

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Amar Telidji de Laghouat
Faculté des Sciences

Département des Mathématiques et de L'informatique

Thèse de doctorat LMD

présentée en vu de l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Filière : Mathématiques

Option : Analyse numérique et EDP

présentée par

Mohamed ALIANE

Contrôle optimal et application à l'aéronautique

Soutenue publiquement le 14 Juillet 2021 devant le jury composé de :

Président :	Mr. Mokhtari Abdelkader	<i>Professeur</i>	Université de Laghouat, Algérie
Directeur :	Mr. Mohand Bentobache	<i>Professeur</i>	Université de Laghouat, Algérie
Co-directeur :	Mme. Nacima Moussouni	<i>MCB</i>	Université de Laghouat, Algérie
Examineur :	Mr. Merakeb Abdelkader	<i>Professeur</i>	Université de Tizi-Ouzou, Algérie
Examineur :	Mme. Achemine Farida	<i>MCA</i>	Université de Tizi-Ouzou, Algérie
Examineur :	Mr. Saadallah Abdelkader	<i>MCA</i>	Université de Sétif 1, Algérie
Examineur :	Mr. Nicolas Boizot	<i>MC</i>	Université de Toulon, France

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020/2021

Remerciements

En premier lieu je remercie avant tout ALLAH qui m’a donné le courage et la volonté pour achever ce travail.

J’adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j’en ai eu besoin, en particulier mon père et ma mère.

J’exprime ma reconnaissance à mon directeur de thèse Pr. Bentobache Mohand pour la confiance qu’il m’a accordée en acceptant d’encadrer ce travail de recherche, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu’il a consacré à diriger cette thèse.

Je tiens aussi à remercier ma co-directrice de thèse Dr. Moussouni Nacima, pour les remarques constructives qu’elle m’a fournies, ainsi que pour ses précieux conseils durant toute la période de ma thèse. J’ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d’écoute et de compréhension tout au long de ce travail de recherche. J’ai eu un grand plaisir à travailler à ses côtés.

Ces travaux de recherche ont été effectués au sein du Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l’université de Laghouat et le Laboratoire de Lis (LIS) de Toulon, France.

Il m’est très agréable de remercier le Pr. Abdelkader Mokhtari de l’université Amar Téliidji de Laghouat, qui m’a fait l’honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également le docteur Nicolas Boizot pour m’avoir accueilli dans son laboratoire et pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement le Pr. Merakeb Abdelkader et Dr. Achemine Farida de l’université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Dr. Saadallah Abdelkader de l’université de Sétif pour avoir acceptés de faire partie de ce jury et d’examiner ce travail.

Je remercie également Dr. Kahina Louadj et Dr. Ouzna Oukacha.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

♡ À mes très chers parents,

♡ À mes chers frères et ma soeur (*Fathi, Bilel, Ishak, Yakoub et Meriem*),

♡ À mes amis *Imade, Abdenmour, Khelifa, AbdelKader et Badreddine*,

♡ À mes amis *Abdou, Amine, Rabeh, Soufyane et Abdelaziz*,

♡ À tous mes amis.

Mohamed ALIANE

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à plusieurs méthodes numériques pour la résolution des problèmes de contrôle optimal linéaires et non-linéaires. Parmi ces méthodes, on cite la méthode de tir basée sur le principe du maximum de Pontryagin ainsi que les méthodes de discrétisation qui consistent à transformer le problème du contrôle optimal original en un problème d'optimisation linéaire, quadratique ou non-linéaire puis d'appliquer les algorithmes d'optimisation existants, à savoir : les méthodes d'activation de contraintes et les méthodes de points intérieurs qui sont connues pour leur efficacité dans la résolution des problèmes de programmation mathématique aussi bien linéaire que non-linéaire. Pour la discrétisation du problème du contrôle optimal continu, nous avons considéré deux techniques de discrétisation : la technique utilisant la formule de Cauchy et celle utilisant la formule d'Euler.

Ensuite, nous nous sommes intéressés aux différentes applications des méthodes développées dans les domaines de l'aéronautique. On a fait appel aux notions de la physique pour pouvoir modéliser les phénomènes mathématiquement sous forme d'un problème de contrôle optimal linéaire ou non-linéaire. Dans le but de comparer les performances des méthodes numériques utilisées pour la résolution des problèmes pratiques considérés, que ça soit en termes de précision ou bien en termes de temps d'exécution, nous avons développé une implémentation des différentes méthodes avec le langage de programmation MATLAB, puis nous avons effectué des simulations numériques.

Mots clés : Contrôle optimal, principe du maximum de Pontryagin, méthode indirecte, méthode directe, optimisation, fusée, simulation.

Abstract

In this thesis, we are interested on several numerical methods for solving linear and non-linear optimal control problems. These methods include the shooting method based on the Pontryagin's maximum principle and some discretization methods which consist in transforming the original optimal control problem into a linear, quadratic or non-linear optimization problem and then applying existing optimization algorithms, such as : active-set methods and interior-point methods which are known for their effectiveness in solving both linear and non-linear mathematical programming problems. For the discretization of the continuous optimal control problem, we have considered two discretization techniques : the technique using the Cauchy formula and the one using the Euler formula.

Then, we have applied the developed methods in the fields of aeronautics. The law of physics were used to model phenomena mathematically in the form of a linear or non-linear optimal control problem. In order to compare the performance of the numerical methods used to solve the considered practical problems, in terms of accuracy and in terms of execution time, we have developed an implementation with the MATLAB programming language. Then we have performed numerical simulations.

Key words : Optimal control, Pontryagin's maximum principle, indirect methods, direct methods, optimization, rocket, simulation.

Table des figures

1.1	Schéma d'un système de contrôle	7
1.2	Schéma de classification des méthodes numériques du contrôle optimal	13
2.1	Contrôle optimal $t \mapsto u(t)$	28
2.2	Le contrôle optimal $u(t)$ pour différentes valeurs de $N \leq 100$	30
2.3	Le contrôle optimal $u(t)$ pour différentes valeurs de $100 < N \leq 1000$	31
2.4	Le contrôle optimal $u^*(t)$ pour différentes valeurs de N	34
2.5	Comparaison de $J(u)$ pour différentes valeurs de $N \leq 100$	35
2.6	Temps d'exécution pour différentes valeurs de $N \leq 100$	36
3.1	Fusée	40
3.2	Résultats du problème du temps minimal	44
3.3	Graphes de $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto p_w(t)$	49
3.4	Trajectoires optimales $t \mapsto h(t)$, $t \mapsto v(t)$ et $t \mapsto w(t)$	50
3.5	Résultats de la méthode de tir	52
3.6	Comparaison numérique $N \mapsto v(T)$	59
4.1	Mouvement non rectiligne d'une fusée	61
4.2	Graphe de la variation de l'angle de gîte en fonction du temps	68
4.3	Graphes du mouvement longitudinal et l'altitude en fonction du temps	69
4.4	Graphes de la projection horizontale et verticale de la vitesse	70
4.5	Les trajectoires optimales	71
4.6	Graphe de la variation de l'angle de gîte en fonction du temps	72
4.7	Graphes du mouvement longitudinal et l'altitude en fonction du temps	73
4.8	Graphes de la projection horizontale et verticale de la vitesse	74
4.9	Les trajectoires optimales	75
4.10	Graphe du module de la poussée en fonction du temps	80

4.11	Graphe de la variation de l'angle de gîte en fonction du temps	81
4.12	Graphe du mouvement longitudinal en fonction du temps	82
4.13	Graphes de l'altitude en fonction du temps	83
4.14	Graphe de la projection horizontale de la vitesse	83
4.15	Graphe de la projection verticale de la vitesse	84
4.16	Graphe de la masse en fonction du temps	84
4.17	Les trajectoires optimales	85
4.18	Fonction convexe	95
4.19	Forces exercées	98
4.20	Repère spatial	100
4.21	Repère du plan	101
4.22	Les coordonnées polaires	102

Liste des tableaux

2.1	Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler	29
2.2	Simulation numérique par la technique de discrétisation de Cauchy	33
2.3	Simulation numérique par l'algorithme de discrétisation de Cauchy	37
3.1	Simulation numérique par la technique de discrétisation de Cauchy	55
3.2	Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler	58
4.1	Données numériques du mouvement de la fusée	66
4.2	Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler	70
4.3	Données numériques du problème du contrôle avec une masse variable	78

Table des matières

Table des matières	vii
Introduction	1
1 Théorie du contrôle	6
1.1 Introduction	6
1.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal	6
1.3 Contrôlabilité	9
1.3.1 Ensemble accessible	9
1.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires	10
1.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	11
1.4 Méthodes de résolution	13
1.4.1 Méthodes directes	14
1.4.2 Méthodes indirectes	14
1.5 Comparaison des méthodes	17
1.6 Conclusion	19
2 Nouvelle méthode directe pour résoudre les problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique	20
2.1 Introduction	20
2.2 Position du problème	21
2.3 Transformation du PCOLQ en un problème d'optimisation quadratique	21
2.3.1 Discrétisation	22

2.3.2	Algorithme de discrétisation de Cauchy	24
2.4	Exemples numériques	25
2.4.1	Exemple 1	25
2.4.2	Exemple 2	34
2.4.3	Exemple 3	37
2.5	Conclusion	37
3	Contrôle optimal du mouvement rectiligne d'une fusée	39
3.1	Introduction	39
3.2	Présentation et modélisation du problème	39
3.3	Problème du temps minimal	42
3.4	Résolution du problème de la vitesse maximale d'une fusée	44
3.4.1	Résolution analytique	45
3.4.2	Résolution numérique par la méthode de tir	50
3.4.3	Résolution numérique par la méthode de discrétisation de Cauchy	52
3.4.4	Résolution numérique par la méthode de discrétisation d'Euler	54
3.4.5	Comparaison numérique	58
3.5	Conclusion	58
4	Contrôle optimal du mouvement non rectiligne d'une fusée	60
4.1	Introduction	60
4.2	Mouvement non rectiligne d'une fusée avec une masse constante	61
4.2.1	Position du problème	61
4.2.2	Modélisation du problème	62
4.2.3	Résolution du problème	63
4.2.4	Comparaison des deux méthodes	71
4.3	Mouvement non rectiligne d'une fusée avec une masse variable	71
4.3.1	Modélisation du problème	71
4.3.2	Résolution du problème	75
4.4	Conclusion	81

Introduction	x
Conclusion	86
Annexes	88
Bibliographie	104

Introduction

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en tenant compte éventuellement de certains critères [8, 24, 20, 51, 56, 64].

Les systèmes étudiés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard, etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie [63, 64], etc. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes variationnels de la mécanique.

Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin, fondé par ce dernier en 1956 [59, 60]. Ce principe donne une condition nécessaire d'optimalité, permettant ainsi de calculer les trajectoires optimales.

Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien, ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : systèmes de freinage ABS, assistance à la conduite, servomoteurs, chaînes industrielles de montage, opération au laser, robotique, satellites, thermostats, circuits, contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens,

boursiers, fluviaux, photographie numérique, filtrage et reconstruction d'images, lecteurs CD et DVD, réseaux informatiques, moteurs de recherche sur internet, l'agriculture, l'aéronautique et l'aérospatial, etc ([7, 8, 28, 50, 54, 55, 61, 64]). Les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action avec une notion de rendement optimal.

Les points forts de la théorie ont été la découverte de la méthode de programmation dynamique, l'introduction de l'analyse fonctionnelle dans la théorie des systèmes optimaux, la découverte des liens entre les solutions d'un problème de contrôle optimal et les résultats de la théorie de stabilité de Lyapunov [64]. Plus tard sont apparues les fondations de la théorie du contrôle stochastique et du filtrage des systèmes dynamiques ainsi que le contrôle d'équations aux dérivées partielles (contrôle optimal des systèmes distribués).

Les problèmes de contrôle optimal des systèmes dynamiques linéaires ont été étudiés dans la littérature d'une manière très détaillée [2, 3, 4, 7, 13, 64]. Néanmoins, il est difficile de trouver des méthodes numériques très efficaces qui prennent en compte toutes les spécificités du problème.

Le contrôle optimal sert à trouver une loi de commande pour un système donné de telle sorte qu'un certain critère d'optimalité soit atteint. Un problème de commande comprend donc un coût à optimiser, une fonction d'état et une variable ou plusieurs variables de contrôle. Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Pour les systèmes de contrôle linéaire en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R.E. Kalman, et pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. Ensuite une fois le problème de contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (ou maximum).

Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré. Généralement les problèmes de commande optimale sont résolus de façon numérique, par conséquent les méthodes de résolution ont nettement évolué ces dernières années. La plu-

part des anciennes méthodes étaient basées sur l'obtention d'une solution qui satisfait soit les équations d'Euler-Lagrange, qui sont des conditions nécessaires d'optimalité, soit l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman [64], qui est une condition suffisante d'optimalité. Les méthodes sont appelées les méthodes indirectes [7, 8, 11, 27, 38, 56]. L'inconvénient principal des méthodes indirectes est la résolution fastidieuse de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Ce qui a amené plusieurs chercheurs à utiliser des méthodes directes pour résoudre le problème de la commande optimale [2, 3, 4, 7, 13, 64]. Ces méthodes consistent à discrétiser les équations du problème, et ainsi se ramener à un problème de programmation linéaire [29, 15] ou non-linéaire [14], c'est-à-dire un problème d'optimisation en dimension finie. Le problème discrétisé peut ensuite être résolu par n'importe quel algorithme d'optimisation en dimension finie, par exemple par la programmation quadratique séquentielle [14], par les méthodes d'activation des contraintes [42] ou par les méthodes de points intérieurs [66]. On dispose de deux grandes classes de méthodes, à savoir :

- Les méthodes directes : consistent à discrétiser le problème de contrôle (l'état et la commande) pour tout instant et on se ramène à un problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant, par exemple, sur les méthodes d'Euler ou bien celles de Runge-Kutta. Le problème d'optimisation obtenu peut alors être résolu par les méthodes de points intérieurs ou bien les méthodes de types SQP (méthode de programmation quadratique successive), etc. Ces méthodes sont les plus simples à mettre en oeuvre.
- Les méthodes indirectes : consistent à appliquer le principe du maximum de Pontryagin (PMP), qui donne des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre et se traduisent par un problème aux limites. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions, ce qui revient en pratique à chercher le zéro d'une certaine fonction de tir associée au problème original. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation.

Cette thèse est organisée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Nous donnons un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal et nous présentons la notion de contrôlabilité pour les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. On

présente également les différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes, et nous donnons le principe du maximum de Pontryagin.

Le deuxième chapitre est structuré comme suit : Dans la section 2, nous présentons le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique. Dans la troisième section, nous proposons un algorithme qui consiste à utiliser la technique de discrétisation de Cauchy pour transformer le problème de contrôle optimal original en un problème d'optimisation quadratique qui est ensuite résolu par la méthode d'activation de contraintes (Active-set method) [7]. Dans la section 4, nous illustrons l'algorithme proposé par trois exemples de problèmes de contrôle optimal. Le problème du premier exemple est résolu avec trois méthodes : la méthode analytique (MA) qui est basée sur le principe du maximum de Pontryagin, notre algorithme dit "Algorithme de Discrétisation de Cauchy" (ADC) ainsi que la méthode de discrétisation utilisant la formule d'Euler combinée avec la méthode SQP (MDE). Finalement, nous comparons les méthodes précédentes en effectuant des simulations numériques avec le langage de programmation MATLAB. Quant aux problèmes des exemples 2 et 3, nous les avons résolus avec notre méthode et la valeur optimale du critère de qualité obtenue est comparée avec celles obtenues dans [25] et [46] respectivement.

Le troisième chapitre est structuré comme suit : Dans la section 2, nous construisons le modèle mathématique de contrôle optimal linéaire correspondant au problème de la maximisation de la vitesse d'une fusée qui se déplace avec un mouvement rectiligne [7]. Dans la section 3, nous fixons la valeur du temps final en résolvant un autre problème appelé problème de contrôle optimal en temps minimal. Dans la section 4, nous résolvons le problème considéré avec quatre méthodes : la méthode analytique, la méthode de tir et deux techniques de discrétisation : la technique utilisant la formule de Cauchy et celle utilisant la formule d'Euler. Ensuite, nous comparons les résultats obtenus en effectuant plusieurs simulations numériques avec MATLAB.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons deux modèles de contrôle optimal non linéaire avec un temps final fixé, afin de maximiser le décalage latéral d'une fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale, où la commande représente l'angle d'inclinaison de la fusée [5, 6, 7, 8, 9]. Dans le premier modèle, nous considérons une fusée avec une masse fixe

et dans le deuxième modèle nous supposons que la masse de la fusée est variable. Afin de résoudre les deux problèmes de contrôle optimal non linéaire obtenus, nous appliquons d'abord le principe de maximum de Pontryagin, puis nous trouvons une solution numérique en utilisant la méthode de tir. De plus, nous appliquons les méthodes de discrétisation et nous comparons les résultats obtenus en effectuant des simulations numériques avec MATLAB.

Chapitre 1

Théorie du contrôle

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons les concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Il s'organise comme suit : nous donnons un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal et nous présentons la notion de contrôlabilité pour les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. Nous présentons les différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes, et nous donnons le principe du maximum de Pontryagin.

1.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, une performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées x_i , $i = 1, \dots, n$. Si le système évolue dans le temps, alors les variables x_i sont des fonctions de t : $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ où t désigne le temps, avec $t \in [0, T]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)),$$

où f est un vecteur de n composantes f_i , $i = 1, \dots, n$, f peut être linéaire ou non linéaire.

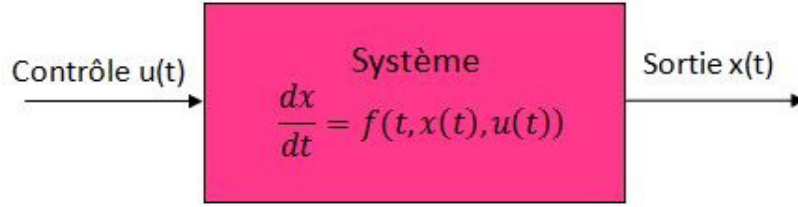


FIGURE 1.1 – Schéma d'un système de contrôle

Les variables de contrôle seront notées $u_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, elles doivent être intégrables par rapport à t . On définit aussi l'ensemble des commandes admissibles U qui peut être borné ou non borné.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$, $j = 1 \dots m$, par des constantes. Par la suite, nous considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) - \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$, donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 .

Commande Bang-Bang

On suppose que U est un polyèdre ((cube) $[-1, 1]^m$ dans $\mathbb{R}^m$). Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, 2, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch.

Un problème de contrôle optimal est dit de Bolza s'il se formule de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_{t_0}^T L(t, x(t), u(t)) dt, & (1.1.1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & (1.1.2) \\ x(t_0) = x_0 \in M_0, & (1.1.3) \\ x(T) = x_f \in M_f, & (1.1.4) \\ u(t) \in U, \quad t \in I = [t_0, T], & \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où f est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$ dans $\mathbb{R}^n$, L est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$ dans $\mathbb{R}$, et g une fonction de $I \times V$ dans $\mathbb{R}$ continue sur V , elle dépend de T qui est le temps final (fixé ou libre) et de l'état final $x(T)$.

Pour tout contrôle $u \in U$, on définit le coût de la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, T]$, avec I un intervalle de temps dans $\mathbb{R}$, cette fonction dépend de $x(\cdot)$ appelée équation d'état. En pratique, l'état du système peut représenter à la fois la vitesse, la position, la température et d'autres paramètres mesurables, et $u(\cdot)$ est la commande du système, telles que V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, U est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans l'ensemble non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Par commodité d'écriture, on suppose dans toute la suite que $t_0 = 0$. Alors $x(0)$ est la position initiale du système, $x(T)$ est la position finale du système, où M_0 et M_f sont deux sous-ensembles des variétés de V . Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solution de $\dot{x}_u(t) = f(t, x(t), u(t))$, telles que $x_u(0) \in M_0$ et $x_u(T) \in M_f$ tout en minimisant le coût $J(T, u)$.

Le nom du problème est donné suivant la forme du coût. Ainsi, on distingue trois autres types de problèmes de contrôle optimal :

— **Problème de Lagrange**

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à

$$J(T, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.2)$$

c'est à dire : $g(T, x(T)) = 0$.

— **Problème de Mayer**

C'est le problème dont le critère à minimiser est égal à

$$J(T, u) = g(T, x(T)), \quad (1.3)$$

c'est à dire : $L(t, x(t), u(t)) = 0$.

— **Problème du temps minimal**

Si $g(T, x(T)) = 0$ et $L(t, x(t), u(t)) = 1$, ou bien $g(T, x(T)) = T$ et $L(t, x(t), u(t)) = 0$, alors le problème correspond au problème du temps minimal.

Remarque 1. *On remarque que le problème de Bolza est un problème qui regroupe la forme de Lagrange et la forme Mayer, par conséquent, ce problème s'appelle aussi problème de Mayer-Lagrange.*

L'unicité de la solution du système est assurée par la théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles [64]. Soit $x(\cdot)$ la solution de l'équation du système (1.1), $x(\cdot)$ varie en fonction du contrôle u . Le problème du contrôle optimal consiste à déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_f de sorte à minimiser le coût. Pour résoudre un problème de ce type, la première question à se poser est :

Question 1 : Existe-t-il un contrôle $u(t) \in U$ telle que la trajectoire $x(t)$ associée relie un point de l'ensemble de départ $x_0 \in M_0$ à une cible terminale $x_f \in M_f$ en un temps fini ?

La notion qui nous permet de répondre à cette question est l'étude de la contrôlabilité du système qui est le problème de contrôlabilité, appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, on peut vouloir déterminer un contrôle $u \in U$ telle que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $x_0 \in M_0$ à un état terminal $x_f \in M_f$, et qui de plus minimise la fonctionnelle $J(T, u)$?

1.3 Contrôlabilité

1.3.1 Ensemble accessible

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, \forall t \in I. \quad (1.4)$$

Définition 1. *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) | u \in L^\infty([0, T], \Omega)\}, \quad (1.5)$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.4) associée au contrôle u .

Autrement dit $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.4) au temps T lorsqu'on fait varier le contrôle u . Pour la cohérence, on pose $Acc(x_0, 0) = \{x_0\}$.

Définition 2. *Le système (1.4) est dit contrôlable si pour tout points $x_0 \in M_0$ et $x_f \in M_f$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ telle que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_f en un temps fini.*

Définition 3. *Le système est dit contrôlable en temps T si*

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n.$$

Il est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \cup_{T \geq 0} Acc(x_0, T).$$

1.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Théorème 1. *Soit le système linéaire autonome de $\mathbb{R}^n$ suivant :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \quad (1.6)$$

où A et B sont deux matrices de dimension $(n \times n)$ et $(n \times m)$ respectivement qui ne dépendent pas du temps t , $x(t)$, $r(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Le système (1.6) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B), \quad (1.7)$$

est de rang n .

La matrice K est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang } K = n$, est appelée condition de Kalman.

Remarque 2. *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Contrôlabilité des systèmes linéaires non autonomes

Théorème 2. *Un système linéaire non-autonome de $\mathbb{R}^n$ donné par*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad (1.8)$$

est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$C = \int_0^T (F(t))^{-1} B(t) B'(t) (F'(t))^{-1} dt, \quad (1.9)$$

est inversible.

Remarque 3. La matrice C est appelée matrice de contrôlabilité, elle ne dépend pas de la condition initiale x_0 mais elle dépend du temps final T . Autrement dit, si un système linéaire non autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.

1.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce cas, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t)), \\ x(0) = x_0, u \in U, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.10)$$

où x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(\cdot)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (1.10).

Définition 4. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.10) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 , si $x_1 \in \overset{\circ}{\text{Acc}}(x_0, T)$, où $\overset{\circ}{\text{Acc}}(x_0, T)$ désigne l'intérieur de l'ensemble $\text{Acc}(x_0, T)$.

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x_1)$ tel que $V \subset \text{Acc}(x_0, T)$.

Application entrée-sortie

Considérons pour le système (1.10) le problème de contrôle suivant : Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ telle que la trajectoire x_u associée à u , solution de (1.10), vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1. \quad (1.11)$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 5. *L'application entrée-sortie en temps T du système (1.10) initialisée à x_0 est l'application*

$$\begin{aligned} E_T : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto x_u(T), \end{aligned} \tag{1.12}$$

où U est l'ensemble des contrôles u telle que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps T associe à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u .

Définition 6. *Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$, on dit que le système (1.10) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 si $\exists V \in V(x) \mid \forall y \in V, \exists u \in U$ tel que $y = E_T(u)$.*

Remarque 4. *L'application entrée sortie E_T est différentiable au sens de Fréchet.*

Calculons sa différentielle à l'ordre un, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0, u \in U, t \in [0, T]. \end{cases} \tag{1.13}$$

Définition 7. *Le système (1.13) est appelé système linéarisé du système (1.10) le long de $u(\cdot)$.*

La solution du système linéarisé (1.13) en temps T est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta x(T) &= \int_0^T e^{t-s} dB(u(s))\delta u(s)ds, \\ dE_T(u)\delta u &= x_{u+\delta u}(T) - x_u(T), \end{aligned}$$

où $dE_T(u)$ est l'application entrée sortie du système (1.13).

