

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثلجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TÉLÉDJI DE LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES
قسم الرياضيات
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Présenté par :

Soufi Fatima Zohra

THEME

Espace De Hilbert

Soutenance publique devant le jury composé de :

Dr.Rahmoune Abita	M.C.A	Président
Dr.Djabri Ammar	M.C.B	Encadreur
Dr.Rahmoune AbdelAzize	M.C.A	Examineur

Année Universitaire 2022/2023

Remerciements.

*Tout d'abord je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.*

*je tiens à remercier mon encadreur **Mr Djabri Ammar**, pour avoir accepté de me diriger, je le remercie aussi pour ses encouragements tout au long de ma recherche et son inestimable aide dans la correction de ce mémoire.*

Je remercie sincèrement les membres du jury pour avoir accepté de rapporter mon travail.

*Que **Dr.Rahmoune Abita** trouve ici l'expression de mon profond respect pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance de mémoire.*

Soufi
Fatima Zohra

Dédicace

J e dédie ce travail modeste à :

M es parents

M a famille

M es meilleur amis

**Soufi
Fatima Zohra**

Résumé :

Dans ce mémoire on expose quelques basique propriétés et principales connaissances de **l'espace de Hilbert**. On débuté par quelques rappelles sur les espaces et les sous espaces vectoriels. Le deuxième chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude des propriétés fondamentales générales sur les espaces vectoriels normés complets (de Banach). Le troisième chapitre est le bute de ce mémoire, il est parlé sur les prouduits scalaires et l'orthogonalité d'un espace convexe et on a sur tout définé la projection orthogonale et le théorème fondamentale de parallélograme d'un espace de Hilbert.

mots clès : L'espace vectoriel, Le produit scalaire, La norme, L'espace complet.

ملخص

نتناول في هذه المذكرة خصائص و أساسيات حول فضاء هيلبرت. بدأنا بالتطرق إلى التذكير بالفضاءات الشعاعية و الفضاءات الشعاعية الجزئية. في الفصل الثاني تعرضنا بتوسع لخصائص الفضاء الشعاعي إذ نتعرف على الفضاء الشعاعي المعياري التام (فضاء بناخ) . الفصل الثالث هو الهدف في هذه المذكرة حيث يتكلم على الجداء السلمي و تعامد الفضاء المحدث و بالتحديد نتحدث عن الإسقاط المتعامد و نظرية متوازي الأضلاع و بعض النظريات الأخرى.

الكلمات المفتاحية : الفضاء الشعاعي ، المنتج العددي ، الفضاء الشعاعي المعياري، الفضاء الشعاعي الكامل

Abstract :

In this mémorial we expose some basic properties and the main knowledge of **Hilbert space**. We started with some reminders of vector spaces and subspaces. The second chapter of this memorial is devoted to the study of the general fundamental properties of the complete normed vector spaces (Banach space). The third chapter is the purpose of this memorial ,it is spoken on the scalar products and the orthogonality of a convex space and we have above all defined the orthogonal projection and the fundamental theorem of parallelogram for Hilbert space .

Key Words : Vector spaces, Scalars products, Normed vector spaces, Complete vector spaces.

Table des matières

Introduction.	2
1 Rappel sur les espaces vectoriels	3
1.1 Espace vectoriel	3
1.2 Sous-espace vectoriel	19
2 Espaces vectoriels normés et complets.	24
2.1 Espaces vectoriels normés.	24
2.2 Espaces complets.	35
3 Espaces de Hilbert.	44
3.1 produit scalaire.	44
3.2 Orthogonalité	53
3.3 Projection orthogonale	54
Bibliographie.	62

Notations

0_E	Élément neutre .
\mathbb{K}	Le corps des nombres réels \mathbb{R} et les nombres complexes \mathbb{C} .
$(E, +, \cdot)$	L'espace vectoriel muni de deux loi interne et externe .
F	Sous espace vectoriel.
N où bien $\ \cdot \ $	La norme sur l'espace vectoriel E .
(E, d)	La distance sur l'espace E .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
H	Espace de Hilbert .
$x \perp y$	L'orthogonalité.
E/F	Les compléments F SUR E .
P_x	La projection orthogonale de H sur F .

Introduction.

L'espace classique ne s'accommode pas bien de l'infini. Les espaces de Hilbert ont été inventés par David Hilbert (1862-1943) pour résoudre des problèmes de cet ordre. Ce sont d'ailleurs les espaces de dimension infinie les plus simples. Applications aux transformées de Fourier, aux équations différentielles et, plus particulièrement, à la mécanique quantique.

Les espaces de Hilbert font partie de l'analyse fonctionnelle en mathématiques. Le concept d'espace de Hilbert étend les méthodes de l'algèbre linéaire en généralisant les notions d'espace classique à des espaces de dimension quelconque (finie ou infinie).

En bref : un espace de Hilbert est un espace muni d'une distance particulière définie par un produit scalaire qui satisfait la complétude : les suites de nombres y sont toutes convergentes. Il permet de mesurer des longueurs et des angles et de définir une orthogonalité.

