REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI-LAGHOUAT

MEMOIRE

Présentée à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Option: Mathématiques appliquées

Présentée par

Hadj Aissa Hadjer

THÈME

Etude théorique d'une èquation hyperbolique non linéaire avec terme source et déssipatif.

Soutenue le : 22/05/2017, devant le Jury composé de:

Membre	Grade & Etablissement	Qualité
Dr. Boukhatem Yemna	MC A. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Président du Jury
Dr. Abita Rahmoune	MC B. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Encadreur
Dr. Ouchenane Djamel	MC B. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Examinateur
Dr. Belhousse Razique	MAA. Univ. Amar Telidji, Laghouat	Examinateur

+

ملخص

في هَاته المذكرة، نَعتبر و ندرس مسَالة حدودية مكَافِئة نصف خطية، بوجود طرف منبع و طرف مبَدِد غير خطي، تحت شروط إبتدَائِية و مع بعض الفرضيَات المنَاسبة علَى المعطيَات، بالِاستنَاد إلَى تقنيَات التحليل الريَاضيَاتي، نتَائِج علَى نظرية وجود الحل الشَامل، اَلوحدَانية، اَلسلوك المتقَارب، تم الحصول عليهَا.

Résumé

Dans ce mémoire, on considère un problème aux limites semi linéaires avec un terme source et un terme dissipatif non linéaire. Sous certaines conditions sur les données initiales, on se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, théorème de compacité et celle de l'ensemble stable ainsi que quelques techniques récentes d'analyse mathématique, des résultats importants sur l'existence globale, le comportement asymptotique des solutions ont été obtenus.

Abstract

In this memorandum, we consider a semi-linear hyperbolic problem with source term and nonlinear dissipative term. Under some hypothesis on the initial data, by basing on Faedo-Galerkin approximations, compactness and stable set methods, the important results on the global existence, asymptotic behavior of solutions are given.

*

cherſ maman et papa

Boudaoud Fatiha et Ibrahim

**

Je dédie ce travail a celle qui ma donné la vie, le symbole de tendresse qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, a ma mère.

A mon père, école de mon enfance qui a été mon ombre durant toutes les années des études qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager me donner de l'aide et a me protéger,
Que dieu les gardes et les protèges.

A mes adorables surs

A mon frère

A toute ma famille ma grand-mère, mon grand-père, mes oncles, mes tentes, mes cousins et mes cousines.

A mes amis

A tous ceux qui me sont chères , A tous ceux qui m'aiment, A tous ceux que j'aime

A tous mes professeurs qui m'ont enseigner le long de mon parcoure éducatif,

***

Remerciements

Avant tout chose, je tiens à remercier monsieur Abita Rahmoune ensginant à l'université de Laghouat qui m'a fait l'honneur d'accepter de poursuivre ma sujet de ma mémoire sous sa direction, et il n'a pas hésité de me fleurer par ses idées durant la préparation de ce mémoire.

Je remercie Dr Boukhatem Yamna, professeur à l'université de Laghouat, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance.

Je remercie sincèrement Dr Ouchenane Djamel, et Dr Belhousse Razique d'avoir accepté de lire mon travail et de faire partie du jury de ce mémoire. Leur présences constituent un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous avez portés à mon travail.

A tous les professeur qui m'ont enseigner dans mon parcours en MI .

Je voudrais également remercier tous les membres du laboratoire d'Informatique et de Mathématiques (LIM) à l'université de Laghouat.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements et grande gratitude à ma mére, mes soeurs, à mes proches pour leur soutien constant et encouragement. Et surtout de m'avoir supporté toutes ces années, et à qui je dédie ce travail.

Hadj Aissa Hadjer

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE-RAPPEL DE CERTAINS RÉSULTATS

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ régulière. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'existence globale, régularité, comportement asymptotique et stabilité de la solution d'un problème hyperbolique semi linéaire avec une dissipation non linéaire et un terme source :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha g\left(u'\right) = b\left|u\right|^{p-2} u \text{ dans } \Omega \times (0, T)\,, \tag{1}$$

où u, $|u|^{p-2}\,u$ et g désignent le vecteur du déplacement, le terme source, la fonction de dissipation $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante et globalement de Lipschitz telle que $g\,(0) = 0,\ \alpha, b > 0$.

La fonction u cherchée doit vérifier en outre les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$u = 0 \text{ sur } \Sigma, \tag{2}$$

$$u'(x, 0) = u_1(x),\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \tag{3}$$

avec $u_0(x)$, $u_1(x)$ sont des fonctions données.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres :

– Dans le premier chapitre ,il se compose du rappel et des outils mathÃl'matiques qu'on a utilisÃl' dans ce mÃl'moire
– Dans le second chapitre sous certaines hypothèses sur les données on se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité, la méthode de l'enssemble stable ainsi que et le théorème monotonie, nous allons démontrer l' existence global et l'unicité d'une solution faible. Ensuite, sous certaines conditions supplémentaires sur la fonction g nous allons démontrér la régularité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

– Dans le troisième chapitre, on se basant sur les techniques introduites et développées par [6], [10], [1], [9], [11], [3, 4] nous allons prouver la stabilité non linéaire des solutions. Les techniques utilisées sont celles de Lypounov basées sur l'application des inégalités et des intégrales appliquées dans [10], [1], [6] et [8] et en affaiblissant les conditions $|g(x)| \to \infty$ quand $|x| \to \infty$.

Notations

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ on a

$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω
Γ	La frontière de Ω supposée souvent régulière .
Γ_i $(i = \overline{1,2})$	Une partition de la frontière Γ .
η	La normale extérieure unitaire à Γ
v_η, v_τ	Les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v .
$C^1(\overline{\Omega})$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$
$D(\Omega)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables . et à support compact contenu dans Ω. .
$D'(\Omega)$	L'espace des distributions sur Ω.
$D'(0,T;X)$	L'espace des distributions des fonctions $u : [0,T] \to X$
$(.,.)_X$	Le produit scalaire d'un espace de Hilbert X .
$x_n \rightharpoonup x$, $(x_n \to x)$	La convergence faible (forte) de la suite (x_n) vers l'élément x .
$\Vert.\Vert_X$	La norme de X .
$\Vert.\Vert_{L^p(0,T;X)}$	La norme de l'espace de Sobolev $L^p\,(0,T;X)$.
$\mathcal{L}$(X)	L'espace des applications linéaires et continues de X dans X .

.

$W^{1,p}\,(\Omega) = \{v \mid v \in L^p\,(\Omega)\,,\ D_i v \in L^p\,(\Omega)\,,\ i = 1,...,n\}\,,\ 1 \le p < +\infty$	
$\Vert v\Vert_{W^{1,p}(\Omega)} =$	$\Vert v\Vert_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \Vert D_i v\Vert_{L^p(\Omega)}$.
$C(0,T.H)$	L'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans H .
f', f''	Les dérivées premières et secondes de f par rapport aux temps
$\partial_i f$	La dérivée partielle de f par rapport à la i éme composante x_i .
$\nabla f = grad f$	Le gradient de f .
$\mathcal{L}(X,Y)$	L'espace des applications linéaires et continues de X dans Y .

Principales normes et semi-normes utilisées

$\lvert f\rvert = \left(\int_\Omega \lvert f(x)\rvert^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $L^2(\Omega)$
$\lvert f\rvert_1 = \left(\sum_{i=1}^n \left\lvert\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Semi norme sur $H^1(\Omega)$
$\Vert f\Vert = \left(\lvert f\rvert^2 + \lvert f\rvert_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $H^1(\Omega)$
$\Vert f\Vert_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \Vert f(s)\Vert_X^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$	Norme sur $L^p(0,T;X)$
$\lvert v\rvert = (v.v)^{\frac{1}{2}}$	Norme sur $\mathbb{R}^n$

CHAPITRE 1

RAPPELES SUR LES OUTILS MATHÉMATIQUE

1.1 Topologie faible

1.1.1 Définition et proprités élementaire de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$. On désigne l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

Lorsque $f \in E'$ on obtient une famille $(\varphi_f) \in E'$.

Definition 1.1.1 (Topologie faible $\sigma(E, E')$) *La topologie faible $\sigma(E, E^{'})$ sur E est la topologie moins fine sur E rendant continue toutes les appplication $(\varphi_f) \in E'$*

Proposition 1.1.2 *La topologie faible $\sigma(E, E^{'})$ est séppareé*

Proposition 1.1.3 **i** $(x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E, E')) \Leftrightarrow (\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E')$

ii *Si* $x_n \longrightarrow x$ *fortement alors* $x_n \longrightarrow x$ *faiblement dans* $\sigma(E, E')$

iii *Si* $x_n \rightharpoonup \quad x$ *fortement pour* $\sigma(E, E)$,*alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$

iv *Si* $x_n \rightharpoonup \quad x$ *fortement pour* $\sigma(E, E') \quad$ *et si* $f_n \rightharpoonup f$ *fortement dans* $E' \quad$ *alors* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$ *puisque* $\|f_n - f\|_E \longrightarrow 0$

Démonstration. [i] Soit x_n une suit de E alors $x_n \longrightarrow x$ ssi $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ pour tout $i \in I$ et d'apres 1.1.1 alors :

$$x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E^{'}),\ \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$$

[ii]D'apres 1.1.2 et puisque :

$$|\langle f, x_n\rangle - |\langle f, x\rangle|| \leqslant \|f\|\|x_n - x\|$$

alors $x_n \longrightarrow x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$
D'apres le théoréme banach-steinhaus, il suffit donc de vérifier que chaque $f \in E'$ l'ensemble $(\langle f, x_n\rangle)_n$ est bornée , et la suite $\langle f, x_n\rangle$ converge vers $\langle f, x\rangle$ (en particulier elle est bornée , soit $f \in E'$, on a :

$$|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n\|$$

et

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\|$$

et on a :

$$\|x\| = \sup |\langle f, x\rangle| \leqslant \liminf \|x_n\|$$

[iv] On a d'apres i et iii :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle\langle f, x\rangle| &\leqslant |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |f, x_n - x\rangle| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_n + |\langle f, x_n - x\rangle| \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.4 *Lorsque E est de dimension finie , la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coincicident . En particulier une suit (x_n)converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Remarque 1.1.5
- *Les ouverts(resp les fermés) de la topologie faible $\sigma(E, E')$ soit aussi ouvert (resp fermés) pour la topologie forte*
- *Lorsque E est de dimension infinie la topologie faible $\sigma(E, E')$ est* ***strictement moins fine*** *que la topologie forte (i.e) il exsite des ouvert (resp des fermés) pours la topologie forte qui ne sont pas ouvert (resp fermés) pour la topologie faibles par exemple :*
  l'ensemble $s = x \in E : \quad \|x\| = 1$ n'est jamais fermes pour la topologie faible $\sigma(E, E')$

1.1.2 Ensembles convexes et opérateurs linéaires

Tout ensemble fermé pour la topologie faible $\sigma(E, E^{'})$ est fermé pour la topologie forte d'apres la remaque que la réciproque est fausse en dimension infinie toute fois on va montrer que les ensembles convexes ces deux notions

Théorème 1.1.6 *Soit $c \subset E$ convexe , alors c est faiblemnt fermé pour $\sigma(E, E^{'})$ si et seulement s'il est fortement fermé*

Théorème 1.1.7 *Soient E et F deux espace de Banach , soit T un opérateur linéaire et continue de E dans F , alors T est continue $\sigma(E, E')$ dans F faible $\sigma(F, F')$ et réciproquement .*

Démonstration.

