REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEURIE

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de licence en

Mathématique, **Option**: Mathématique

Thème

Méthode des différences finis pour un problème aux limites elliptique bidimensionnel

Proposé et Encadré par :
Prof. BEN ABDERRAHMANE Benyattou

Présenté par
- **MEHENNI Nadhra**
- **TRICHE Nakhla**

N° d'ordre :………/2010-PFE/DGI

﴿ وفوق كل ذي علم عليم ﴾

دعاء

اللهم نور بالكتاب بصري و أطلق به لساني وأشرح به صدري و يسر لي به آمري كي

نسبح كثيرا ونذكرك كثيرا...

اللهم لا تدعني أصاب بالغرور إذا نجحت و لا أصاب باليأس إذا فشلت بل ذكرني دائما

أن الفشل هو التجارب التي تسبق النجاح.

يأرب علمني أن التسامح هو اكبر مراتب القوة و أن حب الانتقام هو أول مظاهر الضعف،

يأرب إذا أسأت للناس أعطني الشجاعة أن أعترف، و إذا جردتني من المال فاترك لي

الأمل، و إذا جردتني من النجاح أترك لي قدرة الصبر حتى اعتاد على الفشل، و إذا

جردتني من نعمة الصبر اترك لي نعمة الإيمان، يأرب إذا نسيت لا تنساني.

و اللهم إني أسألك علما نافعا ورزقا طيبا وعملا متقبلا يا أرحم الراحمين

Dédicaces

Mes très chers parents qui ont consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être .Qu'ALLAH leur assure une longue vie pour que je puisse veiller à leur bonheur !

Mes frères Zizou , Oussama et Hassan .

Ma sœur Sara.

Mon fiancé Karim Bouazara.

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le Professeur Bencederrahmane Benyattou.

Je dédie ce mémoire

NADHRA_MEHENNI

Dédicaces

Mes très chers parents qui ont consenti d'énormes sacrifices pour mon éducation et mon bien être .Qu'ALLAH leur assure une longue vie pour que je puisse veiller à leur bonheur !

Mes frères.

Mes sœurs.

Toute ma famille.

Tout ce que j'aime.

Mon encadreur le Professeur Benacederrahmane Benyattou.

Je dédie ce mémoire

NAKHLA_TRICHE

REMERCIEMENTS

Nos vifs remerciements à notre encadreur Mr Ben Abderrahmane Benyattou, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour les moyens qu'il nous a procuré afin d'élaborer ce mémoire.

Nous songeons plus particulièrement à Mr. Mokhtari AbdEl-Kader, Professeur en Mathématiques à l'université de Laghouat pour ces inestimables conseils, ainsi qu'aux Mrs. Belabbaci Yousef, Quinten Yousef Maîtres de conférences en Mathématiques à l'université de Laghouat pour leurs précieuses aides ayant largement contribué à la conception de notre thèse.

Nos remerciements vont également à Mr. Messelmi Mohamed, chef de département d'informatique, ainsi que tout le personnel de la bibliothèque de l'université de Laghouat, qui ont tenu à notre disposition tous les moyens et livres ; sans oublier tout le personnel et les étudiants du département Maths et informatique de l'université de Laghouat (Télidji Amar).

Un grand remerciement à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin pour atteindre notre objectif.

Table des matières

CHAPITRE III : Résolution numérique par la méthode de différence finis

Bibliographie

Introduction générale

Ce mémoire est dédié à l'étude tant théorique que numérique des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires et elliptiques. Thème qui a de nombreuses applications dans la science de l'ingénieur. En effet de nombreux phénomènes de ces sciences (mécaniques, physiques, chimiques, biologiques ou même économiques) sont modélisés par des équations aux dérivées partielles linéaire ou non linéaire. La compréhension des propriétés des solutions des ces équations permet un meilleur développement de ces sciences. De plus, dans de nombreux domaines industriels et appliques (Aéronautique, pétrolier, nucléaire, automobile, etc.), il est nécessaire de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles assez complexes, la simulation numérique remplaçant très souvent la simulation expérimentale plus coûteuse.

Dans ce travail, nous considérons un problème aux limites elliptique gouverné par les équations de Laplace avec les conditions aux limites de Dirichlet. Notre but dans ce mémoire est de résoudre le problème considéré en utilisant la méthode des différences finis en se basant sur une bonne connaissance de la théorie des distributions, nous avons préféré rappeler quelques notions principales. Ce mémoire se décompose en trois chapitres, dans le premier, nous allons présenter un rappel concernant quelques notions indispensables sur la théorie élémentaires des distributions, qu’est un outil commode pour la définition des espaces fonctionnels utilisés, notamment les espaces de Sobolev et leurs propriétés les plus importantes. Dans le second chapitre, sous certaine condition, on démontre que le problème considéré est équivalent à un problème variationnel. En utilisant le théorème de Lax-Milgram, ainsi que l’inégalité de Korn on démontre l’existence et l’unicité d’une solution variationnelle.

Dans le dernier chapitre, moyennant la méthode des différences finis nous démontrons que la résolution numérique de ce problème considéré se ramène à la résolution d'un système linéaire $Ax = b$, et comme la matrice A est symétrique définies positives, nous avons préférer d’utiliser la méthode de *Cholesky*.

Index des figures

Notation

Ω	Ouvert de$\mathbb{R}^n$.
Γ	Bord deΩ.
$C^\infty(\overline{\Omega})$	Espace des fonctions C^∞ dans$\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions C^∞ a support compact dansΩ.
$\acute{\mathcal{D}}(\Omega)$	Espace des distributions de L.Schwartz.
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions carre intégrable surΩ.
$L^1_{Loc}(\Omega)$	Espace des fonctions localement intégrables de Ω .
$H^m(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre m surΩ.
$H^m_0(\Omega)$	La adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.
$P_k(\Omega)$	Espace des polynômes de degré $\leq k$surΩ.
$\|\|\,.\,\|\|_{m,\Omega}$	Norme de l'espace de Sobolev$H^m(\Omega)$.
$\|\,.\,\|_{m,\Omega}$	Sem-norme de l'espace de Sobolev$H^m(\Omega)$.
γ_0	Opérateur de trace sur Γ .
$\acute{H}$	Dual de l'espace$H$.
$\langle .,. \rangle$	Paire de dualité.
$\mathcal{D}^\alpha$	Dérivée partielle par rapport au multi-indiceα.
$\|\alpha\|$	Longueur du multi-indice.
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée normale sortante.

Chapitre I :

Rappel sur la théorie élémentaires des distributions et Les espaces de Sobolev

1. Notation :

Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désignera par $C_o^o(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω .

$$C_o^o(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \setminus f \text{ continue et supp } (f) \Subset \Omega\}.$$

Rappelons que le support $supp\ (f)$ d'une fonction $f$continue sur Ω est défini par :

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega \setminus f(x) \neq 0\}}.$$

Si la fonction f est mesurable sur Ω ; le support est défini par :

$$x \notin supp(f) \Leftrightarrow \exists \omega \in \mathcal{O}_x(\Omega)\ tq\ f\setminus\omega = 0\ pp.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L_{loc}^p(\Omega)$ si $f1_k \in L^p\ (\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

2. Rappels d'intégration :

Théorème (2.1) :

L'espace $C_o^o(\Omega)$ est dense dans l'espace $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$\forall f \in L^1(\Omega), \forall \varepsilon > 0, f_\varepsilon \in C_o^o(\Omega)\ tq\ \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon.$$

Théorème (2.2) :

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit p^* l'exposant conjugué de p , c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1(\text{lorsque} p = 1, p^* = \infty).$$

Etant donné $\varphi \in (L^p)'$ une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$, il existe une et une seule fonction $g \in L^{p^*}(\Omega)$ telle que :

$$\forall f \in L^p(\Omega) \quad \varphi(f) = \int fg. \quad sur\ \Omega$$

De plus, on à $\| \varphi_{(L^p)'} \| = \|g\|_{L^{p^*}}$.