Chapitre 1

Rappel sur les espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel

La notion d'espace vectoriel réel ou complexe a été vue en première année. Nous faisons dans ce chapitre un bref rappel des notions essentielles et indispensables pour la suite de ce mémoire. Nous noterons par \mathbb{R} le corps des nombres réels et par \mathbb{C} celui des nombres complexes. Lorsque nous ne voudrions pas distinguer ces deux ensembles, nous utiliserons le symbole \mathbb{K} , ainsi \mathbb{K} désignera l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définitions :

Définition 1.1.1. [?] *On dit que E est un espace vectoriel sur K , ou un K -espace vectoriel, s'il possède les propriétés suivantes :*

- 1 *L'ensemble E est non vide, i.e. $E \neq \emptyset$.*
- 2 *Il est muni d'une première opération **interne**, appelée addition,*

$$\bullet \text{Addition : } \left\{ \begin{array}{l} (+) : E \times E \longrightarrow E. \\ (\vartheta, v) \longmapsto \vartheta + v. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Cette opération possédant les propriétés suivantes :

a) *Associativité* :

$$\forall v, \vartheta, \omega \in E, \quad (v + \vartheta) + \omega = v + (\vartheta + \omega). \quad (1.2)$$

b) *Commutativité* :

$$\forall \vartheta, v \in E, \quad \vartheta + v = v + \vartheta. \quad (1.3)$$

c) *Élément neutre* :

$$\exists 0_E \in E, \forall \vartheta \in E, \quad \vartheta + 0_E = 0_E + \vartheta = \vartheta. \quad (1.4)$$

d) *Opposé* :

$$\forall \vartheta \in E, \exists \vartheta' \in E, \quad \vartheta + \vartheta' = \vartheta' + \vartheta = 0_E. \quad (1.5)$$

(cet élément ϑ' est noté $-\vartheta$).

Ces propriétés font de $(E, +)$ un groupe commutatif.

3. Il est muni d'une deuxième opération **externe**, appelée la multiplication externe.

$$\bullet \text{ Multiplication externe : } \begin{cases} (\cdot) : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, \vartheta) \longmapsto \lambda\vartheta \end{cases} \quad (1.6)$$

e) *Associativité* :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vartheta \in E, \quad \lambda(\mu\vartheta) = (\lambda\mu)\vartheta. \quad (1.7)$$

f) *Élément neutre* :

$$\forall \vartheta \in E. \quad 1\vartheta = \vartheta \quad (1.8)$$

j) *Distributivité 1 :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vartheta \in E, \quad (\lambda + \mu)\vartheta = \lambda\vartheta + \mu\vartheta. \quad (1.9)$$

h) *Distributivité 2 :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vartheta, v \in E, \quad \lambda(\vartheta + v) = \lambda\vartheta + \lambda v. \quad (1.10)$$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs et ceux de \mathbb{K} sont appelés des scalaires. On peut écrire les vecteurs de E avec les surmonter d'une flèche.

Exemples

Exemple 1.1.1. *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. Alors :*

1. $l_{\mathbb{R}}^p(E, T, m)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. $L_{\mathbb{R}}^p(E, T, m)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Démonstration :

1. • Soit $\alpha \in \mathbb{R}, f \in l^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ (car \mathcal{M} est un espace vectoriel) et

$$\int |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int |f|^p dm < +\infty.$$

Donc, $\alpha f \in l^p$.

- Soit $f, g \in l^p$. On veut montrer que $f + g \in l^p$. On sait que $f + g \in \mathcal{M}$ (car \mathcal{M} est un espace vectoriel) et on remarque que, pour tout $x \in E$,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p,$$

et donc

$$\int_a^b |f + g|^p dm \leq 2^p |f|^p dm + 2^p |g|^p dm < +\infty,$$

ce qui montre que $f + g \in L^p$.

2. La structure vectorielle de L^p s'obtient comme pour $p = 1$. Soit $F, G \in L^p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et $g \in G$ et on définit $\alpha F + \beta G$ comme étant la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$. Comme d'habitude, cette définition est cohérente car la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$ ne dépend pas des choix de f et g dans F et G .

Exemple 1.1.2. 1. Le corps \mathbb{K} lui-même muni de son addition et de sa multiplication est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2. \mathbb{C} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

3. \mathbb{R} est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} le corps des nombres rationnels.

Exemples 1.1.3.

Exemple 1 : (Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2) Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Un élément $\vartheta \in \mathbb{E}$ est donc un couple (x, y) avec x élément de \mathbb{R} et y élément de \mathbb{R} . Ceci s'écrit :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

◆ Définition de la loi interne. Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de \mathbb{R}^2 , alors :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

- ◆ Définition de la loi externe. Si λ est un réel et (x, y) est un élément de \mathbb{R}^2 , alors :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.

L'exemple suivant généralise le précédent. C'est aussi le bon moment pour lire ou relire la définition de « L'espace vectoriel \mathbb{R}^n ».