1. Il suffit de vèrifier que pour tout $f \in F'$, l'application $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ est continue de E faible $\sigma(E, E')$ dans $\mathbb{R}$ et une forme lineaire et continue sur E consequement elle est aussi continue par la topologie faible $\sigma(E, E')$
2. supposant que T est lineaire et continue de E faible dans F faible . Alors $G(t)$ est fermé dans $E\times F$ pour la topologie $\sigma\,(E \times F, E' \times F')$ et fortiori $G(t)$ est fermé dans $E\times F$ pour la topologie forte

■

1.2 La topologie faible* $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme duale : $\|f\| = \sup |\langle f, x\rangle|$
,
Et soit E'' son bidual,ie le duale de E' muni de la norme :

$$\|\xi\| = \sup |\langle \xi, f\rangle|$$

On a une **injection canonique** $J : E \longrightarrow E''$ dèfinie comme suite , et soit $x \in E$ fixé , l'application on obtient :

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E' \subset \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

constitué une forme linéaire continue sur E' i.e un élément de E'' noté Jx. On a donc

$$\langle Jx, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \quad ,\forall x \in E\ ,\ \forall f \in E'.$$

Il est claire pour J est lineair et que J est une isométrie i.e $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, En effet,

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

On va définir maintenant une autre topologie sur E' :
la topologie faible $*$ que l'on note $\sigma(E', E)$. Pour chaque $x \in E$ on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

On obtient une famille d'application $(\varphi_x)_{x\in E}$ de E' dans $\mathbb{R}$.

Definition 1.2.1 *La topologie faible* $*$
La topologie faible $*$ *désignée aussi par* $\sigma(E', E)$ *est la topologie la moins fine sur* E' *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_x)_{x\in E}$.
Comme $E \subset E''$, *il est claire pour la topologie* $\sigma(E', E)$ *est moins fine que la topologie* $\sigma(E', E'')$, *Autrement dit la topologie* $\sigma(E', E)$ *possède moins d'ouverts (resp. fermés) que la topologie* $\sigma(E', E'')$.

Proposition 1.2.2 *La topologie faible* * $\sigma(E', E)$ *est séparée.*

Théorème 1.2.3 *Soit* (f_n) *une suite de* E'. *On a*
- *i)* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle\ \forall x \in E$.
- *ii) Si* $f_n \to f$ *fortement, alors* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E', E'')$,
  si $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E', E'')$, *alors* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$.
- *iii) Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq limInf\|f_n\|$.
- *iv) Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$, *et si* $x_n \to x$ *fortement dans E, alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Remarque 1.2.4 *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$ *(ou même si* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E', E'')$ *) et si* $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E, E')$ *on ne peut pas conclure que* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

2. *Lorsque E est de dimension finie les trois topologie forte,* $\sigma(E', E'')$ *et* $\sigma(E', E)$ *coÃ¯ncident. , eneffet J est alors surjective de E sur* E'' *puisque* $\dim E = \dim E' = \dim E''$ *et par consequent* $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$
3. *On verra dans la suite que la boule unité fermé d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte,On comprend alors l'importance fondamental de la topologie* $\sigma(E', E)$

Théorème 1.2.5 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)***
L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ *est compact pour la topologie faible* $*$ $\sigma(E', E)$.

1.3 Eespace réflexifs

Definition 1.3.1 *Soit E un espace de Banach, et soit J l'injection canonique de E dans* E''.
On dit que E est ***réflexif*** *si* $J(E) = E''$
(Lorsque E est reflexif on identifie implicitement E et E''*,i.e :* $E = E''$*).*

Théorème 1.3.2 ((Kakutani)) *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si :*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\},$$

est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Corollaire 1.3.3 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si* E' *est réflexif.*

2. *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Théorème 1.3.4 *Soient E et F deux espace de Banach reflexifs ,*
soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur lineaire non-borné fermé avec $\overline{D(A)} = E$ Alors $D(A^*)$ est dense dans F'.

1.4 Espace séparables

Definition 1.4.1 *On dit qu'un espace métrique est séparable, s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Proposition 1.4.2 *Soit E un espace métrique séparable, et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable.*

Théorème 1.4.3 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors E est séparable.*

Corollaire 1.4.4 *Soit E un espace de Banach.*
Alors (E réflexif et séparable) $\Leftrightarrow$ (E' réflexif et séparable).

Théorème 1.4.5 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie $\sigma(E', E)$.*
Reciproquement, si $B_{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$, alors E est séparable.

Théorème 1.4.6 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors B_E est métrisable pour la topologie $\sigma(E, E')$.*
Et réciproquement.

Corollaire 1.4.7 *Soit E un espace de Banach séparable, et soit (f_n) une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.*

Théorème 1.4.8 *Soit E un espace de Banach réflexif, et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Théorème 1.4.9 ***(Eberlein-Šmulian)***
Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$.Alors E est réflexif.

1.5 Espace $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue de :

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ integrable}\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$f \longmapsto \|f\| = \int_\Omega |f(x)| dx$$

Cette application est une semi- norme .
On va définie une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad f \backsim g \Leftrightarrow \quad \forall x \in \Omega \quad f(x) = g(x) \quad p.p.$$

Definition 1.5.1 *L'esemble Quation $\mathcal{F} \setminus \mathbb{R}$ muni de la norme*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| dx$$

S'appelle l'espace de Lebesque est sera noté par L^1

1.5.1 Définition et propriétés élémentaire des espaces L^p

Definition 1.5.2 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \quad \textit{est mesurable} \quad \textit{et} \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note :

$$\|f\|_{L^p} = [|f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$$

On verifiera ulterieuremment que $\|.\|_{L^p}$ est une norme

Definition 1.5.3 *On appelle espace de Lebesgue de puissance d'ordre ∞ l'espace, noté $L^\infty(\Omega)$, des classes des fonctions mesurables au sens de Lebesgue, définies presque partout sur Ω a valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant :*

$$ess. \sup |f(x)| < +\infty$$

Definition 1.5.4 *On pose :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \quad \textit{est mesurable et il existe une constante } c \quad \textit{telque} : |f(x)| \leqslant c \quad p.p \quad sur \quad \Omega\}$$

On note :

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c : |f(x)| \leqslant c \quad p.p \quad sur \quad \Omega\}$$

On verifiera ultérieurement que $\|.\|_{L^\infty}$ est une norme.

Proposition 1.5.5 *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :*

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

(Avec : $\int_\Omega u(x)v(x)dx$ pour les fonctions réelles).

Notation 1.5.6 *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on dèsigne par $p\prime$ l'exposant conjugué de p ie : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p\prime} = 1$.*

1.6 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Definition 1.6.1 *Soit $\Omega = [a,b]$ un intervalle ouvert borne de $\mathbb{R}$,On considére l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ définie comme suite :*

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1,2,...,n\},$$

bien ètendu, la dèrivation est à comprendre au sens des distribution. En autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe une fonctions g dans $L^2(\Omega)$ telle que :

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega) : \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi$$

La fonction $g \in L^2(\Omega)$ est alors unique on la note u' On munit $H^1(\Omega)$ de la topologie associe au produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \nabla v \end{aligned}$$

La norme induite par $\langle .,. \rangle$ est noté $\|.\|_{H^1}$ est verifie :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Proposition 1.6.2 *On a les résultats suivantes :*

1. *$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert sèparable*
2. *$H^1(\Omega)$ s'injecte de faÃğon compacte dans $C^0(\overline{\Omega})$*
3. *$H^1(\Omega)$ s'injecte de faÃğon continue dans $L^2(\Omega)$*

1.6.1 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definition 1.6.3 *Soit* $1 \le p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_c^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

On note : $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}$ *est un espace de Banach séparable, il est réflexif si* $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* $H^1(\Omega)$.

1.6.2 L'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Notation : On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.
On identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual.
On a le schéma suivant

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.
Si Ω est borné on a

$$W_0^{1,p} \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \quad , Si\ \frac{2n}{n-2} \le p < \infty,$$

avec injections continues et denses.

1.7 Complements divers

1.7.1 Formul de Green

Soit Ω un ouvert régulier de class C^1, Soit W une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ a support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$ alors, verifie la formulE de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(x)\eta_i(x)dx$$

Où, η_i la i éme composante de la vacteur exterieure unitè© de Ω.

Corollaire 1.7.1 *(*Formul d'integration par parities*)*
Soit Ω *un ouvert régulier de class* C^1 *et soit u et v deux fonctions de classe* $C^1(\overline{\Omega})$ *a support borneé dans le fèrme* $\overline{\Omega}$. *Alors elle vèrifiant la formule d'intégration par partie :*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)ds$$

Corollaire 1.7.2 *Soit Ω un ouvert règulier de classe C^1 et soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$. Tout deux a support borneé dans la fermé $\overline{\Omega}$ alors elle est vérifie la formule d'integration par partie suivante :*

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x)dx = -\int_{\Omega} \nabla u(x)\nabla v(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)v(x)ds.$$

où : $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i<N}$ *est le vecteur gradient et* $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta$.