Proposition 1. *$dE_T(u)$ est surjective si et seulement si le système linéarisé est contrôlable.*

Remarque 5. *Si le système linéarisé (1.10) est contrôlable alors $dE_T(u)$ est surjective, en utilisant le théorème des fonctions implicites, on déduit que E_T est localement surjective, de la proposition (1), on déduit que le système de départ (1.10) est localement contrôlable au voisinage de x_1 .*

1.4 Méthodes de résolution

Dans cette partie, on présente deux types de méthodes numériques pour résoudre un problème de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle optimal original et le transformer en un problème d'optimisation linéaire ou non linéaire sous contraintes. Parmi les méthodes indirectes, on cite la méthode de tir. Cette méthode consiste à appliquer le principe du maximum de Pontryagin pour obtenir un problème aux limites. De plus, la méthode de tir nécessite l'utilisation de la méthode de Newton. Les méthodes indirectes ont une bonne précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix des conditions initiales. Le schéma de la figure 1.2 illustre la classification des différentes méthodes.

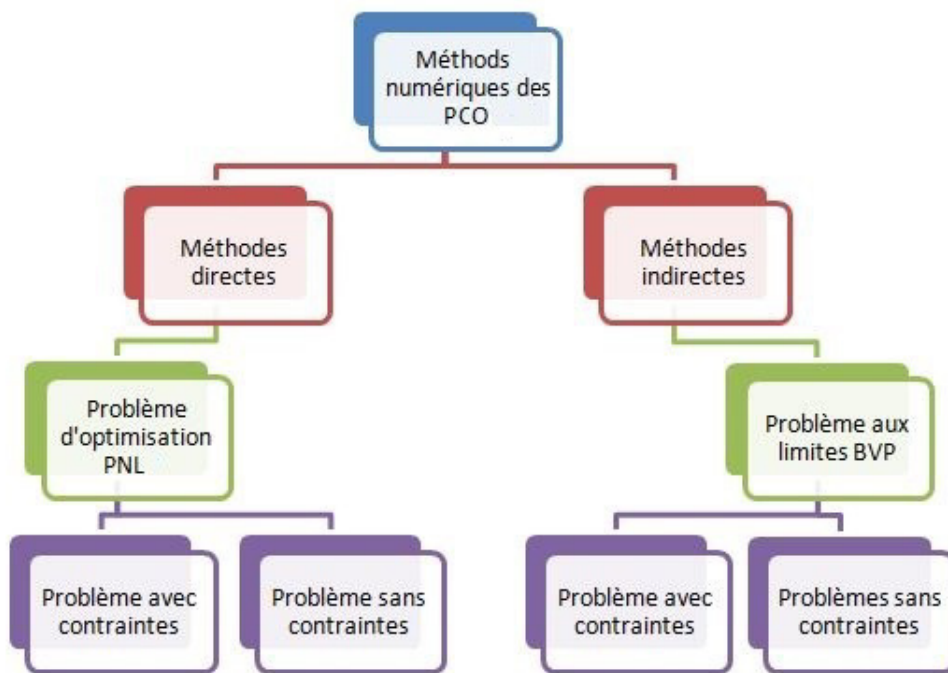


FIGURE 1.2 – Schéma de classification des méthodes numériques du contrôle optimal

1.4.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation linéaire, quadratique ou non-linéaire en dimension finie. On cite par exemple la méthode de discrétisation totale.

Discrétisation totale

La méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Cette discrétisation conduit donc au problème de programmation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min F(Z) \\ x_{i+1} &= x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \\ u_i &\in \Omega, \quad i = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ et $Z = (x_1, x_2, \dots, x_N, u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$, avec x_0 donné.

1.4.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

Principe du Maximum de Pontryagin

Théorème 3. *Considérons le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1.14}$$

où $f(t, x(t), u(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)]$ de $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_f deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final M_f en $t(u) < t_e(u)$.

Par ailleurs, on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, T]$:

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt,$$

où $L(t, x(t), u(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g(T, x(T)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (1.14) associées au contrôle u .

Le but est de déterminer une trajectoire joignant M_0 à M_f et minimisant le coût.

Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))}{\partial p(t)}, \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))}{\partial x(t)}, \\ \frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))}{\partial u(t)} &= 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

où le Hamiltonien du système (1.14) est la fonction

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p, p^0, u) &\longmapsto H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 L(t, x, u), \end{aligned} \tag{1.16}$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$:

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \tag{1.17}$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_f n'est pas fixé, on a la condition au temps final T :

$$\max_{u \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial T}(T, x(T)). \tag{1.18}$$

Remarque 6. Si le système est autonome, alors le Hamiltonien $H(t, x, p, p^0, t)$, $t \in [0, T]$ est constant le long de la trajectoire, i.e., f et L ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , $H = cste$.

Remarque 7. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum, tandis que $p^0 \geq 0$ conduit au principe du minimum, i.e., la condition (1.17) serait une condition de maximum.

Définition 8. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations (1.15) et (1.17). Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Condition de transversalité

La condition de transversalité indique le comportement que doit avoir le contrôle quand on arrive à l'horizon fini (ou infini) : La manière dont le contrôle doit traverser la ligne d'horizon. Cette condition doit nous aider à choisir la trajectoire optimale parmi toutes les trajectoires possibles. Cette condition est donnée par les équations provenant des conditions dites aux deux bords, en t_0 (temps initial) d'une part et en T d'autre part sont appelées équations de transversalité.

Si de plus M_0 et M_f (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de $\mathbb{R}^n$ ayant des espaces tangents en $x_0 \in M_0$ et $x_f \in M_f$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux),

$$p(0) \perp T_{x_0} M_0, \quad (1.19)$$

et

$$p(T) - p^\circ \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x_f} M_1. \quad (1.20)$$

Remarque 8. Si le contrôle u est continue au temps T , la condition peut s'écrire

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial T}(T, x(T)). \quad (1.21)$$

Méthode de tir simple

Le principe de la méthode de tir est le suivant. Considérons le problème de contrôle optimal (1.10), et supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0, \quad (1.23)$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème aux limites (1.22) est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0, \quad (1.24)$$

i.e., il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . L'équation précédente peut donc être résolue par une méthode de Newton.

1.5 Comparaison des méthodes

Les méthodes directes présentent les avantages suivants par rapport aux méthodes indirectes :

- Leur mise en oeuvre est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme les méthodes indirectes. En particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations.
- Elles sont plus robustes.
- Elles sont peu sensibles au choix de la condition initiale (contrairement aux méthodes indirectes).

- Il est facile de tenir compte d'éventuelles contraintes sur l'état.
- Elles permettent de calculer les contrôles optimaux sous forme de feedback.

En revanche

- Les méthodes directes sont moins précises que les méthodes indirectes. Par exemple, pour le problème de contrôle optimal issu de l'aéronautique étudié au chapitre suivant, la précision des méthodes directes s'avère en général insuffisante, malgré l'augmentation du nombre de pas de la discrétisation.
- La discrétisation directe d'un problème de contrôle optimal comporte souvent plusieurs minima (locaux), et les méthodes directes peuvent converger vers ces minima, pourtant la solution ainsi déterminée peut s'avérer être très éloignée de la vraie solution optimale.
- Les méthodes directes sont gourmandes en mémoire, et de ce fait peuvent devenir inefficaces si la dimension du problème d'optimisation obtenu après discrétisation est trop grande.

Les avantages des méthodes indirectes sont

- L'extrême précision numérique.
- La méthode de tir multiple est, par construction, parallélisable, et son implémentation peut donc être envisagé sur un réseau d'ordinateurs montés en parallèle.

Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivantes :

- Elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte.
- Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée.
- Rigidité de la méthode : la structure des commutations doit être connue à l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De même, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état, d'autre part la présence de contraintes sur l'état peut rendre compliquée la structure de la trajectoire optimale.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Puis nous avons présenté le principe général des méthodes numériques existantes pour la résolution du problème, à savoir les méthodes directes (méthode de discrétisation totale) et les méthodes indirectes (méthode de tir). Finalement, nous avons rappelé le principe du maximum de Pontryagin qui constitue l'outil de base de la théorie du contrôle optimal en général et la méthode de tir en particulier.

Chapitre 2

Nouvelle méthode directe pour résoudre les problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique

2.1 Introduction

Dans [39, 51, 56], la technique de discrétisation de Cauchy est combinée avec la méthode adaptée de la programmation linéaire [40] pour la résolution des problèmes de contrôle optimal linéaire (PCOL). Dans [69], la technique de discrétisation de Cauchy est combinée avec la méthode adaptée à direction hybride [18, 21, 19] pour résoudre les PCOL. Dans ce chapitre, nous présentons le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique (PCOLQ) (Section 2). Puis, en s'inspirant des travaux [39, 51, 56, 69], nous proposons un algorithme qui consiste à utiliser la technique de discrétisation de Cauchy pour transformer le problème de contrôle optimal original en un problème d'optimisation quadratique qui est ensuite résolu par la méthode d'activation de contraintes (Active-set method) (Section 3).

Afin d'illustrer l'algorithme proposé, nous allons considérer trois exemples de problèmes de contrôle optimal (Section 4). Le problème du premier exemple est résolu avec trois méthodes : la méthode analytique (MA) qui est basée sur le principe du maximum de Pontryagin, notre algorithme dit "Algorithme de Discrétiation de Cauchy" (ADC) ainsi que la méthode de discrétisation utilisant la formule d'Euler combinée avec la méthode SQP (MDE) [56]. Fi-

nalement, nous comparons les méthodes précédentes en effectuant des simulations numériques avec le langage de programmation MATLAB. Quant aux problèmes des exemples 2 et 3, nous les avons résolus avec notre méthode et la valeur optimale du critère de qualité obtenue est comparée avec celles obtenues dans [25] et [46], respectivement.

2.2 Position du problème

Soit n et m deux nombres entiers non négatifs, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous considérons le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Maximiser } J(u) = \frac{1}{2}x(T)'Dx(T) + w'x(T), & (2.1.1) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(0) = x_0, & (2.1.2) \\ Qx(T) = g, & (2.1.3) \\ \alpha \leq u(t) \leq \beta, \ t \in [0, T], \ T \text{ fixé}, & (2.1.4) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ et $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))'$ sont les vecteurs d'états et des contrôles respectivement à l'instant t , qui sont des applications mesurables et localement bornées sur $[0, T]$, à valeurs dans le sous-ensemble $\Omega = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice réelle symétrique d'ordre n , $w \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $g \in \mathbb{R}^p$.

2.3 Transformation du PCOLQ en un problème d'optimisation quadratique

La solution du système dynamique du problème (2.1) est donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)(F(s))^{-1}Bu(s)ds, \ t \in [0, T], \quad (2.2)$$

où $F(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la résolvante, solution du système :

$$\dot{F}(t) = AF(t), \ F(0) = I_n, \ t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

La solution du système (2.3) est donnée par :

$$F(t) = \exp(tA), \ t \in [0, T].$$

Nous définissons la matrice $\phi(t) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, les vecteurs $y, v \in \mathbb{R}^n$, $\bar{g} \in \mathbb{R}^p$ comme suit :

$$\phi(t) = F(T)F(t)^{-1}B, \quad y = \int_0^T \phi(t)u(t)dt, \quad v = F(T)x_0 \text{ et } \bar{g} = g - Qv. \quad (2.4)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$x(T) = F(T)x_0 + \int_0^T \phi(t)u(t)dt = v + y. \quad (2.5)$$

En substituant l'expression de la solution $x(T)$ dans le critère de qualité (2.1.1) et les contraintes terminales (2.1.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= \frac{1}{2}(v + y)'D(v + y) + w'(v + y) \\ &= \frac{1}{2}v'Dv + v'Dy + \frac{1}{2}y'Dy + w'v + w'y \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$Qy = g - Qv = \bar{g}. \quad (2.7)$$

Par conséquent, le problème (2.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \max_u J(u) = \frac{1}{2}v'Dv + v'Dy + \frac{1}{2}y'Dy + w'v + w'y, \\ Qy = \bar{g}, \\ \alpha \leq u(t) \leq \beta. \end{cases} \quad (2.8)$$

Posons

$$J_0 = \frac{1}{2}v'Dv + w'v, \quad d' = v'D + w'. \quad (2.9)$$

Alors le problème (2.8) devient

$$\begin{cases} \max_u J(u) = J_0 + d'y + \frac{1}{2}y'Dy, \\ Qy = \bar{g}, \\ \alpha \leq u(t) \leq \beta. \end{cases} \quad (2.10)$$

2.3.1 Discrétisation

Pour un nombre de sous-intervalles de discrétisation $N \in \mathbb{N}^*$ choisi à l'avance, on calcule le pas de discrétisation $\theta = \frac{T}{N}$.

Posons $\tau^j = \tau_{j+1} = \tau_j + \theta$, donc nous avons $[0, T] = \cup_{j=1}^{N-1} [\tau_j, \tau^j] \cup [\tau_N, \tau^N]$.

Nous calculons la matrice $R_j \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, N$, comme suit :

$$R_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

On pose

$$u^j(t) = u(\tau_j) = u^j \in \mathbb{R}^m, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, N.$$

Donc

$$y = \int_0^T \phi(t) u(t) dt = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt \right) u^j = \sum_{j=1}^N R_j u^j = Ru,$$

et

$$Qy = QRu = \bar{Q}u,$$

où

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_N) \in \mathcal{M}_{n,mN}(\mathbb{R}), \quad \bar{Q} = QR \in \mathcal{M}_{p,mN}(\mathbb{R}),$$

et

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}.$$

En substituant l'expression de y dans le problème (2.10), nous obtenons le problème de programmation quadratique suivant :

$$\begin{cases} \max_u J(u) = J_0 + c'u + \frac{1}{2}u'\bar{D}u, \\ \bar{Q}u = \bar{g}, \\ a \leq u \leq b, \end{cases} \quad (2.12)$$

où

$$c = R'd \in \mathbb{R}^{mN}, \quad \bar{D} = R'DR \in \mathcal{M}_{mN}(\mathbb{R}), \quad a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mN}. \quad (2.13)$$

2.3.2 Algorithme de discrétisation de Cauchy

Les différentes étapes de l'Algorithme de Discrétisation de Cauchy (ADC) pour la résolution numérique du problème (2.1) sont résumées dans le schéma suivant :

Algorithme 1 (Algorithme de Discrétisation de Cauchy)

Input : $D, w, A, B, x_0, Q, g, \alpha, \beta, T$;

Output : Le coût optimal J^* et le contrôle optimal u^* ;

Étape 1. Calculer v et $\bar{g}$ avec la relation (2.4) ;

Étape 2. Calculer J_0 et d' avec la relation (2.9) ;

Étape 3. Calculer la $(n \times m)$ -matrice

$$R_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} e^{(T-t)A} B dt, \quad j = 1, \dots, N;$$

Étape 4. Calculer la $(n \times mN)$ -matrice $R = (R_1, R_2, \dots, R_N)$;

Étape 5. Calculer les matrices $\bar{D}$, $\bar{Q}$ et les vecteurs c , a et b avec (2.13) ;

Étape 6. Résoudre le problème d'optimisation quadratique (2.12).

Nous considérons deux versions de ADC :

- **ADC1** : nous calculons l'intégrale $I(t) = \int_0^t \phi(t) dt$ symboliquement, puis nous calculons les matrices

$$R_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt = I(\tau_{j+1}) - I(\tau_j).$$

- **ADC2** : nous calculons les intégrales définies R_j en utilisant la règle de Simpson suivante :

$$R_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt \simeq \frac{h}{6} \left(\phi(\tau_j) + 4\phi\left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2}\right) + \phi(\tau_{j+1}) \right). \quad (2.14)$$

2.4 Exemples numériques

2.4.1 Exemple 1

Considérons le problème de contrôle optimal linéaire quadratique suivant :

$$\begin{cases} \max J(u(t)) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \\ x_1(T) - 2x_2(T) = \frac{1}{2}, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, -1 \leq u(t) \leq 1, t \in [0, T], T = 2s. \end{cases} \quad (2.15)$$

Résolution par la méthode analytique (MA)

Afin de résoudre le problème (2.15), nous appliquons d'abord le principe du maximum de Pontryagin. Le Hamiltonien du problème (2.15) est donné par :

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = p_1(t)x_1(t) + p_2(t)u(t). \quad (2.16)$$

Le vecteur adjoint $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ est solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t), t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.17)$$

Du système (3.8), on en déduit que

$$\begin{cases} p_1(t) = \lambda_1, \\ p_2(t) = -\lambda_1 t + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), u^*(t)) &= \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} H(t, x(t), p(t), u(t)) \\ &= p_1(t)x_1(t) + \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} [p_2(t)u(t)]. \end{aligned}$$

Le contrôle maximisant le Hamiltonien est :

$$u^*(t) = \text{signe}(p_2(t)). \quad (2.19)$$

Puisque le contrôle optimal est égal au signe du vecteur adjoint $p_2(t)$, les temps de commutation sont donnés par les racines de l'équation $p_2(t) = 0$. Afin de choisir la stratégie optimale, examinons les différentes stratégies possibles suivantes :

- Stratégie 1 : $u(t) = 1, \forall t \in [0, T]$;
- Stratégie 2 : $u(t) = -1, \forall t \in [0, T]$;
- Stratégie 3 : $u(t) = 1$ pour $t \in [0, t_c[$ puis $u(t) = -1$, pour $t \in [t_c, T]$;
- Stratégie 4 : $u(t) = -1$ pour $t \in [0, t_c[$ puis $u(t) = 1$, pour $t \in [t_c, T]$;

où t_c est le temps de commutation.

Stratégie 1 :

A partir du système (2.15), on a $\dot{x}_2(t) = 1$, ce qui implique que

$$\begin{cases} x_2(t) = t + \alpha_1, \\ x_1(t) = \frac{t^2}{2} + \alpha_1 t + \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.20)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} x_2(t) = t, \\ x_1(t) = \frac{t^2}{2}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Pour $t = 2$, on aura $x_1(2) - 2x_2(2) = -2 \neq \frac{1}{2}$, donc la stratégie 1 n'est pas réalisable.

Stratégie 2 :

On aura, $\dot{x}_2(t) = -1$, ce qui implique que :

$$\begin{cases} x_2(t) = -t + \beta_1, \\ x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + \beta_1 t + \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.22)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x_2(t) = -t, \\ x_1(t) = -\frac{t^2}{2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Pour $t = 2$, on aura $x_1(2) - 2x_2(2) = 2 \neq \frac{1}{2}$, donc la stratégie 2 n'est pas réalisable.

Stratégie 3 :

Les équations du premier morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = 1, t \in [0, t_c[$, sont

$$\begin{cases} x_2(t) = t, \\ x_1(t) = \frac{t^2}{2}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Les équations du deuxième morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [t_c, T]$, sont

$$\begin{cases} x_2(t) = -t + c_1, \\ x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons

$$c_1 = 2t_c, \quad c_2 = -t_c^2.$$

Calculons t_c , tel que $x_1(2) - 2x_2(2) = \frac{1}{2}$.

Cette dernière condition, nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$t_c^2 - \frac{3}{2} = 0, \quad (2.26)$$

qui a come solution : $t_c = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

En remplaçant les valeurs de c_1 et c_2 dans le système (2.25), on obtient

$$J(u) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2 = 2.1592.$$

Stratégie 4 :

Les équations du premier morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [0, t_c[$ sont

$$\begin{cases} x_2(t) = -t, \\ x_1(t) = -\frac{t^2}{2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Les équations du deuxième morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [t_c, T]$, sont

$$\begin{cases} x_2(t) = t + d_1, \\ x_1(t) = \frac{t^2}{2} + d_1 t + d_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons

$$d_1 = -2t_c, \quad d_2 = t_c^2.$$

Calculons t_c , tel que $x_1(2) - 2x_2(2) = \frac{1}{2}$.

Cette dernière condition, nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$t_c^2 - \frac{5}{2} = 0, \quad (2.29)$$

qui a comme solution : $t_c = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

En remplaçant les valeurs de d_1 et d_2 dans le système (2.28), on obtient

$$J(u) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2 = 4.6798.$$

Remarquons que le coût donné par la stratégie 4 est supérieur à celui trouvé dans la stratégie 3, qui est de type bang-bang. Les résultats de la méthode analytique sont représentés dans la figure 2.1. Nous avons donc déterminé la trajectoire optimale qui maximise $J(u)$ et satisfait la

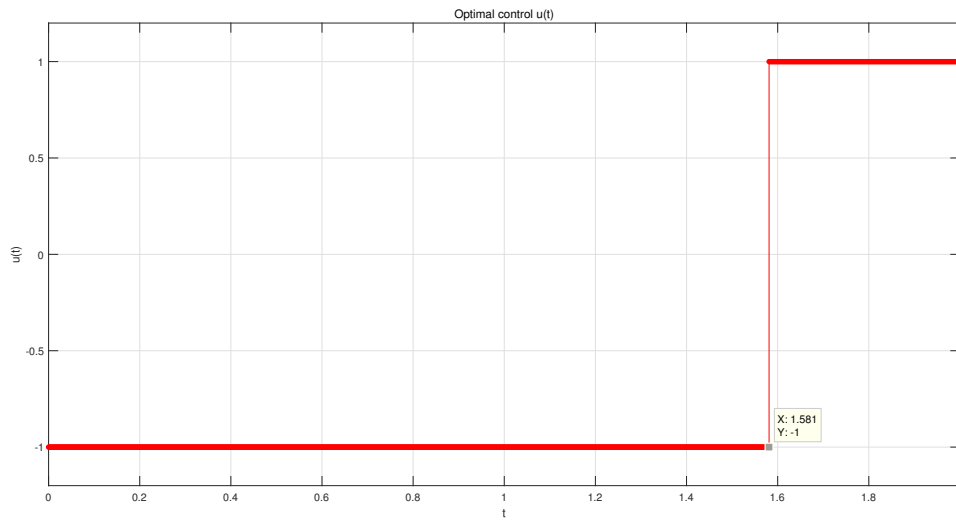


FIGURE 2.1 – Contrôle optimal $t \mapsto u(t)$.

contrainte $x_1(2) - 2x_2(2) = \frac{1}{2}$:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \sqrt{\frac{5}{2}}]; \\ 1, & t \in [\sqrt{\frac{5}{2}}, 2]; \end{cases} \quad \text{et} \quad J(u^*) = 4.6798. \quad (2.30)$$

Résolution numérique par la méthode de discrétisation d'Euler (MDE)

Pour un nombre de sous-intervalles N choisi à l'avance, on aura le pas de discrétisation $h = \frac{T}{N}$ et les instants suivants :

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T.$$

TABLE 2.1 – Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler

N	$J(u)$	T
4	0.9531	4.2404
10	2.5883	4.3870
30	3.8660	4.2876
50	4.1769	5.1379
70	4.3163	7.0501
100	4.4229	9.4013
200	4.5496	41.2159
400	4.6139	169.9548
600	4.6334	412.1255
800	4.6430	948.3575
1000	4.6441	1730.6251

L'application du schéma d'Euler pour la résolution des problèmes de Cauchy nous donne le problème de programmation quadratique concave suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J(u) = x_1(T)^2 + x_2(T)^2, \\ x_1(t_{i+1}) = x_1(t_i) + hx_2(t_i), \ x_1(0) = 0, \ i = 0, 1, \dots, N-1, \\ x_2(t_{i+1}) = x_2(t_i) + hu(t_i), \ x_2(0) = 0, \ i = 0, 1, \dots, N-1, \\ x_1(t_N) - 2x_2(t_N) = \frac{1}{2}, \\ x_1(t_i), \ x_2(t_i) \geq 0, \ i = 1, \dots, N, \\ -1 \leq u(t_i) \leq 1, \ i = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

On a implémenté avec Matlab une fonction qui permet de résoudre ce programme quadratique avec le solveur "fmincon". Cette fonction permet de trouver un minimum local pour les problèmes d'optimisation sous forme générale.

L'exécution de ce code pour différentes valeurs de N nous donne les résultats présentés dans le tableau 2.1. D'après ce tableau, on remarque que :

- 1- Pour $N \leq 50$, la solution est du type bang-bang-singulier, donc elle n'est pas optimale.
- 2- Pour $50 < N \leq 200$, la méthode de discrétisation d'Euler (MDE) donne une valeur

optimale approchée très éloignée de la valeur optimale exacte, et ce, avec des temps d'exécution petits.

- 3- Pour $N \geq 1000$, la méthode de discrétisation d'Euler converge lentement vers une valeur approchée qui est proche de la valeur optimale exacte.

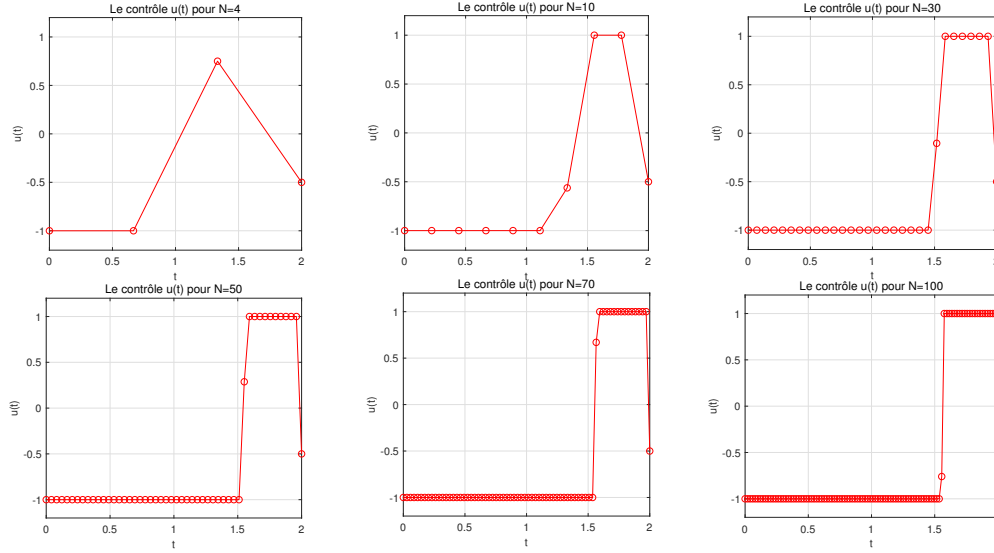


FIGURE 2.2 – Le contrôle optimal $u(t)$ pour différentes valeurs de $N \leq 100$.