Exemple 2 (Le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n) : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$.

- ◆ Définition de la loi interne. Si $\vartheta = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de \mathbb{R}^n , alors :

Commutativité :

$$\begin{aligned} \vartheta + v &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n). \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ &= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n), \\ &= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n), \\ &= v + \vartheta. \end{aligned}$$

Associativité :

$$\begin{aligned}
 (\vartheta + \nu) + \omega &= [(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] + (z_1, \dots, z_n), \\
 &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, \dots, z_n), \\
 &= (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n), \\
 &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)], \\
 &= (x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1 + z_n)], \\
 &= \vartheta + (\nu + \omega).
 \end{aligned}$$

Élément neutre :

$$\begin{aligned}
 \vartheta + 0_E &= (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0), \\
 &= (x_1 + 0, \dots, x_n + 0), \\
 &= (x_1, \dots, x_n). \\
 &= \vartheta
 \end{aligned}$$

Opposé :

$$\begin{aligned}
 \vartheta + (-\vartheta) &= (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n), \\
 &= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n), \\
 &= (0, \dots, 0), \\
 &= 0_E.
 \end{aligned}$$

- ◆ Définition de la loi externe. Si λ et μ sont des réels et (x_1, \dots, x_n) est un élément de \mathbb{R}^n , alors :

Associativité :

$$\begin{aligned}
 (\lambda\mu)\vartheta &= [(\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n], \\
 &= [\lambda(\mu x_1), \dots, \lambda(\mu x_n)], \\
 &= \lambda(\mu x_1, \dots, \mu x_n), \\
 &= \lambda(\mu\vartheta).
 \end{aligned}$$

Élément neutre :

$$\begin{aligned}
 1\vartheta &= 1(x_1, \dots, x_n), \\
 &= (1x_1, \dots, 1x_n). \\
 &= (x_1, \dots, x_n) = \vartheta.
 \end{aligned}$$

Distributivité 1 :

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu)\vartheta &= (\lambda + \mu)(x_1, \dots, x_n), \\
 &= [(\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n], \\
 &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n), \\
 &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n), \\
 &= (\lambda\vartheta) + (\mu\vartheta).
 \end{aligned}$$

Distributivité 2 :

$$\begin{aligned}
 \lambda(\vartheta + \mu) &= \lambda[(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)], \\
 &= [\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)]; \\
 &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n), \\
 &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n), \\
 &= \lambda(x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n), \\
 &= \lambda\vartheta + \lambda\mu.
 \end{aligned}$$

donc \mathbb{R}^n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

◆ L'ensemble des nombres complexe \mathbb{C} et aussi est un espace vectoriel.

Exemples 3 : Tout plan passant par l'origine dans \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel (par rapport aux opérations habituelles sur les vecteurs).

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{E} = \mathcal{P}$ un plan passant par l'origine. Le plan admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz = 0,$$

où a, b et c sont des réels non tous nuls

Un élément $\vartheta \in \mathbb{E}$ est donc un triplet (noté ici comme un vecteur colonne) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

tel que $ax + by + cz = 0$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, deux éléments de \mathcal{P} . Autrement dit,

$$ax + by + cz = 0,$$

$$\text{et } ax' + by' + cz' = 0.$$

Alors $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$, est aussi dans \mathcal{P} car on a bien :

$$a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0.$$

Les autres propriétés sont aussi faciles à vérifier : par exemple l'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, appartient à \mathcal{P} , alors $ax + by + cz = 0$, que l'on peut réécrire

$$a(-x) + b(-y) + c(-z) = 0 \text{ et ainsi } -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ appartient à } \mathcal{P}.$$

Attention ! Un plan ne contenant pas l'origine n'est pas un espace vectoriel, car justement il ne contient pas le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Propriétés :

Propriétés 1.1.1. (*Unicité de l'élément neutre et de l'opposé*).

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- ▲ *S'il existe un élément neutre 0_E vérifiant la propriété ?? ci-dessus, alors il est unique.*
- ▲ *Soit ϑ un élément de E . S'il existe un élément symétrique ϑ' de E vérifiant la propriété ??, alors il est unique.*

Démonstration :

- ▲ *Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments vérifiant la définition de l'élément neutre. On a alors, pour tout élément ϑ de E :*

$$\vartheta + 0_E = 0_E + \vartheta = \vartheta$$

et

$$\vartheta + 0'_E = 0'_E + \vartheta = \vartheta.$$

— Alors, la première propriété utilisée avec $\vartheta = 0'_E$ donne :

$$0'_E + 0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$$

— La deuxième propriété utilisée avec $\vartheta + 0_E$ donne :

$$0_E + 0'_E = 0'_E + 0_E = 0_E$$

— En comparant ces deux résultats, il vient $0_E = 0'_E$.