1.7.2 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.7.3 *Inégalité de Poincaré-Friedrichs Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ alors il existe une constante C tel que :*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration. (∇v exsiste est carre sommable)
On peut écrire :

$$v(x) = \int_{\Omega} \nabla v(y)dy$$

Alors, pour $x \in \Omega$

$$v^2(x) = \left(\int_{\Omega} \nabla v(y)dy\right)^2 \leqslant \int_{\Omega} \nabla v(y)$$

$$\int_{\Omega} v^2(x)dx \leqslant \int_{\Omega}[\int_a^x (\nabla v(y))^2 dyx(x-a)]dx \leqslant \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \int_{\Omega} dx$$

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{(c)^2}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{(c)}{\sqrt{2}}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

Dans plus qu'a une dimension on a :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

■

Remarque 1.7.4 *Pour une fonction v dont les dérivées n'existent qu'au sens de distribution on observe que puique $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans H^m (ou $\Omega = (a,b)^d$ il existe une suit φ_k des fonction $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ qui converge a v donc, on peut démentrer l'inegalite de Poincarè© pour un $v \in H^1(\Omega)$ en la dèmontrons pour φ_n et en prenant la limite lorsque $k \longrightarrow \infty$*

On peut utiluser l'inegalitéde Poincaré-Friedrichs pour démontere le lemme suivant :

Lemme 1.7.5 *L'expression :*

$$|u|_\Omega = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalent a la norme sur $H_0^1(\Omega)$ dans le sens qu'il existe des constants C_1 et C_2 tells que :

$$C_1|u|_\Omega \leqslant \|u\|_\Omega \leqslant C_2|u|_\Omega$$

1.7.3 lemme de Gronwall

Lemme 1.7.6 *Soit φ, ψ et y trois fonctions continue sur un segment $[a,b]$ à valeur positive et verifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b] : y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds \tag{1.1}$$

alors

$$\forall t \in [a,b] : \quad y(t) \leq \varphi(t) + \left(\int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds \right) \exp\left(\int_s^t \psi(\lambda)\, y(\lambda)\, d\lambda \right)$$

Démonstration. On suppose que : $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$ en multipliant les deux membre de l'inégalité 1.1 par $\psi(t)$ on obtient :

$$F'(t) - \psi(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t)$$

Ce qui s'ecrit aussi :

$$G'(t) \leqslant \varphi(t)\psi(t) \exp\left(- \int_a^t \psi(s)ds \right)$$

D'ou :

$$y(t) \leqslant \varphi(t) + G(t) \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds \right)$$

■

Corollaire 1.7.7 *Soient ψ et y deux fonctions continues definies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ verifiant :*

$$\exists c \geqslant 0 \quad / \quad \forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant c + \int_a^t \psi(s)y(s)ds;$$

alors :

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leqslant c + \exp\left(\int_a^t \psi(s)ds \right).$$

Corollaire 1.7.8 *Soit $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de class C^1 verifiant :*

$$\exists \alpha > 0 \quad , \quad \exists \beta \geqslant 0 \quad , \quad \forall t \in [a,b], \quad \|y\prime(t)\| \leqslant \beta + \alpha \|y(t)\|.$$

Alors :

$$\forall t \in [a,b] \quad , \quad \|y(t)\| \leqslant |y(a)| \exp^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(\exp^{\alpha(t-a)} - 1).$$

Pour application :
Soit $x : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\|x'(t)\| \leqslant \alpha \|x(t)\| + \beta \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors :

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\| + \beta(t_1 - t_0).$$

puisque :

$$\|x(t)\| = \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|x\prime(s)\| ds \leqslant \|x(t_0)\| + \beta(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha \|x(s)\| ds$$

1.8 Inégalité de Young et de Hölder

– Soit a, b et soit $p, q \in (1, +\infty)$ telque :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

on dit que p et q sont conjugué au sens de Young alors :

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Démonstration. On poura considrer la fonction $\Theta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par :

$$\Theta(a) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q - ab$$

est derivable par :

$$\Theta'(a) = a^{p-1} - b$$

cette dérivée s'annule lorsque $a = b^{\frac{1}{p-1}}$ est négative pour $a < b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a > b^{\frac{1}{p-1}}$ on a :

$$\Theta(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p} b^{\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{q} b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = 0$$

Ainsi $\Theta(a) \geqslant 0$ ie :

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

■

– Soit de noveau $p, q \in (1, +\infty)$ telque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, En utilisant aute montron que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu$$

Optimiser cette inegalite par rapport á λ on obtient :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Cette inegalite reste vérifié pour $p = 1$ et $q = +\infty$

Démonstration. Soit $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ d'aprés **l'inegalit**è **de Young** pour $\lambda > 0$, pour u presque tout x :

$$|fg|(x) = |\lambda f(x) \frac{g(x)}{\lambda}| \leqslant \frac{\lambda^p}{p} |f|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q} |g|^q$$

Ainsi :

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu$$

on supposon :

$$\Theta(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu$$

la fonction Θ est dérivable :

$$\Theta'(\lambda) = \lambda^{p-1} \|f\|_p^p - \lambda^{-q-1} \|q\|_q^q$$

cette derivée s'annule pour $\lambda_1 = \left(\frac{\|q\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p+q}}$ est négalive pour $\lambda \leqslant \lambda_1$ et positive pour $\lambda \geqslant \lambda_1$. Ainsi le minimum de Θ on a :

$$\begin{aligned}
\Theta(\lambda_1) &= \frac{1}{p} \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{p}{p+q}} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{-q}{p+q}} \|g\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} \|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \frac{1}{q} \|g\|_q^{\frac{pq}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{pq}{p+q}} \\
&= \|f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

On déduit l'inégalite de Hölder

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Si $f \in L^1(\mu)$,$g \in L^\infty(\mu)$ Alors :

$$|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$$

Pour presque tout $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_\Omega |f| d\mu$$

ie :

$$\|fg\|_1 \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1$$

■

Notation 1.8.1 *Soient p et p' dans $[1, +\infty[$ (pas nécessairement conjugues)*
Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ alors, $f \in L^r(\Omega)$ pour tout r compris entre p et p'

Démonstration. Soient $p, p' \in [1, +\infty[$ on suppose $p < p'$ et soit $p < r < p'$ on a :

$$|f(x)|^r = |f(x)|^r_{|f|>1} + |f(x)|^r_{|f|<1} \leqslant |f|^{p'} + |f|^p$$

On en déduit que :

$$\int_\Omega |f(x)|^r \leqslant \int_\Omega |f|^{p'} d\mu + \int_\Omega |f|^p < +\infty$$

Donc : $f \in L^r(\Omega)$. ■

Théorème 1.8.2 ***(Fischer-Riesz)***
$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$ Alors $L^p(\Omega)$ est complet.

Théorème 1.8.3 *Soit p telle que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ convereant vers une fonction $f \in L^p(\Omega)$.Alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctiellement p.p vers f*

Théorème 1.8.4 ***(Thèorème de Riesz)***
Soit T une forme linéaire et continue sur $L^p(\Omega)$, Alors il existe une unique fonction $g \in L^{p'}(\Omega)$ telle que :

$$T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \qquad . \qquad \forall f \in L^p(\Omega)$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE GLOBALE, UNICITÉ, RÉGULARITÉ ET LA DÉPENDANCE CONTINUE DE LA SOLUTION

Dans ce chapitre, on considère un problème aux limites non linéaire avec un terme source et un terme dissipatif générale. On démontre que ce problème, sous certaines hypothèses sur les données est équivalent au problème variationnel qu'on déterminera explicitement. Les approximations de Faedo-Galerkin et la méthode de l'enessemble stable ainsi que la méthode de compacité assurent que ce problème possède au moins une solution globale faible dans un intervalle $[0, T]$. L'unicité de la solution est obtenue en impesant la condition sur le nombre p qui doit vérifié $2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2}$. A la fin de ce chapitre on s'intéresse à la régularité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

2.1 Notations et formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière régulière Γ, on désigne par u un vecteur $u : Q = \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ et on pose $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ où T est un réel fini quelconque. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions u par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$. L'objet de ce chapitre est de chercher le dissplacement $u \in \mathbb{R}$ solution du problème (2.1)-(2.3) suivant :

Problem 2.1.1 *Trouver un champ des déplacements $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, tels que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha g(u') = b |u|^{p-2} u \text{ dans } Q, \tag{2.1}$$

$$u = 0 \; sur \; \Sigma \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} a)\; u(x,0) = u_0(x), \\ b)\; u'(x,0) = u_1(x), \end{cases} \quad dans \; \Omega. \tag{2.3}$$

Où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante et globalement de Lipschitziene telle que $g(0) = 0$. Les relations (2.2) et (2.3) sont les conditions aux limites homogène de Dirichlet et les conditions initiales, respectivement.

Pour l'étude de ce problème on aura besoin des hypothèses suivantes :

2.1.1 Hypothèses

Nous supposons aussi que les données initiales aient la régularité suivante :

$$u_0 \in V \cap L^p(\Omega), \tag{2.4}$$

$$u_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.5}$$

où

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Sigma \right\} = H_0^1.$$

2.2 Formulation variationnelle

Dans ce paragraphe on démontre que sous les hypothèses précédentes le problème (2.1)-(2.3) est équivalent à un problème variationnel, noté $(P.V)$.

Lemme 2.2.1 *Sous les hypothèses (2.4)-(2.5), le problème (2.1)-(2.3) est, formellement, équivalent au problème variationnel suivant :*

$$(P.V) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \cap L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ (u'', v) + a(u, v) + \alpha\left(g(u'), v\right) = b\left(|u|^{p-2} u, v\right), \; \forall v \in V \cap L^p(\Omega) \\ u(x,0) = u_0(x), \; u'(x,0) = u_1(x), \; x \in \Omega \end{cases}$$

Où

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Démonstration.

1. Soit u une solution du problème (2.1)-(2.3), en multipliant l'équation (2.1) par $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ il vient

$$(u'', v) - (\Delta u, v) + \alpha\left(g(u'), v\right) = b\left(|u|^{p-2} u, v\right),$$

ou encore

$$(u'', v) - \int_{\Omega} \Delta u v dx + \alpha \left(g \left(u' \right), v \right) = b \left(|u|^{p-2} u, v \right), \ \forall v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$

$$(u'', v) + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Sigma} (\nabla u) \eta v d\Sigma + \alpha \left(g \left(u' \right), v \right) = b \left(|u|^{p-2} u, v \right)$$

En posant $v = 0$ sur Σ, il en résulte le problème variationnel suivant :

$$(u'', v) + a(u, v) + \alpha \left(g \left(u' \right), v \right) = b \left(|u|^{p-2} u, v \right), \ \ \forall v \in V \cap L^p(\Omega)$$

Finalement tenant compte des conditions (2.2), on conclut que u est une solution du problème $(P.V)$.

2. Montrons l'implication inverse.
   Soit u une solution variationnelle du problème $(P.V)$, on a

$$(u'', v) + a(u, v) + \alpha \left(g \left(u' \right), v \right) = b \left(|u|^{p-2} u, v \right), \ \ \forall v \in V \cap L^p(\Omega).$$

   En utilisant la formule de Green, on trouve

$$(u'', v) - \int_{\Omega} \Delta u.v dx + \int_{\Sigma} (\nabla u) \eta v dx + \alpha \left(g \left(u' \right), v \right) = b \left(|u|^{p-2} u, v \right), \ \ \forall v \in V \cap L^p(\Omega). \quad (2.6)$$

   Pour $v = \psi \in D(\Omega)$ il vient

$$(u'', \psi) - \int_{\Omega} \Delta u.\psi dx + \int_{\Sigma} (\nabla u) \eta \psi dx + \alpha \left(g \left(u' \right), \psi \right) = b \left(|u|^{p-2} u, \psi \right), \ \forall \psi \in D(\Omega).$$

   d'où l'équation

$$u'' - \Delta u + \alpha g \left(u' \right) = b \, |u|^{p-2} u, \ \text{p.p. dans } Q.$$

■

Si on pose

$$\|u\|_1 = (a(u, u))^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il est clair que $\|u\|_1$ définie une semi norme sur V et de plus on a :

Lemme 2.2.2 *$\|u\|_1$ est une semi norme équivalente à la norme $\|u\|$ sur $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Par contunuité nous avons

$$|a(u,u)| \leq \left| \int_\Omega \nabla u \nabla u dx \right| \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq C_1 \|u\|^2$$

Grâce à l'inégalité de Poincarré

$$a(u,u) \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq C_1' \|u\|^2$$

Donc

$$C_1'^{\frac{1}{2}} \|u\| \leq (a(u,u))^{\frac{1}{2}} \leq C_1^{\frac{1}{2}} \|u\| .$$

■

2.3 Existence et Unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence global et l'unicité d'une solution faible seront obtenues on se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, méthode de compacité et l'ensemble stable. L'unicité de la solution pour tout $2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2}$.