Théorème (2.3):

Pour $1 \leq p \leq \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

Proposition (2.1) : soit $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ .Si $\int fu = 0$ pour toute fonction $\in C_o^o(\Omega)$, alors $f = 0$ presque partout dans Ω .

Corollaire (2.1) :

L'espace $C_o^o(\Omega)$ est dense dans l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

3. Convolution et régularisation :

Théorème (3.1) :

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ .Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, La fonction $y \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, si on pose :

$$(f \star g) = \int y \longrightarrow f(x-y)g(y)\, dy\, sur\ \mathbb{R}^n.$$

Alors $(f \star g) \in L^p(\mathbb{R}^n) et\ \|(f \star g)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$.

Proposition (3.1) :

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors :

$$supp(f \star g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}.$$

NOTATION :

- On note $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ l'espace vectoriel des fonctions dont les dérives partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continue dans Ω.
- On note $C_o^k(\Omega)$ $0 \leq k \leq \infty$ le sous espace vectoriel des fonctions de $C^k(\Omega)$, à support compact dans Ω (une fonction de $C_o^k(\Omega)$ s'annule donc au voisinage de $\partial\Omega$ dans Ω .
- L'espace$C_o^\infty(\Omega)$, que nous noterons également $\mathcal{D}(\Omega)$, S'appelle l'espace des fonctions test sur Ω .
- On a l'inclusion $C_o^\infty(\Omega) \subset C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ et l'égalité

$$C_o^\infty(\Omega) = \{ u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \ \text{supp}(f) \Subset \Omega \}.$$

- $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si pour tout compact $\subset \Omega$, $f \in L^1$(K).
- $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ a support compact dans Ω .

Proposition (3.2) : il existe une fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tell que :

$$\begin{cases} \rho \geq 0, \\ \int \rho(x) \ dx = 1 \ sur \ \mathbb{R}^n, \\ supp(\rho) = \bar{B}(0,1). \end{cases}$$

NOTATION : pour tout $\varepsilon > 0$, nous noterons ρ_ε la fonction

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Avec

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \geq 0, \\ \int \rho_\varepsilon(x)\ dx = 1\ sur\ \mathbb{R}^n, \\ supp(\rho_\varepsilon) = \bar{B}(0,\varepsilon). \end{cases}$$

Remarque :

Pour toute fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, posons :

$$u_\varepsilon(x) = u \star \rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int u(y)\,\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$

$$= \int u(x-\varepsilon y)\rho(y)dy\ \ sur\ \mathbb{R}^n$$

Théorème (3.2) : (théorème de régularisation et d'approximation)

(i) Soit u une fonction intégrable, nulle en dehors du compact $K \Subset \Omega$. Alors la fonction $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ dés que

$\varepsilon < \delta = dist(K, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$. Si, de plus, u est supposée continue alors u_ε tend vers u uniformément quand ε tend vers 0.

$(u_\varepsilon \longrightarrow u\ \ quand\ \varepsilon \longrightarrow 0)$.

(ii) Soit u une fonction de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors $(u_\varepsilon \longrightarrow u)$ dans L^p.

NOTATION :

Soit $\alpha \in N^n$ un multi-entier, avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

- ✓ On note x^α le monôme $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ de degré $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- ✓ On note ∂^α ou $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ l'opérateur de dérivation (d'ordre $|\alpha|$) $\frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha 1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha n}}$.
- ✓ On note ∂_j l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_j}$.
- ✓ $\acute{\mathcal{D}}(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

4. Dérivée faible :

Lemme : soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$et $(f, g) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$on a :

$$\int f(x)\varphi(x)dx = \int g(x)\varphi(x)\, dx \; sur \; \Omega \Rightarrow f = g \; pp.$$

Définition (4.1) :

Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $i \in [1, n]$ .On dit que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens faible s'il existe $\partial_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int \partial_i f(x)\varphi(x)dx \;\; sur \; \Omega.$$

Remarque : si $\partial_i f$ existe, il est unique.

Définition (4.2) : si $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on note :

i) Pour $K \subset \Omega$ compact, $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \backslash supp(\varphi) \subset K\}$.

ii) Pour $\alpha \in N^n$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,$P_\alpha(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$.

Définition (4.3) :

i) on dit que $T \in \acute{\mathcal{D}}(\Omega)$ $(T est\ une\ distribution\ )$, si $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et vérifier : $\forall\, K \subset \Omega$ compact,$\exists C_K > 0\ et\ m_K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$
$|\langle T,\varphi\rangle| \leq C_K sup P_\alpha(\varphi)_{|\alpha|<m_K}$.

ii) Si $i \in [1, n]$. Alors on définit la dérivée de $T \in \acute{\mathcal{D}}(\Omega)$
dans la direction i comme étant la distribution $\partial_i T$ vérifient :

$$\langle \partial_i T,\varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\rangle.$$

Remarque : si $T \in \acute{\mathcal{D}}(\Omega)$ d'ordre m alors $\partial_i T \in \acute{\mathcal{D}}(\Omega)$ et d'ordre $m + 1$.

Définition (4.4):

Si $(T_n) \in \acute{\mathcal{D}}(\Omega)$ et $T \in \acute{\mathcal{D}}(\Omega)$ alors $T_n \overset{\acute{\mathcal{D}}}{\to} T$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$$\langle T_n,\varphi\rangle \longrightarrow \langle T,\varphi\rangle$$

Remarque : On a alors $T_n \overset{\acute{\mathcal{D}}}{\to} T \Rightarrow \partial_i T_n \overset{\acute{\mathcal{D}}}{\to} \partial_i T$.

Définition (4.5) :

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors on définit la distribution d'ordre 0 :

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx\ .$$

On appelle alors dérivée faible, au sens de distribution, de f dans la direction i la distribution $\partial_i T_f$ que l'on note $\partial_i f$.

Remarque : Si f est dérivable au sens faible dans la direction i

alors $\partial_i T_f = T_{\partial_i f}$

Proposition : Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors f est lipchitzienne $\Leftrightarrow \forall\, i \in [1, n]$, $\partial_i f \in L^\infty(\Omega)$.

5. Espace de sobolev :

Notation :

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, introduisons l'espace

$$C^{\infty,k,p}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \backslash \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) pour\ tout\ |B| \leq k\}$$

Et munissons-le de la norme : $\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^p u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$. Quand $p = 2$ cette norme provient d'un produit scalaire.

Définition (5.1):

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Sobolev $H^{k,p}(\Omega)$ comme étant le complété de l'espace $C^{\infty,k,p}(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{k,p}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ comme :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \forall \alpha, |\alpha| \leq k,$$
$$\exists v_\alpha \in L^p(\Omega)\ tq\ \ v_\alpha = \partial^\alpha u\ \ au\ sens\ faible\}$$

On a ainsi deux manières naturelles de définir les espaces de Sobolev .

Il se trouve que les deux définitions ci-dessus équivalentes.

Théorème (5.2):

$\forall \Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall\, p \in [1, +\infty[$ on a: $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$.

Il facile de voir que $W^{k,p}(\Omega)$, muni de la norme $\|.\|_{k,p}$, t de Banach séparable et que $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ .La réciproque se démontre par régularisation.

6. Les espaces H^{k} :

Définition (6.1) :

Etant donné $k \in \mathbb{N}$, $p = 2$, nous désignerons par $H^k(\Omega)$ l'espace de Sobolev.