Supposons qu'il existe deux symétriques de ϑ notés ϑ' et ϑ'' . On a :

$$\vartheta + \vartheta' = \vartheta' + \vartheta = 0_E$$

et

$$\vartheta + \vartheta'' = \vartheta'' + \vartheta = 0_E.$$

Calculons $\vartheta' + (\vartheta + \vartheta'')$ de deux façons différentes, en utilisant l'associativité de la loi (+) et les relations précédentes.

$$— \vartheta' + (\vartheta + \vartheta'') = \vartheta' + 0_E = \vartheta'$$

$$— \vartheta' + (\vartheta + \vartheta'') = (\vartheta' + \vartheta) + \vartheta'' = 0_E + \vartheta'' = \vartheta''$$

— On en déduit $\vartheta' = \vartheta''$.

La propriété suivante nous autorisera à noter 0_E l'élément neutre pour l'addition (nous l'appellerons « vecteur nul ») et $-\vartheta$ l'opposé de ϑ .

Propriétés 1.1.2. (propriétés immédiates)

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel.

1. Le produit par le réel 0 d'un vecteur ϑ quelconque est l'élément neutre pour l'addition :

$$\forall \vartheta \in E, \quad 0\vartheta = 0_E.$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E.$

3. Le produit par le réel -1 d'un vecteur ϑ quelconque est son opposé pour l'addition :

$$\forall \vartheta \in E, \quad \vartheta + (-1)\vartheta = 0_E.$$

4. $\forall \vartheta \in E, \quad (-1) \cdot \vartheta = -\vartheta$

5. $\forall \vartheta \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot \vartheta = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vartheta = 0_E.$

6. $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall \vartheta \in E, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vartheta = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \cdot \vartheta$
en particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \vartheta \in E, \vartheta + \dots + \vartheta = n\vartheta \quad (n \text{ fois})$

7. $\forall \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda \cdot \vartheta_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \vartheta_i.$

Démonstration :

1. Notons (provisoirement) ϑ' l'opposé de ϑ pour l'addition : $\vartheta + \vartheta' = 0_E$. En utilisant les propriétés ??.

$$\begin{aligned}
 0\vartheta &= 0\vartheta + 0_E && \text{d'après ??} \\
 &= 0\vartheta + (\vartheta + \vartheta') && \text{d'après ??} \\
 &= 0\vartheta + (1\vartheta + \vartheta') && \text{d'après ??} \\
 &= (0\vartheta + 1\vartheta) + \vartheta' && \text{d'après ??} \\
 &= (0 + 1)\vartheta + \vartheta' && \text{d'après ??} \\
 &= 1\vartheta + \vartheta' = \vartheta + \vartheta' = 0_E && \text{d'après ??}.
 \end{aligned}$$

— Soit, de plus, $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$. On a $\vartheta = 1 \cdot \vartheta = \lambda \cdot (\frac{1}{\lambda} \cdot \vartheta) = \lambda \cdot (0_E + \frac{1}{\lambda} \cdot \vartheta) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot (\frac{1}{\lambda} \cdot \vartheta) = \lambda \cdot 0_E + 1 \cdot \vartheta = \lambda \cdot 0_E + \vartheta$. On en déduit donc que $\lambda \cdot 0_E$ est un élément neutre pour l'addition vectorielle et, comme précédemment, cela donne $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

— il suffit d'écrire

$$\vartheta + (-1)\vartheta = 1\vartheta + (-1)\vartheta = (1 + (-1))\vartheta = 0\vartheta = 0_E.$$

— Montrer $(-1) \cdot \vartheta = -\vartheta$ signifie exactement que $(-1) \cdot \vartheta$ est le symétrique de ϑ , c'est-à-dire vérifie $\vartheta + (-1) \cdot \vartheta = 0_E$.

En effet :

$$\vartheta + (-1) \cdot \vartheta = 1 \cdot \vartheta + (-1) \cdot \vartheta = (1 + (-1)) \cdot \vartheta = 0 \cdot \vartheta = 0_E.$$

— On sait déjà que si $\lambda = 0$ ou $\vartheta = 0_E$, alors les propriétés précédentes impliquent $\lambda \cdot \vartheta = 0_E$.

Pour la réciproque, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $\vartheta \in E$ un vecteur tels que $\lambda \cdot \vartheta = 0_E$.

Supposons λ différent de 0 . On doit alors montrer que $\vartheta = 0_E$.

▲ Comme $\lambda \neq 0$, alors λ est inversible pour le produit dans le corps \mathbb{K} .

▲ Soit λ^{-1} son inverse.

▲ En multipliant par λ^{-1} les deux membres de l'égalité $\lambda \cdot \vartheta = 0_E$, il vient :

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \vartheta) = \lambda^{-1} \cdot 0_E.$$

▲ D'où en utilisant les propriétés de la multiplication par un scalaire

$$(\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot \vartheta = 0_E \text{ et donc } 1 \cdot \vartheta = 0_E.$$

▲ D'où $\vartheta = 0_E$.

Exemples

Exemple 1.1.3. (L'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous le munissons d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel de la manière suivante :

◆ *Loi interne.* Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f + g$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(où le signe $+$ désigne la loi interne de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans \mathbb{R} dans le membre de droite).