Nous commençons par démontrer l'existence d'une solution faible du problème (2.1)–(2.3). Nous définissons les fonctions suivantes :

L'ensemble stable :

$$W = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid I(u(t)) = |\nabla u(t)|^2 - b \|u\|_p^p > 0 \right\} \cup \{0\} \tag{2.7}$$

Et nous introduisons la fonctionnelle J définie par

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 - \frac{b}{p} \|u\|_p^p \tag{2.8}$$

Pour u approprié. Évidemment, nous avons

$$J(u(t)) = \frac{1}{p} I(u(t)) + \frac{p-2}{2p} |\nabla u(t)|^2 .$$

2.3.1 Existence

Dans cette section, nous établissons le résultat d'existence globale et d'unicité pour le problème (2.1).

2.3.2 Existence Globale

Théorème 2.3.1 *Supposons que* $(u_0, u_1) \in W \times L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$0 < E(0) < \frac{p-2}{2p}\left(\frac{1}{bC_*^p}\right)^{\frac{2}{p-2}} \tag{2.9}$$

où p vérifié la condition

$$2 < p \leq \frac{2n}{n-2}\,(n \geq 3)\,(2 \leq p < \infty \text{ if } n \leq 2)\,. \tag{2.10}$$

Donc pour tout $T > 0$, *problème (2.1) possède au moins une solution* $u(t)$ *satisfaisant :*

$$u \in L^\infty(0, T; V \cap L^p(\Omega)), \tag{2.11}$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{2.12}$$

$$g(u')\, u' \in L^1(0, T). \tag{2.13}$$

où C_* est la meilleure constante de Poincaré, Sobolev ne dépend que de Ω et p, qui satisfont pour tout $2 < p \leq \frac{2n}{n-2}\,(n \geq 3)\,(2 \leq p < \infty$ si $n \leq 2)\,.$

$$\|u(t)\|_p \leq C_* \|\nabla u(t)\|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Avant de donner la démonstration explicite de ce théorème nous commençons par justifier que le problème variationnel $(P.V)$ a un sens.

Lemme 2.3.2 *Sous les hypothèses (2.4)-(2.5), le problème* $(P.V)$ *a un sens.*

Démonstration. Notons que si $u : t \to u(t)$ est une fonction de $L^2(0, T; V \cap L^p(\Omega))$ et si v est un élément de $V \cap L^p(\Omega)$, la fonction $t \to (u(t), v)_V$ appartient à $L^2(0, T)$. Tout d'abord puisque u est une fonction de $L^\infty(0, T; V \cap L^p(\Omega))$ et pour $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, les fonctions $t \longmapsto (u(t), v)$, $t \longmapsto a(u(t), v)$ appartiennent à $L^2(0, T)$ et $t \longmapsto (g(u'(t)), v)$ appartient à $L^1(0, T)$. Aussi la fonction $t \longmapsto \left(|u(t)|^{p-2} u(t), v\right)$ appartient à $L^1(0, T)$ pour tout $v \in V \cap L^p(\Omega)$, car en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left||u|^{p-2} u(t)\, v(t)\right| dx &\leq \left\||u|^{p-2} u(t)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq C\, \|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C. \end{aligned}$$

Il en résulte que le problème variationnel $(P.V)$ a un sens dans $D'(]0, T[)$. ■

Lemme 2.3.3 *Sous les hypothèses (2.4), (2.5), les conditions (2.3) ont un sens.*

Démonstration. Tenant compte de (2.11) et (2.12) on a :

$$u \in L^{\infty}\left(0, T; L^{2}(\Omega)\right) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\infty}\left(0, T; L^{2}(\Omega)\right).$$

En particulier, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, u est continue de $[0, T] \rightarrow L^{2}(\Omega)$, donc $((2.3), a)$ a un sens.
Reste à vérifier que $((2.3), b)$ a un sens, pour cela on revient à l'équation (2.1) qui donne

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} = \Delta u + b\,|u|^{p-2}\, u - \alpha g\,(u').$$

En utilisant (2.11) on déduit

$$\Delta u \in L^{\infty}\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right).$$

D'autre part en utilisant (2.11) il vient

$$\int_{\Omega} \left|\left(|u|^{p-2}\, u\right)\right|^{p'} dx = \int_{\Omega} |u|^{(p-1)p'}\, dx = \int_{\Omega} |u|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\, dx = \int_{\Omega} |u|^{p}\, dx = \|u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} \leq C$$

et par conséquent

$$|u|^{p-2}\, u \in L^{\infty}\left(0, T; L^{p'}(\Omega)\right),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

De (2.12) on a

$$g\,(u') \in L^{\infty}\left(0, T; L^{2}(\Omega)\right).$$

Donc, il en résulte que

$$u'' \in L^{2}\left(0, T; L^{2}(\Omega)\right) + L^{\infty}\left(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)\right).$$

D'où, en particulier

$$u'' \in L^{2}\left(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)\right).$$

Ceci joint à (2.12), en particulier, $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue de $[0, T] \longrightarrow H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$, de sorte que $((2.3); b)$ a un sens. ■

Démonstration du Théorème 2.3.1.

a) Etape 1 : Solution approchée.

On introduit une suite (w_n) de fonctions ayant les propriétés suivantes :
$*$ $\forall j; w_j \in L^{2}(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^{p}(\Omega)$;
$*$ La famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante ;
$*$ L'espace $V_m = span\,\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ engendré par la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est dense dans $L^{2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^{p}(\Omega)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $u_m = u_m(t)$ une solution approchée du problème (2.1) sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} K_{jm}(t) w_j.$$

où K_{jm} sont déterminés par le système non linéaire suivant :

$$(u''_m(t), w_j) - \left(\Delta u_m, w_j\right) + \alpha\left(g\left(u'_m\right), w_j\right) = b\left(|u_m|^{p-2} u_m, w_j\right),\ t > 0,\ j = 1, 2, ..., m, \tag{2.15}$$

avec les conditions

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_j,\ u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im} w_j,$$

Qui satisfait

$$u_{0m} \to u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega),\ u_{1m} \to u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.16}$$

Remplaçant wj dans (2.15) par $u'_m(t)$, obtient

$$\frac{d}{dt} E_m(t) + \alpha\left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right) = 0 \tag{2.17}$$

Donc par les hypothéses sur g :

$$E_m(t) + \alpha \int_0^t \left(g\left(u'_m(t)\right), u'_m(t)\right) ds \leq E_m(0),\ t > 0, \tag{2.18}$$

où

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_m|^2 - \frac{b}{p}\|u_m(t)\|_p^p$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2} I\left(u_m(t)\right) + \frac{p-2}{2p} b \|u_m(t)\|_p^p \tag{2.19}$$

et aussi

$$E_m(t) \geq \frac{1}{2}\left|u'_m(t)\right|^2 + J\left(u_m(t)\right),\ t > 0; \tag{2.20}$$

$$E_m(0) = \frac{1}{2}|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u_{0m}|^2 - \frac{b}{p}\|u_{0m}\|_p^p \tag{2.21}$$

Puisque $u_0 \in W$, la combination (2.16) avec le thoéorème d'injection de Sobolev, donne $I(u_{0m}) \to I(u_0) > 0$ et $E_m(0) \to E(0)$ où $E(0)$ est indiqué dans (2.9), quand $n \to \infty$, Alors nous pouvons supposer pour tout m que :

$$E_m(0) < (1 + \varepsilon) E(0),\ t > 0,\ \varepsilon > 0$$

et pour tout m que

$$E_m(t) < (1+\varepsilon)E(0) \leq CE(0), \ t > 0, \ \varepsilon > 0 \tag{2.22}$$

où C est une constante positive indépendante de m et t.
b) Etape 2 : Estimation a priorie.

Lemme 2.3.4 *Soit $u_{0m} \in W$ pour tout m. Par conséquent, pour tout m,*

$$u_m(t) \in W, \ t > 0. \tag{2.23}$$

Démonstration. Comme $I(0) > 0$, Par la continuité, soit $0 < T_m < T$ un temps maximal qui satisfait

$$I(u_m(t)) \geq 0 \ \ \forall t \in [0, T_m),$$

Evidemment, nous avons

$$E_m(t) \geq J(u_m(t)) = \frac{1}{p} I(u_m(t)) + \frac{p-2}{2p} |\nabla u_m(t)|^2 \geq \frac{p-2}{2p} |\nabla u_m|^2.$$

Donc nous obtenons

$$|\nabla u_m(t)|^2 \leq \frac{2p}{p-2} E_m(t) \leq \frac{2p}{p-2} E(0). \tag{2.24}$$

Par (2.14) et (2.9) on a

$$\begin{aligned} b\|u_m(t)\|_p^p &\leq bC_*^p |\nabla u_m(t)|^{p-2} |\nabla u_m(t)|^2 \\ &\leq bC_*^p \left(\frac{2p}{p-2} E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u_m(t)|^2 < |\nabla u_m(t)|^2. \end{aligned} \tag{2.25}$$

de (2.25) et (2.7) impliques que $I(u_m(t)) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m)$. En répétant cette procédure et en utilisant le fait que :

$$\lim_{t \to T_m} E_m(t) \leq E_m(0) \leq E(0) < \frac{p-2}{2p} \left(\frac{1}{bC_*^p}\right)^{\frac{2}{p-2}}.$$

Ou conclure que T_m est étendue à T. La preuve de Lemme 2.3.4 est complète. ■

Il découle de (2.18), (2.20), (2.22) et (2.23) que

$$\frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|^2 + \alpha \int_0^t (g(u_m'(t)), u_m'(t))\, ds + \frac{p-2}{2p} |\nabla u_m(t)|^2 \leq C, \ t > 0, \tag{2.26}$$

Les termes non linéaires dans (2.26) sont uniformément bornés sur $[0,T)$. La solution $u_m(t)$ du problème (2.1) existe sur $[0,T)$ pour chaque m. D'autre part

$$u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\right),$$
$$u_m' \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$
$$g(u_m'(t)).u_m'(t) \text{ demeure dans un borné de } L^1\left(0,T;L^1(\Omega)\right),$$
$$\nabla u_m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

donc on déduit qu'on peut extraire une sous suite de $(u_m(t))$, encore notée $(u_m(t))$, tel que pour tout $T>0$,

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u \text{ faible étoile } L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\right),\\ u_m' &\longrightarrow u' \text{ faible étoile } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{2.27}$$

et pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned} u_m(t) &\longrightarrow u(t) \text{ faible étoile } H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega),\\ u_m'(t) &\longrightarrow u'(t) \text{ faible étoile } L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{2.28}$$

quand $n\to\infty$.

c)Etape 1 : Passage à la limite.