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \forall \alpha, |\alpha| \leq k,$$
$$\exists v_\alpha \in L^2(\Omega)\ tq\quad v_\alpha = \partial^\alpha u \quad au\ sens\ faible\}$$

On introduit sur H^k le produit scalaire : $\langle u, v\rangle_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle$,

$\langle u, v\rangle_k = \int u(x)v(x)dx + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)dx$ (sur Ω.) .Et la norme associé : $\|u\|_k = \sqrt{\langle u, v\rangle_k}$. $\langle\, .\, \rangle$, désigne le produit scalaire usuel sur L^2.

Théorème (6.2) :

Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ l'espace $H^k(\Omega)$ muni de produit scalaire est un espace de Hilbert séparable.

Proposition (6.3) :

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ Tell que$|\alpha| \leq k$, l'operateur de dérivation ∂^α est une opération linéaire continue de $H^k(\Omega)$ de$H^{k-|\alpha|}(\Omega)$.

Définition (6.4) :

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans$H^k(\Omega)$.

Théorème (6.5):

$\forall k \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^k(\mathbb{R}^n)$ .Autrement dit:

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H_0^k(\mathbb{R}^n).$$

Cas particulier :

7. Espace $\mathbf{H^1(\Omega)}$:

Définition (7.1): Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\ tq\ \forall i \in [1,n] \quad \frac{du}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}$$

Théorème (7.2) :

$H^1(\Omega)$ est un espace vectoriel, muni d'un produit scalaire :

$\langle f, g\rangle_{H^1} = \int f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}dx$ Sur Ω. C'est un espace de Hilbert .Sa norme note $\|.\|_{H^1}$.

Remarque :

i) On voit que $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$ et $\|\partial_i f\|_{L^2} \leq \|\partial_i f\|_{H^1}$.

ii) $\forall \Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ On a : $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

8. L'espace $\mathbf{H_0^1}(\boldsymbol{\Omega})$:

Théorème (8.1):

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ pour la norme H^1 :

$\forall\ f \in H^1(\mathbb{R}^n), \exists \phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\lim_n \|f - \phi_n\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0$.

- Si $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\ \Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\ \Omega)$.

Définition (8.2) :

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\ \Omega)$ dans$H^1(\ \Omega)$.

(Pour la norme $H^1(\ \Omega)$). Autrement dit :

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in\ H^1(\ \Omega), \exists \phi_n \in \mathcal{D}(\Omega) tq\ \ \phi_n \longrightarrow f\ dans\ H^1(\ \Omega)\}$$

Remarque :

i) $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\Omega \neq \mathbb{R}^n, H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ avec inclusion strict.

iii) $\mathcal{D}(\ \Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$.

iv) $H_0^1(\Omega)$ est le fermé de$H^1(\Omega)$.

Théorème (8.3) :

$H_0^1(\Omega)$ Est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1.

Théorème (8.4): "Inégalité de Poincaré-Friedrichs "

Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, borné connexe à bord lipchitzien,$k \in \mathbb{N}^*$, et $H_0^1(\Omega)$ un sous- espace fermé de $H^k(\Omega)$ telle que :

$$H_0^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_{k-1}(\Omega) = \{0\}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que : $\forall\, u \in V,\ \|u\|_{m,\Omega} \leq C(\Omega)|u|_{m,\Omega}$. Ou : $|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|<m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalent à la norme$\|\ .\ \|_1$.

9. Théorème de trace :

Soit $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et$m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nous introduisons les notations suivantes :

$$C^m(\overline{\Omega}) = \left\{ \begin{matrix} f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} | \exists \Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \overline{\Omega} \subset \Omega_1, \exists f_1 \in C^m(\Omega_1) \\ tq \quad f_1|\overline{\Omega} = f \end{matrix} \right\} \text{ Et}$$

$$C_0^m(\overline{\Omega}) = \left\{ \begin{matrix} f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} | \exists \Omega_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \overline{\Omega} \subset \Omega_1, \exists f_1 \in C_0^m(\Omega_1) \\ tq \quad f_1|\overline{\Omega} = f \end{matrix} \right\}$$

10. Théorème de trace pour $\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}$ et applications :

Nous traitons le cas ou :

$$\begin{cases} \Omega = \mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}} := \{x = (\acute{x}, x) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\} \\ \Gamma := \partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \end{cases}$$

On peut bien sur parler de la trace d'une fonction v de $C_0^m(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$: on définit $\gamma_0(v)$ par $\gamma_0(v)(\acute{x}) = v(\acute{x}, 0)$, Pour tout $\acute{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. $\quad (*)$

Il est clair que l'on a $\gamma_0(v)(\acute{x}) \in C_0^m(\mathbb{R}^{n-1})$ .On a le lemme suivant.

Lemme : pour toute $v \in C_0^m(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$, on a

$$\|\gamma_0(v)\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \leq \|v\|_{1,\mathbb{R}_+^n}$$

Corollaire : l'application γ_0 définie par $(*)$s'étant en une application linéaire continue de $H_0^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que :

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}), \qquad \|\gamma_0(v)\|_{0,\mathbb{R}^{n-1}} \leq \|v\|_{1,\mathbb{R}_+^n}$$

Nous utiliserons également la notation $u|\partial\mathbb{R}_+^n$ à la place de $\gamma_0(u)$

Théorème (10.1) :

Soit γ_0 l'application trace de $H_0^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ .Pour tout u et v dans $H^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}})$, on a les égalités (formule de Green)

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}} v(x)\partial_j u(x)dx = -\int_{\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}} u(x)\partial_j v(x)dx\,, \quad 1 \leq j \leq n-1. \\ \int_{\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}} v(x)\partial_n u(x)dx = -\int_{\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}} u(x)\partial_n v(x)dx - \int_{\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n-1}}} \gamma_0(v)(\acute{x})\gamma_0(u)(\acute{x})d\acute{x}. \end{cases}$$

Théorème (10.2) :

Soit γ_0 l'application trace de $H_0^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. On a l'égalité :

$$H_0^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}) = \{u \in H^1(\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}) | \gamma_0(u) = 0\}.$$

Lemme : "inégalité de Korn"

Il existe une constante C dépendant seulement de Ω tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(D_{i,j}(v)\right)^2 dx \geq C\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\boldsymbol{\Omega})^3}^{\boldsymbol{2}} \text{ , pour tout } v \in H_0^1(\Omega)^3$$

Chapitre II :

Existence et unicité d'une solution variationnelle

1. Proposition du problème :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, à bord Lipchitzien étant $f \in L^2(\Omega)$, on veut trouver la solution u de problème :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u = f \; dans \; \Omega & \ldots (1) \\ \gamma_0 u = 0 \quad sur \; \Gamma & \ldots (2) \end{cases}$$

Où: $$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

2. Formulation variationnelle :

Proposition (2.1) : Pour $f \in L^2(\Omega)$, le problème $(\mathcal{P})$ est équivalent au problème variationnelle $(\mathcal{P}V)$ suivant :

$$(\mathcal{P}V) : \begin{cases} trouve \;\; v \in V \; tell \; que \\ a(u,v) = F(v) \quad \ldots (3) \end{cases}$$

Où : $H_0^1(\Omega) = V$

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx \, .$$

Démonstration:

i)$(\boldsymbol{\mathcal{P}}) \Longrightarrow (\boldsymbol{\mathcal{P}V})$ **:**

Supposons pour le moment qu'une solution u de $(\mathcal{P})$ existe et qu'elle est suffisamment régulière, disons $u \in H^2(\Omega)$, alors en multipliant l'équation (1) par une "fonction –test"; $v \in H^1(\Omega)$, on obtient :

$$-\Delta u . v = f . v$$

- En intégrant sur Ω on obtient :

$$\int_{\Omega} -\Delta u\, v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx\,.$$