Résolution numérique par la méthode de discrétisation de Cauchy (ADC)

Écrivons le problème (2.15) sous forme matricielle, on aura alors le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique suivant :

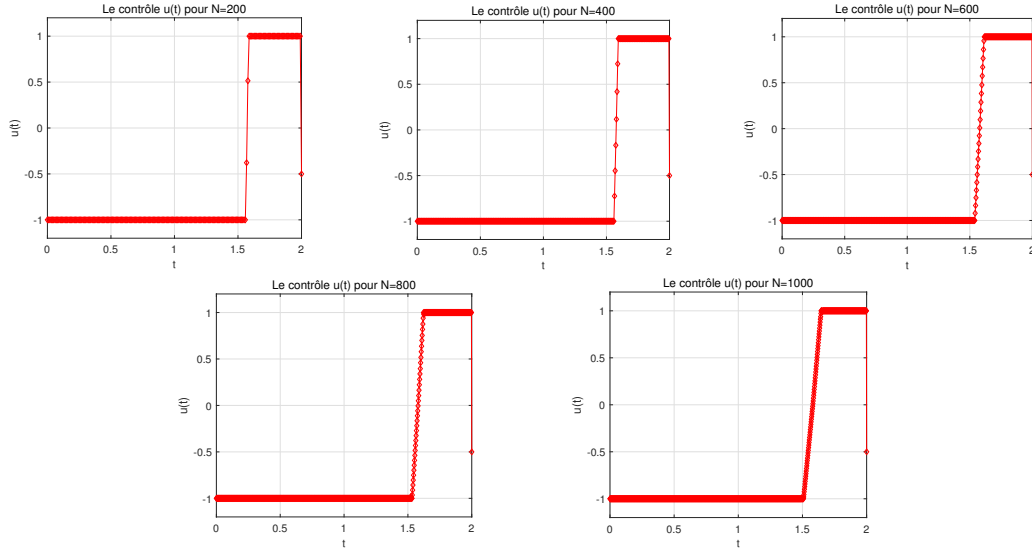
$$\begin{cases} \max J(u(t)) = x(T)'Dx(T), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ Qx(T) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, T], \quad T = 2. \end{cases} \quad (2.32)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = (1, -2).$$

La solution du problème (2.41) est donnée par :

$$x(2) = F(2)x_0 + \int_0^2 F(2)(F(t))^{-1}Bu(t)dt, \quad (2.33)$$

FIGURE 2.3 – Le contrôle optimal $u(t)$ pour différentes valeurs de $100 < N \leq 1000$.

où $F(t)$ est la résolvante, solution du système :

$$\dot{F}(t) = AF(t), \quad F(0) = I_2, \quad t \in [0, 2].$$

Donc

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\phi(t) = F(2)(F(t))^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$y = \int_0^2 \phi(t)u(t)dt.$$

Par conséquent,

$$x(2) = \int_0^2 \phi(t)u(t)dt = y. \quad (2.34)$$

En remplaçant la solution (2.34) dans le problème (2.32), nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max J(u) = \frac{1}{2}y'Dy, \\ Qy = \frac{1}{2}, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 2]. \end{cases} \quad (2.35)$$

Discrétisation

Posons $\tau^j = \tau_{j+1} = \tau_j + h$, donc nous aurons $[0, T] = \cup_{j=1}^{N-1} [\tau_j, \tau^j] \cup [\tau_N, \tau^N]$.

Calculons les vecteurs R_j , $j = 1, \dots, N$, comme suit :

$$R_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2}(\tau_{j+1} + \tau_j) + 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.36)$$

Nous fixons $w^j = u(t) = u(\tau_j)$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, N$. D'où

$$y = \int_0^T \phi(t) u(t) dt = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi(t) dt \right) w^j = \sum_{j=1}^N R_j w^j = Ru,$$

où $u = (u^1, u^2, \dots, u^N)' \in \mathbb{R}^N$ et $R = (R_1, R_2, \dots, R_N) \in \mathcal{M}_{n,N}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, nous aurons le problème de programmation quadratique suivant :

$$\begin{cases} \max_u J(u) = \frac{1}{2} u' \bar{D} u, \\ \bar{Q} u = \frac{1}{2}, \\ -1 \leq w^j \leq 1, \quad j = 1 \dots N, \end{cases} \quad (2.37)$$

où $\bar{D} = R' D R \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\bar{Q} = Q R \in \mathbb{R}^N$.

Par exemple si le nombre de sous-intervalles de discrétisation $N = 2$, on obtient le programme quadratique suivant :

$$\begin{cases} \max_u J(u) = 3.25u_1^2 + 3.5u_1u_2 + 1.25u_2^2, \\ -0.5u_1 - 1.5u_2 = \frac{1}{2}, \\ -1 \leq u_1, u_2 \leq 1. \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous avons résolu le programme quadratique concave (2.37) pour différentes valeurs de N avec la méthode d'activation de contraintes (active-set method) implémentée dans MATLAB2009b exécutée sur un PC ayant un microprocesseur Core i5, 2.40Ghz, RAM 6 GO. Nous reportons dans le tableau 2.2, pour les deux variantes ADC1 et ADC2, le temps d'exécution en secondes de la phase de discrétisation de l'algorithme (*CPU1*), le temps total d'exécution (*CPU*), ainsi que le maximum $J(u^*)$. Le contrôle optimal $u^*(t)$ est représenté graphiquement dans la figure 2.4.

D'après le tableau 2.2 et la figure 2.4, on déduit que :

TABLE 2.2 – Simulation numérique par la technique de discrétisation de Cauchy

Algorithm		ADC1		ADC2		
N	$J(u)$	CPU1	CPU	$J(u)$	CPU1	CPU
4	4.4949	1.2375	1.5877	4.4949	0.0144	0.0379
10	4.6580	1.0912	1.5039	4.6580	0.0151	0.4070
30	4.6744	1.2727	1.7029	4.6744	0.0189	0.4422
50	4.6775	1.5067	1.9564	4.6775	0.0227	0.4795
70	4.6788	1.6929	2.2048	4.6788	0.0262	0.5218
100	4.6798	2.0325	2.5614	4.6798	0.0310	0.6602

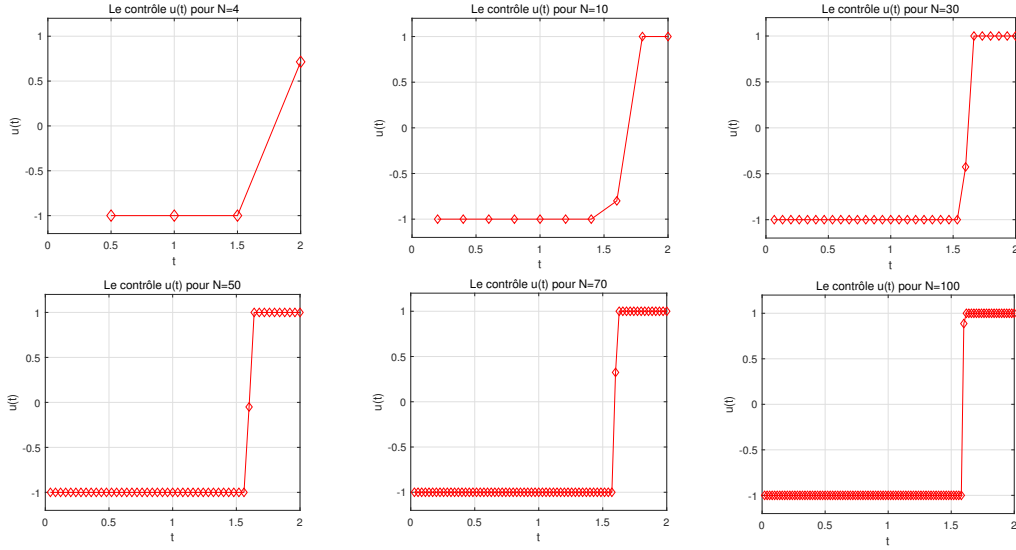
- Pour $N \leq 10$, la valeur optimale approchée est éloignée de la valeur optimale exacte.
- Pour $10 < N \leq 70$, la valeur optimale approchée est proche de la valeur optimale exacte avec une erreur de 10^{-2} .
- Pour $70 < N \leq 100$, la valeur optimale approchée est très proche de la valeur optimale exacte avec une erreur de 10^{-4} .

Comparaison numérique

Pour $N = 100$, la méthode de discrétisation de Cauchy a donné une valeur du critère de qualité $J(u)$ maximale avec une précision de 4 décimales et un temps d'exécution de 1.7688 s, tandis que la méthode de discrétisation d'Euler a donné pour $N = 1000$ une valeur maximale (4.6441) avec une erreur égale à 0,0357 et un temps d'exécution de 1730.6251 s. Cela montre que :

- La méthode de discrétisation de Cauchy est très précise et très rapide par rapport à celle d'Euler.
- La méthode de discrétisation d'Euler est moins précise que la méthode de discrétisation de Cauchy et nécessite un nombre de sous-intervalles grand pour atteindre une valeur approchée proche de la valeur optimale.

Remarque 9. Notez que la méthode d'activation de contraintes implémentée dans *Matlab2009b* ne converge pas pour des valeurs de $N \geq 200$ pour ce problème de contrôle optimal non convexe, car elle est développée pour rechercher un point KKT pour les problèmes convexes de taille

FIGURE 2.4 – Le contrôle optimal $u^*(t)$ pour différentes valeurs de N

moyenne. Donc, afin de trouver une bonne solution globale approchée pour le problème de programmation quadratique concave (2.12) lorsque $N \geq 200$, nous pouvons utiliser l'algorithme de programmation linéaire séquentielle développée dans [17] pour la résolution des programmes quadratiques non convexes.

2.4.2 Exemple 2

Considérons deux points matériels dont les équations de mouvement sont données par

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) = u_1(t), & y_1(0) = \dot{y}_1(0) = \ddot{y}_1(0) = 0, \\ \ddot{y}_2(t) = u_2(t), & y_2(0) = 5, \dot{y}_2(0) = \ddot{y}_2(0) = 0, \\ \ddot{y}_1(T) = \ddot{y}_2(T) = -6, & |u_1(t)| \leq 3, |u_2(t)| \leq 3, t \in [0, T], T = 4. \end{cases} \quad (2.39)$$

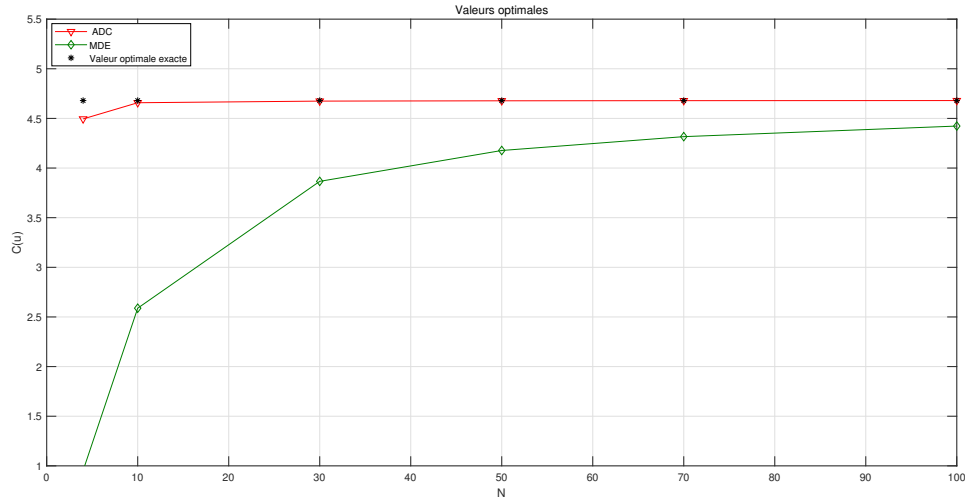
Posons $x_1 = y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$, $x_3 = \ddot{y}_1$, $x_4 = y_2$, $x_5 = \dot{y}_2$, $x_6 = \ddot{y}_2$.

Les accélérations des deux points matériels au temps terminal T vérifient :

$$x_3(T) = x_6(T) = -6.$$

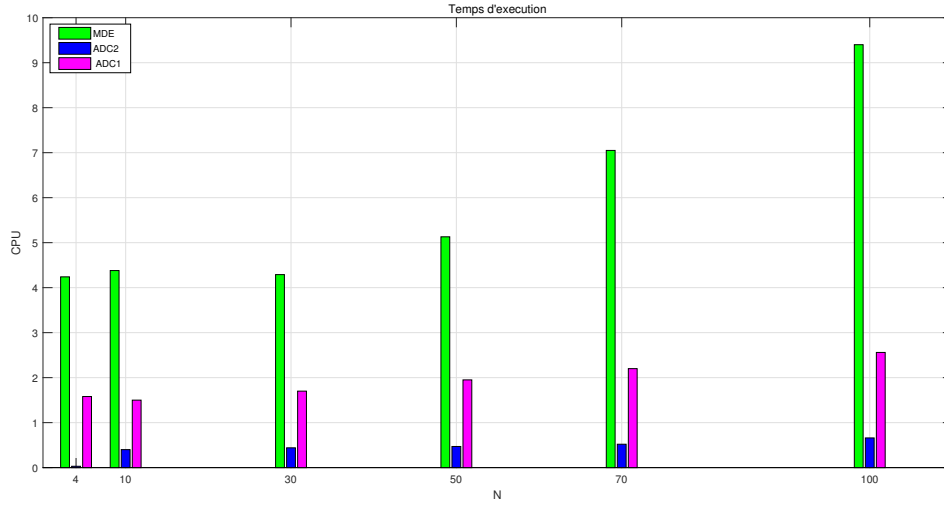
On cherche à minimiser le critère de qualité suivant :

$$J(u) = (x_1(T) - x_4(T))^2 + (x_2(T) - x_5(T))^2 + 2x_1(T) - 324x_2(T) + 64x_4(T) + 37x_5(T).$$

FIGURE 2.5 – Comparaison de $J(u)$ pour différentes valeurs de $N \leq 100$

On obtient alors le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique convexe suivant [46] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(u) = (x_1(T) - x_4(T))^2 + (x_2(T) - x_5(T))^2 + 2x_1(T) - 324x_2(T) + 64x_4(T) + 37x_5(T), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = u_1(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_5(t), \\ \dot{x}_5(t) = x_6(t), \\ \dot{x}_6(t) = u_2(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 5, \quad x_5(0) = x_6(0) = 0, \\ x_3(T) = x_6(T) = -6, \\ |u_1(t)| \leq 3, \quad |u_2(t)| \leq 3, \quad t \in [0, T], \quad T = 4. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

FIGURE 2.6 – Temps d'exécution pour différentes valeurs de $N \leq 100$

Écrivons le problème (2.40) sous forme matricielle, nous aurons alors le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique suivant :

$$\begin{cases} \min J(u(t)) = \frac{1}{2}x(T)'Dx(T) + w'x(T), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ Qx(T) = g, |u_1(t)| \leq 3, |u_2(t)| \leq 3, t \in [0, T], T = 4, \end{cases} \quad (2.41)$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

TABLE 2.3 – Simulation numérique par l'algorithme de discrétisation de Cauchy

Algorithm	ADC1			ADC2		
N	$J(u)$	$CPU1$	CPU	$J(u)$	$CPU1$	CPU
2	303	0.0540	0.0556	303	0.0538	0.0555
4	-174	0.0937	0.0964	-174	0.0925	0.0952

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 & -324 & 0 & 64 & 37 & 0 \end{pmatrix}'.$$

Le coût optimal trouvé dans [46] est $J(u^*) = -173.999843$.

Nous avons résolu le problème du contrôle optimal linéaire-quadratique en utilisant *ADC1* et *ADC2*. Pour $N = 4$, nous obtenons le coût optimal $J(u^*) = -174$ (Voir le tableau 2.3).

2.4.3 Exemple 3

Considérons le problème de contrôle optimal linéaire-quadratique concave suivant [25] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(u(t)) = -x_1(2)^2 - x_2(2)^2, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 1, \\ -2 \leq u(t) \leq 2, \quad t \in [0, 2]. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Nous avons résolu ce problème de contrôle optimal quadratique concave avec l'algorithme de discrétisation de Cauchy. Le temps d'exécution de notre algorithme est de 0.0279s et la valeur optimale du critère de qualité est de $J(u^*) = -34$, ce qui est égal à la valeur optimale trouvée dans [25].

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle méthode pour résoudre les problèmes de contrôle optimal linéaires-quadratiques. Tout d'abord, un changement de variable est effectué à l'aide de la formule de Cauchy, après la discrétisation du problème continu, un problème de

programmation quadratique est obtenu. Enfin, ce problème est résolu à l'aide de la méthode d'activation de contraintes. La méthode proposée permet de trouver une solution approchée très précise aux problèmes convexes et non convexes. Afin de comparer notre approche avec la méthode de discrétisation d'Euler, nous avons développé une implémentation avec MATLAB. Les résultats numériques obtenus pour trois problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique convexe et non-convexe qui modélisent des problèmes pratiques issus de la mécanique montrent que la nouvelle méthode directe converge rapidement vers la valeur optimale du critère de qualité trouvé par la méthode analytique.

Chapitre 3

Contrôle optimal du mouvement rectiligne d'une fusée

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons le modèle mathématique du contrôle optimal linéaire correspondant au problème de la maximisation de la vitesse d'une fusée qui se déplace avec un mouvement rectiligne [7] (Section 2). Afin de fixer la valeur du temps final, nous résolvons un autre problème appelé problème de contrôle optimal du temps minimal (Section 3). Finalement, dans la dernière section, nous résolvons le problème considéré avec quatre méthodes : la méthode analytique, la méthode de tir et deux techniques de discrétisation : la technique utilisant la formule de Cauchy et celle utilisant la formule d'Euler. Ensuite, nous comparons les résultats obtenus en effectuant plusieurs simulations numériques avec MATLAB.

3.2 Présentation et modélisation du problème

Considérons une fusée de masse m et de vitesse $v(t)$ à l'instant $t \in [0, T]$, qui passe d'une hauteur initiale $h(0)$ à une hauteur finale $h(T)$ avec un mouvement rectiligne. En utilisant les lois de la physique pour les corps à mouvement rectiligne [1, 2], on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2h}{dt^2}(t) = \frac{T_p(t)}{m} - g, \quad t \in [0, T],$$



FIGURE 3.1 – Fusée

où $h(t)$ et $T_p(t)$ représentent respectivement la distance parcourue et la poussée de la fusée à l'instant $t \in [0, T]$, $g = 9.80665 \text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. Posons $\frac{dh}{dt}(t) = v(t)$ et $w(t) = \frac{T_p(t)}{m}$. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt}(t) = v(t), \\ \frac{dv}{dt}(t) = w(t) - g, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Si le pilot n'applique aucune commande sur l'engin, alors la poussée $w(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\dot{w}(t) = \alpha w(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

où $\alpha > 0$ désigne l'inverse du temps de réponse des moteurs de la fusée à l'application du pilot. Afin de contrôler le mouvement de l'appareil, le pilot applique une force $u(t)$, $t \in [0, T]$. L'équation différentielle ordinaire (3.2) devient alors :

$$\dot{w}(t) = \alpha[w(t) - u(t)], \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

L'objectif est donc de maximiser la vitesse de l'engin qui se déplace du point initial $h(0) = 0$, à une hauteur h_1 donnée. Ceci nous conduit à la résolution du problème de contrôle optimal

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J(u, T) = v(T), \\ \dot{h}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = w(t) - g, \\ \dot{w}(t) = \alpha[w(t) - u(t)], \\ h(0) = h_0, \ v(0) = 0, \ w(0) = g, \\ h(T) = h_1, \ |u(t)| \leq 1, \ t \in [0, T], \ T \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Ce problème s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J(u, T) = c'x(T), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r, \\ x(0) = x_0, \ Qx(T) = h_1, \ |u(t)| \leq 1, \ t \in [0, T], \ T \text{ libre,} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\text{où } x(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \ r = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = (1, 0, 0) \text{ et } c' = (0, 1, 0).$$

Le symbole "''" désigne l'opération de transposition.

La matrice de Kalman est donnée par :

$$K = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ -\alpha & -\alpha^2 & -\alpha^3 \end{pmatrix}, \ \det(K) = \alpha^3 \neq 0.$$

Le rang de la matrice K est $\text{Rang}(K) = 3$, donc le système est contrôlable [64].

Afin de fixer le temps final, nous résolvons le problème du temps minimal décrit dans la section suivante.

3.3 Problème du temps minimal

Nous calculons la valeur du temps final T , qui sera utilisée dans le problème (3.4), en résolvant le problème du temps minimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(u, T) = \int_0^T dt, \\ \dot{h}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = w(t) - g, \\ \dot{w}(t) = \alpha[w(t) - u(t)], \\ h(0) = 0, \ v(0) = 0, \ w(0) = g, \\ |u(t)| \leq 1, \ h(T) = 600, \ t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Afin de résoudre le problème (3.6), nous utilisons le principe du maximum de Pontryagin. Notons par $p(t) = (p_h(t), p_v(t), p_w(t))$ le vecteur adjoint associé au problème (3.6), dont le Hamiltonien est donné par :

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = p_h(t)v(t) + p_v(t)[w(t) - g] + \alpha p_w(t)[w(t) - u(t)] + p^0. \quad (3.7)$$

Comme notre problème consiste à minimiser la fonction objectif J et maximiser le Hamiltonien H , on pose sans perte de généralités $p^0 = -1$.

Les composantes du vecteur adjoint sont solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_h(t) = -\frac{\partial H}{\partial h} = 0, \\ \dot{p}_v(t) = -\frac{\partial H}{\partial v} = -p_h(t), \\ \dot{p}_w(t) = -\frac{\partial H}{\partial w} = -p_v(t) - \alpha p_w(t), \ t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Du système (3.8), on en déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} p_h(t) = \lambda_1, \\ p_v(t) = -\lambda_1 t + \lambda_2, \\ p_w(t) = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 \lambda_3 e^{-\alpha t} + \alpha \lambda_1 t - \lambda_1 - \alpha \lambda_2), \alpha > 0, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, 3, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

avec

$$p_h(0) = \lambda_1, \ p_v(0) = \lambda_2, \ p_w(0) = \frac{1}{\alpha^2}(-\lambda_1 - \alpha \lambda_2 + \alpha^2 \lambda_3). \quad (3.10)$$

$$H(0, x(0), p(0), p^0, u(0)) = \alpha p_w(0)[g - u(0)] - 1. \quad (3.11)$$

Le système dynamique est autonome, alors le Hamiltonien est constant pour tout $t \in [0, T]$. Par conséquent, on aura

$$H(0, x(0), p(0), p^0, u(0)) = H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)). \quad (3.12)$$

Comme le temps final T est libre, d'après les conditions de transversalité, on a :

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0. \quad (3.13)$$

Des relations (3.12) et (3.13), on obtient

$$H(0, x(0), p(0), p^0, u(0)) = \alpha p_w(0)[g - u(0)] - 1 = 0.$$

D'où

$$p_w(0) = \frac{1}{\alpha[g - u(0)]} > 0. \quad (3.14)$$

Le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), p^0, u^*(t)) &= \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ &= p_h(t)v(t) + p_v(t)[w(t) - g] + \alpha p_w(t)w(t) - 1 \\ &\quad + \alpha \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} [-p_w(t)u(t)]. \end{aligned}$$

Le contrôle maximisant le Hamiltonien est :

$$u^*(t) = -\text{signe}(p_w(t)). \quad (3.15)$$

D'après (3.14) et (3.15), on aura $u^*(0) = -1$.

L'objectif est donc de déterminer le temps minimal, optimum du problème (3.6). Pour ce faire, on a utilisé la méthode de tir. C'est une méthode rapide et de haute précision qui ne nécessite pas d'hypothèses sur la structure du contrôle. La méthode de tir comprend trois étapes principales [50, 56] :

Étape 1 : Formez un problème aux limites à l'aide des équations du modèle et des équations du vecteur adjoint, ainsi que des conditions de transversalité.

Étape 2 : Déterminez la fonction de tir.

Étape 3 : Résoudre un système d'équations non linéaires.

Si l'on fixe le temps de réponse des moteurs à $0.7s$, on trouve $\alpha = 1.42$ et nous utilisons les données suivantes pour résoudre notre problème : $h_0 = 0m$; $h_1 = 600m$ et $g = 9.80665m.s^{-2}$.