◆ *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et f une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\lambda \cdot f$ est définie par l'image de tout réel x comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Nous désignons par \cdot la loi externe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par \times la multiplication dans \mathbb{R} . Avec l'habitude on oubliera les signes de multiplication :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

◆ *Élément neutre.* L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0.$$

On peut noter cette fonction $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

◆ *Symétrique.* Le symétrique de l'élément f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'application g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x).$$

Le symétrique de f est noté $-f$.

On a aussi :

◆ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions allant de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n , et est un \mathbb{R}^n -espace vectoriel.

- ◆ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions allant de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Exemple 1.1.4. (Le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles)

On note \mathcal{S} l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n \in \mathbb{N}$. Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ; autrement dit $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- ◆ *Loi interne.* Soient $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ et $v = (v_n)_n \in \mathbb{N}$ deux suites appartenant à \mathcal{S} . La suite $u + v$ est la suite $w = (w_n)_n \in \mathbb{N}$ dont le terme général est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + v_n,$$

(où $u_n + v_n$ désigne la somme de u_n et de v_n dans \mathbb{R}).

- ◆ *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ un élément de \mathcal{S} , $\lambda \cdot u$ est la suite $v = (v_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda \cdot u_n,$$

où \cdot désigne la multiplication dans \mathbb{R} .

- ◆ *Élément neutre.* L'élément neutre de la loi interne est la suite dont tous les termes sont nuls.

- ◆ *Symétrique.* Le symétrique de la suite $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ est la suite $u' = (u'_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = -u_n.$$

Elle est notée $-u$.

Exemple 1.1.5. (Les matrices)

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel. La loi interne est l'addition de deux matrices. La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire. L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls). Le symétrique de la matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. De même, l'ensemble $M_{n,p}(K)$ des matrices à coefficients dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Autres exemples : L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P(X) = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. L'addition est l'addition de deux polynômes $P(X) + Q(X)$, la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot P(X)$. L'élément neutre est le polynôme nul.

L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$.

1.2 Sous-espace vectoriel

Définitions

Définition 1.2.1. [?] Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} - espace vectoriel et $F \subset E$.

On dit que F est un sous - espace vectoriel de E (muni des lois $+$ et \cdot), si et seulement si les propositions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} F &\neq \emptyset \quad (F \text{ non vide}) \\ \forall \vartheta, \omega \in F, \quad \vartheta + \omega &\in F \\ \forall \lambda \in K, \forall \vartheta \in F, \quad \lambda \cdot \vartheta &\in F \end{aligned}$$

On utilise très souvent l'abréviation *s.e.v* pour parler de sous-espace vectoriel.

Premiers exemples :

1. E et l'ensemble $\{0_E\}$ réduit au zéro de E sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. L'ensemble des nombres réels est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel des nombres complexes.

Exemple 1.2.1. (*Exemples immédiats*)

1. L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

En effet :

(a) $(0, 0) \in F$,

(b) si $\vartheta = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2)$ appartiennent à F , alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$ et ainsi $\vartheta + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ appartient à F ,

(c) si $\vartheta = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$, d'où $\lambda\vartheta \in F$.

2. L'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Preuve : la fonction nulle est continue ; la somme de deux fonctions continues

est continue ; une constante fois une fonction continue est une fonction continue.

3. *L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.*

Voici des sous-ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

Exemple 1.2.2. 1. *L'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1 .*

2. *L'ensemble $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet les vecteurs $\vartheta = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ appartiennent à F_2 , mais pas le vecteur $\vartheta + v = (1, 1)$.*

3. *L'ensemble $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet le vecteur $\vartheta = (1, 1)$ appartient à F_3 mais, pour $\lambda = -1$, le vecteur $-\vartheta = (-1, -1)$ n'appartient pas à F_3 .*

Propriétés et exemples

Proposition 1.2.1. *L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .*

Preuve :

Montrons par exemple que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

Tout d'abord $0_E \in F_1$, car F_1 est un sous-espace vectoriel de E .

De même, $0_E \in F_2$.

Ainsi, $0_E \in F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ est donc non vide.

Soit $\vartheta, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

En particulier, ϑ et v sont deux éléments de F_1 . Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E : $\vartheta + v \in F_1$ et $\lambda\vartheta \in F_1$. De même, on montre que $\vartheta + v \in F_2$ et $\lambda\vartheta \in F_2$. Ainsi, $\vartheta + v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda\vartheta \in F_1 \cap F_2$. Cela montre que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 1.2.3. Soit \mathcal{D} le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$$

Est-ce que \mathcal{D} est sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?

L'ensemble \mathcal{D} est l'intersection de F et G , les sous-ensembles de \mathbb{R}^3 définis par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$$

Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Ainsi $\mathcal{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 , c'est une droite vectorielle.

Remarque : La réunion de deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{E} n'est pas en général un sous-espace vectoriel de \mathbb{E} . Prenons par exemple $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$.

Considérons les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y) \mid x = 0\} \text{ et } G = \{(x, y) \mid y = 0\}.$$

Alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Par exemple, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G , mais n'est pas dans $F \cup G$.

