\alpha,\beta}(x) = \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta). \end{array} \right. \quad (3.11)$$

- Les polynômes de Jacobi sont solutions de l'équation différentielle suivante

$$(1+x^2)y''(x) + [\beta - \alpha - \beta(\alpha + \beta + 2)x]y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0$$

et $y(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

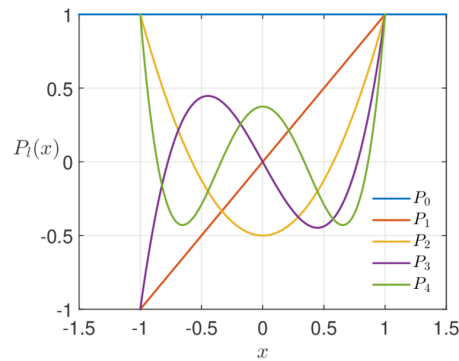
3.5 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre, notés $P_n(x)$, sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ par rapport à la fonction de poids $\omega(x) = 1$. Ce sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi ($\alpha = \beta = 0$). Ils peuvent être définis au moyen de la formule de Rodrigue.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\omega} D^n (\omega(1-x^2)^n) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} D^n ((1-x^2)^n). \end{aligned} \quad (3.12)$$

- Les polynômes de Legendre s'écrivent

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$


 FIGURE 3.5 – Polynômes de Legendre pour $n=0,1,2,3,4$.

- Fonction génératrice du polynômes de Legendre est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \quad (3.13)$$

- Formule explicite des polynômes de Legendre est

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} (x-1)^{n-k} (x)^k.$$

- Les polynômes de Legendre satisfont la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}, \quad m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Démonstration. Utilisons la formule de Rodrigue (3.12) et intégrons par partie, alors

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_m(x) D^n [(1-x^2)^n] dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 D^n P_m(x) (1-x^2)^n dx. \end{aligned}$$

Si $m = n$, alors

$$\int_{-1}^1 D^n P_n(x) (1-x^2)^n dx = K_n n! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx,$$

avec $K_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$. Enfin, faisons le changement de variable $1-x = 2t$, pour

$n = 0, 1, 2, \dots$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx \\ &= \int_0^1 (2t)^n (2-2t)^n 2 dx \\ &= 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

□

- Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1} = x(2n+1)P_n - nP_{n-1}, & n = 1, 2, \dots \\ P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x. \end{cases}$$

Démonstration. Posons $F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$, alors

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = \frac{-1}{2} (-2x + 2t)(1 - 2xt + t^2)^{-3/2} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}.$$

Cela implique que

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = (x-t)F(x, t).$$

Utilisons la fonction génératrice (3.13), alors

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1};$$

Ceci est équivalent à

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)t^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_n(x)t^{n+1} = 0.$$

Par conséquent,

$$(n+1)P_{n+1} = x(2n+1)P_n - nP_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

□

- Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

3.6 Polynômes de Tchebyshev

- 1) **Polynômes de Tchebyshev du premier espèce $T_n(x)$:**

Les polynômes de Tchebyshev, notés $T_n(x)$, sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ par rapport la fonction de poids $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Ces polynômes sont des cas particuliers des polynômes de Jacobi on prend $\alpha = \beta = -1/2$, ils peuvent être définis par la formule de Rodrigue.

$$T_n(x) = \frac{1}{(-2)^n n!} \sqrt{1-x^2} D^n [(1-x^2)^{n-1/2}]. \quad (3.14)$$

- Les polynômes de Tchebyshev T_n s'écrivent

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

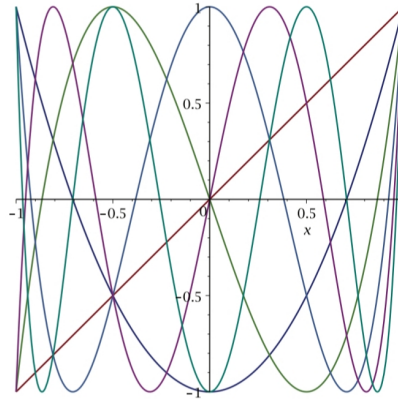


FIGURE 3.6 – Polynômes de Tchebyshev $T_n(x)$ pour $n=1$ à 6 .