Les résultats obtenus sont montrés dans la figure 3.2. Du graphe du contrôle, on déduit que

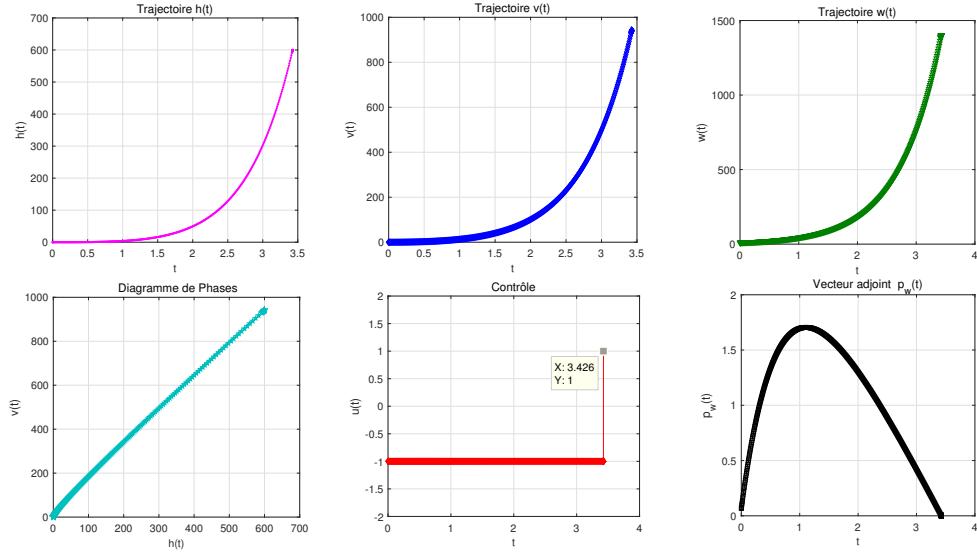


FIGURE 3.2 – Résultats du problème du temps minimal

$$T_{min} = 3.43s.$$

Connaissant ce temps minimal, notre temps final doit toujours être choisi légèrement plus grand que T_{min} . Pour cela, on a choisi $T = 3,5s$.

3.4 Résolution du problème de la vitesse maximale d'une fusée

Dans cette section, on prend comme temps final, le temps T trouvé dans la section précédente, c'est-à-dire $T = 3.5s$. Nous résolvons d'abord le problème (3.4) analytiquement, puis nous le résolvons numériquement, et ce, avec trois méthodes, à savoir : la méthode de tir, la méthode de discrétisation de Cauchy et la méthode de discrétisation d'Euler.

3.4.1 Résolution analytique

Dans cette partie, nous résolvons le problème (3.4) théoriquement en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.

Le Hamiltonien du problème (3.4) est donné par :

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = p_h(t)v(t) + p_v(t)[w(t) - g] + \alpha p_w(t)[w(t) - u(t)]. \quad (3.16)$$

Les composantes du vecteur adjoint sont des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_h(t) = 0, \\ \dot{p}_v(t) = -p_h(t), \\ \dot{p}_w(t) = -p_v(t) - \alpha p_w(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.17)$$

Du système (3.17), on en déduit que

$$\begin{cases} p_h(t) = \lambda_1, \\ p_v(t) = -\lambda_1 t + \lambda_2, \\ p_w(t) = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 \lambda_3 e^{-\alpha t} + \alpha \lambda_1 t - \lambda_1 - \alpha \lambda_2), \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.18)$$

avec

$$p_h(0) = \lambda_1, \quad p_v(0) = \lambda_2, \quad p_w(0) = \frac{1}{\alpha^2}(-\lambda_1 - \alpha \lambda_2 + \alpha^2 \lambda_3). \quad (3.19)$$

Le maximum du Hamiltonien (3.16) est donné par :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), u^*(t)) &= \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} H(t, x(t), p(t), u(t)) \\ &= p_h(t)v(t) + p_v(t)[w(t) - g] + \alpha p_w(t)w(t) \\ &\quad + \alpha \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} [-p_w(t)u(t)]. \end{aligned}$$

Le contrôle maximisant le Hamiltonien est

$$u^*(t) = -\text{signe}(p_w(t)). \quad (3.20)$$

Les conditions de transversalité permettent d'avoir des conditions sur les vecteurs adjoints lorsque le temps final T est fixé [64]. Le vecteur $x(T)$ doit vérifier la contrainte $600 - Qx(T) = 0$.

Les conditions de transversalité sont données par :

$$-p_h(T) - \frac{\partial g(T, x(T))}{\partial h(T)} + \frac{\partial(600 - Qx(T))}{\partial h(T)} b = 0, \quad (3.21)$$

$$-p_v(T) - \frac{\partial g(T, x(T))}{\partial v(T)} + \frac{\partial(600 - Qx(T))}{\partial v(T)} b = 0, \quad (3.22)$$

$$-p_w(T) - \frac{\partial g(T, x(T))}{\partial w(T)} + \frac{\partial(600 - Qx(T))}{\partial w(T)} b = 0, \quad (3.23)$$

où $g(T, x(T)) = -v(T)$ et $b \in \mathbb{R}$.

D'où on obtient les conditions aux limites suivantes :

$$p_h(T) = -b, \quad p_v(T) = 1, \quad p_w(T) = 0. \quad (3.24)$$

En utilisant les conditions aux limites (3.24) et les relations (3.18), on obtient :

$$\begin{cases} p_h(t) = -b, \\ p_v(t) = b(t - T) + 1, \\ p_w(t) = \frac{1}{\alpha^2}((\alpha - b)(e^{-\alpha(t-T)} - 1) - \alpha b(t - T)), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.25)$$

Puisque le contrôle optimal est égal au signe opposé du vecteur adjoint $p_w(t)$, alors les temps de commutation sont donnés par les racines de l'équation $p_w(t) = 0$. Comme A est une matrice d'ordre 3 et toutes ses valeurs propres sont réelles, le problème admet au plus une commutation $t_c < T$ [64].

Afin de choisir la stratégie optimale, examinons les différentes stratégies possibles suivantes :

- Stratégie 1 : $u(t) = 1, \forall t \in [0, T]$;
- Stratégie 2 : $u(t) = -1, \forall t \in [0, T]$;
- Stratégie 3 : $u(t) = 1$ pour $t \in [0, t_c[$, puis $u(t) = -1$, pour $t \in [t_c, T]$;
- Stratégie 4 : $u(t) = -1$ pour $t \in [0, t_c[$, puis $u(t) = 1$, pour $t \in [t_c, T]$.

Stratégie 1 :

Nous avons, $\dot{w}(t) = \alpha[w(t) - 1]$, ce qui implique que

$$\begin{cases} w(t) = c_1 e^{\alpha t} + 1, \\ v(t) = \frac{c_1}{\alpha} e^{\alpha t} + (1 - g)t + c_2, \\ h(t) = \frac{c_2}{\alpha^2} e^{\alpha t} + \frac{(1-g)}{2} t^2 + c_2 t + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.26)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} w(t) = (g-1)e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = (g-1) \left(\frac{1}{1.42} e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42} \right), \\ h(t) = (g-1) \left(\frac{1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{1.42} t - \frac{1}{1.42^2} \right). \end{cases} \quad (3.27)$$

Pour $t = T$, on aura $h(T) = 549.0243 < 600$, donc la stratégie 1 n'est pas réalisable.

Stratégie 2 :

Nous avons $\dot{w}(t) = \alpha[w(t) + 1]$, ce qui implique que

$$\begin{cases} w(t) = d_1 e^{\alpha t} - 1, \\ v(t) = \frac{d_1}{\alpha} e^{\alpha t} - (1+g)t + d_2, \\ h(t) = \frac{d_1}{\alpha^2} e^{\alpha t} - \frac{(1+g)}{2} t^2 + d_2 t + d_3, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.28)$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} w(t) = (g+1)e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = (g+1) \left(\frac{1}{1.42} e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42} \right), \\ h(t) = (g+1) \left(\frac{1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{1.42} t - \frac{1}{1.42^2} \right). \end{cases} \quad (3.29)$$

Pour $t = T$, on aura $h(T) = 673.7083 > 600$, donc la stratégie 2 n'est pas réalisable.

Stratégie 3 :

Les équations du premier morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [0, t_c]$, sont

$$\begin{cases} w(t) = (g-1)e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = (g-1) \left(\frac{1}{1.42} e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42} \right), \\ h(t) = (g-1) \left(\frac{1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{1.42} t - \frac{1}{1.42^2} \right). \end{cases} \quad (3.30)$$

Les équations du deuxième morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [t_c, T]$, sont

$$\begin{cases} w(t) = \beta_1 e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = \frac{\beta_1}{1.42} e^{1.42t} - (g+1)t + \beta_2, \\ h(t) = \frac{\beta_1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{(g+1)}{2} t^2 + \beta_2 t + \beta_3, \quad \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons

$$\beta_1 = (g-1) + 2e^{-1.42t_c}, \quad \beta_2 = 2t_c - \frac{(g+1)}{1.42}, \quad \beta_3 = -t_c^2 + \frac{2}{1.42} t_c - \frac{(g+1)}{1.42^2}.$$

Calculons t_c tel que $h(T) = 600$.

Cette dernière condition, nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$142.86e^{-1.42t_c} - t_c^2 + 8.41t_c - 69.15 = 0. \quad (3.32)$$

La solution numérique de cette dernière équation est donnée par : $t_c = 0.557s$.

En remplaçant les valeurs de β_1 et β_2 dans la deuxième équation du système (3.31), on obtient

$$J(u, T) = v(T) = 940.8949 \text{ m.s}^{-1}.$$

Stratégie 4 :

Les équations du première morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [0, t_c]$ sont

$$\begin{cases} w(t) = (g + 1)e^{1.42t} - 1, \\ v(t) = (g + 1) \left(\frac{1}{1.42}e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42} \right), \\ h(t) = (g + 1) \left(\frac{1}{1.42^2}e^{1.42t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{1.42}t - \frac{1}{1.42^2} \right). \end{cases} \quad (3.33)$$

Les équations du deuxième morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [t_c, T]$, sont

$$\begin{cases} w(t) = \gamma_1 e^{\alpha t} + 1, \\ v(t) = \frac{\gamma_1}{\alpha} e^{\alpha t} + (1 - g)t + \gamma_2, \\ h(t) = \frac{\gamma_1}{\alpha^2} e^{\alpha t} + \frac{(1-g)}{2}t^2 + \gamma_2 t + \gamma_3, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons

$$\gamma_1 = (g + 1) - 2e^{-1.42t_c}, \quad \gamma_2 = -2t_c - \frac{(g - 1)}{1.42}, \quad \gamma_3 = t_c^2 - \frac{2}{1.42}t_c - \frac{(g - 1)}{1.42^2}.$$

Donc calculons t_c tel que $h(T) = 600$.

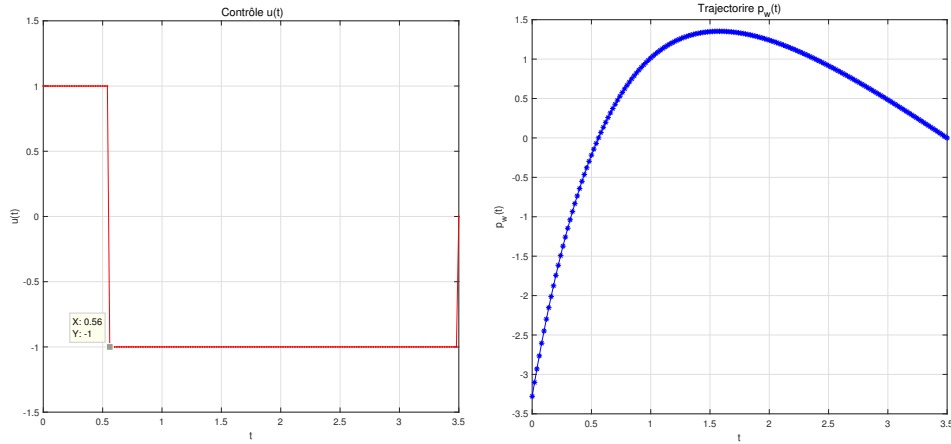
Cette dernière condition nous permet d'obtenir l'équation suivante :

$$142.8555e^{-1.42t_c} + t_c^2 + 8.4085t_c + 91.8798 = 0. \quad (3.35)$$

La solution numérique de cette dernière équation est donnée par : $t_c = 0.331s$.

D'après le système (3.34), la valeur optimale du critère de qualité du problème (3.4) est égale à

$$J(u, T) = v(T) = 931.6531 \text{ m.s}^{-1}.$$

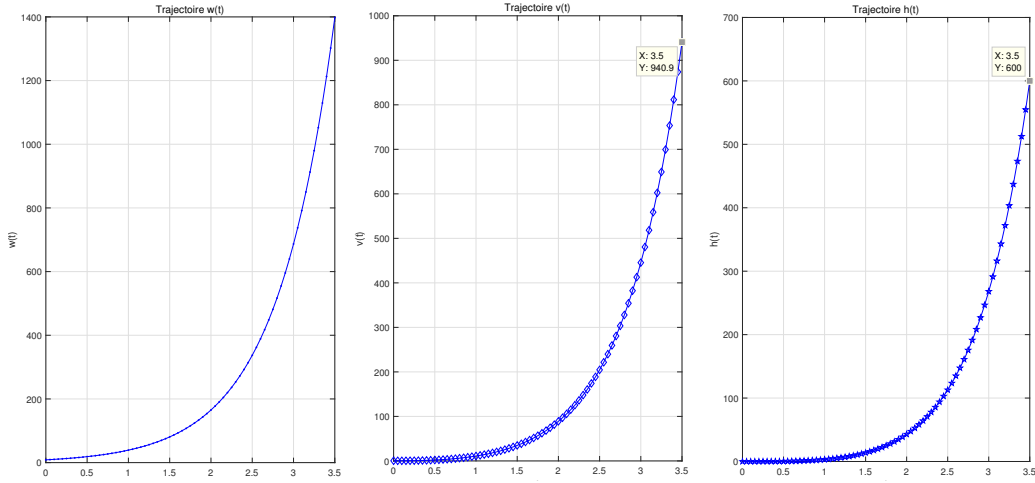
FIGURE 3.3 – Graphes de $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto p_w(t)$

Remarquons que la valeur optimale du critère de qualité donnée par la stratégie 3 est supérieur à celui trouvé par la stratégie 4, et qui est du type bang-bang. Les résultats théoriques sont tracés dans la figure 3.3. Nous avons donc déterminé par le principe du maximum de Pontryagin une trajectoire optimale qui maximise $v(T)$ et qui vérifie la condition aux limites $h(T) = 600$. Ce contrôle optimal est donné par :

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.55[; \\ -1, & t \in [0.55, 3.5]; \end{cases} \quad (3.36)$$

et

$$J(u^*, T) = v^*(T) = 940.8949 \text{ m.s}^{-1}.$$

FIGURE 3.4 – Trajectoires optimales $t \mapsto h(t)$, $t \mapsto v(t)$ et $t \mapsto w(t)$

3.4.2 Résolution numérique par la méthode de tir

En regroupant les résultats trouvés précédemment par le principe du maximum de Pontryagin, on aura le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) - g, \\ \dot{x}_3(t) = \alpha[x_3(t) + \text{signe}(p_3(t))], \\ \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_3(t) = -p_2(t) - \alpha p_3(t), \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = g, \\ p_1(0) = \lambda_1, p_2(0) = \lambda_2, p_3(0) = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 \lambda_3 - \lambda_1 - \alpha \lambda_2), \alpha > 0, \\ x_1(T) = 600, p_1(T) = -b, p_2(T) = 1, p_3(T) = 0. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

où

$$x(t) = (x_j(t), j = 1, \dots, 3) = (h(t), v(t), w(t)),$$

et

$$p(t) = (p_j(t), j = 1, \dots, 3) = (p_h(t), p_v(t), p_w(t)).$$

Nous construisons la fonction de tir suivante :

$$\begin{aligned} G : \quad \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (p(0), p(T)) &\longmapsto G(p(0), p(T)), \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec

$$G(p(0), p(T)) = \begin{pmatrix} p_1(0) - \lambda_1 \\ p_2(0) - \lambda_2 \\ p_3(0) - \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2 \lambda_3 - \lambda_1 - \alpha \lambda_2) \\ p_1(T) + b \\ p_2(T) - 1 \\ p_3(T) - 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le problème (3.37) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) - g, \\ \dot{z}_3(t) = \alpha[z_3(t) + \text{signe}(z_6(t))], \\ \dot{z}_4(t) = 0, \\ \dot{z}_5(t) = -z_4(t), \\ \dot{z}_6(t) = -z_5(t) - \alpha z_6(t), \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad z_3(0) = g, \\ z_1(T) = h_1, \quad G(p(0), p(T)) = 0. \end{array} \right. \quad (3.39)$$

où $z(t) = (z_j, j = 1, \dots, 6) = (x(t), p(t))$.

Nous déterminons la solution numérique du système non linéaire $G(p(0), p(T)) = 0$ en utilisant la méthode de Newton. En mettant en oeuvre cette méthode avec Matlab, nous retrouvons les résultats tracés dans la figure 3.5.

Ces résultats montrent que le temps de commutation est $t_c = 0,557\text{s}$, la vitesse maximale est $v^*(T) = 940,8949 \text{ m.s}^{-1}$. Le temps d'exécution de la méthode de tir est $t = 1.9781\text{s}$. Remarquons que la méthode de tir a obtenu les mêmes résultats que ceux de la méthode analytique en un temps très court. Ceci montre que la méthode de tir est rapide et donne des résultats précis pour le problème étudié.

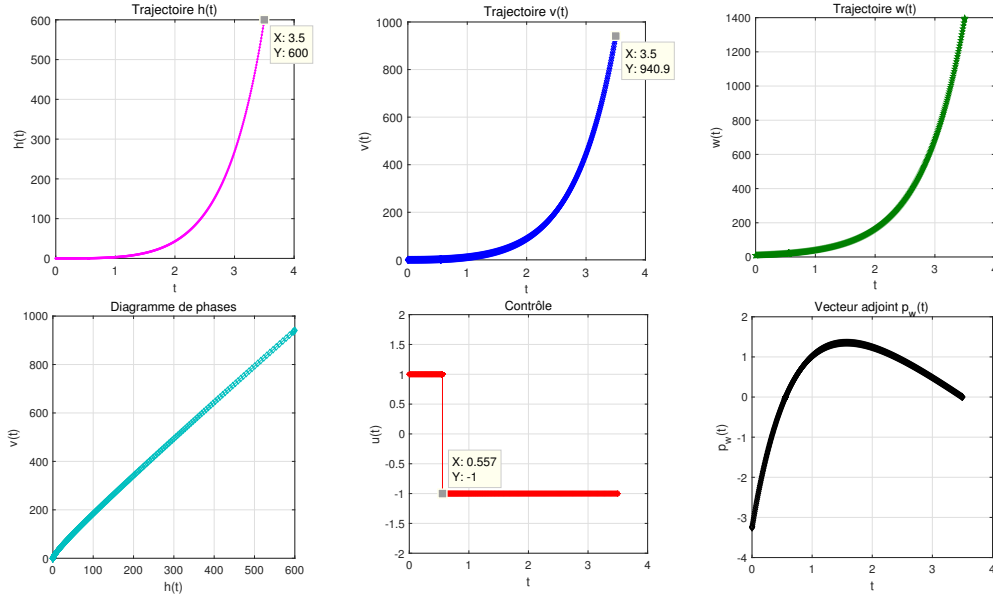


FIGURE 3.5 – Résultats de la méthode de tir

3.4.3 Résolution numérique par la méthode de discrétisation de Cauchy

Pour un nombre de sous-intervalles de discrétisation N choisi à l'avance, on calcule le pas de discrétisation $\theta = \frac{T}{N}$.

La solution du système dynamique du problème (3.4) est donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)(F(s))^{-1}[Bu(s) + r(s)]ds, t \in [0, T], \quad (3.40)$$

où $F(t)$ est la résolvante, solution du système :

$$\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_3, t \in [0, T]. \quad (3.41)$$

La solution du système (3.41) est donnée par :

$$F(t) = \exp(tA), t \in [0, T]. \quad (3.42)$$

D'où

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0.4959(e^{1.42t} - 1) - 0.7042t \\ 0 & 1 & 0.7042(e^{1.42t} - 1) \\ 0 & 0 & e^{1.42t} \end{pmatrix},$$

$$F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0.4959(e^{-1.42t} - 1) + 0.7042t \\ 0 & 1 & 0.7042(e^{-1.42t} - 1) \\ 0 & 0 & e^{-1.42t} \end{pmatrix},$$

$$F(T) = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 & 68.467 \\ 0 & 1 & 100.7232 \\ 0 & 0 & 144.0269 \end{pmatrix}, t \in [0, T].$$

En utilisant cette dernière solution, le problème initial (3.4) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \max_{u(t)} J(u(t)) = J_0 + c'y, \\ Qy = \bar{g}, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, t \in [0, T], \end{cases} \quad (3.43)$$

où

$$J_0 = c'(v + z), \quad y = \int_0^T \phi(t)u(t)dt, \quad \bar{g} = h_1 - Qz,$$

avec

$$\phi(t) = F(T)F(t)^{-1}B, \quad \psi(t) = F(T)F(t)^{-1}r, \quad z = \int_0^T \psi(t)dt, \quad v = F(T)x_0.$$

Posons $\tau_{j+1} = \tau^j$, avec $\tau^j = \tau_j + \theta$, ce qui implique que

$$[0, T] = \cup_{j=1}^{N-1} [\tau_j, \tau^j] \cup [\tau_N, \tau^N].$$

Nous calculons les nombres C_j et X_j comme suit :

$$R_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \phi(t)dt, \quad j = 1, \dots, N.$$

On pose

$$u^j(t) = u(\tau_j) = u^j \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, T], \quad j = 1 \dots N.$$

Ainsi, nous aurons

$$y = \int_0^T \phi(t)u(t)dt = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\tau_j}^{\tau^j} \phi(t)dt \right) u^j = \sum_{j=1}^N R_j u^j = Ru,$$

$$z_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \psi(t)dt, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\bar{g} = h_1 - Q(v - \sum_{j=1}^N z_j).$$

En utilisant les dernières équations, on obtient le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_u J(u) = J_0 + \sum_{j=1}^N C_j u_j, \\ \sum_{j=1}^N X_j u_j = \bar{g}, \\ -1 \leq u_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

où

$$C_j = c' R_j \text{ et } X_j = Q R_j.$$

Nous avons résolu ce programme linéaire pour différentes valeurs de N avec la méthode des points intérieurs implémentée dans MATLAB2009b exécuté sur un PC ayant un microprocesseur Core i5, 2.40Ghz, RAM 6 GO.

Le temps d'exécution de l'algorithme de discrétisation de Cauchy T_1 , le temps d'exécution de la méthode des points intérieurs pour la résolution du programme linéaire T_2 , le temps d'exécution total $T = T_1 + T_2$, le nombre d'itérations NIT ainsi que la vitesse maximale au temps final $v(T)$ pour différentes valeurs de N , sont présentés dans le tableau 3.1.

Remarquons que la technique de discrétisation de Cauchy a trouvé la solution optimale calculée analytiquement avec 2 décimales précises en 21.36 s et 4 décimales précises en 506.38 s. Ceci montre que cette méthode peut donner des résultats précis mais en un temps d'exécution important.

3.4.4 Résolution numérique par la méthode de discrétisation d'Euler

Pour un nombre de sous-intervalles N choisi à l'avance, on aura le pas de discrétisation $\theta = \frac{T}{N}$ et les instants suivants :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

TABLE 3.1 – Simulation numérique par la technique de discrétisation de Cauchy

N	$v(T)$	NIT	T_1	T_2	T
10	940.7414	6	5.9679	0.2645	6.2342
50	940.8939	8	21.1047	0.2557	21.3604
100	940.8944	8	41.5202	0.2535	41.7788
150	940.8946	8	61.7943	0.2584	62.0527
200	940.8947	8	78.0943	0.2656	78.3599
500	940.8948	8	228.3542	0.2671	228.6218
800	940.8948	9	421.2051	0.2825	421.4875
900	940.8949	9	505.9931	0.3897	506.3828
1000	940.8949	9	544.6028	0.4181	545.0209
2000	940.8949	10	1584.1246	0.2918	1584.4317

L'application du schéma d'Euler pour la résolution des problèmes de Cauchy nous donne le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J(u, T) = v(T), \\ h(t_{i+1}) = h(t_i) + \theta v(t_i), \quad h(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ v(t_{i+1}) = v(t_i) + \theta[w(t_i) - g], \quad v(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ w(t_{i+1}) = w(t_i) + \alpha\theta[w(t_i) - u(t_i)], \quad w(0) = g, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ h(t_N) = 600, \quad h(t_j) \geq 0, \quad v(t_j) \geq 0, \quad w(t_j) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ -1 \leq u(t_i) \leq 1, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

En posant $\beta = (1 + \alpha\theta)$, les contraintes du problème précédent peuvent s'écrire aussi comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(t_{i+1}) - h(t_i) - \theta v(t_i) = 0, \quad h(0) = 0, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ v(t_{i+1}) - v(t_i) - \theta w(t_i) = -\theta g, \quad v(0) = 0, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ w(t_{i+1}) - \beta w(t_i) + \alpha\theta u(t_i) = 0, \quad w(0) = g, \quad i = 0, \dots, N-1, \\ h(t_N) = 600, \\ h(t_j) \geq 0, \quad v(t_j) \geq 0, \quad w(t_j) \geq 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ -1 \leq u(t_j) \leq 1, \quad j = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Posons

$$X = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,N}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,N}, x_{3,1}, x_{3,2}, \dots, x_{3,N}, u_0, u_1, \dots, u_{N-1}),$$

où

$$x_{1,j} = h(t_j), \quad x_{2,j} = v(t_j), \quad x_{3,j} = w(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad u_j = u(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

avec $x_{1,0} = 0$, $x_{2,0} = 0$, $x_{3,0} = g$.