Puisque $H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega)\subset L^2(\Omega)$, il résulte en particulier de (2.28) que les suites (u_m), (u_m') sont bornées dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^p(\Omega))\subset L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)=L^2(Q)$, $L^2(Q)$, respectivement, en particulier (u_m) demeure dans un borné de $H^1(Q)$.

En utilisant le fait que l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$ est compact, voir [7, 12], on déduit que :

$$u_\mu(t)\longrightarrow u(t) \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort et p.p. sur } Q; \tag{2.29}$$

Integrons (2.15) sur $(0,t)$ trouvons

$$\begin{aligned} (u_m'(t),w_j)+\int_0^t\left(\nabla u_m,\nabla w_j\right)ds+\alpha\int_0^t\left(g(u_m'(t)),w_j\right)ds \\ =(u_{1m},w_j)+b\int_0^t\left(|u_m|^{p-2}u_m,w_j\right)ds,\ t>0,\ j=1,2,...,m, \end{aligned} \tag{2.30}$$

Puisque

$$\left|\int_0^t\left(\nabla u_m,\nabla w_j\right)ds\right|\le\int_0^t|\nabla u_m|\left|\nabla w_j\right|ds\le C,\quad t>0; \tag{2.31}$$

$$\left|\int_0^t \left(g\left(u'_m(t)\right), w_j\right) ds\right| \leq \int_0^t \left|g\left(u'_m(t)\right)\right| \left|w_j\right| ds \leq C, \quad t > 0; \tag{2.32}$$

$$\left|\int_0^t \left(|u_m|^{p-2} u_m, w_j\right) ds\right| \leq \int_0^t \|u_m\|_p^{p-1} \left\|w_j\right\|_p ds \leq \int_0^t \|u_m\|_p^{p-1} \left|\nabla w_j\right| ds \leq C, \quad t > 0; \tag{2.33}$$

prenant $m \to \infty$ dans (2.30) et en faisant l'usage de (2.28), (2.29), (2.31)-(2.33), (2.15) et théorème de la convergence dominé de Lebesgue il vient

$$(u'(t), w_j) + \int_0^t \left(\nabla u, \nabla w_j\right) ds + \alpha \int_0^t \left(g\left(u'(t)\right)', w_j\right) ds = (u_1, w_j) + b \int_0^t \left(|u|^{p-2} u, w_j\right) ds, \ t > 0, \ j = 1, 2, ..., m, \tag{2.34}$$

Par l'argument de densité, différencier (2.34) on obtient, pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha g\left(u'(t)\right) - b\,|u|^{p-2} u, v\right) = 0, \ t > 0. \tag{2.35}$$

De (2.28)

$$(u_m(t), w_j) \to (u(t), w_j) \ \text{ faible étoile } L^\infty[0, T) \ \text{ quand } \ m \to \infty, \ t > 0, \ j = 1, 2, ..., m$$

Par la continuité, nous obtenons

$$(u_m(0), w_j) \to (u(0), w_j) \ \text{ faible étoile } L^\infty[0, T) \ \text{ quand } \ m \to \infty, \ j = 1, 2, ..., m \tag{2.36}$$

Prenant $t \to 0^+$ dans (2.34) il décole

$$(u'(0), w_j) \to (u_1, w_j) \text{ faible étoile } L^\infty[0, T) \ \text{ quand } \ m \to \infty, \ j = 1, 2, ..., m. \tag{2.37}$$

par conséquent (2.36), (2.37) et (2.16) donne

$$u(0) = u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \ u'(0) = u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.38}$$

D'ou il résulte que $u \in L^\infty([0, T); H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ est une solution faible globale du problème (2.1). ■

2.3.3 Unicité

Théorème 2.3.5 *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1. Alors pour tout p satisfait*

$$2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2}, \ (n > 2) \ \ (p < +\infty \ si \ n \leq 2) \tag{2.39}$$

la solution u obtenue dans le Théorème 2.3.1 est unique.

Démonstration. Soient u, v deux solutions du problème (2.1.1), au sense du Théorème 2.3.1. En posant $\Psi = u - v$, alors Ψ doit vérifier le système suivant :

$$\Psi'' - \Delta\Psi + \alpha(g(u'(t)) - g(v'(t))) = b\left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right) \tag{2.40}$$

dans $L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$, $T > 0$, avec les conditions au bord $\Psi = 0$ sur Γ et les conditions initiales. Comme $\Psi' \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$, en multiplions les deux membres de (2.67) par $\Psi'(t)$ on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Psi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\Psi(t)|^2 + \alpha\left(g(u'(t)) - g(v'(t)), u' - v'\right) = b\int_\Omega \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)\Psi' dx \tag{2.41}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, le premier terme dans le côté droit de (2.41), on peut l'estimé comme suite :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)\Psi' dx\right| &\leq (p-1)\int_\Omega \sup\left(|u|^{p-2}, |v|^{p-2}\right)|\Psi|\,|\Psi'|\,dx \\ &\leq C\left(\left\||u|^{p-2}\right\|_{L^n(\Omega)} + \left\||v|^{p-2}\right\|_{L^n(\Omega)}\right)\|\Psi(t)\|_{L^q(\Omega)}|\Psi'(t)| \\ &\leq C\left(\|u\|^{p-2}_{L^{n(p-2)}(\Omega)} + \|v\|_{L^{n(p-2)}(\Omega)}\right)\|\Psi(t)\|_{L^q(\Omega)}|\Psi'(t)|,\end{aligned}$$

où $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$. De (2.39) on a $n(p-2) \leq q$, par conséquant

$$\left|\int_\Omega (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)\Psi' dx\right| \leq C\left(\|u\|^{p-2} + \|v\|^{p-2}\right)|\nabla\Psi(t)|\,|\Psi'(t)|,$$

Cette estimation combinée avec (2.11) donne

$$\left|\int_\Omega (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)\Psi' dx\right| \leq C|\nabla\Psi(t)|\,|\Psi'(t)|,$$

Ainsi, de (2.41) en utilisant le fait que $\left(g(u'(t)) - g(v'(t)), u' - v'\right) \geq 0$ nous arrivons à

$$|\Psi'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\Psi(t)|^2 \leq C\int_0^t |\nabla\Psi(t)|\,|\Psi'(s)|\,ds$$

Combinant l'inégalité ci-dessus on obtient $\Psi(t) = \Psi(0) = 0$ in $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. ■

2.4 Régularité de la solution

Dans ce paragraphe et sous certaines hypothèses supplémentaires sur les données initiales et la fonction g on démontre la régularité de la solution obtenue au théorème précédent.

Théorème 2.4.1 *On se place dans les conditions du Théorème 2.3.1, avec en outre*

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{2.42}$$

$$u_1 \in V, \tag{2.43}$$

$$g(u_1) \in L^2\,(\Omega). \tag{2.44}$$

Alors pour tout $T > 0$ et pour tout p satisfait

$$p \leq \frac{2n-2}{n-2},\ \ (n > 2)\ \ (p < +\infty \ \mathit{if}\ n \leq 2) \tag{2.45}$$

il existe une solution u et une seule du système (2.15)-(2.16) ayant la régularité suivante :

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \tag{2.46}$$

$$u' \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.47}$$

$$u'' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{2.48}$$

Démonstration. Considérez la suite de fonctions (w_n) telles que :
$*$ $\forall j; w_j \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$;
$*$ La famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est linéairement indépendante ;
$*$ L'espace $V_m = span[w_1, w_2, ..., w_m]$ engendré par la famille $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
On suppose que les conditions initiales vérifient :

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{2.49}$$

$$u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega), \tag{2.50}$$

$$g(u_{1m}) \longrightarrow g(u_1) \text{ dans } \ L^2\,(\Omega). \tag{2.51}$$

Alors, pour tout $j : 1 \leq j \leq m$ de (2.15) il découle

$$\left(u_m''(0), w_j\right) = \left(\Delta u_{0m} + |u_{0m}|^{p-2}\, u_{0m} - \alpha g\left(u_{1m}\right), w_j\right). \tag{2.52}$$

En utilisant (2.49), (2.51) on obtient

$$|\Delta u_{0m}| + \alpha \left|g\left(u_{1m}\right)\right| \leq C.$$

De l'inégalité de Hölder nous concluons que

$$\int_\Omega \left||u_{0m}|^{p-2}\, u_{0m}\right| dx \leq \|u_{0m}\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} (vol\Omega)^{\frac{1}{p}} \leq \|u_{0m}\|^{p-1} (vol\Omega)^{\frac{1}{p}} \leq C.$$

Alors,

$$|u_{0m}|^{p-2}\, u_{0m} \text{ demeure dans un borné de } L^{p'}(\Omega). \tag{2.53}$$

Multipliant l'équation (2.52) par $K''_{jm}(0)$ et sommant sur $j = 1$ à m, il vient

$$(u''_m(0), u''_m(0)) = \left(\Delta u_{0m} + |u_{0m}|^{p-2}\, u_{0m} - \alpha g\,(u_{1m})\,, u''_m(0)\right).$$

Alors,

$$\left|u''_m(0)\right|^2 \leq \left(|\Delta u_{0m}| + \left||u_{0m}|^{p-2}\, u_{0m}\right| + \alpha \left|g\,(u_{1m})\right|\right)\left|u''_m(0)\right|.$$

Et par conséquent on a

$$\left|u''_m(0)\right| \leq C_2. \tag{2.54}$$

D'autre part, par dérivation par rapport à t, de (2.15) il découle

$$\left(u'''_m(t), w_j\right) + a\left(u'_m(t), w_j\right) + \alpha\left(g'\,(u'_m(t))\, u''_m(t), w_j\right) = (p-1)\left(|u_m|^{p-2}\, u'_m(t), w_j\right). \tag{2.55}$$

En multipliant (2.55) par $K''_{jm}(t)$ et en sommant en $j = 1$ de m, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u''_m(t)\right|^2 + a\,(u'_m(t), u''_m) &= -\alpha\,(g'\,(u'_m(t))\, u''_m(t), u''_m\,(t)) \\ &\quad + (p-1)\left(|u_m|^{p-1}\, u'_m(t), u''_m(t)\right).\end{aligned} \tag{2.56}$$