En intégrant par parties dans le premier membre de cette identité, on obtient :

$$\int_{\Omega} -\Delta u\, v(x)dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v(x)dx$$

$$= -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) v(x)dx$$

$$= -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} v(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} v(x) \right) dx$$

$$= -\left[\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} v(x)dx + \cdots + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} v(x)dx \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v(x)dx \overset{P.I.P}{\Longleftrightarrow}$$

Si on pose $v = 0$ sur Γ, alors :

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Alors : $$-\int_{\Omega} \Delta u . v(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Comme il n'y a aucune raison que les termes de bord soient nuls, nous prenons $v \in H_0^1(\Omega)$, cette dernière identité implique alors (puisque une telle fonction v satisfait $v(x) = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \qquad \ldots (4).$$

Comme les conditions de bord (2) impliquent que $u \in H_0^1(\Omega)$, on voit que le bon choix et de le prendre :

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \,.$$

D'où le problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}V) : \begin{cases} trouve \;\; v \in V \; tell \; que \\ \quad a(u,v) = F(v) \end{cases}$$

ii) $(\boldsymbol{\mathcal{P}}\mathbf{V}) \Longrightarrow (\boldsymbol{\mathcal{P}})$:

Reste à vérifier l'implication inverse, c'est-à-dire, toute solution du problème $(\mathcal{P}\mathrm{V})$ est une solution de problème$(\mathcal{P})$.

En effet :

On a ainsi montré que si $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ est solution de $(\mathcal{P})$ alors elle est solution de (4), ou de manière équivalente solution de (3) avec le choix fait ci-dessus .

Grace au lemme de Lax_Milgram, nous allons maintenant montrer que le problème (4) à une solution unique $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, vérifiée – en l'hypothèse :

La bilinéarité de a et la linéarité de F se découlent de la linéarité de l'intégrale.

On Supposons que $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, soit une solution de $(1),(2)$. Alors par la formule de Green, on aura pour tout $\mathrm{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x_i}} \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x_i}} \mathrm{dx} - \int_{\Omega} \gamma_0 \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{v}} \gamma_0 \mathrm{v} \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{f(x)v(x)dx}$$

Comme le terme de bord n'a aucune raison de s'annuler donc induit une dissymétrie entre la régularité de u et v dans le premier membre de cette identité et comme de plus u satisfait (2) qui a un sens pour tout élément de $H^1(\Omega)$ on prend les fonctions test $v \in H_0^1(\Omega)$ dans ce cas l'identité ci-dessus implique alors que :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \dots (5).$$

La coercivité de la forme a sur $H_0^1(\Omega)$ suit de l'inégalité de Poincaré-Friedrich puisque :

$$a(u,v) = |u|_{1,\Omega}^2 .$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est inclus dans $H_0^1(\Omega)$, la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème ci-dessus vérifie.

$$-\Delta u = f. \text{ dans } \acute{\mathcal{D}}(\Omega).$$

Ainsi cette solution est aussi solution de $(1),(2)$ mais dans un sens plus faible car (1) n'est satisfaite qu'au sens de distributionnel, en effet de l'identité ci-dessus on ne peut conclure que $u \in H^2(\Omega)$ (le fait que $\Delta u^2 \in L^2(\Omega)$ n'est pas équivalent à $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \in L^2(\Omega)$,pour tout $i,j = \{1,2 \dots, n\}$

Remarque :

Comme on vient de le signaler, on peut se poser la question si la solution u du problème $(1),(2)$ a la régularité $H^2(\Omega)$ (ce qui garantira l'équivalence entre $(1),(2)$ et la formulation variationnelle).

3- Quelques résultats préliminaires

3.1. Problème variationnel:

Définition (3.1) : "Forme bilinéaire – continue ":

Soit V un espace de Hilbert réel le produit scalaire $(.,.)$, et de norme $\|.\|$.

Soit la forme suivante : $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(u,v) \longrightarrow a(u,v)$$

- On dite que cette forme est une forme bilinéaire si seulement si :
  - Linéaire sur u.
  - Linéaire sur v.
- On dit que cette forme est continue si seulement si:

  $\exists\ M \geq 0$ tel que :

  $$|a(u,v)| \leq M\|u\|_V . \|v\|_V \quad \forall u,v \in V.$$

  Notons par v' le dual topologique de v.

Définition (3.2) : "Coercivité"

On dit que la forme bilinéaire a est -elliptique ou coercive sur V si seulement si :

$$\exists\ \alpha \geq 0 \text{ Telle que : } a(u,v) \geq \alpha\|u\|_u^2 \quad \forall u \in V. \quad ...(5)$$

Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant connu sous le nom de lemme de Lax_Milgram.

3.2 Théorème de Lax_Milgram:

Si la forme bilinéaire a est V- elliptique (coercive), alors le problème (3) a une solution unique $u \in V$, de plus, on a l'estimée :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_V \quad \dots (6)$$

Preuve :

Fixons $u \in V$ et considérons l'application

$$Au: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \mapsto a(u,v)$$

Ceux-ci définit une forme linéaire continue sur V i.e. $Au \in \acute{V}$.

En effet :

$$|Au(v)| = |a(u,v)| \leq M\ \|u\|_V\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Ce qui prouve de plus que :

$$\|Au\|_{\acute{V}} \leq M\|u\|_V \quad \dots (7)$$

Pour ρ paramètre réel positif, introduisons

$$\Phi_\rho : V \longrightarrow V$$
$$u \longmapsto u - \rho T(Au - f)$$

L'application T de $\acute{V}$ dans V étant définie au théorème (représentation de Riesz).

L'existence d'un point fixe pour Φ_ρ est clairement équivalente à l'existence d'une solution à notre problème (3) .

Il nous reste donc à montrer que, pour ρ suffisamment petit, Φ_ρ est une contraction puisque alors Φ_ρ aura un unique point fixe pour cela on calcule $\left\|\Phi_\rho(u - \Phi_\rho(v))\right\|_V$, par la définition de Φ_ρ et la bilinéarité du produit scalaire, on a :

$$\left\|\Phi_\rho(u - \Phi_\rho(v)\right\|_V^2 = (u - v, u - v)_V - 2\rho\big(u - v, T(Au - Av)\big)_V$$

$$+\rho^2\big(\mathrm{T}(Au - Av), (Au - Av)\big)_{\mathrm{V}}$$

$$= \|u - v\|_V^2 + \rho^2\|T(Au - Av\|_V^2$$

$$-2\rho\big(u - v, T(Au - Av)\big)_V$$

$$= \|u - v\|_V^2 + \rho^2\|Au - Av\|_V^2 - 2\rho(Au - Av)(u - v)$$

Cette dernière identité s'obtenant grâce au propriété de l'application T, finalement vu la définition de A on arrive à :

$$\left\|\Phi_\rho(u - \Phi_\rho(v)\right\|_V^2 = \|u - v\|_V^2 + \rho^2\|Au - Av\|_V^2 - 2\rho(Au - Av)(u - v).$$

Par $(7), (5)$, on arrive à l'estimer :

$$\left\|\Phi_\rho(u - \Phi_\rho(v))\right\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2M^2)\|u - v\|_V^2$$

Ainsi Φ_ρ sera contractante si $(1 - 2\rho\alpha + \rho^2M^2) \leq 1$ ce qui équivautt à $0 < \rho < {}^{2\alpha}/_{M^2}$.

Par : (3) applique avec $u = v$ on a : $a(u, u) = F(u)$

Ainsi par la coercivité de a et la continuité de F, l'identité ci-dessus implique :

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = F(u) \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$$

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq \|F\|_{V'}\|u\|_V$$

Ce que prouve l'estimée.

3-3 Existence et unicité :

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

Grace au lemme de Lax_Milgram, nous allons maintenant montrer que le problème $(\mathcal{P})$ a une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$, vérifions - on les hypothèses.

Démonstration:

La bilinéarité de a et la linéarité de F découlent de la linéarité de l'intégrale.