Après l'écriture du problème (3.45) sous la forme matricielle, nous obtenons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } F(X) = C'X, \\ AX = b, \\ L \leq X \leq U, \end{cases} \quad (3.47)$$

où $A \in \mathcal{M}_{3N+1, 4N}$, $b \in \mathbb{R}^{3N+1}$ et $X, L, U, C \in \mathbb{R}^{4N}$, avec

$$L_j = -\infty, \quad U_j = +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, 3N, \quad L_i = -1, \quad U_i = 1, \quad i = 3N+1, \dots, 4N.$$

Par exemple pour $N = 3$, on a

$$X = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, u_0, u_1, u_2)' \in \mathbb{R}^{12}.$$

Le système (3.46) s'écrit alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_{1,1} = 0, \\
 x_{1,2} - x_{1,1} - \theta x_{2,1} = 0, \\
 x_{1,3} - x_{1,2} - \theta x_{2,2} = 0, \\
 x_{2,1} = -\theta g, \\
 x_{2,2} - x_{2,1} - \theta x_{3,1} = -\theta g, \\
 x_{2,3} - x_{2,2} - \theta x_{3,2} = -\theta g, \\
 x_{3,1} + \alpha \theta u_0 = \beta g, \\
 x_{3,2} - \beta x_{3,1} + \alpha \theta u_1 = 0, \\
 x_{3,3} - \beta x_{3,2} + \alpha \theta u_2 = 0. \\
 x_{1,3} = h_1 = 600, \\
 x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \\
 -1 \leq u_j \leq 1, \quad j = 0, 1, 2.
 \end{array} \right. \quad (3.48)$$

$$A = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 0 & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \theta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 1 & 0 & 0 & \alpha \theta & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 1 & 0 & 0 & \alpha \theta \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\theta g \\
 -\theta g \\
 -\theta g \\
 \beta g \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 600
 \end{pmatrix},$$

$$C' = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$L' = (-\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -\infty, -1, -1, -1),$$

$$U' = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +1, +1, +1).$$

Nous avons également résolu le programme linéaire (3.47) avec la méthode des points intérieurs de MATLAB. Les résultats obtenus (temps d'exécution de la méthode des points

TABLE 3.2 – Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler

N	$v(T)$	NIT	T
200	943.7800	12	0.0092
500	942.2125	12	0.0464
800	941.7509	11	0.1007
1200	941.4787	11	0.1726
2000	941.2552	31	1.6544
3000	941.1352	25	1.5569

intérieurs T , nombre d'itérations NIT et la vitesse maximale $v(T)$) sont présentés dans le tableau 3.2.

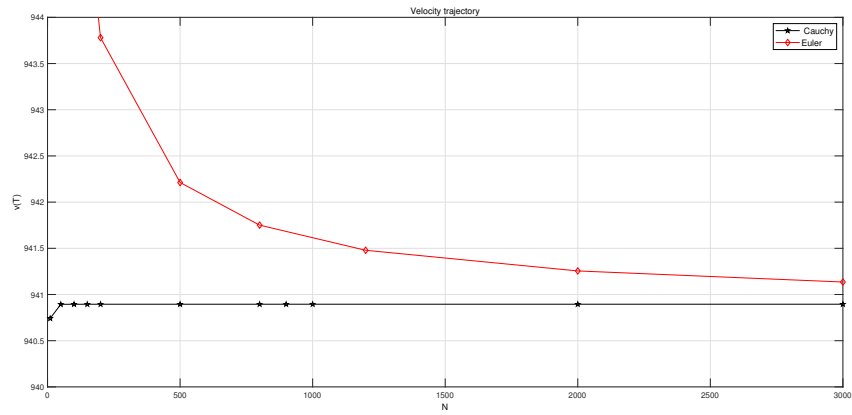
D'après le tableau 3.2, on peut remarquer que la méthode de discrétisation d'Euler est très rapide. Cependant, elle ne peut pas atteindre la précision souhaitée.

3.4.5 Comparaison numérique

Les vitesses optimales trouvées par les trois méthodes sont presque similaires, néanmoins les temps d'exécution de ces méthodes sont largement différents. Pour $N = 900$, la méthode de discrétisation de Cauchy a donné la vitesse maximale avec une précision de 4 décimales et un temps d'exécution $T = 506.3828s$, tandis que la méthode discrétisation d'Euler a donné pour $N = 3000$ une vitesse optimale avec une erreur égale à 0.24, avec un temps d'exécution $T = 1.5569s$. Ceci montre que la méthode de Cauchy est très précise mais lente et la méthode d'Euler est très rapide mais moins précise. Notons également que la méthode de tir a donné une vitesse optimale avec une grande précision et a nécessité un temps d'exécution très court $T = 1.97s$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu un problème pratique en aéronautique en le formulant sous forme d'un problème de contrôle optimal linéaire. Pour la résolution théorique, on a utilisé le principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

FIGURE 3.6 – Comparaison numérique $N \mapsto v(T)$.

Numériquement, le problème considéré est résolu avec la méthode indirecte (méthode de tir) et deux techniques de discrétisation (technique utilisant la formule de Cauchy et celle utilisant la formule d'Euler). Les résultats trouvés sont presque identiques, mais on a remarqué une large différence dans les temps d'exécution des trois méthodes.

Chapitre 4

Contrôle optimal du mouvement non rectiligne d'une fusée

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation et la résolution du problème de maximisation du décalage latéral d'une fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale, où la commande représente l'angle d'inclinaison de la fusée. Deux modèles sont considérés : dans le premier modèle, on suppose que la fusée a une masse constante [5, 8] et dans le second, on suppose que la masse est variable.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, en utilisant les notions de physique (deuxième loi de Newton), nous modélisons le problème sous la forme d'un problème de contrôle optimal non linéaire. La section 3 est consacrée à la résolution du problème modélisé, en premier lieu théoriquement, en utilisant le principe du maximum de Pontryagin, puis numériquement en utilisant la méthode de tir et la méthode de discrétisation d'Euler.

Dans la dernière section, nous considérons le problème de maximisation du décalage latéral d'une fusée ayant une masse variable, se déplaçant avec un mouvement non rectiligne. Nous modélisons le problème sous forme d'un problème de contrôle optimal non linéaire, puis nous le résolvons avec la méthode de tir.

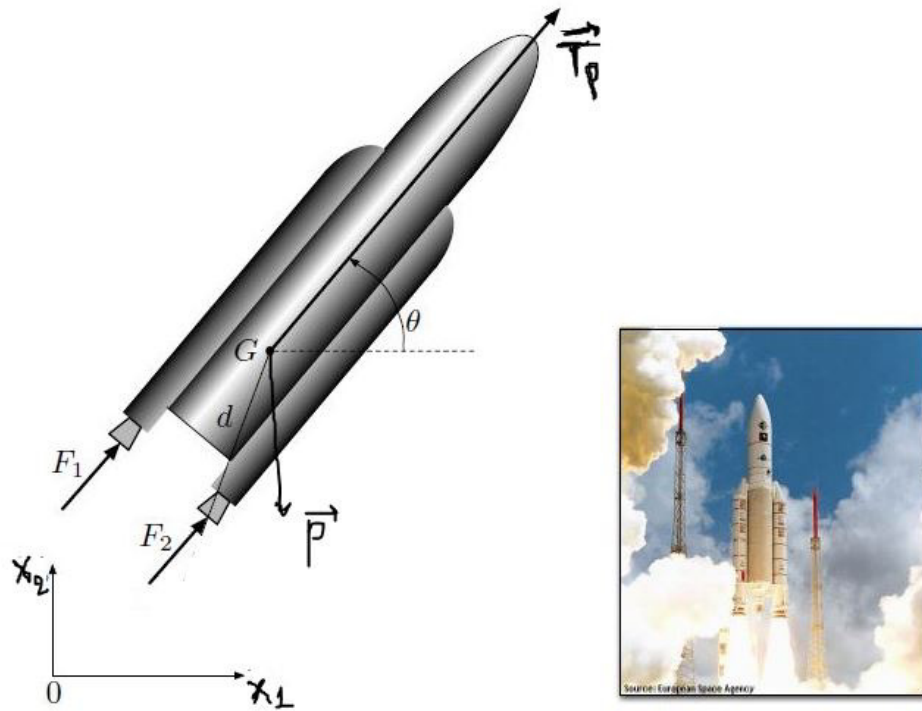


FIGURE 4.1 – Mouvement non rectiligne d'une fusée

4.2 Mouvement non rectiligne d'une fusée avec une masse constante

4.2.1 Position du problème

Considérons une fusée à masse constante m qui se déplace d'un point M_0 à un point final M_f (cible), dans un repère cartésien. On note $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la position de la fusée au temps $t \in [0, T]$, T fixé ($x_2(t)$ étant l'altitude) et $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ sa vitesse. Les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_2(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Soit $T_p(t)$ et $\theta(t)$ la poussée et l'angle d'inclinaison (l'angle de gîte) de la fusée respectivement à l'instant $t \in [0; T]$. On a

$$\vec{T}_p = \vec{u} \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

où u est un nombre réel positif représentant le module de la force. La terre est supposée plate. Pour simplifier les calculs, on a négligé les forces aérodynamiques et on a supposé que l'accélération de la pesanteur g est constante ($g = 9.80665 \text{ m.s}^{-2}$).

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$ (la somme des forces extérieures est égale à la masse multipliée par l'accélération), on obtient

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} + \vec{T}_p \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{T}_p}{m}.$$

Par projection sur l'axe (Ox_1) , on obtient

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{u}{m} \cos(\theta(t)),$$

Par projection sur l'axe (Ox_2) , on obtient

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{u}{m} \sin(\theta(t)) - g.$$

4.2.2 Modélisation du problème

Le but est d'amener la fusée vers une orbite d'altitude déterminée à l'avance tout en maximisant le déport latéral de la fusée. Le contrôle dans cette partie représente l'angle de gîte. Le problème est donc de déterminer la trajectoire optimale de cette fusée. Ceci nous conduit à

la résolution du problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(\theta) = -x_1(T), \\ \dot{x}_1(t) = v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_2(t), \\ \dot{v}_1(t) = \frac{u}{m} \cos(\theta(t)), \\ \dot{v}_2(t) = \frac{u}{m} \sin(\theta(t)) - g, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad v_1(0) = v_2(0) = 0, \\ x_2(T) = h, \quad v_1(T) = v_c, \quad v_2(T) = 0, \\ \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ fixé}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où h est l'altitude d'orbite choisie et v_c une vitesse connue. Notez que ce problème est donné dans [64] en tant que problème non résolu, avec une variable mass $m(t)$ et la contrainte supplémentaire : $\dot{m}(t) = -u$. Cependant, dans ce cas l'auteur n'a pas posé des conditions aux limites pour la vitesse.

Notez que dans un problème de contrôle optimal général, nous minimisons le critère de qualité suivant :

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt.$$

Dans notre cas, nous avons :

$$u(t) = \theta(t), \quad g(T, x(T)) = -x_1(T), \quad L(t, x(t), u(t)) = 0.$$

Remarque 10. *A noter que le cas d'une fusée à masse constante est un cas non réaliste, on a considéré ce cas pour faire une comparaison des résultats trouvés dans ce cas et le cas et le plus réaliste ou la masse de la fusée varie en fonction du temps.*

4.2.3 Résolution du problème

Résolution analytique (Conditions nécessaires d'optimalité)

La résolution théorique du problème considéré est basée sur le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

Posons

$$x(t) = (x_j(t), j = 1 \dots 4) = (x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) \text{ et } p(t) = (p_j(t), j = 1, \dots, 4).$$

L'Hamiltonien du problème (4.1) est défini par :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x(t), p(t), \theta(t)) &\longmapsto H(t, x(t), p(t), \theta(t)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), \theta(t)) = & p_1(t)v_1(t) + p_2(t)v_2(t) + p_3(t)\frac{u}{m}\cos(\theta(t)) \\ & + p_4(t)(\frac{u}{m}\sin(\theta(t)) - g), \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $p_j(t)$, $t \in [0, T]$, $j = 1, \dots, 4$ sont les composantes du vecteur adjoint, elle sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = 0, \\ \dot{p}_3(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_4(t) = -p_2(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (4.4)$$

Du système (4.4), on en déduit que

$$\begin{cases} p_1(t) = \lambda_1, \\ p_2(t) = \lambda_2, \\ p_3(t) = -\lambda_1 t + \lambda_3, \\ p_4(t) = -\lambda_2 t + \lambda_4, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour alléger l'écriture, on pose $H = H(t, x(t), p(t), \theta(t))$.

La condition d'optimalité du premier ordre donne

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -p_3(t)\frac{u}{m}\sin(\theta) + p_4(t)\frac{u}{m}\cos(\theta) = 0, \quad (4.6)$$

soit

$$\tan \theta = \frac{p_4(t)}{p_3(t)}, \quad p_3(t) \neq 0, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.7)$$

Donc

$$\theta(t) = \arctan\left[\frac{p_4(t)}{p_3(t)}\right]. \quad (4.8)$$

L'équation (4.7) est également équivalente à :

$$\cos(\theta(t)) = \frac{p_3(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}}, \quad (4.9)$$

$$\sin(\theta(t)) = \frac{p_4(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}}. \quad (4.10)$$

Ainsi la commande optimale $\theta^*(t)$ qui maximise l'Hamiltonien vérifie les équations (4.9) et (4.10).

De plus, on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = -p_3(t) \frac{u}{m} \cos(\theta) - p_4(t) \frac{u}{m} \sin(\theta). \quad (4.11)$$

Pour $\theta = \theta^*$, la relation (4.11) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \big|_{\theta=\theta^*} &= -\frac{u}{m} \left[p_3(t) \frac{p_3(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}} + p_4(t) \frac{p_4(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}} \right] \\ &= -\frac{u}{m} \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Comme u et m sont strictement positifs et $p_3(t) \neq 0$, on aura $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \big|_{\theta=\theta^*} < 0$. Donc la condition nécessaire du second ordre pour le maximum est vérifiée.

Le système dynamique est autonome, alors le Hamiltonien est constant pour tout $t \in [0, T]$.

Par conséquent, on aura

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = c. \quad (4.13)$$

La condition de transversalité devient alors :

$$p_1(T) = -\frac{\partial g(T, x(T))}{\partial x_1(T)} = 1. \quad (4.14)$$

Ce qui implique que $p_1(t) = \lambda_1 = 1$ et $p_3(t) = -t + \lambda_3$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Après avoir appliqué le principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité, nous allons résoudre numériquement le problème avec la méthode de tir.

Données numériques

Dans la solution numérique de notre problème, nous avons utilisé les données présentées dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Données numériques du mouvement de la fusée

Paramètres du mouvement	Valeurs
u : La force de poussée en (kN)	1900
m : Masse en (kg)	60528
g : Intensité de la pesanteur en $(m.s^{-2})$	9.80665
h : Altitude cible en (km)	180
v_c : Vitesse finale en $(km.s^{-1})$	7.904
T : Temps final en (s)	277

Résolution numérique par la méthode de tir

L'application du principe du maximum de Pontryagin à notre problème nous a conduit au problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_2(t), \\ \dot{v}_1(t) = \frac{u}{m} \frac{p_3(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}}, \\ \dot{v}_2(t) = \frac{u}{m} \frac{p_4(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}} - g, \\ \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = 0, \\ \dot{p}_3(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_4(t) = -p_2(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, v_1(0) = v_2(0) = 0, p_1(T) = 1, \\ x_2(T) = h, v_1(T) = v_c, v_2(T) = 0, t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Nous construisons la fonction de tir suivante :

$$\begin{aligned} G : \quad \mathbb{R}^8 &\longrightarrow \mathbb{R}^8 \\ (p(0), p(T)) &\longrightarrow G(p(0), p(T)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

et

$$G(p(0), p(T)) = \begin{pmatrix} p_1(0) - 1 \\ p_2(0) - \lambda_2 \\ p_3(0) - \lambda_3 \\ p_4(0) - \lambda_4 \\ p_1(T) - 1 \\ p_2(T) - \lambda_2 \\ p_3(T) + T - \lambda_3 \\ p_4(T) + \lambda_2 T - \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le problème(4.15) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_3(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_4(t), \\ \dot{z}_3(t) = \frac{u}{m} \frac{z_7(t)}{\sqrt{z_7(t)^2 + z_8(t)^2}}, \\ \dot{z}_4(t) = \frac{u}{m} \frac{z_8(t)}{\sqrt{z_7(t)^2 + z_8(t)^2}} - g, \\ \dot{z}_5(t) = 0, \\ \dot{z}_6(t) = 0, \\ \dot{z}_7(t) = -z_5(t), \\ \dot{z}_8(t) = -z_6(t), \\ z_1(0) = z_2(0) = 0, z_3(0) = z_4(0) = 0, z_5(T) = 1, \\ z_2(T) = h, z_3(T) = v_c, z_4(T) = 0, t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (4.17)$$

où $z(t) = (z_i(t), i = 1, \dots, 8) = (x(t), p(t))$.

La solution numérique du système non linéaire $G(p(0), p(T)) = 0$ peut être calculée à l'aide de la méthode de Newton.

Résultats numériques pour la méthode de tir

Nous avons calculé la solution numérique du système non linéaire $G(p(0), p(T)) = 0$ en utilisant la méthode de Newton implémentée dans Matlab 2009b. Ensuite, nous avons représenté graphiquement les résultats dans les figures 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5.

- La figure 4.2 montre que l'angle $\theta(t)$ diminue en fonction du temps.

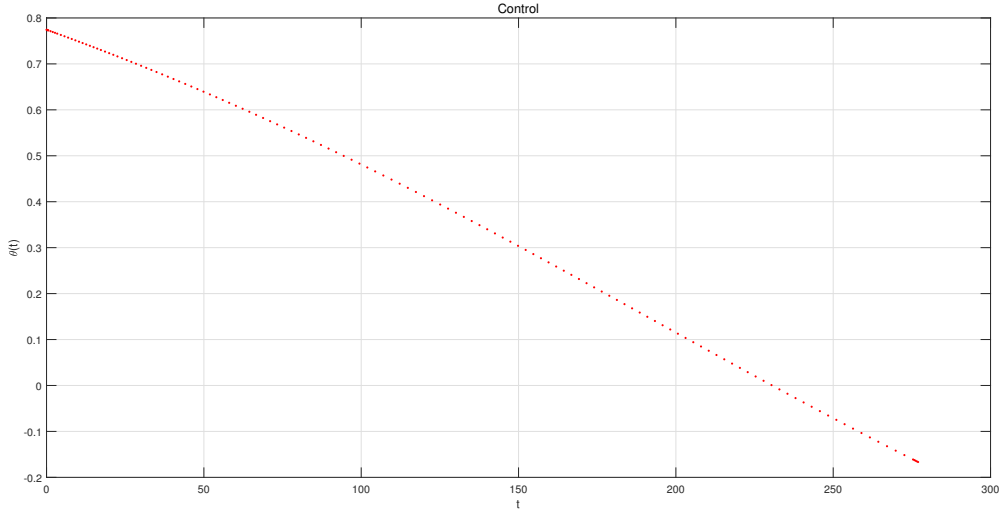


FIGURE 4.2 – Graphe de la variation de l'angle de gîte en fonction du temps

- Dans la figure 4.3, nous remarquons que $x_1(t)$ augmente rapidement avec le temps, il atteint le décalage latéral optimal $x_1^*(T) = 1035 \text{ km}$. De plus, on voit que $x_2(t)$ atteint l'altitude cible 180 km .
- La vitesse $v_1(t)$ augmente également avec le temps, elle varie de $v_1(0) = 0$ à $v_1(T) = v_c = 7.904 \text{ km.s}^{-1}$ et $v_2(t)$ varie de $v_2(0) = 0$ à $v_2(t_c) = 1 \text{ km.s}^{-1}$ puis diminue de $v_2(t_c)$ à $v_2(0) = 0$.
- Enfin, notons que le temps d'exécution de la méthode de tir nécessaire pour trouver la solution optimale est 11.4923 s .

Résolution numérique par la méthode de discrétisation d'Euler

La méthode consiste à subdiviser l'intervalle $[0, T]$ en N sous-intervalles, où N est choisi à l'avance. On aura donc

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + d < \cdots < t_{N-1} = t_0 + (N-1)d < t_N = T,$$

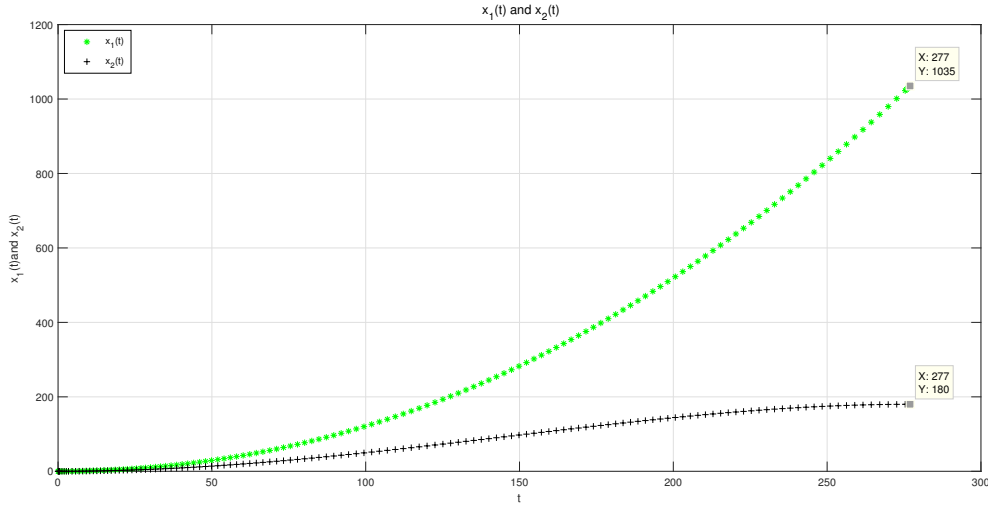


FIGURE 4.3 – Graphes du mouvement longitudinal et l'altitude en fonction du temps

où $d = \frac{T}{N}$. L'application du schéma d'Euler pour la résolution des problèmes de Cauchy nous donne le problème de programmation non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(u, T) = -x_1(T), \\ x_1(t_{i+1}) = x_1(t_i) + dv_1(t_i), \quad x_1(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ x_2(t_{i+1}) = x_2(t_i) + dv_2(t_i), \quad x_2(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_1(t_{i+1}) = v_1(t_i) + d \frac{u}{m} \cos(\theta(t_i)), \quad v_1(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_2(t_{i+1}) = v_2(t_i) + d \left[\frac{u}{m} \sin(\theta(t_i)) - g \right], \quad v_2(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ x_2(t_N) = h, \quad v_1(t_N) = v_c, \quad v_2(t_N) = 0, \\ x_1(t_i), \quad x_2(t_i), \quad v_1(t_i), \quad v_2(t_i) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \theta(t_i) \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

La solution de ce programme d'optimisation non linéaire est alors une solution approximative pour le décalage latéral optimal du problème de contrôle optimal non linéaire continu (4.1).

Résultats numériques pour la méthode de discrétisation d'Euler

Nous avons résolu le programme non linéaire (4.18) avec la méthode des points intérieurs implémentée dans MATLAB2009b pour $N \in \{200; 500; 800; 1000; 1500\}$. Les résultats numériques

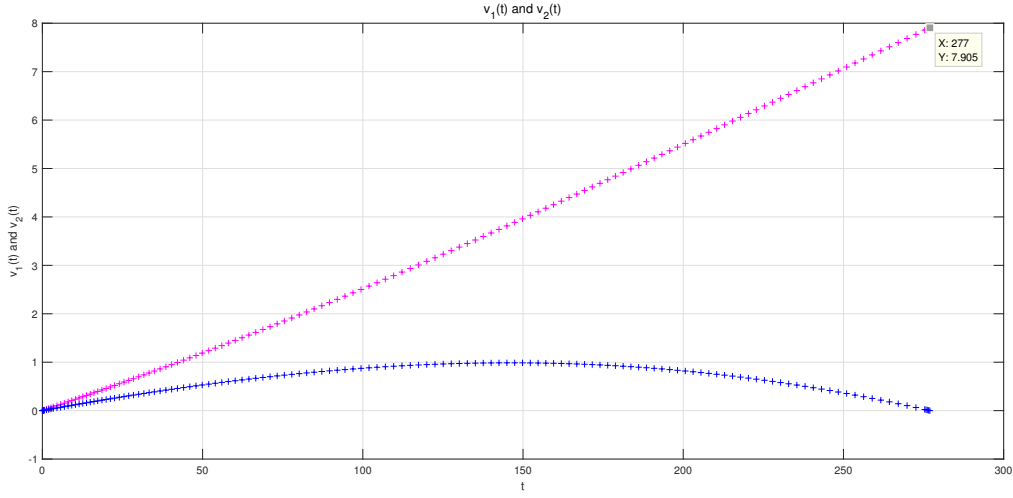


FIGURE 4.4 – Graphes de la projection horizontale et verticale de la vitesse

TABLE 4.2 – Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler

N	$x_1(T)$	NIT	$CPUT$
200	1021	12	3.9990
500	1030	12	9.2805
800	1033	11	84.1054
1000	1034	11	35.5640
1500	1035	31	135.2687

obtenus (temps d'exécution $CPUT$, nombre d'itérations NIT et décalage latéral maximal $x_1(T)$) sont présentés dans le tableau 4.2 et ils sont représentés graphiquement dans les figures 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 pour $N = 1500$.

Nous avons remarqué sur les différents graphiques que pour $N = 1500$, la méthode de discrétisation d'Euler donne les mêmes résultats que ceux trouvés par la méthode de tir. Cependant, pour $N < 1500$, la solution obtenue n'est pas optimale. Enfin, nous notons que le temps d'exécution de la méthode de discrétisation d'Euler nécessaire pour trouver la solution optimale pour $N = 1500$ est de 135.2687 s.