- La fonction génératrice des polynômes de Tchebyshev est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}, \quad |t| < 1.$$

En effet, prenons la partie réelle de la fonction suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - te^{i\theta}}.$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\theta = \Re \left(\frac{1}{1 - te^{i\theta}} \right).$$

Posons $x = \cos \theta$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1 - xt}{1 - xt - t^2}.$$

- Formule explicité des polynômes de Tchebyshev est

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{n/2} \frac{(-1)^m (n - m - 1)!}{(n - 2m)! m!} (2x)^{n-2m}.$$

- Les polynômes de Tchebyshev sont solutions de l'équation différentielle suivante

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \quad (3.15)$$

- Les polynômes de Tchebyshev satisfont la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n} \quad m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Démonstration. Cela peut être montré en utilisant l'équation différentielle (3.15)

$$D\left(\sqrt{1-x^2}D[T_n(x)]\right) = -\frac{n^2T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Multiplions par $T_m(x)$ et intégrons de -1 à 1 .

$$\int_{-1}^1 T_m(x)D\left(\sqrt{1-x^2}T_n'(x)\right) dx.$$

Faisons une intégration par partie

$$\int \sqrt{1-x^2}T_m'T_n' = n^2 \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.16)$$

D'autre par ;

$$D\left(\sqrt{1-x^2}D[T_m(x)]\right) = \frac{-m^2T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Où

$$\int_{-1}^1 T_n(x)D\left(\sqrt{1-x^2}T_m'(x)\right) dx,$$

et

$$\int \sqrt{1-x^2}T_n'T_m' = m^2 \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.17)$$

Faisons la soustraction (3.16) à (3.17)

$$[n^2 - m^2] \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

- Si $m \neq n$; alors

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = 0.$$

□

- Les polynômes de Tchebyshev satisfont la relation de récurrence

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) & n = 1, 2, \dots \\ T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x. \end{cases}$$

2) **Polynômes de Tchebyshev du deuxième espèce $U_n(x)$:**

Les polynômes de Tchebyshev, notés $U_n(x)$, sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ par rapport la fonction de poids $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$. Ces polynômes sont des cas particulier des polynômes de Jacobi on prend $\alpha = \beta = 1/2$, ils peuvent être définis par la formule de Rodrigue.

$$U_n(x) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{1-x^2}} D^n \left[(1-x^2)^{n+1/2} \right]. \quad (3.18)$$

- Les polynômes de Tchebyshev U_n s'écrivent

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x. \end{aligned}$$

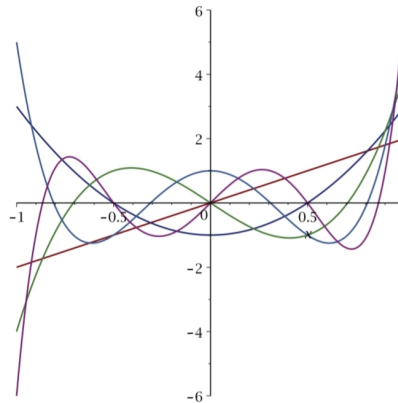


FIGURE 3.7 – Polynômes de Tchebyshev $U_n(x)$ pour $n=1$ à 5.

- La fonction génératrice des polynômes de Tchebyshev est donné par

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{1-2xt+t^2}, \quad |t| < 1$$

- Les polynômes de Tchebyshev sont solutions de l'équation différentielle suivante

$$(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n+2)y(x) = 0. \quad (3.19)$$

- Les polynômes de Tchebyshev satisfont la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{m,n}, \quad m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Démonstration. Cela peut être montré en utilisant l'équation différentielle

(3.19)

$$D\left((1-x^2)^{3/2}D[U_n(x)]\right) = -n(n+2)\sqrt{1-x^2}U_n(x).$$

Multiplions par $U_m(x)$ et intégrons de -1 à 1 .

$$\int_{-1}^1 U_m(x)D\left((1-x^2)^{3/2}U_n'(x)\right) dx.$$

Faisons une intégration par partie

$$\int (1-x^2)^{3/2}U_m'U_n' = n(n+2) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx. \quad (3.20)$$

D'autre par ;

$$D\left((1-x^2)^{3/2}D[U_m(x)]\right) = -m(m+2)\sqrt{1-x^2}U_m(x).$$

Où

$$\int_{-1}^1 U_n(x)D\left((1-x^2)^{3/2}U_m'(x)\right) dx.$$

et

$$\int (1-x^2)^{3/2}U_m'U_n' = m(m+2) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx. \quad (3.21)$$

Faisons la soustraction (3.20) à (3.21)

$$[n(n+2) - m(m+2)] \int_{-1}^1 \frac{U_n(x)U_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

- Si $m \neq n$; alors

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta = 0.$$

□

- Les polynômes de Tchebyshev satisfont la relation de récurrence

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), & n = 1, 2, \dots \\ U_0(x) = 1 \\ U_1(x) = 2x. \end{cases}$$

Résumons les différents polynômes orthogonaux classiques étudiés dans ce chapitre dans le schéma suivant.