- **La bilinéarité de $\boldsymbol{a}$ et la linéarité de $\boldsymbol{F}$** :
  - **La linéarité de $\boldsymbol{F}$:**

- on veut montrer que $F(\alpha v) = \alpha F(v)$.

En effet :

$$F(\alpha x) = \int_\Omega f(x)v(\alpha x)dx = \int_\Omega f(x).\alpha.v(x)dx$$

$$= \alpha\int_\Omega f(x)v(x)dx = \alpha F(v)$$

Alors $F(\alpha v) = \alpha F(v)$.

- on veut montrer que $F(u+v) = F(u) + F(v)$.

En effet:

$$F(u+v) = \int_\Omega f(x)\big(u(x)+v(x)\big)dx = \int_\Omega f(x)v(x) + f(x)v(x)dx$$

$$= F(u) + F(v)$$

Alors : $F(u+v) = F(u) + F(v)$.

- **La bilinéarité de la formule $\boldsymbol{a}$:**

En effet:

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

1. on veut montrer que : $a(\alpha u, v) = \alpha a(u,v)$

$$a(\alpha u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial(\alpha u)}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Alors : $a(\alpha u, v) = \alpha\, a(u, v)$.

2. On veut montrer que : $a(u, \alpha v) = \alpha\, a(u, v)$

$$a(u, \alpha v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (\alpha v)}{\partial x_i} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \alpha \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Alors : $a(u, \alpha v) = \alpha a(u, v)$.

3. On veut montrer que : $a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v)$

$$a(u_1 + u_2, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (u_1)}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_2)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=u1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

$$= a(u_1, v) + a(u_2, v)$$

Alors : $a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v)$.

4. On veut montrer que : $a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2)$

$$a(u, v_1 + v_2) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial x_i} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} dx$$

$$= a(u, v_1) + a(u, v_2)$$

Alors : $a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2)$

- **La continuité de a et F :**
  - **La continuité de F :**

Par l'inégalité de Cauchy Schwartz, on vérifie que F est continue c'est-à-dire

$$\exists M > 0, |F(v)| \leq M \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En effet :

$$|F(v)| = \left|\int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) v(x) dx|$$

$$\leq \|f(x)\|_{L^2} \|v(x)\|_{L^2}$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Friedrichs

Alors : $|F(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$.

Comme la norme L^2 est toujours plus petite que la norme $H_0^1(\Omega)$, on conclut la continuité de F, on procède de manière analogue pour la forme a .

- **La continuité de a :**

En effet:

On vérifie que $\exists M > 0$, $|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$:

$$|a(u,v)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\right|$$

$$\leq \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^2} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors :

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de la forme a .

- **La coercivité de la forme a :**

La forme a est coerive si seulement si :

$$\exists\ \alpha > 0, \text{tell que } a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

En effet :

$$a(u,u) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}\,dx = \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}\right\|^2_{L^2}$$

D'après l'inégalité de Korn on déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}\,dx \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors :

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}\right\|^2_{L^2} \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où la coercivité de la forme a.

Donc le problème $(\mathcal{P})$ a une solution unique

Chapitre III :

Résolution

Numérique par la méthode de différence finis

Méthode de différence finis :

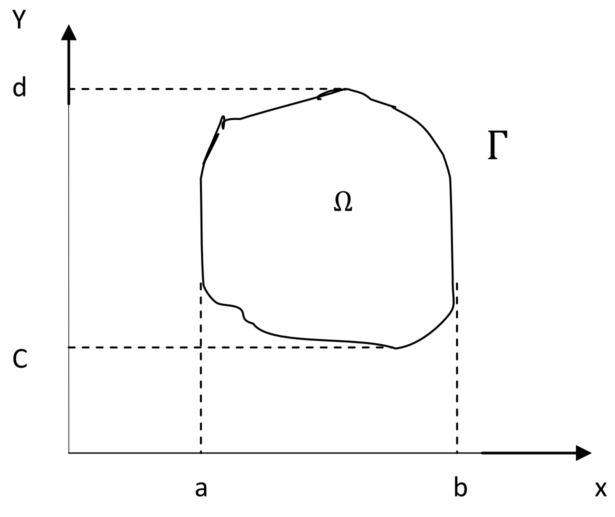
Nous avons vu qu'un problème aux dérives partielles nécessite la donnée :

- D'un domaine Ω.
- D'une équation des dérives partielles (E.D.P).
- Des conditions aux limites.
- Des conditions initiales.

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher chacun de ses éléments.

1. discrétisation du domaine :

soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ.



Γ Fig.1

Posons : $[a,b] = P_1(\Omega)$ et $[c,d] = P_2(\Omega)$. Ou P_1 et P_2 sont les opérateurs de projection respectivement sur la 1ére et sur la 2éme composante. Considérons alors un pavé $[A,B] \times [C,D]$ tell que : $[a,b] \subset [A,B]$ et $[c,d] \subset [C,D]$.

Soient deux entiers N_x et N_y nous obtenons deux paramètre de discrétisation.

$$h = \frac{B-A}{N_x}\ , \qquad k = \frac{D-C}{N_y}$$

nous définirons ainsi un réseau des points de $\mathbb{R}^2$.

$\Re_{hk} = \left\{M_{ij} \in \mathbb{R}^2 | M_{ij} = (A+ih, C+jk), i = 1 \dots N_x, j = 1 \dots N_y\right\}$.

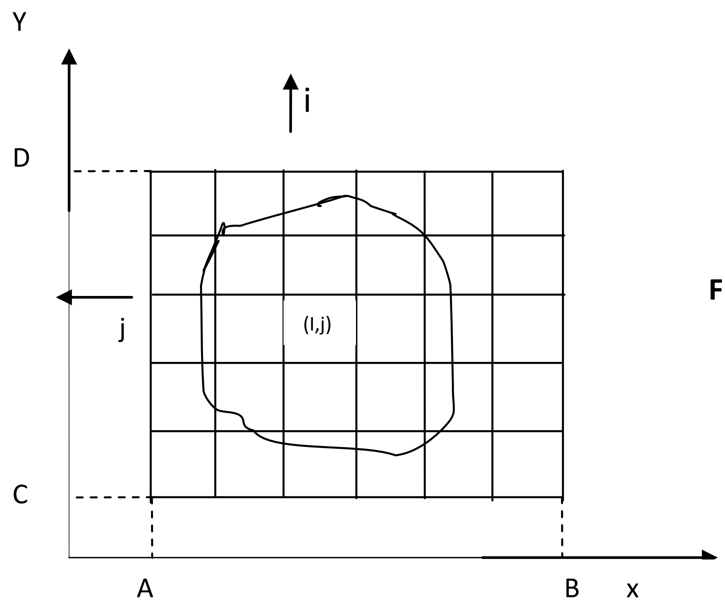


Fig.2

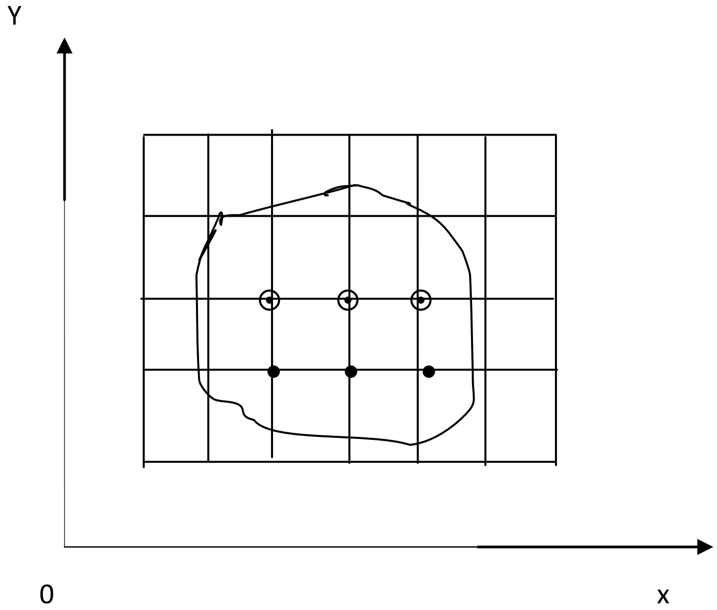
En général, on essaie que le réseau s'adapte au domaine Ω plus précisément, si le domaine Ω est un pavé $[A,B] \times [C,D]$.