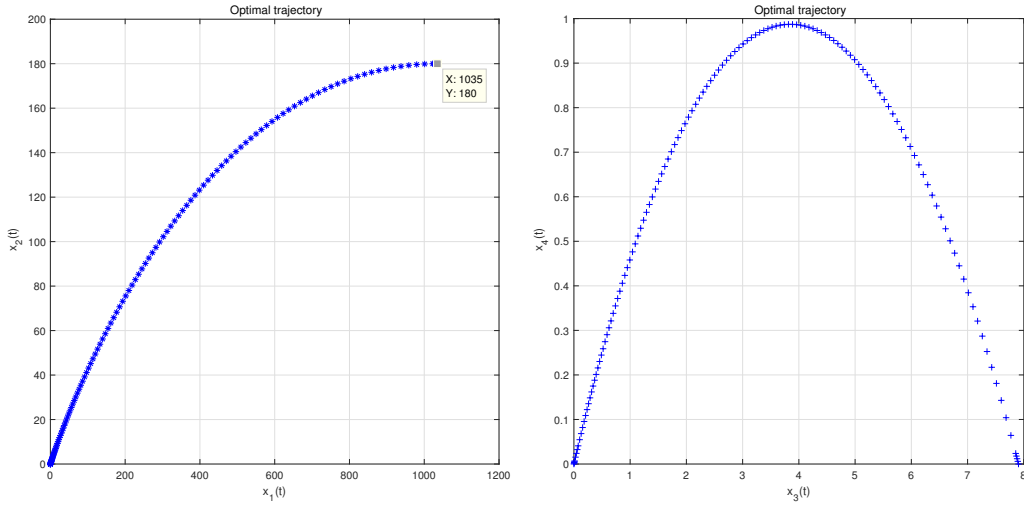


FIGURE 4.5 – Les trajectoires optimales

4.2.4 Comparaison des deux méthodes

Nous remarquons que le décalage latéral optimal trouvé par les deux méthodes est similaire, néanmoins les temps d'exécution de ces méthodes sont largement différents. Pour $N = 1500$, la méthode de discrétisation d'Euler a donné le décalage latéral optimal $x_1(T)$ en un temps d'exécution égal à $t = 135.2687s$. Notons également que la méthode de tir a trouvé le résultat optimal en un temps d'exécution très court $t = 11.4923s$.

4.3 Mouvement non rectiligne d'une fusée avec une masse variable

Dans cette section, nous poursuivons notre étude pour un mouvement non rectiligne d'une fusée avec une masse variable.

4.3.1 Modélisation du problème

Nous procédons de la même manière que dans la section 4.2. On considère le système à l'instant $t \in [0, T]$ comme étant la fusée de masse $m(t)$ et de vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ et à l'instant $t + dt$

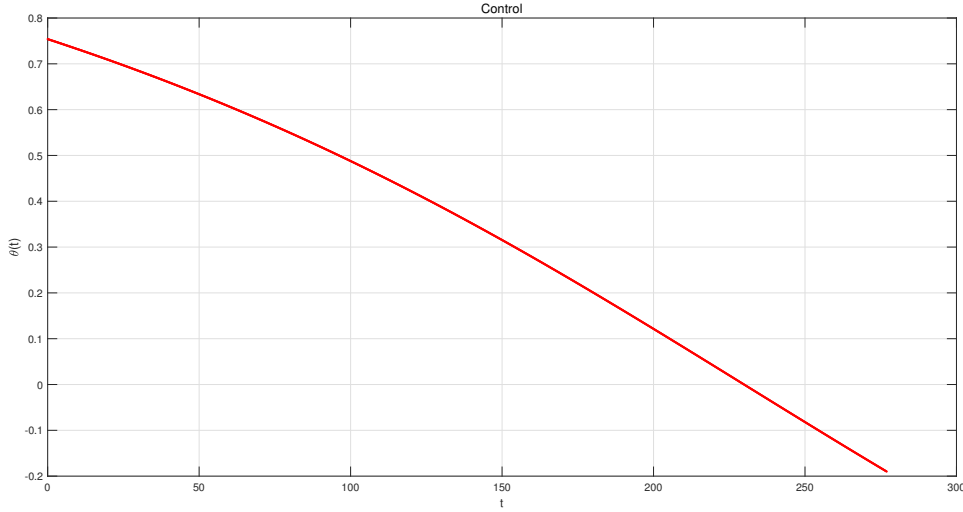


FIGURE 4.6 – Graphe de la variation de l'angle de gîte en fonction du temps

comme étant l'ensemble constitué de la fusée de masse $m(t) + dm(t)$ et de vitesse $\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)$ et des gaz éjectés pendant la durée dt , de masse $-dm$ et de vitesse $\vec{v} + \vec{k}$, où $\|\vec{k}\| = \frac{1}{b}$ (b est une constante strictement positive donnée). Ce système passe d'un point M_0 à un point final M_f (cible). Notons par $\vec{R}$ la somme des forces extérieures, en négligeant les forces aérodynamiques, on aura $\vec{R} = m(t)\vec{g}$. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm(\vec{v} + \vec{k}) - m\vec{v}}{dt} = \vec{R} = m.\vec{g}.$$

En simplifiant et en négligeant le terme quadratique, on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{k} \frac{dm}{dt} \frac{1}{m} + \vec{g}. \quad (4.19)$$

Soient $\vec{T}_p(t)$ la force de la poussée de la fusée de module $u(t)$ à l'instant $t \in [0, T]$, tel que $0 \leq u(t) \leq u_{max}$ et $\theta(t)$ l'angle d'inclinaison (l'angle de gîte) de la fusée à l'instant $t \in [0, T]$. Comme la force de la poussée s'écrit :

$$\vec{T}_p = \vec{k} \frac{dm}{dt}, \quad (4.20)$$

l'équation (4.19) devient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{T}_p}{m} + \vec{g}. \quad (4.21)$$

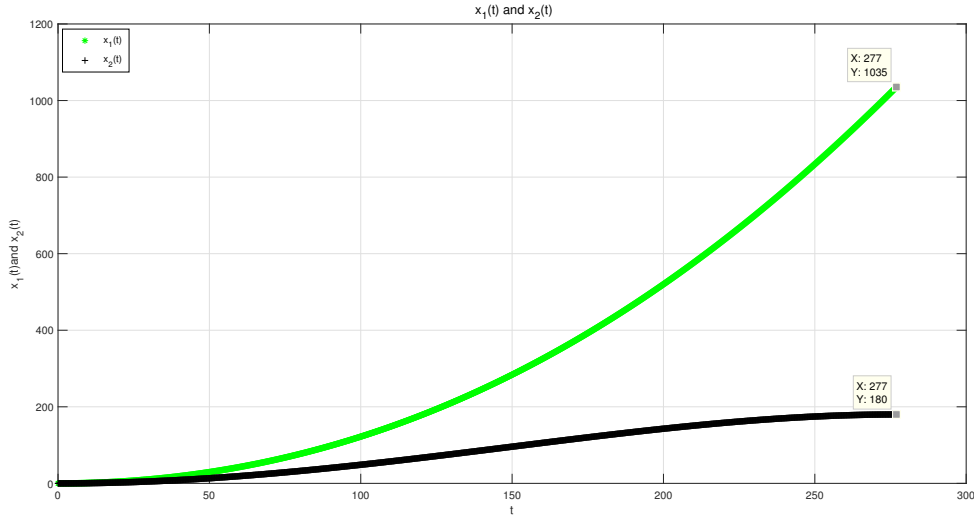


FIGURE 4.7 – Graphes du mouvement longitudinal et l'altitude en fonction du temps

De plus, de l'équation (4.20), on déduit que

$$u(t) = -\frac{1}{b} \frac{dm}{dt}.$$

D'où

$$\frac{dm}{dt}(t) = -bu(t). \quad (4.22)$$

Par projection sur l'axe (Ox_1) , on obtient de l'équation (4.21) :

$$\frac{dv_1}{dt}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} \cos(\theta(t)),$$

et projection sur l'axe (Ox_2) on obtient :

$$\frac{dv_2}{dt}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} \sin(\theta(t)) - g.$$

Le but est d'amener la fusée vers une orbite d'altitude déterminée à l'avance toute en maximisant le déport latéral de la fusée où les deux contrôles représentent le module de la poussée $u(t)$ et l'angle de gîte $\theta(t)$. Le problème est donc de déterminer la trajectoire optimale de cette

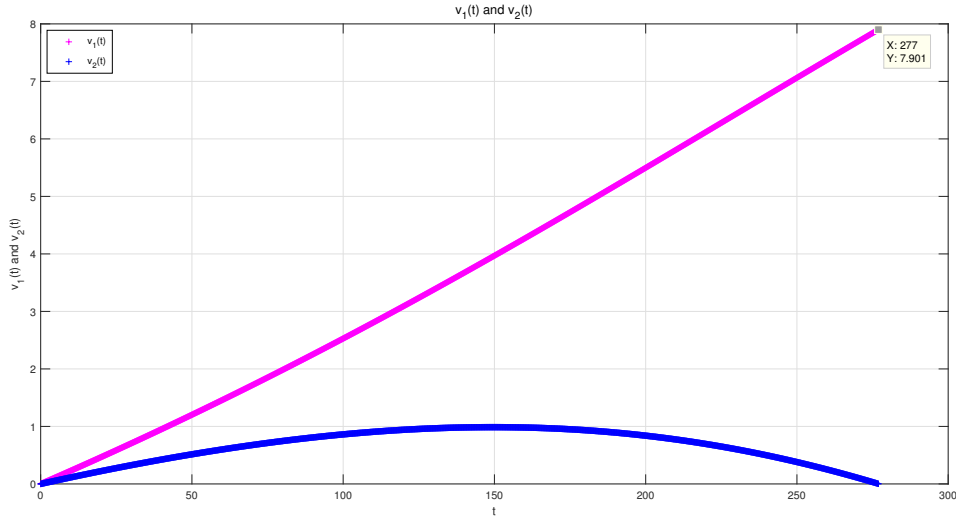


FIGURE 4.8 – Graphes de la projection horizontale et verticale de la vitesse

fusée. Ceci nous conduit à la résolution du problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } J(\theta) = -x_1(T), \\ \dot{x}_1(t) = v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_2(t), \\ \dot{v}_1(t) = \frac{u(t)}{m(t)} \cos(\theta(t)), \\ \dot{v}_2(t) = \frac{u(t)}{m(t)} \sin(\theta(t)) - g, \\ \dot{m}(t) = -bu(t), \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad v_1(0) = v_2(0) = 0, \\ x_2(T) = x_{2f}, \quad v_1(T) = v_{1f}, \quad v_2(T) = 0, \quad m(0) = m_0, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{max}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

où x_{2f} est l'altitude d'orbite choisie et v_{1f} une vitesse connue [64].

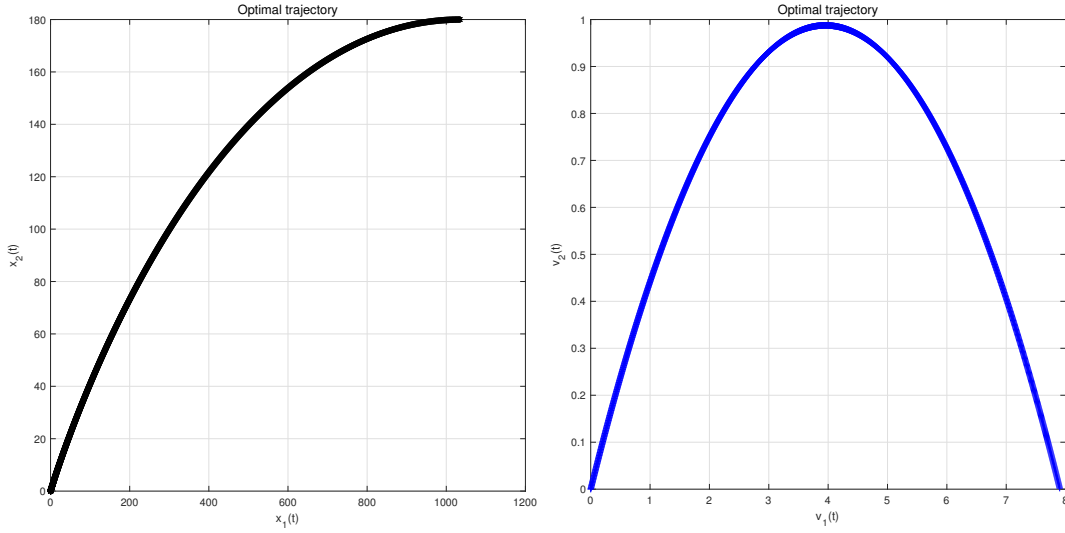


FIGURE 4.9 – Les trajectoires optimales

4.3.2 Résolution du problème

Condition nécessaire d'optimalité

Le Hamiltonien du problème (4.23) est donné par :

$$\begin{aligned}
 H(t, x(t), p(t), u(t), \theta(t)) = & p_1(t)v_1(t) + p_2(t)v_2(t) + p_3(t)\frac{u(t)}{m(t)} \cos(\theta(t)) \\
 & + p_4(t)\left(\frac{u(t)}{m(t)} \sin(\theta(t)) - g\right) - bp_5(t)u(t),
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

où $x(t) = (x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t), m(t))$ et $p(t) = (p_i(t), i = 1, \dots, 5)$, le vecteur adjoint qui est une solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = 0, \\ \dot{p}_3(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_4(t) = -p_2(t), \\ \dot{p}_5(t) = \frac{u(t)}{m(t)^2} (p_3(t) \cos(\theta(t)) + p_4(t) \sin(\theta(t))), \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \tag{4.25}$$

Du système (4.25), on en déduit que

$$\begin{cases} p_1(t) = \lambda_1, \\ p_2(t) = \lambda_2, \\ p_3(t) = -\lambda_1 t + \lambda_3, \\ p_4(t) = -\lambda_2 t + \lambda_4, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (4.26)$$

La condition d'optimalité du premier ordre donne :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -p_3(t) \frac{u(t)}{m(t)} \sin(\theta) + p_4(t) \frac{u(t)}{m(t)} \cos(\theta) = 0, \quad (4.27)$$

soit

$$\tan \theta = \frac{p_4(t)}{p_3(t)}, \quad p_3(t) \neq 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.28)$$

Donc

$$\theta(t) = \arctan\left[\frac{p_4(t)}{p_3(t)}\right], \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (4.29)$$

L'équation (4.28) est également équivalente à :

$$\cos(\theta(t)) = \frac{p_3(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}}, \quad (4.30)$$

et

$$\sin(\theta(t)) = \frac{p_4(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}}. \quad (4.31)$$

Le contrôle optimal $\theta^*(t)$ qui maximise l'Hamiltonien vérifie les relations (4.30) et (4.31). On suppose que le contrôle est continu et non borné. Ainsi la condition nécessaire du second ordre est donnée par

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \big|_{\theta=\theta^*} < 0.$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = -p_3(t) \frac{u(t)}{m(t)} \cos(\theta) - p_4(t) \frac{u(t)}{m(t)} \sin(\theta). \quad (4.32)$$

Comme $u(t), m(t) > 0$ et $p_3(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \big|_{\theta=\theta^*} &= -\frac{u(t)}{m(t)} \left[p_3(t) \frac{p_3(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}} + p_4(t) \frac{p_4(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}} \right] \\ &= -\frac{u(t)}{m(t)} \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2} < 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Le système dynamique est autonome, alors le Hamiltonien est constant pour tout $t \in [0, T]$.

Par conséquent, on aura

$$H(t, x(t), p(t), u(t), \theta(t)) = c. \quad (4.34)$$

Comme le temps final T est libre, d'après la condition de transversalité, on a :

$$H(T, x(T), p(T), u(T), \theta(T)) = 0. \quad (4.35)$$

Des relations (4.34) et (4.35), on obtient

$$H(t, x(t), p(t), u(t), \theta(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.36)$$

Les conditions de transversalité deviennent alors :

$$p_1(T) = -\frac{\partial g(T, x(T))}{\partial x_1(T)} = 1, \quad (4.37)$$

$$p_5(T) = -\frac{\partial g(T, x(T))}{\partial x_5(T)} = 0. \quad (4.38)$$

La condition (4.37) implique que $p_1(t) = \lambda_1 = 1$ et $p_3(t) = -t + \lambda_3$.

Le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), u^*(t), \theta^*(t)) &= \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} H(t, x(t), p(t), u(t), \theta^*(t)) \\ &= p_1(t)v_1(t) + p_2(t)v_2(t) - p_4(t)g \\ &\quad + \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} \left\{ \left(\frac{p_3(t)}{m(t)} \cos(\theta^*(t)) + \frac{p_4(t)}{m(t)} \sin(\theta^*(t)) - bp_5(t) \right) u(t) \right\} \\ &= p_1(t)v_1(t) + p_2(t)v_2(t) - p_4(t)g \\ &\quad + \max_{0 \leq u(t) \leq u_{\max}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2} - bp_5(t)}{m(t)} \right) u(t) \right\}. \end{aligned}$$

Le contrôle maximisant le Hamiltonien est :

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2} - bm(t)p_5(t) \leq 0, \\ u_{\max} & \text{si } \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2} - bm(t)p_5(t) > 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Comme

$$\begin{aligned} \dot{p}_5(t) &= p_3(t) \frac{u(t)}{m(t)^2} \cos(\theta(t)) + p_4(t) \frac{u(t)}{m(t)^2} \sin(\theta(t)) \\ &= \frac{u(t)}{m(t)^2} \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2} > 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

on en déduit que la fonction $p_5(t)$ est croissante. Puisque $p_5(T) = 0$, on aura $p_5(t) \leq 0$. D'où

$$\forall t \in [0, T], \quad \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2} - bp_5(t) > 0 \Rightarrow u(t) = u_{\max}.$$

Donc le module de la poussée $u(t)$ est constant sur $[0, T]$, ce qui signifie qu'on n'a aucune commutation sur $[0, T]$.

Paramètres du mouvement	Valeurs
m_0 : Masse initiale en kg	122176.39
g : Intensité de la pesanteur en $m.s^{-2}$	9.80665
v_{1f} : Vitesse finale en $km.s^{-1}$	7.905
x_{2f} : L'altitude finale en km	180
$u_{\max}$: Borne supérieure du contrôle	2247

TABLE 4.3 – Données numériques du problème du contrôle avec une masse variable

Données numériques

Dans la solution numérique de notre problème, nous avons utilisé les données présentées dans le tableau 4.3.

Résolution numérique par la méthode de tir

L'application du principe du maximum de Pontryagin à notre problème nous conduit au problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = v_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = v_2(t), \\ \dot{v}_1(t) = \frac{u_{\max}}{m(t)} \frac{p_3(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}}, \\ \dot{v}_2(t) = \frac{u_{\max}}{m(t)} \frac{p_4(t)}{\sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}} - g, \\ \dot{m}(t) = -bu_{\max}, \\ \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = 0, \\ \dot{p}_3(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_4(t) = -p_2(t), \\ \dot{p}_5(t) = \frac{u_{\max}}{m(t)^2} \sqrt{p_3(t)^2 + p_4(t)^2}, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad v_1(0) = v_2(0) = 0, \quad m(0) = m_0, \quad p_1(T) = 1, \\ x_2(T) = x_{2f}, \quad v_1(T) = v_{1f}, \quad v_2(T) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Construisons la fonction de tir :

$$\begin{aligned} G : \quad \mathbb{R}^{10} &\longrightarrow \mathbb{R}^{10} \\ (p(0), p(T)) &\longrightarrow G(p(0), p(T)), \end{aligned} \quad (4.42)$$

où

$$G(p(0), p(T)) = \begin{pmatrix} p_1(0) - 1 \\ p_2(0) - \lambda_2 \\ p_3(0) - \lambda_3 \\ p_4(0) - \lambda_4 \\ p_5(0) - \lambda_5 \\ p_1(T) - 1 \\ p_2(T) - \lambda_2 \\ p_3(T) + T - \lambda_3 \\ p_4(T) + \lambda_2 T - \lambda_4 \\ p_5(T) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le problème(4.41) est équivalent au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_3(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_4(t), \\ \dot{z}_3(t) = \frac{u_{\max}}{z_5(t)} \frac{z_7(t)}{\sqrt{z_7(t)^2 + z_8(t)^2}}, \\ \dot{z}_4(t) = \frac{u_{\max}}{z_5(t)} \frac{p_4(t)}{\sqrt{z_7(t)^2 + z_8(t)^2}} - g, \\ \dot{z}_5(t) = -bu_{\max}, \\ \dot{z}_6(t) = 0, \\ \dot{z}_7(t) = 0, \\ \dot{z}_8(t) = -z_6(t), \\ \dot{z}_9(t) = -z_7(t), \\ \dot{z}_{10}(t) = \frac{u_{\max}}{z_5(t)^2} \sqrt{z_8(t)^2 + z_9(t)^2}, \\ z_1(0) = z_2(0) = 0, \quad z_3(0) = z_4(0) = 0, \quad z_5(0) = 122176.39, \\ z_2(T) = 180, \quad z_3(T) = 7.905, \quad z_4(T) = 0, \quad z_6(T) = 1, \quad z_{10}(T) = 0, \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (4.43)$$

où $z(t) = (z_i(t), i = 1, \dots, 10) = (x(t), p(t))$.

La solution numérique du système non linéaire $G(p(0), p(T)) = 0$ peut être calculée à l'aide de

la méthode de Newton.

Résultats numériques pour la méthode de tir

Nous avons calculé la solution numérique du système non linéaire $G(p(0), p(T)) = 0$ en utilisant la méthode de Newton implémentée dans Matlab 2009b. Les résultats trouvés sont représentés graphiquement dans les figures 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 et 4.17.

- La figure 4.10 montre que le module optimal de la poussée est constant le long de l'intervalle

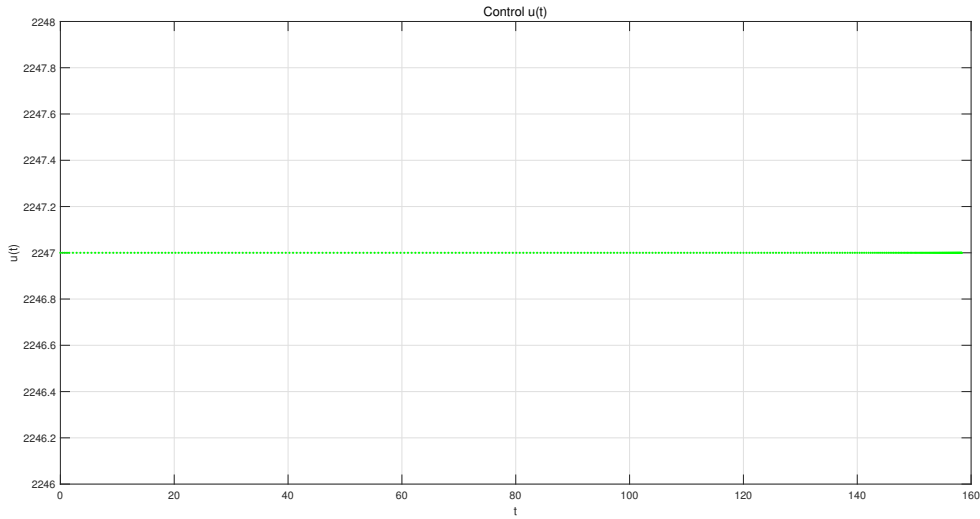


FIGURE 4.10 – Graphe du module de la poussée en fonction du temps

$[0, T]$. En effet, on remarque du graphe que $u^*(t) = u_{\max} = 2247$, $\forall t \in [0, T]$, avec $T = 158.5$ s.

- La figure 4.11 montre que l'angle $\theta(t)$ reste constant ($\theta(t) = 1.571$ Rad) dans l'intervalle de temps $[0, 136.5]$, puis elle diminue de $\theta(136.5)$ à $\theta(136.9) = -1.571$ Rad et finalement elle croît pour atteindre la valeur $\theta(T) = \theta(158.5) = 0.3693$ Rad.

- De la figure 4.12, nous remarquons que $x_1(t)$ augmente rapidement avec le temps, il atteint le décalage latéral optimal $x_1^*(T) = 217.4$ km au temps final $T = 158.4$ s.

- De la figure 4.13, on voit que $x_2(t)$ atteint l'altitude cible 180 km.

- De la figure 4.14, on constate que la vitesse $v_1(t)$ augmente également avec le temps, elle varie de $v_1(0) = 0$ à $v_1(T) = v_{1f} = 7.904$ km.s⁻¹.