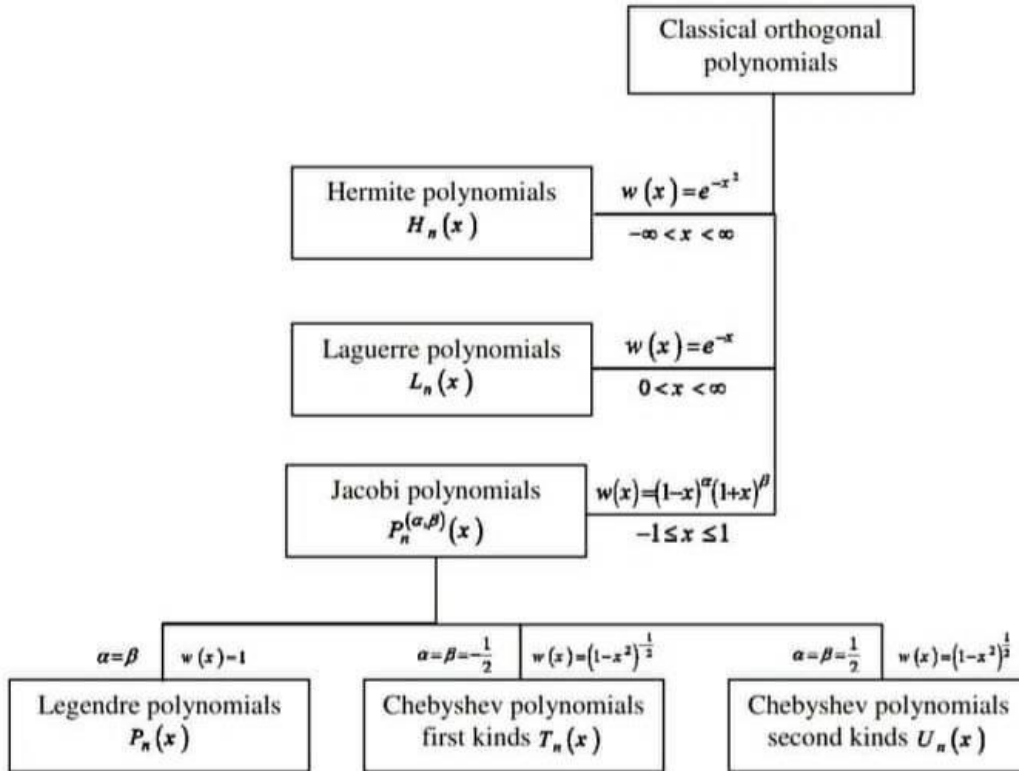


FIGURE 3.8 – Polynômes orthogonaux classiques

Bibliographie

- [1] P. Aimé, Géométrie différentielle et mécanique, Ellipses, 2015.
- [2] V. Arnold, Analyse de Hilbert, Promenades mathématique, Frédéric Laroche, 2005.
- [3] T. S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach New York. London. Paris. science publishers, 1978.
- [4] B. G. S. Doman, The classical orthogonal polynomials, University of Liverpool, UK, World scientific, 2016.
- [5] R. A. Elballa, Orthogonal polynomials and their properties, 2009.
- [6] M. Gaultier, Analyse-Exercices et problèmes-Licence, Dunod, 2008.
- [7] E. Graneland, Orthogonal polynomials and special functions, Project report, Uppsala university, 2020.
- [8] I. Guelfand, Lessons on linear algebra, Pergamon Press, 1960.
- [9] D. A. Jarwan, Orthogonal polynomials and classical orthogonal polynomials, International journal of mechanical Engineering and Technology, 2008.
- [10] M. Lavoie, Polynômes orthogonaux, Université Laval. Québec, Canada, 2015.
- [11] F. Marcellàn, W. V. Assche, Orthogonal polynomials and special functions, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Lecture notes in Mathematics, 2006.
- [12] A. Nikiforov, V. Uvarov, Fonctions spéciales de la Physique Mathématique, Editions Mir. Moscou, 1983.
- [13] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, Special functions mathematical physics, Birkhäuser, 1988.
- [14] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, S. K. Suslov, Classical orthogonal polynomials of a discrete variable, Moscou, 1983.