Théorème 1.2.1. (Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire)

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie non vide de E . F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$\lambda\vartheta + \mu\nu \in F \text{ pour tous } \vartheta, \nu \in F \text{ et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F .

Démonstration :

- Supposons que F soit un sous-espace vectoriel. Et soient $\vartheta, \nu \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors par la définition de sous-espace vectoriel : $\lambda\vartheta \in F$ et $\mu\nu \in F$ et ainsi $\lambda\vartheta + \mu\nu \in F$.

- Réciproquement, supposons que pour chaque $\vartheta, \nu \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda\vartheta + \mu\nu \in F$.

— Comme F n'est pas vide, soient $\vartheta, \nu \in F$. Posons $\lambda = \mu = 0$. Alors $\lambda\vartheta + \mu\nu = 0_E \in F$.

— Si $\vartheta, \nu \in F$, alors en posant $\lambda = \mu = 1$ on obtient $\vartheta + \nu \in F$.

— Si $\vartheta \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (et pour n'importe quel ν , en posant $\mu = 0$), alors $\lambda\vartheta \in F$.

Définition 1.2.2. On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel normé E est **fermée** si son complémentaire dans E est ouvert.

Proposition 1.2.2. *Dans un espace vectoriel normé $(E; \|\cdot\|_E)$, tout sous espace vectoriel F de dimension finie est fermé.*

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F qui converge dans $(E; \|\cdot\|)$ vers $a \in E$. Alors elle est bornée dans $(F; \|\cdot\|)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $(F; \|\cdot\|)$ vers $b \in F$. L'unicité de la limite de $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ implique $a = b \in F$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés et complets.

Dans ce chapitre de ce mémoire on va rappeler quelques définitions et propriétés concernant les espaces normés et les espaces complets (espace de Banach).

2.1 Espaces vectoriels normés.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension quelconque.

Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. *Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R}^+ , qui vérifie les 3 propriétés :*

1. $\forall x \in E; \|x\| \geq 0$ et $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E)$. (*séparation*)
2. $\forall x \in E; \forall \lambda \in \mathbb{K}; \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. (**Homogénéité**)
3. $\forall (x; y) \in E^2; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (**Inégalité triangulaire**)

Lorsque E est muni d'une norme $\|\cdot\|$, on dit que $(E; \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé .

Proposition 2.1.1.

1. $\|0_E\| = 0$ et $\forall x \in E; \| -x \| = \| x \|$
2. $\forall (x; y) \in E^2; \| x - y \| \leq \| x \| + \| y \|$ et $|\| x \| - \| y \|| \leq \| x - y \|$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*; \forall (x_1; x_2; \dots; x_n) \in E^n; \| \sum_{K=1}^n x_K \| \leq \sum_{K=1}^n \| x_K \|$ les nombre usuelles .

Exemple 2.1.1. 1. \mathbb{R} ou \mathbb{C} munis de la valeur absolue ou du module.

2. On définit sur \mathbb{K}^n les trois normes usuelles :

$$\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$\bullet \| X \|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|,$$

$$\bullet \| X \|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$$

$$\bullet \| X \|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

3. $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$, sont les éléments des fonctions continue de $[a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ c-à-d :

Soit d une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ ($f(a) \leq d \leq f(b)$ ou $f(b) \leq d \leq f(a)$).

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $d = f(c)$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue.

Soit d entre $f(a)$ et $f(b)$.

Si $f(a) \leq f(b)$, alors $f(a) \leq d \leq f(b)$.

Donc $f(a) - d \leq 0 \leq f(b) - d$. On note alors

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) - d$$

Alors g est continue sur $[a, b]$, et $g(a) \leq 0 \leq g(b)$.

donc les applications définies par $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$,

- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$
- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$
- $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$,

sont des normes sur $C^0([a, b], \mathbb{K})$.

Les normes $\|\cdot\|_2$ dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant dans le cas d'espaces vectoriels réels.

4. On munit l'espace des matrices $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des normes classiques suivantes :

$$\forall A = (a_{ij})_{\substack{i \in [1; n] \\ j \in [1; p]}} \in M_{n,p}(\mathbb{K});$$

- $\|A\|_1 = \sum_{\substack{1 < i < n \\ 1 < j < p}} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{\substack{1 < i < n \\ 1 < j < p}} |a_{ij}|^2}$
- $\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 < i < n \\ 1 < j < p}} |a_{ij}|$

5. Normes issues d'un produit scalaire :

Supposons que E soit un espace vectoriel réel et notons $\langle ; \rangle$ un produit scalaire sur E .

Alors $\forall x \in E; \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ est une norme sur E , appelée **norme euclidienne**.

Les normes $\|\cdot\|_2$ dans \mathbb{R}^n et dans $C([a, b]; \mathbb{R})$ en sont des exemples.