En utilisant les propriétés de la fonction g et d'après (2.12) on a

$$\left|(g'\,(u'_m(t))\, u''_m(t), u''_m\,(t))\right| \leq C\left\|g'\,(u'_m(t))\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|u''_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\left|u''_m\,(t)\right|^2. \tag{2.57}$$

Puisque $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, donc par l'inégalité de Hölder on conclut que

$$\left|(p-1)\left(|u_m\,(t)|^{p-2}\, u'_m(t), u''_m\,(t)\right)\right| \leq C\left\||u_m\,(t)|^{p-2}\right\|_{L^n(\Omega)}\left\|u'_m\,(t)\right\|_{L^q(\Omega)}\left|u''_m\,(t)\right|.$$

Comme $(p-2)\,n \leq q$, d'après (2.45) et de (2.11) en conluons

$$\left\||u_m\,(t)|^{p-2}\right\|_{L^n(\Omega)} \leq C\,\|u_m\,(t)\|^{p-2} \leq C.$$

Par conséquent

$$(p-1)\left|\left(|u_m\,(t)|^{p-2}\, u'_m\,(t)\,, u''_m\,(t)\right)\right| \leq C\left\|u'_m\,(t)\right\|\left|u''_m\,(t)\right|. \tag{2.58}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, l'équation (2.56) en valeurs absolue devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u''_m(t)\right|^2 + C_1\left\|u'_m(t)\right\|^2\right) \leq \frac{1}{2}C_2\left|u''_m\,(t)\right|^2 + \frac{1}{2}C_3\left\|u'_m\,(t)\right\|^2. \tag{2.59}$$

Par intégration sur $[0, t]$ de (2.59) il résulte

$$\left|u''_m(t)\right|^2 + C_1 \left\|u'_m(t)\right\|^2 \leq \left|u''_m(0)\right|^2 + C_1 \left\|u_{1m}\right\|^2 + (C_2 + C_3) \int_0^t \left(\left\|u'_m(s)\right\|^2 + \left|u''_m(s)\right|^2\right) ds. \quad (2.60)$$

Donc en particulier, moyennant (2.50), (2.54), de (2.60) il vient

$$\left|u''_m(t)\right|^2 + \left\|u'_m(t)\right\|^2 \leq C_4 \left(1 + \int_0^t \left(\left|u''_m(s)\right|^2 + \left\|u'_m(s)\right\|^2\right) ds\right). \quad (2.61)$$

En utilisant le Lemme de Gronwall pour conclure que

$$\left|u''_m(t)\right| + \left\|u'_m(t)\right\| \leq C \text{ (indépendant de } m) \quad (2.62)$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} u'_m(t) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right), \\ u''_m(t) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \end{cases} \quad (2.63)$$

D'où, on déduit qu'on peut extraire une sous suite $\left(u_\mu\right)$ de (u_m) telle que

$$\begin{cases} u'_\mu(t) \longrightarrow u'(t) \text{ dans } L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \text{ faible étoile.} \\ u''_\mu(t) \longrightarrow u''(t) \text{ dans } L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \text{ faible étoile.} \end{cases} \quad (2.64)$$

Ce qui nous permet de supposer que la sous suite extraite $\left(u_\mu\right)$ vérifie, outre que (2.28), (2.64)

$$\begin{cases} u'_\mu \longrightarrow u' \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort,} \\ g\left(u'_\mu\right) \longrightarrow g\left(u'\right) \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{cases} \quad (2.65)$$

Soit j fixé, et $\mu > j$, alors d'après (2.28), (2.64) et (2.65), on déduit que

$$a\left(u_\mu(t), w_j\right) \longrightarrow a\left(u(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile,}$$
$$\left(\left|u_\mu\right|^{p-2} u_\mu, w_j\right) \longrightarrow \left(|u|^{p-2} u, w_j\right) \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible étoile,}$$
$$\left(u''_\mu(t), w_j\right) \longrightarrow \left(u''(t), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile,}$$
$$\left(g\left(u'_\mu\right), w_j\right) \longrightarrow \left(g\left(u'\right), w_j\right) \text{ dans } L^\infty(0, T) \text{ faible étoile,}$$

Alors, en passant à la limite lorsque $\mu \to \infty$, on conclut, pour tout w_j que

$$(u''(t), w_j) + a(u(t), w_j) + \alpha(g\left(u'(t)\right), w_j) = \left(|u|^{p-2} u, w_j\right).$$

Par densité de V_m dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, en déduit que pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ on a

$$(u''(t), v) + a(u(t), v) + \alpha(g(u'), v) = \left(|u|^{p-2} u, v\right),$$

d'où u satisfait (2.1), (2.47) et (2.48).

De l'autre côté, moyennant (2.11), (2.12), (2.65), (**??**) et (2.48) on a

$$g(u'), \ |u|^{p-2} u \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right).$$

D'où de (2.1) il résulte

$$h = \Delta u = u'' - |u|^{p-2} u + \alpha g(u') \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \tag{2.66}$$

Comme Δu, voire [7], est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. Soit G son inverse. Alors, comme $u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$ on a

$$u(t) = Gh(t). \tag{2.67}$$

Comme Ω est supposé régulier. Donc, en se référant à [7] et [13] on a $G \in \mathcal{L}\left(H^{-1}(\Omega); H^2(\Omega)\right)$, ce qui implique (2.46). ■

2.5 Dépendance continue de la solution par rapport aux données

Dans ce paragraphe, on analyse la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Pour cela, on définit l'espace de Banach suivant :

$$W(Q) = \left\{\varphi / \varphi \in L^\infty(0, T; V), \ \varphi' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right)\right\},$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{W(Q)} = \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\varphi'\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)}.$$

On considère l'application π définie par :

$$\begin{cases} \pi : L^2(Q) \times V \times L^2(\Omega) \to W(Q) \\ \qquad \{f, u_0, u_1\} \mapsto u, \end{cases} \tag{2.68}$$

où u est une solution du problème (2.1.1). Relativement à cette notation, on a le Théorème 2.5.1 suivant :

Théorème 2.5.1 *Sous les hypothèses des Théorème 2.3.1 et Théorème 2.3.5. Alors, l'application π définie par (2.68) est continue, autrement dit pour tout $u, v \in W(Q)$, on a*

$$|u' - v'|^2 + \|u - v\|^2 \leq C(u, v)\left[|u_1 - v_1|^2 + \|u_0 - v_0\|^2\right],$$

où $\pi\left(\left\{|u|^{p-2} u, u_0, u_1\right\}\right) = u$ et $\pi\left(\left\{|v|^{p-2} v, v_0, v_1\right\}\right) = v$.

Démonstration. soit $\pi(|u|^{p-2}u, u_0, u_1) = u$ et $\pi(|v|^{p-2}v, v_0, v_1) = v$
et on supposons que :

$$\{|v|^{p-2}v, v_0, v_1\} \to \left\{|u|^{p-2}u, u_0, u_1\right\} \text{ dans } L^2(Q) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to W(Q).$$

Alors v demeure dans un borné de $W(Q)$. On peut alors choisir v dans un borné de $W(Q)$.
On a :

$$\begin{cases} u'' - \vartriangle u = b|u|^{p-2}u - \alpha g(u'), \\ v'' - \vartriangle v = b|v|^{p-2}v - \alpha g(v'). \end{cases}$$

Soit $\Psi = u - v$ on a :

$$\Psi'' - \lambda\Delta\Psi + \alpha((g(u') - g(v')) = b(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v) \tag{2.69}$$

on multiplie les deux membre par Ψ' et lorsque les intégrales ci-après ont un sens, on obtient aprè utilisations de la formule de Green et les conditions initiales du problème (P),

$$(\Psi''(t), \Psi'(t)) - \lambda(\Delta\Psi(t), \Psi'(t)) + \alpha((g(u') - g(v'), \Psi'(t)) = b(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, \Psi'(t)) \tag{2.70}$$

on a :

$$(\Psi''(t), \Psi'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Psi'(t), \Psi'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Psi'(t)|^2.$$

et

$$-\lambda(\Delta\Psi(t), \Psi'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\Delta\Psi(t), \Delta\Psi(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\Psi(t)|^2.$$

et

$$b|\int_\Omega |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\Psi'(t)dx| \leqslant C|\nabla\Psi(t)||\Psi'(t)|$$

avec : $((g(u') - g(v'), \Psi'(t)) > 0$
donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Psi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\Psi(t)|^2 \leqslant C|\nabla\Psi(t)||\Psi'(t)|$$

Par intégration sur $(0, t)$ on obtient

$$|\Psi'(t)|^2 + |\nabla\Psi(t)|^2 \leqslant |u_0 - v_0| + \|u_1 - v_1\|^2 + C\int_0^t |\nabla\Psi(t)||\Psi'(s)|ds$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$|u' - v'|^2 + \|u - v\|^2 \leqslant C(u, v)\left(|u_0 - v_0| + \|u_1 - v_1\|^2\right)$$

d'où $c(u, v)$ est fonction de u et v, bornée sur les bornées $W(Q)$. Donc la fonction π est continue. ■

CHAPITRE 3

STABILITÉ DE LA SOLUTION

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement de la solution u trouvée dans le premier chapitre pour le système (2.1)–(2.3) sur d'autres conditions sur la fonction g. Les techniques utilisées sont celles trouvées dans [10], [9], [1]. Aussi, le comportement asymptotique des solutions fortes est montré sans prendre en considération la condition $|g(x)| \to \infty$ quand $|x| \to \infty$, cette condition est utiliser par plisieures authours.

3.1 Stabilité de la solution

Pour démontrer la stabilité de la solution locale u du problème (2.1)–(2.3) donnée par le Théorème 2.3.1, on définit la fonction d'énergie comme suit :

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{b}{p}\|u(t)\|_p^p, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

Et pour obtenir la stabilité du système (2.1)–(2.3), on va supposer, en outre, qu'il existe des constantes $C_i, i = 1, ..., 4$ telles que

$$C_1 |x|^p \leq \left|g(x)\right| \leq C_2 |x|^{\frac{1}{p}}, \; p \geq 1, \text{ si } |x| \leq 1, \tag{3.2}$$

$$C_3 |x| \leq \left|g(x)\right|, \text{ si } |x| > 1, \tag{3.3}$$

$$\left|g(x)\right| \leq C_4 |x|^{p'}, \text{ si } |x| > 1, \; n \geq 3. \tag{3.4}$$

$$p' \leq \frac{n+2}{n-2} \tag{3.5}$$

Lemme 3.1.1 *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissante et absolument continue et on a*

$$E'(t) = -\alpha \int_\Omega u_t g(u_t)\, dx \leq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.6}$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, d'après (2.1)), (2.2) et (3.1) on a

$$0 = \int_S^T \int_\Omega u_t \left(u_{tt} - \Delta u - b\,|u|^{p-2}\, u + \alpha g(u_t)\right) dxdt =$$

$$= \int_S^T \int_\Omega \left(u_t u_{tt} - u_t \Delta u - b\,|u|^{p-2}\, u u_t + \alpha u_t g(u_t)\right) dxdt =$$

$$= \int_S^T E'(t)\, dt + \int_S^T \int_\Omega u_t g(u_t)\, dxdt = E(T) - E(S) + \alpha \int_S^T \int_\Omega u_t g(u_t)\, dxdt,$$

donc

$$E(T) - E(S) = -\alpha \int_S^T \int_\Omega u_t g(u_t)\, dxdt, \ 0 \leq S < T < \infty. \tag{3.7}$$

Comme la fonction g est croissante et $g(0) = 0$ alors $xg(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, donc E est décroissante.