Notons par :

- $\boldsymbol{\Gamma_{hk}}$: L'ensemble des points d'intersection de la frontière Γet des droits du maillage.

- $\boldsymbol{\Omega_{hk} = \Omega \cap \Re_{hk}}$: L'ensemble des points $M_{ij} \in \Re_{hk}$ qui appartiennent: $\overline{\Omega_{hk}} = \Omega_{hk} \cup \Gamma_{hk}$.

- $\boldsymbol{\Omega^{\circ}{}_{hk}}$: L'ensemble des points M_{ij} tell que : les 4 points de $\Re_{hk}$ qui l'entourent appartiennent Ω_{hk} .



$$\overline{\Omega_{hk}}\begin{cases} \bullet : \Omega_{hk} \\ \times : \Gamma_{hk} \end{cases}$$

$$\circ : \Omega^{\circ}{}_{hk}$$

Fig.3

2. Approximation des dérivées par des différences finis :

Soit $u(x,y)$ une fonction de deux variables indépendantes que nous supposerons suffisamment différentiable, si nous écrivons son développement de Taylor en un point $(x+h, y+k)$, nous avons :

$$u(x+h, y+k) = u(x,y) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

$$+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{hk}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}u(x,y)+R_n.$$

Avec $R_n = 0[(|h|+|k|)^n]$. $R_n = \frac{1}{(n)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} u(x+\xi h, y+\eta k)$;

$\xi \in [0,1], \eta \in]0,1[$

- Au point $M_{ij} = (i,j)$ de $\Re_{hk}$ nous noterons :

$$u_{i,j} = u(A+ih, C+jk)\ .$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(A+ih, c+jk)\ .$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A+ih, C+jk)\ .$$

Nous avons donc

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h\,u_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} - \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx} + R_5 \quad \dots(1)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h\,u_x + \frac{h^2}{2!}u_{xx} + \frac{h^3}{3!}u_{xxx} + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx} + R'_5 \quad \dots(2)$$

Par adition et soustraction nous obtenons:

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + 0(h) \quad \dots(3)$$

$$u_x = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + 0(h) \quad \dots(4)$$

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h} + 0(h^2) \quad \dots(5)$$

Nous avons approché u_x par des différences finis d'ordre 1 progressive (3), régressive (4), symétrique (5).

Remarque :

- On appelle des différences finis d'ordre 1 **progressive** notée $\nabla_h f$ la fonction définie par :

$$\nabla_h f(x) = \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big).$$

- On appelle des différences finis d'ordre **1 régressive** notée $\overline{\nabla_h} f$ la fonction définie par

$$\overline{\nabla_h} f(x) = \frac{1}{h}\big(f(x) - f(x+h)\big).$$

Nous obtenons :

$$u_{xx} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + 0(h^2) \quad \dots (6)$$

- on définira de même des approximations de u_y et u_{yy} en outre, on a

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A+ih, C+jk)$$

$$= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + (h^2 + k^2)$$

$$u_{yy} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{k^2} + 0(h^2)$$

Nous obtenus donc :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$= \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{k^2} + 0(h^2 + k^2)$$

Si nous prenons $h = k$:

$$\Delta u = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} + 0(h^2)$$

Nous pouvons également utilise une approximation sur 9 points $(h = k)$.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Delta u = \frac{u_{i-1,j+1} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i,j+1} - 20u_{i,j}}{h^2}$$

$$+ \frac{u_{i+1,j+1} + 4u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}}{h^2} + 0(h^4).$$

3. Exemple discrétisations de l'équation de Laplace en dimension 2 :

Considérons le problème suivant sur $\Omega =]0, L[\times]0, L[$:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y) \ ; (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g(x,y) \qquad ; (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

Avec Γ la frontière de Ω. Soit un entier N, on obtient le réseau.

$$\Re_h = \left\{ M_{ij} \in \mathbb{R}^2 | M_{ij} = (ih, jh), i, j = 1 \dots N, h = \frac{L}{N} \right\}$$

Pour ne pas avoir des matrices trop grandes, nous prendrons N = 4 .

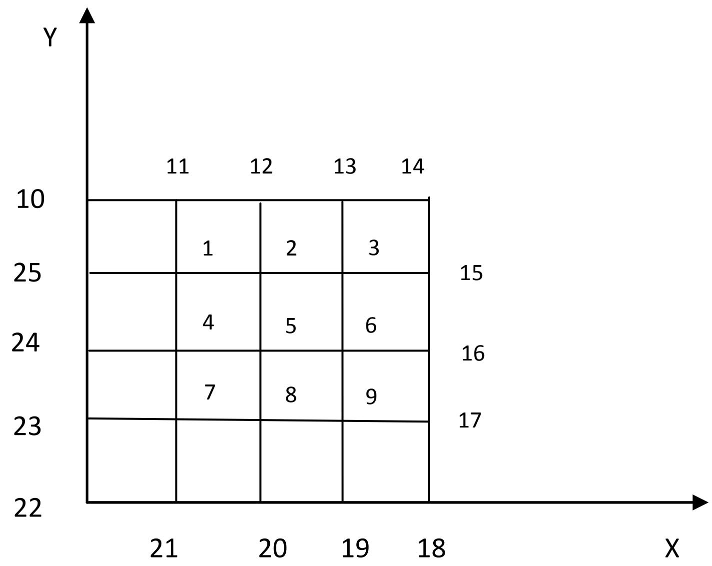


Fig.4

- Nous numérotons les points comme indiqué sur la figure.
- Nous noterons f_i la valeur de f au point numéroté i ; $i = 1 \dots 9$.

Et g_i la valeur de g au point numéroté i ; $i = 10 \dots 25$.

Par exemple :

$$f_1 = f(h, 3h) \; ; \quad f_2 = f(2h, 3h); \, f_3 = f(3h, 3h).$$

$$f_4 = f(h, 2h) \; ; \quad f_5 = f(2h, 2h); \, f_6 = f(2h, 3h).$$

$$f_7 = f(h, h) \; ; \quad f_8 = f(2h, h); \quad f_9 = f(3h, h).$$

Et pour les g_i on a :

$$g_{10} = g(0{,}4h) \; ; \quad g_{11} = g(h, 4h); \, g_{12} = g(2h, 4h).$$

$$g_{13} = g(3h, 4h) \; ; \quad g_{14} = g(4h, 4h); \, g_{15} = g(4h, 3h).$$

$$g_{16} = g(4h, 2h) \; ; \quad g_{17} = g(4h, h); \, g_{18} = g(4h, 0).$$

$$g_{19} = g(3h, 0) \; ; \quad g_{20} = g(2h, 0); \, g_{21} = g(h, 0).$$

$$g_{22} = g(0{,}0) \; ; \quad g_{23} = g(0, h); \, g_{24} = g(0{,}2h); \, g_{25} = g(0{,}3h).$$

Les valeurs de u sur la frontière étant fixées, il nous reste à trouver des approximations de la solution u aux points numéroté i ; $i = 1 \dots 9$; nous noterons v_i l'approximation aux point i ; $(v_i = f_i)$.Nous avons l'approximation suivante :

$$\Delta u(x,y) = f(x,y)$$

$$= \frac{u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)}{h^2}$$

- Nous obtenons donc, on écrivons cette équation aux points $i = 1 \dots 9$.