Démonstration :

1. Commençons par les normes dans \mathbb{K}^n .

• Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme :

— Prenons $X \in \mathbb{K}^n$. Alors $\|X\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| > 0$. De plus :

$\|X\|_1 = 0 \implies \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket; |x_k| = 0 \implies X = 0_{\mathbb{K}^n}$ car on a une somme de termes positifs.

— $\forall X \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda X\|_1 = \sum_{K=1}^n |\lambda x_K| = \sum_{K=1}^n |\lambda| |x_K| = |\lambda| \sum_{K=1}^n |x_K| = |\lambda| \|X\|_1$

— posons $\forall X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^n$. Alors

$$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

donc

$$\|X + Y\|_1 = \sum_{K=1}^n |x_k + y_k|$$

or

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket; |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|,$$

d'après l'inégalité triangulaire dans \mathbb{K}

Donc en sommant ces inégalités, on obtient :

$$\|X + Y\|_1 \leq \|X\|_1 + \|Y\|_1$$

• montrons que $\|\cdot\|_2$ est une norme :

— Pour x dans \mathbb{K}^n , comme précédemment, $\|\cdot\|_2$ est correctement défini et appartient à \mathbb{R}^+ .

- Il est également clair que $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$.
- De même $\forall x \in \mathbb{K}^n$, si $\|x\|_2 = 0$, alors :
 $\forall 1 \leq k \leq n, 0 \leq |x_k|^2 \leq \|x\|_2^2 = 0$, d'où $|x_k| = 0$, et $x = 0$.
- Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue pour le produit scalaire canonique défini dans \mathbb{R}^n par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x | y) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$, et donc :

$$|(x | y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2.$$

On peut alors en déduire que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \cdot (x | y) \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \cdot \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

et l'inégalité triangulaire (pour la norme) en découle. On considère ensuite x et y dans \mathbb{C}^n , et :

$$\|x + y\|_2 = \sqrt{|x_1 + y_1|^2 + \dots + |x_n + y_n|^2}.$$

$$\text{Or } \forall 1 \leq k \leq n, |x_k + y_k|^2 \leq (|x_k| + |y_k|)^2,$$

et en sommant $\forall 1 \leq k \leq n, \|x + y\|_2 \leq \|x' + y'\|_2$, où on a posé $x' = (|x_1|, \dots, |x_n|)$, et $y' = (|y_1|, \dots, |y_n|)$.

Donc $\|x + y\|_2 \leq \|x' + y'\|_2 \leq \|x'\|_2 + \|y'\|_2$. Et comme :
 $\|x'\|_2 = \sqrt{|x'_1|^2, \dots, |x'_n|^2} = \sqrt{|x_1|^2, \dots, |x_n|^2} = \|x\|_2$, de même pour y' , on conclut que :

$$\|x + y\|_2 \leq \|x'\|_2 + \|y'\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

- Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme :

- Prenons $X \in \mathbb{K}^n$. Alors $\|X\|_\infty = \max\{|x_k| / k \in [[1; n]]\} > 0$. De plus :
 $\|X\|_\infty = 0 \implies \forall k \in [[1; n]]; |x_k| \leq 0 \implies \forall k \in [[1; n]]; |x_k| = 0$ car on a des termes positifs.

Donc $\|X_k\|_\infty = 0 \implies X = 0_{\mathbb{K}^n}$

— Prenons $X \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\|\lambda X\|_\infty = \max\{|\lambda x_k| \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

$$= \max\{|\lambda| |x_k| \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

$$= |\lambda| \max\{|x_k| \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

car $|\lambda|$ est indépendant de k et positif.

$$\text{Donc } \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty$$

— Prenons $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^n$.

$$\|X + Y\|_\infty = \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

$$\text{Or, } \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket; |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty.$$

$\|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$ est indépendant de k donc majore l'ensemble $\{|x_k + y_k| \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ et est donc supérieur ou égal au maximum de cet ensemble.

$$\text{Donc } \|X + Y\|_\infty \leq \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty$$

2. Justification de l'existence de $\|f\|_\infty$:

f est continue sur le segment $[a; b]$ donc est bornée et atteint ses bornes.

L'ensemble $\{|f(t)| \mid t \in [a; b]\}$ est donc non vide et majoré donc il admet une borne supérieure $\|f\|_\infty$, qui est même un maximum. Rappelons que $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorant de $\{|f(t)| \mid t \in [a; b]\}$.

(a) Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme :

- Prenons $f \in C([a; b]; \mathbb{K})$. Alors $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$. De plus :
 $\|f\|_1 = 0 \implies \forall t \in [a; b]; |f(t)| = 0$ car on a une fonction positive et continue sur $[a; b]$. Donc $\|f\|_1 = 0 \implies f = \tilde{0}$ sur $[a; b]$

$$\bullet \forall f \in C([a; b]; \mathbb{K}); \forall \lambda \in \mathbb{K}; \| \lambda f \|_1 = \int_a^b | \lambda f(t) | dt = \int_a^b | \lambda | | f(t) | dt = | \lambda | \int_a^b | f(t) | dt = | \lambda | \| f \|_1$$

$$\bullet \text{ Prenons } (f; g) \in C^2([a; b]; \mathbb{K}). \text{ Alors } \| f + g \|_1 = \int_a^b | f(t) + g(t) | dt.$$

$$\text{Or } \forall t \in [a; b]; | f(t) + g(t) | \leq | f(t) | + | g(t) |.$$

Donc en intégrant ces inégalités entre a et b ($a < b$), on obtient : $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$

(b) Montrons que $\| \cdot \|_2$ est une norme :

• Pour f dans E , comme précédemment, $\| f \|_2$ est correctement défini et appartient à \mathbb{R}^+ .