D'autre part, de (3.7) on conclut que E est localement absolument continue alors (3.6) est satisfaite. ■

Théorème 3.1.2 *Supposons que les hypothèses (3.2)–(3.4) sont vérifiées. Alors pour toute solution forte du problème (2.1)–(2.3), il existe une constante $C > 0$ dépend uniquement de $E(0)$ et une constante $\varpi > 0$ telles que :*

$$E(t) \leq C t^{\frac{-2}{p-1}}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ si\ p > 1, \tag{3.8}$$

et

$$E(t) \leq E(0)\, e^{1-\varpi t}, \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ si\ p = 1, \tag{3.9}$$

où la constante ϖ est indépendante de $E(0)$.

Théorème 3.1.3 *Supposons que, les hypothèses (3.2) et (3.4) sont vérifiées avec,*

$$\begin{cases} p \geq 1 \ si\ n = 1, \\ p > 1 \ si\ n = 2, \\ p \geq \frac{n}{2} \ si\ n \geq 3, \end{cases} \tag{3.10}$$

Alors pour toute solution forte du système (2.1)–(2.3), il existe des constantes positives C et ϖ telles que les estimations (3.8) et (3.9) ont lieu.

Démonstration du Théorème 3.1.2. Pour mieux présenter la démonstration de ce Théorème 3.1.2, nous allons commencer par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 3.1.4 *Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, on a les estimations suivantes :*

$$\frac{(p+2)}{p}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \leq -\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_t u dx\right]_S^T + \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u_t u dx dt + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \left(2(u_t)^2 - ug(u_t)\right) dx dt. \tag{3.11}$$

Démonstration. Utilisons le fait que

$$\int_\Omega u_{tt} u dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega (u_t)^2\,dx,$$

et que

$$b\,\|u(t)\|_p^p \leq bC_*^p\left(\frac{2p}{p-2}E(0)\right)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u(t)|^2 < |\nabla(t)|^2 < E(t) \quad \forall t \geq 0.$$

pour déduire

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u\left(u_{tt} - \Delta u - b|u|^{p-2}u + \alpha g(u_t)\right) dx dt = \\ &= \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u_t u dx\right]_S^T - \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)\,E'(t)\int_\Omega u u_t dx dt + \\ &+ \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \left((-u.\Delta u - b|u|^p) + \alpha u g(u_t) - (u_t)^2\right) dx dt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Donc de la définition (3.1) on tire que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-u\Delta u - b|u|^p)\,dx &= 2E(t) - \frac{(p-2)\,b}{p}\|u(t)\|_p^p - \int_\Omega (u_t)^2\,dx \\ &\geq 2E(t) - \frac{(p-2)\,b}{p}E(t) - \int_\Omega (u_t)^2\,dx \\ &= \frac{(p+2)}{p}E(t) - \int_\Omega (u_t)^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En substituant (3.13) dans (3.12) il vient

$$0 \geq \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} u_t u dx \right]_S^T - \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t) E'(t) \int_{\Omega} u u_t dx dt +$$
$$+ \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} \left(\frac{(p+2)}{p} E(t) - (u_t)^2 + \alpha u g(u_t) - (u_t)^2 \right) dx dt.$$

Par conséquent, on a

$$0 \geq \left[E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} u_t u dx \right]_S^T - \frac{p-1}{2} \int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t) E'(t) \int_{\Omega} u u_t dx dt +$$
$$+ \frac{(p+2)}{p} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt - \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} \left(2(u_t)^2 - \alpha u g(u_t) \right) dx dt,$$

d'où (3.11). ■

Lemme 3.1.5 *Il existe une constante positive C telle que pour tout* $0 \leq S < T < \infty$, *on a*

$$\frac{(p+2)}{p} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) dt \leq C E^{\frac{p+1}{2}}(S) + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} \left(2(u_t)^2 - \alpha u g(u_t) \right) dx dt, \tag{3.14}$$

Démonstration. La condition (2.2) impliquent que

$$\int_{\Omega} -u \Delta u dx \geq c \int_{\Omega} u^2 dx \tag{3.15}$$

Utilisant les inégalités de Young et (3.15) par la définition de l'énergie (3.1) on a

$$\left| E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} u u_t dx \right| \leq C E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} \left((u)^2 + (u_t)^2 \right) dx \leq$$
$$\leq C E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{\Omega} \left(-u \Delta u + (u_t)^2 \right) dx \leq C E^{\frac{p-1}{2}}(t) \left(E(t) + b \int_{\Omega} |u|^p dx \right)$$
$$\leq C E^{\frac{p-1}{2}}(t) E(t) = C E^{\frac{p+1}{2}}(t).$$

Comme E est décroissante on conclut que

$$\left[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega} uu_t dx\right]_S^T \leq C\left(E^{\frac{p+1}{2}}(T)+E^{\frac{p+1}{2}}(S)\right) \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'autre part on a

$$\left|\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_{\Omega} uu_t dxdt\right| \leq C\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)(-E'(t))E(t)dt =$$

$$= CE^{\frac{p+1}{2}}(S) - CE^{\frac{p+1}{2}}(T) \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S),$$

En remplaçant les deux dernières estimations dans (3.11) on trouve (3.14). ■

Lemme 3.1.6 *Soient* $0 \leq S < T < \infty$*, pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a l'estimation suivante*

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega}(u_t)^2 dxdt \leq \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + C(\varepsilon)E(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{3.16}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, on a

$$\int_{\Omega}(u_t)^2 dx = \int_{|u_t|\leq 1}(u_t)^2 dx + \int_{|u_t|>1}(u_t)^2 dx.$$

Utilisant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\int_{\Omega}(u_t)^2 dx \leq C\left(\int_{|u_t|\leq 1}|u_t|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + \int_{|u_t|>1}(u_t)^2 dx.$$

En utilisant les inégalités (3.2), (3.3) et l'identité (3.6) on trouve

$$\int_{\Omega}(u_t)^2 dx \leq C\left(\int_{|u_t|\leq 1}|u_t|^p|u_t|dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + \int_{|u_t|>1}u_t u_t dx \leq$$

$$\leq C\left(\int_{|u_t|\leq 1}\left|u_t g(u_t)\right|dx\right)^{\frac{2}{p+1}} + C\int_{|u_t|>1}\left|u_t g(u_t)\right|dx \leq$$

$$\leq C(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} - CE'(t),$$

d'où

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_t)^2\,dxdt \le C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}dt - C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\,E'(t)\,dt.$$

De l'inégalité de Young on obtient

$$C\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}dt \le C\frac{p-1}{p+1}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{p-1}}(t)\,dt +$$

$$+C\frac{2}{p+1}\int_S^T \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}\frac{p+1}{2}}dt = \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt - C(\varepsilon)\int_S^T E'(t)\,dt \le$$

$$\le \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S).$$

Alors

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u_t)^2\,dxdt \le \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'où (3.16). ■

Lemme 3.1.7 *Soit $0 \le S < T < \infty$, on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \alpha u g(u_t)\,dxdt\right| \le \varepsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)\,E(S). \tag{3.17}$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Young on trouve pour tout $\varepsilon' > 0$

$$\left|\int_{|u_t|\le 1} \alpha u g(u_t)\,dx\right| \le \varepsilon'\int_{|u_t|\le 1} u^2dx + C(\varepsilon')\int_{|u_t|\le 1} g^2(u_t)\,dx.$$

Aussi, de (3.2), (3.15) on conclure

$$\left|\int_{|u_t|\leq 1} \alpha u g(u_t)\,dx\right| \leq \varepsilon' \int_{|u_t|\leq 1} -u\Delta u dx + C(\varepsilon') \int_{|u_t|\leq 1} g^2(u_t)\,dx \leq$$

$$\leq 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1} \left|g(u_t)\right|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}} =$$

$$= 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1} \left|g(u_t)\right|^{p} \left|g(u_t)\right| dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \leq$$

$$\leq 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1} \left|g(u_t)\right| |u_t|\, dx\right)^{\frac{2}{p+1}} =$$

$$= 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(\int_{|u_t|\leq 1} u_t g(u_t)\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} = 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(-E(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}.$$

Donc

$$\left|\int_{|u_t|\leq 1} \alpha u g(u_t)\,dx\right| \leq 2\varepsilon' E(t) + C(\varepsilon')\left(-E(t)\right)^{\frac{2}{p+1}}. \tag{3.18}$$

De la condition (3.5), il en résulte que

$$\left(\int_{|u_t|>1} |u|^{p'+1}\,dx\right)^{\frac{1}{p'+1}} \leq C\left|\nabla u\right| \leq CE(t)^{\frac{1}{2}}.$$

Par la même manière de (3.18) en utilisant (3.4) on trouve

$$\left(\int_{|u_t|>1} \left|g(u_t)\right|^{\frac{p'+1}{p'}} dx\right)^{\frac{p'}{p'+1}} = \left(\int_{|u_t|>1} \left|g(u_t)\right| \left|g(u_t)\right|^{\frac{1}{p'}} dx\right)^{\frac{p'}{p'+1}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{|u_t|>1} \left|u_t g(u_t)\right| dx\right)^{\frac{p'}{p'+1}} \leq C\left(-E'(t)\right)^{\frac{p'}{p'+1}}.$$

D'où, il découle

$$\left|\int\limits_{|u_t|>1} \alpha u g(u_t)\, dx\right| \leq \left(\int\limits_{|u_t|>1} |u|^{p'+1}\, dx\right)^{\frac{1}{p'+1}} \left(\int\limits_{|u_t|>1} \left|g(u_t)\right|^{\frac{p'+1}{p'}}\, dx\right)^{\frac{p'}{p'+1}} \leq \tag{3.19}$$

$$\leq CE(t)^{\frac{1}{2}} \left(-E'(t)\right)^{\frac{p'}{p'+1}}.$$

Alors, de (3.18) et (3.19) on trouve

$$\left|\int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int\limits_\Omega \alpha u g(u_t)\, dxdt\right| \leq 2\varepsilon' \int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) E(t)\, dt +$$

$$+C(\varepsilon') \int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}} dt + C \int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) E(t)^{\frac{1}{2}} \left(-E'(t)\right)^{\frac{p'}{p'+1}} dt,$$

ou encore sous la forme

$$\left|\int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int\limits_\Omega u g(u_t)\, dxdt\right| \leq 2\varepsilon' \int\limits_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt +$$

$$+C(\varepsilon') \int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}} dt + C \int\limits_S^T E^{\frac{p}{2}}(t) \left(-E'(t)\right)^{\frac{p'}{p'+1}} dt.$$