Pour i = 1 , posons que : x = h ; y = 3h.

- $\Delta u(h,3h) = h^2 f(h,3h)$

$$u(h-h,3h) + u(h+h,3h) + u(h,3h-h) + u(h,3h+h) - 4u(h,3h)$$
$$= h^2 f(h,3h)$$

- $\Delta u(h,3h) = h^2 f(h,3h)$

$$u(0{,}3h) + u(2h,3h) + u(h,2h) + u(h,4h) - 4u(h,3h) = h^2 f(h,3h)$$

$$\Delta u(h,3h) = g(0{,}3h) + f(2h,3h) + f(h,2h) + g(h,4h) - 4f(h,3h)$$
$$= h^2 f_1$$

Donc :

$$\Delta u(h,3h) = g_{25} + v_2 + v_4 + g_{11} - 4v_1 = h^2 f_1 \ \dots (1)$$

Pour $i = 2$, posons que : $x = 2h$; $y = 3h$.

$$\Delta u(2h,3h) = h^2 f(2h,3h)$$

$$u(2h-h,3h) + u(2h+h,3h) + u(2h,3h-h) + u(2h,3h+h)$$
$$- 4u(2h,3h) = h^2 f(2h,3h)$$

Donc :

$$\Delta u(2h,3h) = v_1 + v_3 + v_5 + g_{12} - 4v_2 = h^2 f_2 \ \dots (2)$$

Pour $i = 3$, posons que : $x = 3h;\ \ y = 3h.$

On obtient :

$$\Delta u(3h, 3h) = v_2 + g_{15} + v_6 + g_{13} - 4v_3 = h^2 f_3 \ \dots (3)$$

On fait le même calcul pour $i = 4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9$.

Alors on obtient le système suivant :

$$(S)\begin{cases} g_{25} + v_2 + v_4 + g_{11} - 4v_1 = h^2 f_1 \ \dots (1) \\ v_1 + v_3 + v_5 + g_{12} - 4v_2 = h^2 f_1 \ \dots (2) \\ v_2 + g_{15} + v_6 + g_{13} - 4v_3 = h^2 f_3 \ \dots (3) \\ g_{24} + v_5 + v_7 + v_1 - 4v_4 = h^2 f_4 \ \dots (4) \\ v_4 + v_6 + v_8 + v_2 - 4v_5 = h^2 f_5 \ \dots (5) \\ v_5 + g_{16} + v_9 + v_3 - 4v_6 = h^2 f_6 \ \dots (6) \\ g_{23} + v_8 + g_{21} + v_4 - 4v_7 = h^2 f_7 \ \dots (7) \\ v_7 + v_9 + g_{20} + v_5 - 4v_8 = h^2 f_8 \ \dots (8) \\ v_8 + g_{17} + g_{19} + v_6 - 4v_9 = h^2 f_9 \ \dots (9) \end{cases}$$

$$(S)\begin{cases} v_2 + v_4 - 4v_1 = h^2 f_1 - g_{25} - g_{11} \ \dots (1) \\ v_1 + v_3 + v_5 - 4v_2 = h^2 f_1 - g_{12} \ \dots (2) \\ v_2 + v_6 - 4v_3 = h^2 f_3 - g_{15} - g_{13} \ \dots (3) \\ v_5 + v_7 + v_1 - 4v_4 = h^2 f_4 - g_{24} \dots (4) \\ v_4 + v_6 + v_8 + v_2 - 4v_5 = h^2 f_5 \ \dots (5) \\ v_5 + v_9 + v_3 - 4v_6 = h^2 f_6 - g_{16} \dots (6) \\ v_8 + g_{21} + v_4 - 4v_7 = h^2 f_7 - g_{23} \dots (7) \\ v_7 + v_9 + v_5 - 4v_8 = h^2 f_8 - g_{20} \ \dots (8) \\ v_8 + v_6 - 4v_9 = h^2 f_9 - g_{17} - g_{19} \ \dots (9) \end{cases}$$

Si nous considérons le vecteur V de composantes v_i ;

$i = 1 \dots 9$, nous pouvons écrire le système (S) sous la forme suivante :

$$AV = B$$

Ou $A \in m_{9,9}(\mathbb{R})$ et $V, B \in (\mathbb{R}^9)$, la matrice A et le vecteur B s'écrivent :

$$A = \begin{pmatrix} -4\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1-4\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1-4\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,-4\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1-4\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1-4\,\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0-4\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1-4\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1-4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} h^2 f_1 - g_{11} - g_{25} \\ h^2 f_2 - g_{12} \\ h^2 f_3 - g_{13} - g_{15} \\ h^2 f_4 - g_{24} \\ h^2 f_5 \\ h^2 f_6 - g_{16} \\ h^2 f_7 - g_{21} - g_{23} \\ h^2 f_8 - g_{20} \\ h^2 f_9 - g_{17} - g_{19} \end{pmatrix}$$

Application :

Considérons le problème suivant sur $\Omega =]0,1[\times]0,1[$:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 1 \ ; (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0 \qquad ; (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

Avec Γ le frontière de Ω. Soit un entier N, on obtient le réseau.

$$\Re_h = \left\{ M_{ij} \in \mathbb{R}^2 | M_{ij} = (ih, jh), i,j = 1 \dots N, h = \frac{1}{N} \right\}$$

Pour ne pas avoir des matrices trop grandes, nous prendrons $\mathrm{N} = 4$.

- Nous numérotons les points comme indiqué sur la figure.
- Nous noterons $\mathrm{f_i}$la valeur de fau point numéroté i ;$\mathrm{i} = 1 \dots 9$.
- Et pour les $\mathrm{g_i}$sont nul pour tout i ; $\mathrm{i} = 10 \dots 25$.

Par exemple :

$$f_1 = f(h,3h) \ ; \quad f_2 = f(2h,3h); f_3 = f(3h,3h).$$

$$f_4 = f(h,2h) \ ; \quad f_5 = f(2h,2h); f_6 = f(2h,3h).$$

$$f_7 = f(h,h) \ ; \qquad f_8 = f(2h,h); \quad f_9 = f(3h,h).$$

A la fin on obtient le système suivant :

$$A = \begin{pmatrix} -4\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1 - 4\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1 - 4\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 0\ -4\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 - 4\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 - 4\ \ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 - 4\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 - 4\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 - 4 \end{pmatrix}; B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode de CHOLESKY.

4. Méthode de CHOLESKY :

Définition :

Une matrice A est dite définie positive si :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \implies (\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) > 0.$$

4.1Théorème:

Une matrice A est symétrique définie positive (on notera S.D.P) si seulement si il existe une matrice L triangulaire inférieure inversible

Telle que :

$$A = L.L^t$$

Où L^t désigne la matrice transposée de $\boldsymbol{L}$.

4.2 Algorithme de Cholesky :

- supposons donc que A est S.D.P pour résoudre le système

$$AV = B\ldots\ldots \text{(*)}$$

- le théorème (4.1) permet d'écrire (*) sous la forme $L.L^t x = B$, avec L triangulaire inférieure inversible.

On est donc ramené à résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} Ly = B \\ L^t x = y \end{cases}$$

Le problème consiste donc explicitement à la matrice $L = \left(l_{ij}\right)$ triangulaire inférieure telle que :

$$A = L.L^t \quad \text{Ou } A = \left(a_{ij}\right)$$

Ce qui équivaut à :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} \qquad j \le i$$

D'où particulier :

$$a_{11} = l_{11}^2$$

$$a_{i1 = l_{i1} l_{11}} \qquad i = 2 \ldots m$$

Ce qui permet de déterminer la 1ere colonne de L :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \quad i = 2 \ldots m \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'on peut construire ainsi L , colonne par colonne.