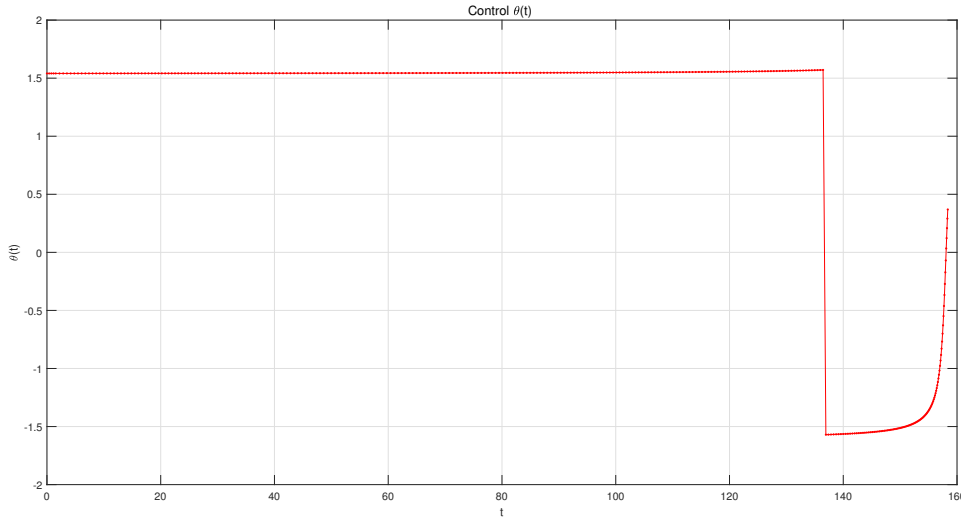


FIGURE 4.11 – Graphe de la variation de l'angle de gîte en fonction du temps

- De la figure 4.15, on remarque que la vitesse $v_2(t)$ augmente de $v_2(0) = 0$ à $v_2(136.5) = 2.4 \text{ km.s}^{-1}$, puis elle diminue de $v_2(136.5)$ à $v_2(T) = v_{2f} = 0$.
- De la figure 4.16, on remarque que la masse de la fusée varie comme une fonction affine du temps. Elle diminue linéairement de $m(0) = 122176.39 \text{ kg}$ jusqu'à $m(T) = 3556 \text{ kg}$.
- Enfin, notons que le temps d'exécution de la méthode de tir nécessaire pour trouver la solution optimale est 3.0018 s .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons dans la première partie traité un modèle de contrôle optimal non linéaire en supposons que la masse de la fusée est constante le long du trajet où le temps final est fixé. L'objectif est de maximiser le décalage latéral de la fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale, où la commande représente l'angle d'inclinaison de la fusée. Afin de résoudre le problème considéré, théoriquement nous avons appliqué d'abord le principe de maximum de Pontryagin, puis nous avons calculé la solution numérique en utilisant deux méthodes à savoir la méthode de tir et la méthode de discrétisation Euler. Dans la deuxième partie, nous avons considéré un modèle de contrôle optimal non linéaire avec une masse variable

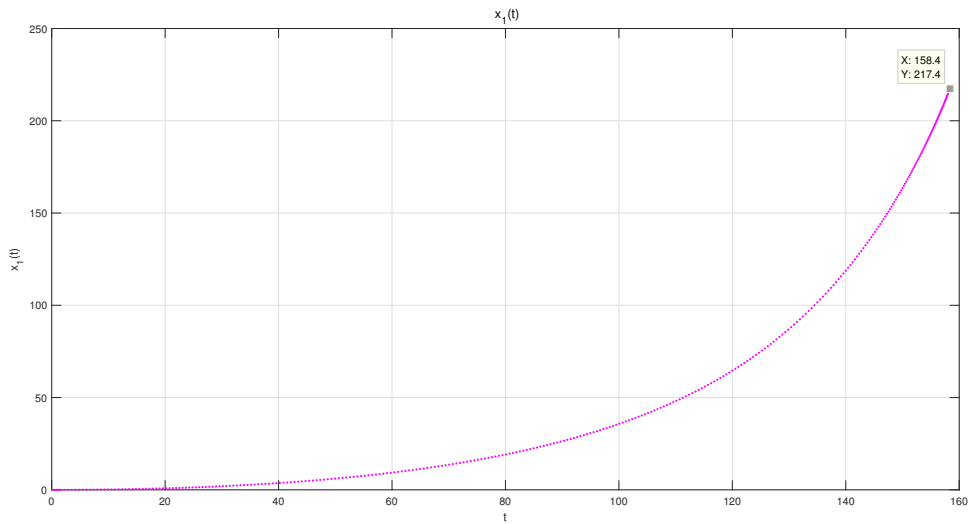


FIGURE 4.12 – Graphe du mouvement longitudinal en fonction du temps

et un temps final libre, où les contrôles représentent l'angle de gîte de la fusée et le module de la poussée de celle-ci. Afin de maximiser le décalage latéral de la fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale avec un mouvement non rectiligne, nous avons appliqué la méthode de tir. Finalement, des simulations numériques sont réalisées avec MATLAB et les résultats obtenus sont représentés graphiquement et analysés.

??

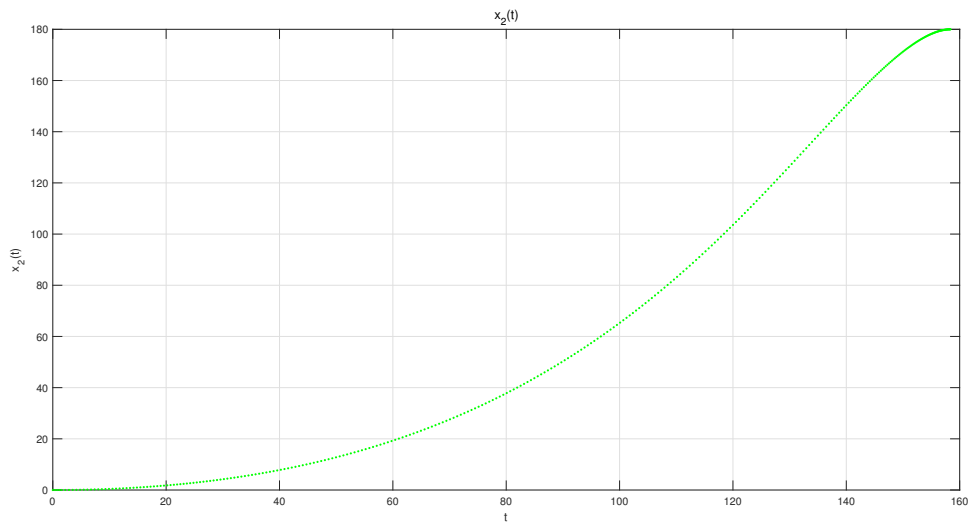


FIGURE 4.13 – Graphes de l'altitude en fonction du temps

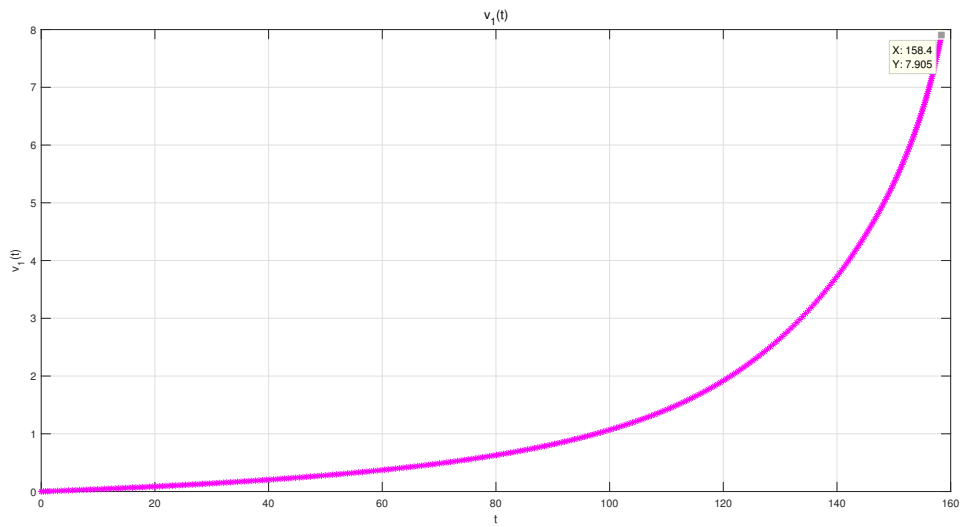


FIGURE 4.14 – Graphe de la projection horizontale de la vitesse

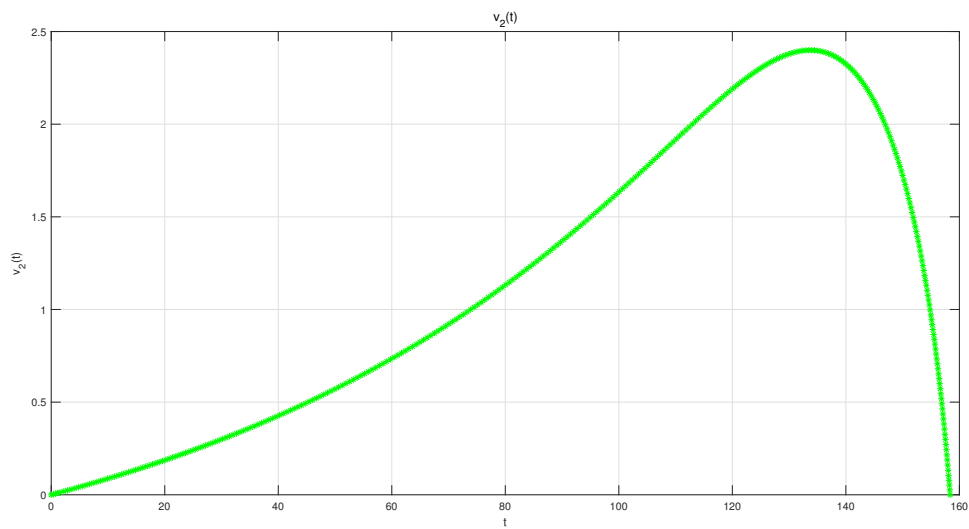


FIGURE 4.15 – Graphe de la projection verticale de la vitesse

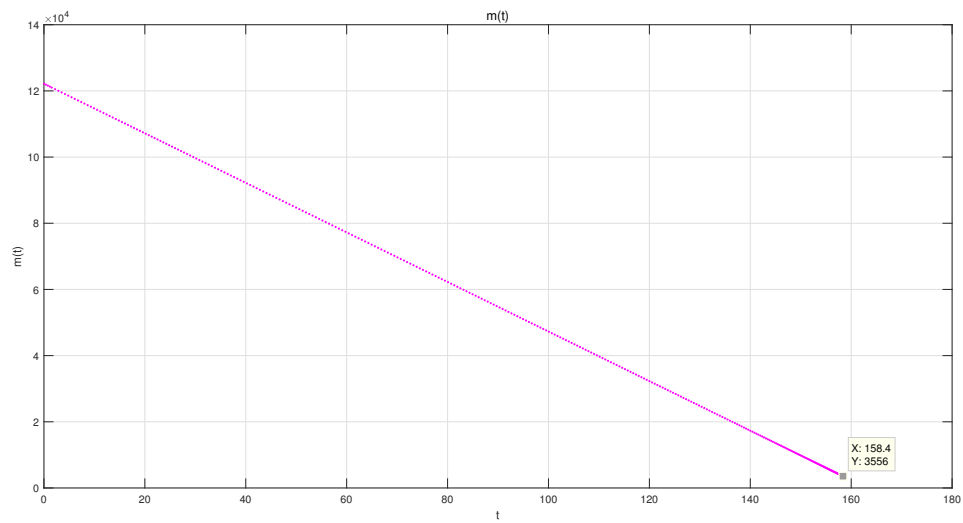


FIGURE 4.16 – Graphe de la masse en fonction du temps

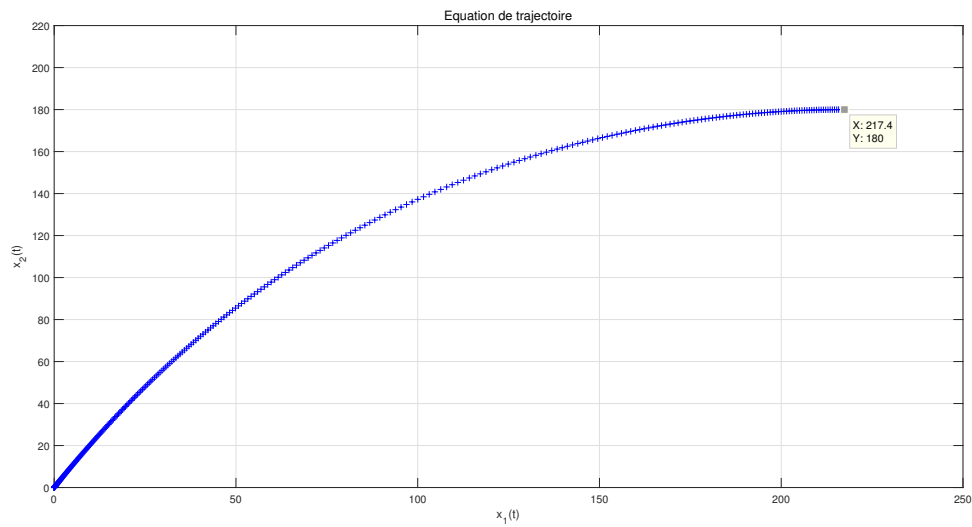


FIGURE 4.17 – Les trajectoires optimales

Conclusion

Après avoir rappelé certaines notions importantes de la théorie du contrôle optimal dans le premier chapitre, nous avons dans le deuxième chapitre proposé une nouvelle méthode directe pour la résolution numérique du problème du contrôle optimal linéaire-quadratique. Le principe de la méthode proposée consiste à utiliser la technique de discrétisation de Cauchy pour transformer le problème de contrôle optimal original en un problème d'optimisation quadratique qui est ensuite résolu par la méthode d'activation de contraintes (Active-set method) [6].

L'efficacité de notre méthode est prouvée en la comparant en terme de temps d'exécution et de précision de la solution obtenue avec la méthode analytique et la méthode de discrétisation d'Euler, et ce, sur plusieurs exemples de problèmes de contrôle optimal linéaire-quadratique convexes et non convexes.

Dans le premier exemple, on a traité un problème de contrôle optimal linéaire-quadratique avec une fonction objectif concave et des contraintes terminales sur l'état. On a résolu cet exemple par trois méthodes : la méthode analytique (MA), la technique de discrétisation d'Euler (MDE), ainsi que la nouvelle méthode qui est basée sur la discrétisation de Cauchy (ADC). Le deuxième exemple où le problème considéré est convexe avec contraintes sur l'état est résolu avec notre méthode et la solution optimale est comparée avec celle obtenue dans [46]. Le dernier exemple traite d'un problème de contrôle optimal de minimization d'une fonctionnelle quadratique concave et sans contraintes sur l'état final. La solution obtenue est comparée avec celle obtenue dans [25].

Dans le troisième chapitre, nous avons modélisé un problème pratique en aéronautique en le formulant sous forme d'un problème de contrôle optimal linéaire. Il s'agit du problème de maximisation de la vitesse d'une fusée se déplaçant d'un point initial à un point final avec un

mouvement rectiligne, où le contrôle représente le module de la poussée de la fusée [7, 10]. Pour la résolution théorique du problème, on a utilisé le principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

Numériquement, le problème considéré est résolu avec une méthode indirecte (méthode de tir) et deux méthodes directes (méthode basée sur la technique de discrétisation utilisant la formule de Cauchy et celle utilisant la formule d'Euler). Les résultats obtenus en réalisant des simulations numériques avec MATLAB sont presque identiques en terme de précision, mais on a remarqué une large différence dans les temps d'exécution des trois méthodes. En effet, la méthode de tir est la plus rapide des trois méthodes pour ce problème.

Dans le quatrième chapitre, nous avons dans la première partie traité un modèle de contrôle optimal non linéaire en supposant que la masse de la fusée est constante le long du trajet où le temps final est fixé. L'objectif est de maximiser le décalage latéral de la fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale, où la commande représente l'angle d'inclinaison de la fusée [5, 8, 9]. Afin de résoudre le problème considéré, théoriquement nous avons appliqué d'abord le principe du maximum de Pontryagin, puis nous avons calculé la solution numérique en utilisant deux méthodes à savoir la méthode de tir et la méthode de discrétisation Euler.

Dans la deuxième partie, nous avons considéré un modèle de contrôle optimal non linéaire avec une masse variable et un temps final libre, où les contrôles représentent l'angle de gîte de la fusée et le module de la poussée de celle-ci. Afin de maximiser le décalage latéral de la fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale avec un mouvement non rectiligne, nous avons appliqué la méthode de tir. Finalement, des simulations numériques sont réalisées avec MATLAB et les résultats obtenus sont représentés graphiquement et analysés.

Dans le future, nous allons nous intéresser à la résolution du problème du contrôle optimal modélisant le mouvement du transfert orbital d'une fusée se déplaçant dans l'espace. De plus, nous allons appliquer la méthode de programmation linéaire séquentielle développée dans [17] afin de résoudre d'une façon plus efficace les problèmes d'optimisation non convexe obtenus avec l'algorithme de discrétisation de Cauchy développé dans cette thèse.

Annexes

Annexe A

Équations différentielles ordinaires

Le but de cette section est de rappeler quelques résultats sur la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) qui décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP).

Une EDO est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(t, x, x', \dots, x^{(p)}) = g(t). \quad (4.44)$$

Dont les inconnues x sont une fonction $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Le nombre p est appelé l'ordre de l'équation.

Si la fonction $g \neq 0$, appelée second membre de l'équation, est nulle, on dit que l'équation est homogène.

Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

• **Conditions aux limites :** Une équation différentielle seule n'a que peu de sens sans la donnée de conditions aux limites. Deux grand types de conditions aux limites peuvent être donnés pour les EDO, qui conduisent soit aux problèmes à valeurs initiales, ou problèmes de Cauchy soit aux problèmes aux limites.

Problème de Cauchy

Sans la donnée de conditions initiales consistantes, il est impossible de définir la notion de solution d'un système différentiel du premier ordre. C'est pourquoi, on introduit un problème standard qui est le problème de Cauchy :

Définition 9. *Étant donnés :*

- Un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$,
- Une fonction f , définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} f : I_0 \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto f(t, x). \end{aligned}$$

On appelle problème de Cauchy le problème suivant :

Trouver une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I_0)$ telle que :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I_0 \text{ (condition initiale)}. \end{cases} \quad (4.45)$$

On a aussi le théorème suivant qui caractérise la solution d'un problème de Cauchy :

Théorème 4. *Une fonction $x : I_0 \mapsto \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si :*

1. La fonction x est continue et $\forall t \in I_0, (t, x(t)) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$.
2. $\forall t \in I_0, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$.

Méthodes de résolution des équations

Méthode de Newton

Cette méthode a été mise au point par Newton en 1686, c'est pourquoi elle porte son nom. C'est la méthode la plus utilisée pour la recherche des racines des équations non linéaires. C'est une méthode simple dont la convergence est rapide.

Supposons que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{I})$ et $f'(\alpha) \neq 0$ (α une racine simple de f). En se donnant la valeur initiale x_0 , on obtient la méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Méthodes de résolution des équations différentielles

Méthode d'Euler

La méthode numérique la plus simple pour résoudre le problème de Cauchy décrit précédemment est la méthode d'Euler. Considérons donc le problème différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \forall t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n.$$

On va se donner des points $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$, et on va essayer de calculer une approximation des valeurs de la solution en tous ces points, c'est-à-dire des valeurs $x_i \simeq x(t_i), i = 1, 2, \dots, N$.

Essentiellement il y a deux approches pour calculer les x_i qui, dans le cas de la méthode d'Euler, vont aboutir au même résultat : soit on approche directement l'EDO par différences finies en utilisant une approximation de la dérivée $x'(t)$, soit on intègre l'EDO, de manière analogue à la preuve d'existence. L'approche par différences finies consiste à trouver une approximation de $x'(t_i)$, par exemple :

$$x'(t_i) \simeq \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

L'EDO se réécrit alors sous la forme

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \simeq f(t_i, x_i),$$

et donc

$$x(t_{i+1}) \simeq x(t_i) + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, x(t_i)).$$

Nous construisons par récurrence une approximation x_i de $x(t_i)$ par

$$x_{i+1} = x_i + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, x_i), i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.46)$$

Le terme x_0 est la condition initiale. La formule (4.46) représente la méthode d'Euler.

La deuxième approche, qui va nous conduire au même résultat mais avec une philosophie très différentes, consiste à intégrer l'équation de t_i à t_{i+1} :

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, x(s))ds$$

En appliquant la méthode des rectangles, on obtient :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, x(s)) ds \approx (t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i), \quad (4.47)$$

et en posant $h = (t_{i+1} - t_i) = \frac{T}{N}$, la relation (4.47) devient :

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.48)$$

Le schéma défini par (4.48) s'appelle le schéma d'Euler.

Méthode de Rung-Kutta

Carle Rung (1886-1927) et Martin kutta (1867-1944) ont proposé en résoudre le Problème de Cauchy (4.45). En introduisant un calcul numérique de la forme

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ x_{i+1} = x_i + h\phi(t_i, x_i, h), \end{cases} \quad (4.49)$$

où la fonction d'incrément ϕ est une approximation de $f(t, x(t))$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Rung-Kutta d'ordre 4

1- étant donnés un pas de temps h , une condition initiale (t_0, x_0) et un nombre maximal d'itérations N .

2- pour $0 \leq i \leq N$:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, x_i) \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3) \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{i+1} = t_i + h. \end{cases} \quad (4.50)$$

Annexe B

Optimisation

Fonctions linéaires

Définition 10. *Fonction linéaire*

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *linéaire* si elle s'écrit

$$f(x) = c^T x,$$

où $c \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur constant, i.e. indépendant de x . Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire si chacune de ses composantes $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, est linéaire. Dans ce cas elle peut s'écrire

$$f(x) = Ax,$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice de constantes

Formes linéaires

Définition 11. *Forme linéaire*

Une forme linéaire de n variables $x_1, \dots, x_n$ est une fonction réelle qui s'écrit de la façon suivante :

$$z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (4.51)$$

En posant $c = (c_1, \dots, c_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, on a alors :

$$z(x) = c^T x.$$

Formes quadratiques

Définition 12. *Forme quadratique*

Une forme quadratique de n variables $x_1, \dots, x_n$ est une fonction réelle qui s'écrit de la façon suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j. \quad (4.52)$$

En posant $x = (x_1, \dots, x_n)$, $A = (\alpha_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$, on a alors :

$$F(x) = x'Ax.$$

La matrice A peut être toujours être symétrique ; sinon on définit une nouvelle matrice D symétrique telle que :

$$D = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow D' = \frac{(A + A')'}{2} = \frac{A' + A}{2} = D.$$

Ainsi, on peut écrire

$$F(x) = x'Ax = x'Dx, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour cela, il est naturel de considérer que la matrice associé à une forme quadratique est toujours symétrique.

Définition 13. Forme quadratique définie positive $F(x)$ est définie positive si $x'Dx > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. et $x \neq 0$.

On dit que D est définie positive et se note $D > 0$.

Définition 14. Forme quadratique semi-définie positive $F(x)$ est définie positive si $x'Dx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. et $\exists x_0 \neq 0$ tel que $x_0'Dx_0 = 0$

On dit que D est semi-définie positive et se note $D \geq 0$.

Définition 15. Forme quadratique définie négative $F(x)$ est définie négative si $x'Dx < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. et $x \neq 0$.

On dit que D est définie négative et se note $D < 0$.

Définition 16. Forme quadratique semi-définie négative $F(x)$ est semi-définie négative si $x'Dx \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. et $\exists x_0 \neq 0$ tel que $x_0'Dx_0 = 0$

On dit que D est semi-définie négative et se note $D \leq 0$.

Définition 17. Forme quadratique non définie Une forme quadratique $F(x)$ est dite non définie si elle est positive pour certains valeurs de x et négative pour d'autres.

Convexité

La notion de convexité joue un rôle fondamental dans la théorie de l'optimisation. Dans le cas de la minimisation convexe, les conditions d'optimalité sont à la fois nécessaire et suffisantes.

Définition 18. *Ensemble convexe*

Un ensemble S dans $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si $\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0, 1]$, le vecteur $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$.

Définition 19. *Hyperplan*

On appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tout ensemble H de dimension $(n - 1)$, ayant la forme :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ est appelé le vecteur normal à H . Cet hyperplan sépare l'espace $\mathbb{R}^n$ en deux demi-espaces :

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x \leq \alpha\}, \quad H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a'x \geq \alpha\},$$

où H^- et H^+ sont convexes.

Définition 20. *Polyèdre*

L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces est un polyèdre convexe. Un polyèdre borné est appelé polytope.

Définition 21. *Fonction convexe*

Une fonction réelle f définie sur un ensemble convexe S de $\mathbb{R}^n$, est dite convexe, si $\forall x, y \in S$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Proposition 2. Une forme quadratique $F(x) = x'Dx$ est dite convexe si et seulement si D est semi-définie positive.

Définition 22. *Fonction concave*

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si $-f$ est une fonction convexe, c'est-à-dire si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a définie sur un ensemble convexe S de $\mathbb{R}^n$, est dite convexe, si $\forall x, y \in S$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

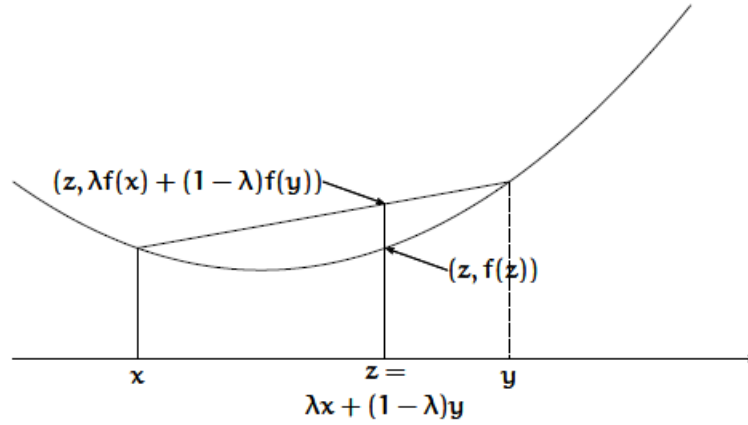


FIGURE 4.18 – Fonction convexe

Proposition 3. Une forme quadratique $F(x) = x'Dx$ est dite convexe si seulement si D est semi-définie positive.