Comme $\frac{2}{p+1} + \frac{p-1}{p+1} = 1$, alors en utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$C(\varepsilon') \int\limits_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}} dt \leq C(\varepsilon') \int\limits_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + C(\varepsilon') \int\limits_S^T \left(-E'(t)\right) dt. \tag{3.20}$$

De même comme $\frac{1}{p'+1} + \frac{p'}{p'+1} = 1$, alors on a

$$C \int\limits_S^T E^{\frac{p}{2}}(t) \left(-E'(t)\right)^{\frac{p'}{p'+1}} dt \leq C \int\limits_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}} dt + C \int\limits_S^T \left(-E'(t)\right) dt. \tag{3.21}$$

Utilisons (3.20) et (3.21) pour arriver à

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \alpha u g(u_t)\,dxdt\right| \le 2\varepsilon' \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon')\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt +$$
$$+C(\varepsilon')\int_S^T (-E'(t))\,dt + C\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt + C\int_S^T (-E'(t))\,dt \le \tag{3.22}$$
$$\le 3\varepsilon' \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt - C(\varepsilon')\int_S^T E'(t)\,dt + C\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt.$$

En utilisant le fait que E est décroissante et $p(p'+1) \ge p+1$ on déduit que

$$\int_S^T E(t)^{\frac{p(p'+1)}{2}}\,dt \le C\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt. \tag{3.23}$$

Finalement, moyennant (3.23) de (3.22) on obtient

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \alpha u g(u_t)\,dxdt\right| \le \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + C(\varepsilon)E(s),$$

ce qui achève la démonstration de (3.17). ■

Lemme 3.1.8 *On a l'estimation*

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le C\left(1+E^{\frac{p-1}{2}}(0)\right)E(s),\ 0 \le S \le T < \infty. \tag{3.24}$$

Démonstration. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{3}$, alors de (3.16) et (3.17) il découle

$$\frac{p+2}{2}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega 2u_t^2 dxdt \le \frac{2}{3}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + CE(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(s), \tag{3.25}$$

et

$$-\frac{p+2}{2}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \alpha u g(u_t)\,dxdt \le \frac{1}{3}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + CE(s). \tag{3.26}$$

Donc par sommation (3.25) et (3.26) il vient

$$\frac{p+2}{2}\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \left(2u_t^2-\alpha u g(u_t)\right)dxdt \le \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt + CE(s) + CE^{\frac{p+1}{2}}(s). \tag{3.27}$$

Utilisant (3.27), de (3.14) on trouve que

$$\frac{p}{2}\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le CE^{\frac{p+1}{2}}(s) + CE(s).$$

Par conséquent,

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le C\left(1+E^{\frac{p-1}{2}}(s)\right)E(s) \le C\left(1+E^{\frac{p-1}{2}}(0)\right)E(s),\ 0\le S\le T<\infty.$$

Les lemmes 2.3.4 et 3.1.8 impliquent que la fonction $E:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est décroissantes et vérifie l'inégalité :

$$\int_t^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(s)\,ds \le CE(t),\ \forall t\in\mathbb{R}^+.$$

■

Par conséquent les estimations (3.8) et (3.9) sont suffisantes avec $\beta=\frac{p-1}{2}$, pour appliquer la proposition suivante :

Proposition 3.1.9 *Soit $E:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante. S'il existe $\beta\ge 0$ et $T>0$ tels que*

$$\int_t^\infty E^{\beta+1}(s)\,ds \le TE^{\beta}(0)E(t),\ \forall t\in\mathbb{R}^+,$$

alors

$$E(t)\le E(0)\left(\frac{T+\beta t}{T+\beta T}\right)^{\frac{-1}{\beta}},\ \forall t\in\mathbb{R}^+ \text{ si } \beta>0,$$

et

$$E(t)\le E(0)e^{1-\frac{1}{T}t},\ \forall t\in\mathbb{R}^+ \text{ si } \beta=0.$$

Voire [10].

Ce qui achève la démonstration du théorème Théorème 3.1.2. ■

Démonstration du Théorème 3.1.3. Soit $(u_0, u_1) \in V \cap H^2(\Omega) \times V$ tel que $g(u_1) \in L^2(\Omega)$, alors la solution du système (2.1)–(2.3) vérifie les régularités (2.47) et (2.48) obtenues au Théorème 2.4.1.

Pour $\varepsilon = 1$, de (3.17) on tire

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega (-\alpha u g(u_t))\, dxdt \leq \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + CE(S). \tag{3.28}$$

En utilisant (3.28), de l'estimation (3.14) on conclut que

$$\frac{(p+2)}{p} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S) + CE(S) + 3 \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u_t^2 dxdt \tag{3.29}$$

Comme dans la démonstration du Lemme 3.1.6 on a

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|\leq 1} u_t^2 dxdt \leq \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\, dt + C(\varepsilon) E(S), \forall \varepsilon > 0. \tag{3.30}$$

D'autre part, on distinguera deux cas :

Premier cas, $n = 1$. En utilisant (3.3) (2.46), (2.48) et (3.6) et l'injection de Sobolev $V \subset H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ on obtient

$$\int_{|u'|>1} u_t^2 dx \leq C \int_{|u'|>1} |u_t| \left| u_t g(u_t) \right| dx \leq C \|u_t\|_{L^\infty(\Omega)} (-E'(t)) \leq -CE'(t).$$

D'où il résulte

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|>1} u_t^2 dxdt \leq -C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) E'(t)\, dt \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{3.31}$$

Deuxième cas, $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} \int_{|u'|>1} |u_t|^2 dx &\leq C \int_{|u'|>1} |u_t|^{\frac{2p}{p+1}} \left| u_t g(u_t) \right|^{\frac{2}{p+1}} dx \leq \\ &\leq C \left(\int_{|u'|>1} |u_t|^{\frac{2p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_{|u'|>1} u_t g(u_t)\, dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \leq \\ &\leq C \|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)} (-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} \leq C \|u_t\|^{\frac{2p}{p+1}}_{H^1(\Omega)} (-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

alors on conclut de (3.32) que

$$\int_{|u'|>1} |u_t|^2 \, dx \leq C \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}},$$

comme $\frac{p-1}{p+1} + \frac{2}{p+1} = 1$, alors par l'inégalité de Young et (3.22) on trouve

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|>1} u_t^2 dx dt \leq C \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \left(-E'(t)\right)^{\frac{2}{p+1}} dt \leq \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt - C(\varepsilon) \int_S^T E'(t) \, dt.$$

D'où, il vient

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|>1} u_t^2 dx dt \leq \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + C(\varepsilon) E(S). \tag{3.33}$$

Les inégalités (3.31) et (3.33) impliquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|>1} u_t^2 dx dt \leq \varepsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + C(\varepsilon) E(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{3.34}$$

Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{9}$, de (3.30) et (3.34) il résulte

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|\leq 1} u_t^2 dx dt \leq \frac{1}{9} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + C(\varepsilon) E(S) \tag{3.35}$$

et

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_{|u'|>1} u_t^2 dx dt \leq \frac{1}{9} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + C(\varepsilon) E(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{3.36}$$

Donc l'inégalité (3.29) devient

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt \leq CE^{\frac{p+1}{2}}(S) + CE(S) + 3 \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \int_\Omega u_t^2 dx dt =$$

$$= CE^{\frac{p+1}{2}}(S) + CE(S) + 3 \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t) \left(\int_{|u'|>1} u_t^2 dx + \int_{|u'|\leq 1} u_t^2 dx \right) dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{3} \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) \, dt + CE(S) + CE^{\frac{p+1}{2}}(S),$$

ou encore

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)\,dt \le CE(S)\left(1 + E^{\frac{p-1}{2}}(0)\right), \tag{3.37}$$

d'où (3.24). Ainsi que les estimations (3.8) et (3.9) se déduisent en appliquant la proposition 3.1.9 avec $\beta = \frac{p-1}{2}$. ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème hyperbolique semi linéaire avec une dissipation non linéaire et un terme source avec des conditions aux limites et les conditions initiales. En se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin, la méthode de compacité, la méthode de l'ensemble stable ainsi que le théorème de monotonie, nous avons analysé les questions de l'existence globale et l'unicité d'une solution faible pour ce problème ainsi que la régularité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données. A la fin, nous utilisons les techniques de Liapounov basées sur l'application des inégalités et des intégrales connus pour montrées la stabilité non linéaire de la solution obtenu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aassila. A Note on the Boundary Stabilization of a Compactly Coupled System of Wave Equations. *Applied Mathematics Letters*, 12 :19–24, 1999.

[2] R. Abita. *Etude de quelques problèmes aux limites linéaires ou non linéaires intervenant en mécanique des milieux continus*. PhD thesis, Université de ferhat abbas sétif1, 2016.

[3] J. M. Ball. Remarks On Blow-up And Nonexistence Theorems For Nonlinear Evolution Equations. *Quart I. Math. Oxford*, 28 :473–486, 1977.

[4] J. M. Ball. Finite Time Blow-Up in Nonlinear Problems. *Academic Press. Inc*, pages 189–205, 1978.

[5] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[6] Y. Conrad and B. Rao. Decay of solution of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Analysis. *Advances in Applied Math*, 7 :159–177, 1993.

[7] P. Grisvard. Boundary value problem in plan polygon Instruction for use E.D.F. *Journal of Math. Anal. and Applic, serie C*, 1 :21–59, 1986.

[8] A. Haraux and E. Zuzua. Decay Estimates for some Semilinear Damped Hyperbolic Problems. *Nonlinear Analysis*, pages 191–206, 1987.

[9] S. ji Feng and D. X. Feng. Nonlinear Internal Damping of Wave Equations with variable Coefficients. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 20 :1057–1072, Dec 2004.

[10] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization, The multiplier method*. Masson-John Wiley, 1994.

[11] V. Komornik. On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation. *Chin. Ann. of Math 14B*, 2 :153–164, 1995.

[12] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1966.

[13] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1, 2. Dunod, Paris, 1968.

[14] L. Roder and T. Tebou. Stabilization of the Wave Equation with Localized Nonlinear Damping. *journal of differential equations*, 145(DE983416) :502–524, 1998.