Supposons connaitre les $k-1$ premières colonnes de L et essayons de construire le k ième colonnes Nous avons :

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Ce qui permet de calcul l_{ik} $i = k+1 \dots m$.

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, l_{kj}}{l_{kk}} \qquad i = k+1 \dots m.$$

4.3. Organigramme de la méthode de Cholesky :

Appel : CALL SYCHO (A, B, X, M, IER, DET, Y)

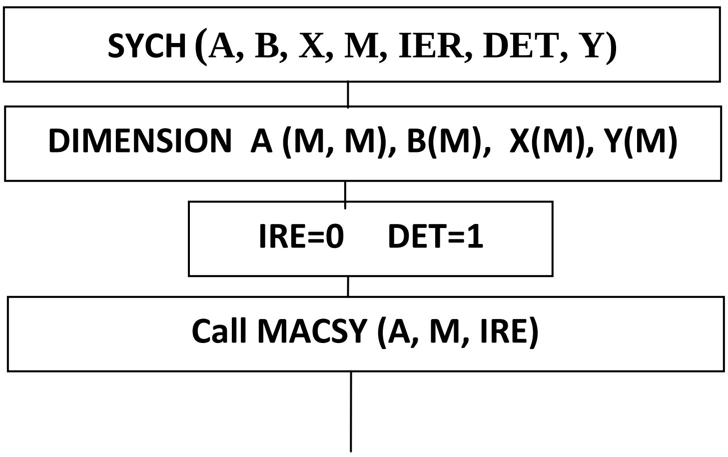
Les arguments supplémentaires sont les suivants :

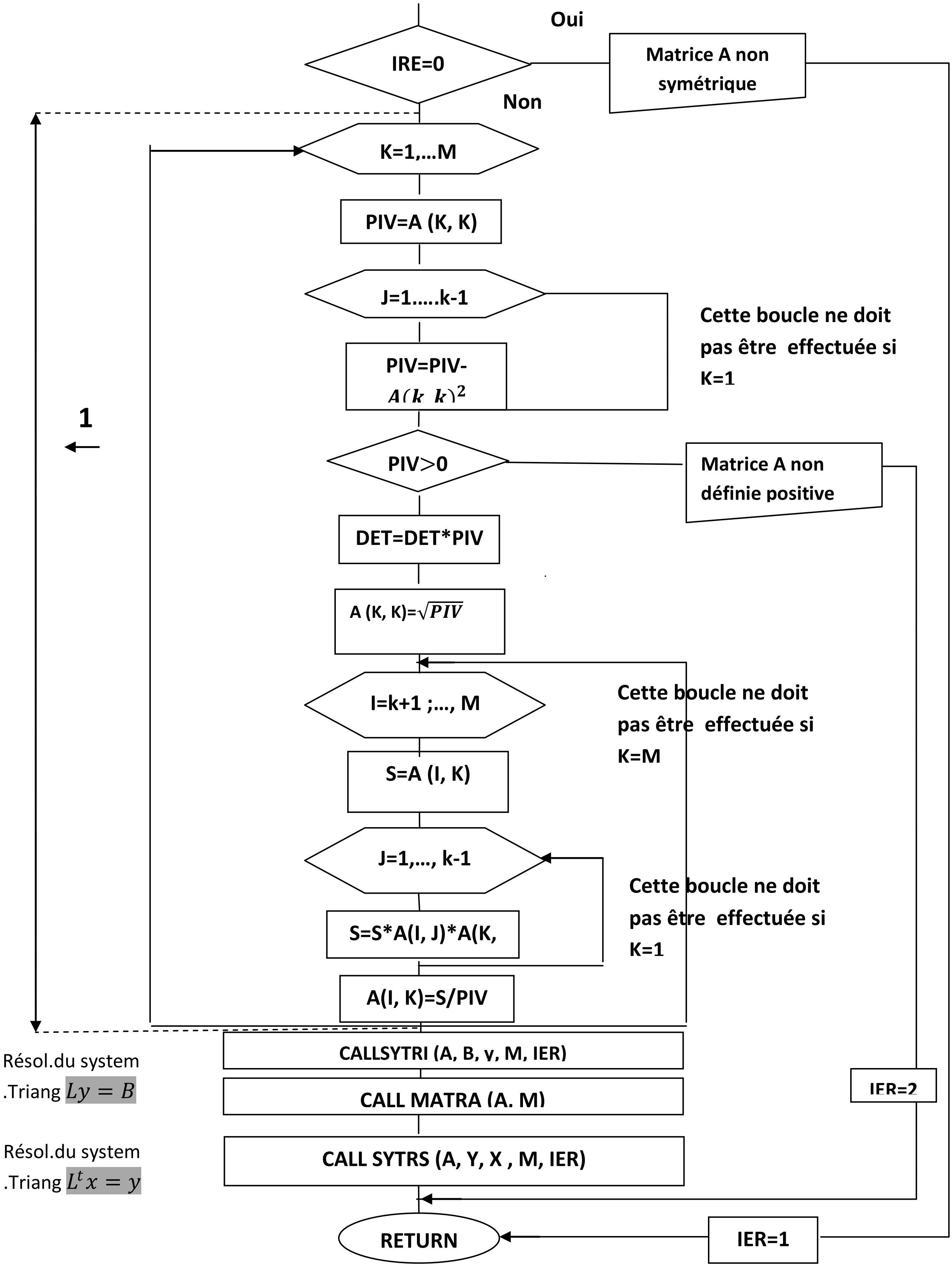
DET : désigne la valeur du déterminant de A.

Y : et un tableau de travail à une dimension qui reste à la résolution du premier système triangulaire.

Remarque :

1 : désigne Factorisation de A sous la forme LL^t.




Oui
IRE=0
Matrice A non symétrique
Non
K=1,…M
PIV=A (K, K)
J=1…..k-1
PIV=PIV-
A(k, k)²
Cette boucle ne doit pas être effectuée si K=1
1
PIV>0
Matrice A non définie positive
DET=DET*PIV
A (K, K)=√PIV
I=k+1 ;…, M
Cette boucle ne doit pas être effectuée si K=M
S=A (I, K)
J=1,…, k-1
Cette boucle ne doit pas être effectuée si K=1
S=S*A(I, J)*A(K,
A(I, K)=S/PIV
Résol.du system
.Triang Ly = B
CALLSYTRI (A, B, y, M, IER)
CALL MATRA (A. M)
IER=2
Résol.du system
.Triang Lᵗx = y
CALL SYTRS (A, Y, X , M, IER)
RETURN
IER=1

Bibliographie

[1] P.G.CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris (1982).

[2] SERGE Nicaise, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*. Dunod , Paris (2000).

[3] M. SIBONY et J.-CI.MARDON, *Analyse numérique 1, systèmes linéaire et non linéaire*, Hermann, Paris (1982).

[4] M. SIBONY et J.-CI.MARDON, *Analyse numérique 11, approximation e* Hermann, Paris (1982).

[5] Jean. KUNTZMANN, *Méthode numérique,* Hermann, Paris (1969).

[6] Pierre Bérard, Espace de Sobolev, résumé du cours de MEDP, Institue Fourier .UMR5582UJF-CNRS

Pierre Bérard@ujf-grenoble.fr

www.fourier.ujf-grenoble.fr/*pberard/notes_cours.html.

Résumé

Dans ce mémoire, nous considérons un problème aux limites elliptique.

Notre but est après avoir démontrer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle via le théorème de Lax_Miligram, nous appliquons la méthode des différences finis pour calculer une valeur approchée de cette solution.

Mots –Clés :

Différence finis, Espace de Sobolev, Inégalité de Korn, Lax_Miligram, Problème variationnel.