Diférentiabilité : le premier ordre

Définition 23. Gradient

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. La fonction noté $\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée le gradient de f et est définie par

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + x_1^2 x_3 - x_1 x_2 x_3$. Le gradient de f est donné par

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} + 2x_1 x_3 - x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ x_1^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Définition 24. Dérivée directionnelle

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$. La dérivée directionnelle de f en x dans la direction d est donnée par

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha},$$

si la limite existe. De plus, lorsque le gradient existe, la dérivée directionnelle est le produit scalaire entre le gradient de f et la direction d i.e. $\nabla f(x)^T d$.

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + x_1^2 x_3 - x_1 x_2 x_3$, et soit

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

La dérivée directionnelle de f dans la direction d est

$$(d_1 \ d_2 \ d_3) \nabla f(x_1, x_2, x_3) = d_1(e^{x_1} + 2x_1 x_3 - x_2 x_3) - d_2 x_1 x_3 + d_3(x_1^2 - x_1 x_2),$$

où $\nabla f(x_1, x_2, x_3)$ est donné par (4.53)

Annexe C

Rappels de la physique

Les lois de Newton

Les lois de Newton permettent d'étudier les mouvements des systèmes mécaniques en physiques classiques. La seconde loi donnée ci-dessous de Newton est la principale loi permettant cette étude :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}.$$

La somme des forces extérieures est égale à la masse du corps en *kilogramme* multipliée par l'accélération en $m.s^{-2}$. Les forces s'expriment en *Newton*. Cependant, cette formule n'est pas valable que lorsque la masse du corps est constante au cours de temps. Dans le cadre de nos expérimentations, une formulation de la loi utilisant de la quantité de mouvement $\vec{p}$ est plus adaptée car la masse de notre système n'est pas constante

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}.$$

On détermine la quantité de mouvement par le produit de la masse et de la vitesse. Si m et v dépendent du temps, en effectuant la dérivation d'un produit de fonctions

$$\sum \vec{F}_{ext} = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \vec{v} \frac{dm(t)}{dt}.$$

Le principe de l'action et la réaction (ou la troisième loi de Newton) selon lequel à toute action correspond une réaction égale et de sens opposé est à l'origine de la propulsion. La troisième loi de Newton, nous sera utile pour comprendre la poussée. Celle-ci est générée lors de la propulsion des gaz par les moteurs. La vitesse de la fusée augmentera d'autant plus les gaz sont propulsés plus rapidement. Nous démontrons plus tard que le second terme de notre expression correspond à cette force de poussée :

$$\vec{F} = \vec{v} \frac{dm(t)}{dt} = -Q\vec{v}_e.$$

Dans cette expression $\vec{F}$ est la poussée en Newton, Q le débit massique de gaz en $m.s^{-1}$. Le débit massique est la masse qui passe à chaque instant liée au gaz issus de la combustion de la poudre qui sont expulsés par l'engin.

Les forces exercées sur une fusée

En mécanique, pour étudier le mouvement d'un corps, il faut tout d'abord définir le système sur lequel on travaille. La fusée est le système étudié, dans un référentiel terrestre, supposé galiléen. En effet, dans la mesure où les vols des fusées ne durent que quelques secondes, le mouvement de terre dans le référentiel héliocentrique est négligeable. Les fusées utilisées sont soumises à plusieurs forces :

- Le poids
- La poussée
- La résistance de l'air

Le poids

Le poids P s'exerce au centre de gravité de la fusée et est dirigé verticalement vers le bas.

La poussée

La poussée F s'applique au niveau du moteur, suivant l'axe longitudinal, vers l'origine. En supposant que le propulseur est correctement positionné, la poussée s'applique au milieu de la plaque de poussée.

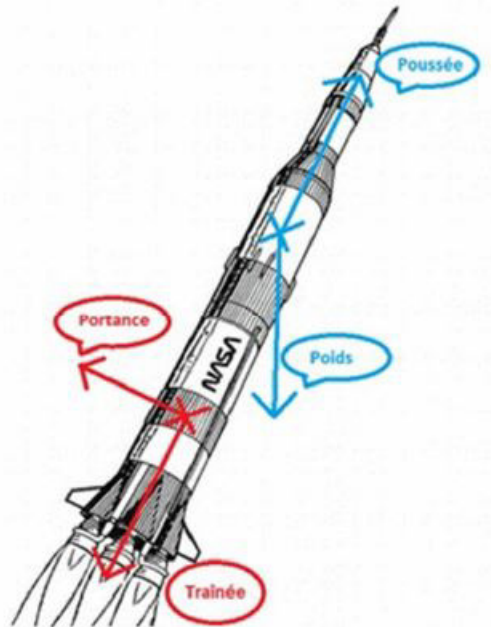


FIGURE 4.19 – Forces exercées

La résistance de l'air

la résistance de l'air R s'oppose à l'avancement de la fusée dans l'air. Elle dépend donc du vent relatif, somme du vent créé par la vitesse de la fusée (vent vitesse) et du vent météo. Le vent relatif, ou "vent apparent", est le vent ressenti par la fusée.

Elle s'applique en un point appelé Centre de Poussée Aérodynamique généralement situé près des ailerons

Cette force dépend de la géométrie de la fusée (taille et position des ailerons,...). En général, la résistance de l'aire comprend deux composantes : $R = R_a + R_n$ avec

R_a : composant axiale nommée Trainée

R_n : composant normale nommée Portance.

La trainée

La trainée est une friction aérodynamique entre les molécules de l'aire et la surface de la fusée. Pour calculer la trainée, on utilise généralement l'équation suivante en appelant R_x la

traînée. Elle est ensuite intégrée dans l'équation de mouvement :

$$R_x = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2,$$

où

ρ : est la masse volumique de fluide en kg/m^3 .

S : la surface de la référence de la fusée en m^2 .

C_x : le coefficient de traînée.

v : la vitesse de la fusée km/s .

Principaux systèmes de coordonnées

Afin de déterminer la position instantanée d'un point matériel, nous devons choisir d'abord un repère parmi les différentes repères les plus utilisés.

Les coordonnées cartésiennes

Le repère spatial

On appelle $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ les vecteurs unitaires d'un repère cartésien orthonormé direct centré en O . Ils permettent de positionner n'importe quel point dans l'espace. Par exemple, le point M peut se repérer par rapport au point O par le vecteur

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le repère du plan

Si le mouvement s'effectue dans le plan, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel M dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ à l'aide des coordonnées rectangulaires x et y , ou bien à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur position s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}.$$

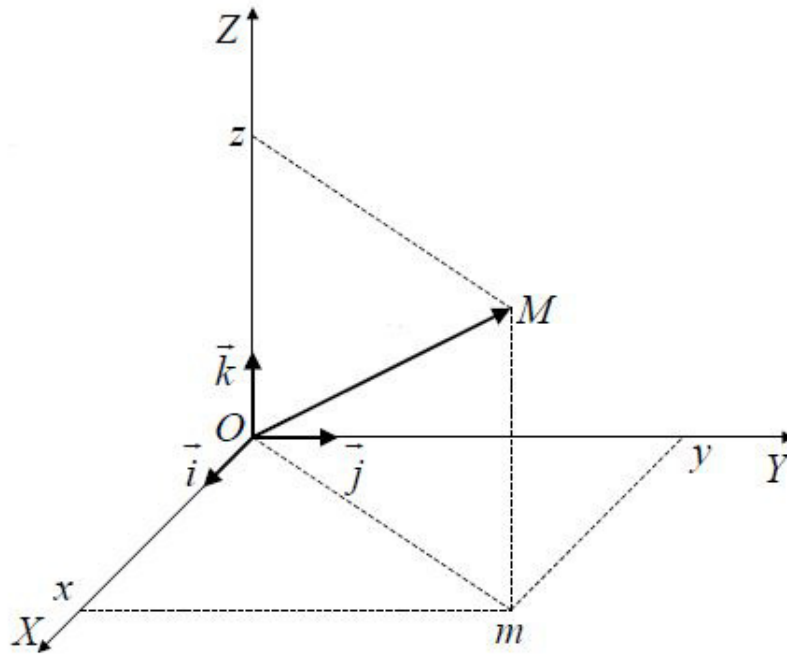


FIGURE 4.20 – Repère spatial

Le repère rectiligne

Si le mouvement est rectiligne, on se contente de l'axe OX tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x \vec{i}.$$

Les coordonnées polaires

Quand le mouvement est plan, là aussi, on peut repérer la position du mobile M par ses coordonnées polaires (r, φ)

r : Rayon polaire

φ : Angle polaire

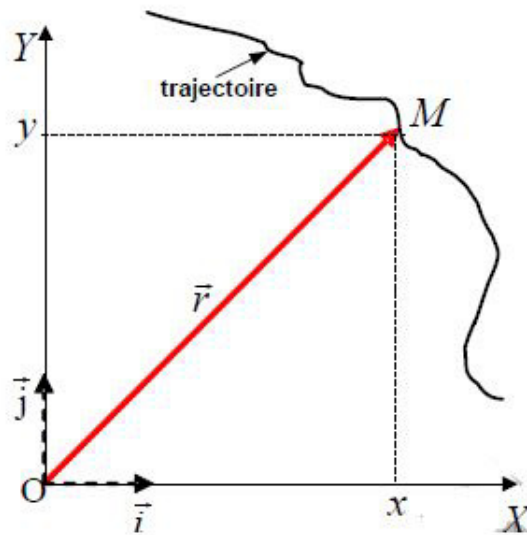


FIGURE 4.21 – Repère du plan

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r.$$

Nous pouvons écrire dans ce cas :

$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i} \sin(\varphi) + \vec{j} \cos(\varphi),$$

et

$$\vec{u}_r = \vec{i} \cos(\varphi) + \vec{j} \sin(\varphi).$$

Ainsi nous pouvons écrire le vecteur position en coordonnées polaires comme suite :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = A_r \vec{u}_r + A_\varphi \vec{u}_\varphi,$$

où (A_r, A_φ) représente les deux composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$.

Les relations qui lie les coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaire est :

$$x = r \cos(\varphi) \text{ et } y = r \sin \varphi.$$

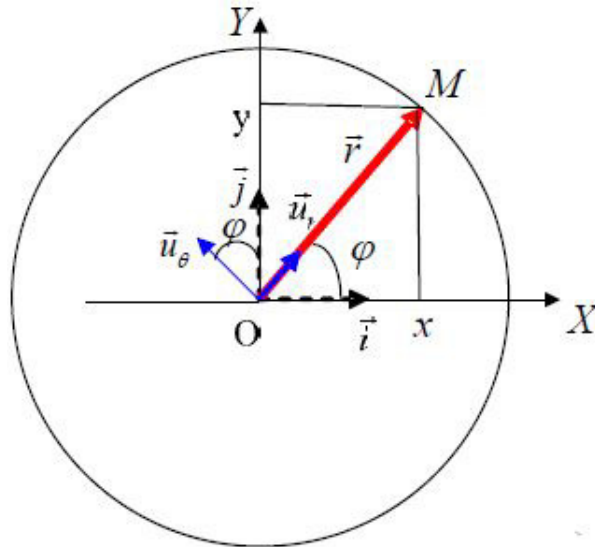


FIGURE 4.22 – Les coordonnées polaires

Produit Scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est un nombre scalaire égale au produit des normes des deux vecteurs par la cosinus de l'angle qu'ils forment $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}). \quad (4.54)$$

En posant x_u, y_u, z_u et x_v, y_v, z_v les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on montre que le produit scalaire de ces vecteurs est le nombres défini par la relation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v. \quad (4.55)$$

Orbite géostationnaire(GEO)

L'orbite *GEO* est une orbite circulaire située à environ $36000 Km$ (c'est la plus peuplée avec environ 300 satellites). La principale particularité de cette orbite assure que le satellite reste immobile par rapport au sol terrestre.

Un lancement direct est difficile du fait de l'altitude élevée. On va réaliser un premier lancer sur une orbite de transfert (GTO) puis opérer une manœuvre de circulation.

Modélisation du problème

On commence par écrire les équations du problème. Il faut prendre en compte la gravitation, la poussée des moteurs, la perte de masse due au carburant consommé et l'éjection des moteurs vides. Le vol est séparée en plusieurs phases qui dépendent du nombre de moteurs encore rattachés à la fusée.

En fin de vol, tout le carburant des moteurs a été consommé et le satellite utilise son propre carburant pour la procédure de circularisation. On ne prendra pas en compte cette étape. On cherche donc simplement à rejoindre l'orbite GTO.

Lorsqu'on possède les équations mise en ?uvre dans le mouvement, il reste une inconnue : c'est notre contrôle de la fusée. En effet la direction qu'on applique aux moteurs afin d'incliner la fusée durant son ascension est la seule donnée inconnue qu'on va chercher à optimiser.

Dans le quatrième chapitre, nous avons résolu deux types de problèmes pratiques en aérospatiale en les modélisant en des problèmes de contrôle optimal. La première partie nous avons traité un modèle de contrôle optimal non linéaire avec masse constante où le temps final fixé afin de maximiser le décalage latéral d'une véhicule aérospatiale se déplaçant d'une position initiale à une position finale, où la commande représente l'angle d'inclinaison de la véhicule aérospatiale. Dans la deuxième partie nous avons traité un modèle de contrôle optimal non linéaire avec masse variable où le temps finale est libre afin de maximiser le décollage latéral d'une fusée se déplaçant d'une position initiale à une position finale, où la commande représente la poussée et l'angle d'inclinaison de la véhicule aérospatiale.

Les problèmes considérés sont résolus théoriquement par le principe du maximum de Pontryagin, Numériquement, on a utilisé la méthode de tir et la méthode de discrétisation d'Euler, et on a remarqué les conditions relatives à les valeurs de l'état final sont satisfaites.

Les modèles utilisés dans cette thèse sont simples, il s'agit d'un premier pas vers un travail de modélisation beaucoup plus générale. Il serait intéressant de complexifier les modèles jusqu'à considérer des problèmes modélisés en trois dimensions avec deux moteurs.

Bibliographie

- [1] A. Agrachev and Y. Sachkov, *Regularity of minimizers and of adjoint states for optimal control problems under state constraints*, Convex Analysis Vol 13, 2004.
- [2] M. Aidene and K.Louadj. Adaptive method for solving optimal problem wiht state and control variables, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [3] M. Aidene and K.Louadj. A problem of optimal control with free initial state, *ESAIM : Proceedings*, Vol 35, pp. 184-190, 2012,
- [4] M. Aidene, I. L. Vorobev, and B. Oukacha. *Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax*, Performance Index Computational Mathematics and mathematical Physics 45 vol 10, pages 1691-1700, 2005.
- [5] M. Aliane, N. Moussouni and M. Bentobache, Numerical methods for the optimal control of the heel angle of a rocket, *International Journal of Mathematics in Operations Research*, 2020.
- [6] M. Aliane, M. Bentobache, N. Moussouni and Philippe Marthon, Direct method to solve linear-quadratic optimal control problems, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2021.
- [7] M. Aliane, N. Moussouni, M. Bentobache, Optimal control of a rectilinear motion of a rocket. *Statistics, Optimization & Information Computing*, **8** (2020),281-295.
- [8] M. Aliane, N. Moussouni and M. Bentobache, Nonlinear optimal control of the heel angle of a rocket, *6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT'19)*; Paris, France, April 23-26 ; 2019.

- [9] M. Aliane, N. Moussouni, M. Bentobache, Contrôle optimal non-linéaire de l'angle d'inclinaison d'une fusée, *Conférence internationale Tendances dans les Applications Mathématiques en Tunisie Algérie Maroc (TAMTAM 2019)*, Tlemcen, Algérie, 24-27 Février, 2019.
- [10] M. Aliane, N. Moussouni, M. Bentobache, Optimal control of a rectilinear motion of a rocket, *Workshops on Pure and Applied Mathematics*, University of Msila, Algeria, Decembre 17-18, 2018.
- [11] M.S. Aronna, J.F. Bonnans, and P. Martinon. *A shooting algorithm for optimal control problems with singular arcs*, J. Optim. Theory Appl, 158(2) :419-459, 2013.
- [12] J. Awerjcewicz, *Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems, State-of-the-Art, Presperctives and Applications*, Heidelberg, Germany : Springer, 2008.
- [13] N. V. Balashevich, R. Gabasov, and F. M. Kirillova. *Numerical methods of program and positional optimization of the linear control systems*, Zh Vychisl Mat Fiz vol 40 n°6, pages 838-859, 2000.
- [14] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.
- [15] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, and H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, Second edition, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [16] R. E. Bellman. *Dynamic programming*, Princeton University Press Princeton NJ, 1963.
- [17] M. Bentobache, M. Telli and A. Mokhtari, A Sequential Linear Programming Algorithm for Continuous and Mixed-Integer Nonconvex Quadratic Programming, *Optimization of Complex Systems : Theory, Models, Algorithms and Applications, WCGO 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing Springer, Cham*, **991** (2020), 26-36.
- [18] M. Bentobache, *Sur les méthodes mathématiques de la programmation linéaire et quadratique* thèse de doctorat université A.MIRA-BEJAIA, 2013.
- [19] M. Bentobache, M. O. Bibi *Méthodes Numériques de la Programmation Linéaire et Quadratique*, 208 pages, Presses Académiques Francophones, Allemagne, 2016.

- [20] M. Bergounioux, *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*, Dunod, Paris, 2001
- [21] M.O. Bibi, and M. Bentobache, *A hybrid direction algorithm for solving linear programs*, International Journal of Computer Mathematics, vol. 92, no. 1, pp. 201–216, 2015.
- [22] M. O. Bibi, *Methods for solving linear-quadratic problems of optimal control*, Ph.D thesis, University of Minsk, 1985.
- [23] M. O. Bibi, *Support method for solving a linear-quadratic problem with polyhedral constraints on control* Optimization, vol. 37, pp. 139-147, 1996.
- [24] J.F. Bonnans, X. Dupuis, and L. Pfeiffer, *Second-order sufficient conditions for strong solutions to optimal control problems*, ESAIM-COCV, 20(3) :704-724, 2013.
- [25] Chinchuluun A, Enkhbat R, Pardalos P.M. A novel approach for nonconvex optimal control problems, *Optimization : A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, **58** (2009), 781-789.
- [26] Y. Chitour, F. Jean, and E. Trélat, *Singular trajectories of control affine systems*, SIAM J Control Optim vol 2, pages 1078-1095, 2008.
- [27] J.N.C. Gonçalves, H.S. Rodrigues, and M.T.T. Monteiro, *On the dynamics of a viral marketing model with optimal control using indirect and direct methods*, Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 6, pp. 633–644, 2018.
- [28] A. Cox, *Optimal Control of a Two-Stage Rocket*, AAE 508 Project Proposal, Aeronautical and Astronautical Engineering, Purdue University, April 29, 2014
- [29] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [30] J. P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles 3e édition*, EDP SCIENCES, page 343, 2006.
- [31] R. Denysiuk, H.S. Rodrigues, M.T.T. Monteiro, L. Costa, I. EspiritoSanto and D.F.M. Torres, *Multiobjective approach to optimal control for a dengue transmission model*, Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 3, no. 3, pp. 206–220, 2015.

- [32] L.D. Duncan, *Basic considerations in the development of an unguided rocket trajectory simulation model*, Technical report N^o 5076, Atmospheric Sciences Laboratory, United States Army Electronics Command, 1966.
- [33] R. Enkhbat, S. Batbileg, N. Tungalag, A. Anikin, A. Gornov, *A Global Optimization Approach to Nonzero Sum Six-Person Game*, In *Frontiers in Games and Dynamic Games*, Birkhäuser, Cham, 219-227, 2020.
- [34] Enkhbat, R., T. V. Gruzdeva, and M. V. Barkova. *DC programming approach for solving an applied ore-processing problem*, *Journal of Industrial & Management Optimization* 14.2, 613-623, 2018.
- [35] C.R. Hargraves and S.W. Paris, *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation*, *AIAA 1. Guidance* 10, 338-342, 1987.
- [36] P. Howlett, *The Optimal Control of a Train*, *Annals of Operations Research*, vol. 98, pp. 65–87, 2000.
- [37] M. Z. Ghanem. Direct method for solving optimal control problems with kinks. *Journal of Optimisation Theory and Applications*, **14**(4) (1974).
- [38] R.R. Garrett, *Numerical Methodes For Solving Optimal Control Problems*, Master Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 2015.
- [39] R. Gabasov, F.M. Kirillova, and S.V. Prischepova, *Optimal feedback control*, London, Springer-Verlag, 1995.
- [40] R. Gabasov et F. M. Kirillova, *Méthodes de programmation linéaire*, volumes 1, 2 et 3. Edition de l'Université, Minsk, 1977, 1978 et 1980 (en Russe).
- [41] F. Ghomanjani, S. Ghaderi, M. H. Farahi, *Solving the Optimal Control of Linear Systems via Homotopy Perturbation Method*, *Intelligent Control and Automation*, Vol 3, pp. 26-33, 2012.
- [42] P. E. Gill and W. Murray, *Numerical methods for constrained optimization*, Academic Press, Inc., (London) LTD, 1974.

- [43] E. A. Kostina and O. I. Kostyukova, *An algorithm for solving quadratic programming problems with linear equality and inequality constraints*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 41, no. 7, pp. 960-973, 2001.
- [44] R. Gabasov, F. M. Kirillova and S. V. Prischepova, *Optimal Feedback Control*, Springer-Verlag, London, 1995.
- [45] H.B. Keller, *Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems*, SIAM, 1976.
- [46] N. Khimoum, M.O. Bibi, Primal-dual method for solving a linear-quadratic multi-input optimal control problem, *Optimization Letters*, **14** 2019, 653-669.
- [47] A. Kheirabadi, A. M. Vaziri, S. Effati *Solving optimal control problem using Hermite wavelet*, Numerical Algebra, Control and Optimization, Vol 9, pp. 101-112, 2019.
- [48] D. Kraft, *On converting optimal control problems into nonlinear programming codes*, in : NATO ASI Series, Vol. F15, Computational Mathematical Programming, ed. K. Schittkowski pp. 261-280, Springer, 1985.
- [49] P. Lascaux et R. Theodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : Méthodes directes*, volume 1. Dunod, Paris, 2000.
- [50] K. Louadj, P. Spiteri, F. Demim, M. Aidene, A. Nemra, and F. Messine, *Application Optimal Control for a Problem Aircraft Flight*, SIAM Journal on Imaging Sciences, vol. 11, no. 1, pp. 156–164, 2018.
- [51] K.Louadj, *Résolution des problèmes paramétrés en contrôle optimal* Thèse de doctorat, page 116, 2012.
- [52] M. Matinfar, M. Dosti *Solving Linear Optimal Control Problems Using Cubic B-spline Quasi-interpolation* MATEMATIKA, Vol 34, N 2, pp. 313-324, 2018.
- [53] H. H. Mehne, and A. H. Borzabadi, *A numerical method for solving optimal control problem using state parametrization*, Numerical Algorithms, 42(2) : 165-169, 2006.
- [54] N. Moussouni, and M. Aidene, *An Algorithm for Optimization of Cereal Output*, Acta Applicandae Mathematicae, vol. 11, no. 9, pp. 113–127, 2011.

- [55] N. Moussouni, and M. Aidene, *Optimization of cereal output in presence of locusts*, An International Journal of Optimization and Control : Theories & Applications, vol. 6, no. 1, pp. 1–10, 2016.
- [56] O. Oukacha, *Direct method for the optimization of optimal control problems*, PhD. Dissertation, University of Tizi-Ouzou, Algeria, 2016 (in french).
- [57] Ouazna Oukacha. Optimisation de consommation pour un véhicule de type voiture. *Mathématiques générales. Université de Toulon*, (2017).
- [58] B. Oukacha, *Résolution de problème de contrôle optimal* thèse de doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2005.
- [59] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, New York : Intersciences Publisher, 1962.
- [60] L. Pontryagin and al. *Mathematical theory of optimal processes* Eds Mir Moscou, page 504, 1974.
- [61] G. Picot, *Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in the Earth-Moon system using low propulsion*, Discrete Cont. Dynam. Syst. Ser. B 17, no. 1, 245-269, 2012,
- [62] S. Rosa, and D.F.M. Torres, *Parameter Estimation, Sensitivity Analysis and Optimal Control of a Periodic Epidemic Model with Application to HRSV in Florida*, Statistics, Optimization & Information Computing, vol. 6, no. 1, pp. 139–149, 2018.
- [63] S. P. Sethi and G. L. Thompson, *Optimal control theory applications to management science and economics*, Springer, page 504, 2000.
- [64] E. Trélat, *Optimal control : theory and applications*, Paris : Vuibert, Concrete mathematics collection, 2005 (in french).
- [65] R. Vinter, *Optimal control. Foundations and Applications*, Boston, MA : Birkhauser Boston, Inc, 2000.
- [66] R. J. Vanderbei and D. F. Shanno, *An Interior-Point Algorithm for Nonconvex Nonlinear Programming*, Computational Optimization and Applications, Vol. 13, pp. 231-252, 1999.

-
- [67] Wenjuan Jia, Xiqin He, Liangdong Guo, *The Optimal Homotopy Analysis Method for solving Linear Optimal Control Problems*, Applied Mathematical Modelling, 2017.
- [68] S. A. Yousefi, M. Dehghan, and A. Lotfi, *Finding the optimal control of linear system via He's variational iteration method*, International journal of Computer Mathematics, 87(5) : pp. 1042-1050, 2010.
- [69] M.A. Zaitri, M.O. Bibi, and M. Bentobache, *A hybrid direction algorithm for solving optimal control problems*, Cogent Mathematics & Statistics, vol. 6, pp. 1–12, 2019.
- [70] J. Zhu, and R. Zeng, *A mathematical formulation for optimal control of air pollution*, Science in China, vol. 46, no. 10, pp. 994–1002, 2003.