• Avec les mêmes arguments que pour $\| \cdot \|_1$, si pour f dans E , on a $\| f \|_2 = 0$, alors f est nulle.

• La linéarité de l'intégrale sur $[a, b]$ donne encore : $\forall f \in E, \forall \lambda \in K, \| \lambda \cdot f \|_2 = | \lambda | \cdot \| f \|_2$.

• Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise là encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue pour le produit scalaire canonique dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$ défini par : $\forall (f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R}), (f | g) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$.

En effet : $\forall (f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^2$,

$$\| f + g \|_2^2 = \| f \|_2^2 + \| g \|_2^2 + 2 \cdot (f | g) \leq \| f \|_2^2 + \| g \|_2^2 + 2 \cdot \| f \|_2 \cdot \| g \|_2 = (\| f \| + \| g \|)^2,$$

d'où l'inégalité triangulaire dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$ pour $\| \cdot \|_2$.

Et dans $C^0([a, b], \mathbb{C})$, on écrit comme précédemment pour $\| \cdot \|_2$ dans \mathbb{C}^n :

$\forall (f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{C})^2$,

$$\| f + g \|_2^2 = \int_a^b | f + g |^2 \leq \int_a^b (| f | + | g |)^2 = \| (| f | | g | \|_2^2) \leq (\| | f | \|_2 + \| | g | \|_2)^2 = (\| f \|_2 + \| g \|_2)^2, \text{ en utilisant l'inégalité triangulaire dans}$$

$C^0([a, b], \mathbb{R})$ qu'on vient d'établir et le fait que :

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b |f|^2 = \|f\|_2^2, \text{ avec la même égalité pour } g.$$

Donc $\|\cdot\|_2$ est encore une norme dans $C^0([a, b], \mathbb{C})$.

(c) Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme :

• Prenons $f \in C([a; b]; \mathbb{K})$. Alors $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [a; b]\} \geq 0$ car $\forall t \in [a; b]; |f(t)| \geq 0$. De plus :

$\|f\|_\infty = 0 \implies \forall t \in [a; b]; |f(t)| \leq 0 \implies \forall t \in [a; b]; |f(t)| = 0$ car on a des réels positifs.

Donc $\|f\|_\infty = 0 \implies f = \tilde{0}$ sur $[a; b]$

• Prenons $f \in C([a; b]; \mathbb{K})$ $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda| |f(t)| \mid t \in [a; b]\}$$

$= |\lambda| \sup\{|f(t)| \mid t \in [a; b]\}$ car $|\lambda|$ est indépendant de t et positif.

Donc $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$

• Prenons $(f, g) \in C^2([a; b]; \mathbb{K})$. Alors $\|f + g\|_\infty = \sup\{|f(t) + g(t)| \mid t \in [a; b]\}$

Or, $\forall t \in [a; b]; |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est indépendant de t donc est un majorant de l'ensemble $\mathcal{A} = \{|f(t) + g(t)| \mid t \in [a; b]\}$.

Mais $\sup \mathcal{A}$ est le plus petit des majorants de \mathcal{A} donc $\sup \mathcal{A} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ c'est-à-dire : $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Définition 2.1.2. Dans un espace vectoriel normé, un vecteur x est unitaire si $\|x\| = 1$.

Pour tout $x \neq 0_E$, il existe au moins deux vecteurs unitaires colinéaires à x : $\pm \frac{1}{\|x\|} x$

Définition 2.1.3. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E , la restriction à F de la norme de E est une norme sur F , appelée norme induite.

Théorème 2.1.1. Si $E = \prod_{k=1}^p E_k$ est un produit d'espaces vectoriels E_k normés par la norme $\| \cdot \|_k$, l'application $\| \cdot \|$ définie sur E par $\| x \| = \max_{1 \leq k \leq p} \| x_k \|_k$ si (x_1, \dots, x_p) est une norme sur E appelée norme produit.

Démonstration :

C'est évidemment une application de E dans \mathbb{R}^+ .

• $\| x \| = 0$ si et seulement si $\forall k \in [1, p] \| x_k \|_k = 0$, donc si $\forall k \in [1, p], x_k = 0_{E_k}$, donc si $x = 0_E$.

• Soit $\lambda \neq 0 \| \lambda x \| = \max_{1 \leq k \leq p} \| \lambda x_k \|_k = \max_{1 \leq k \leq p} |\lambda| \| x_k \|_k$.

Or $\forall k \in [1, p] \| x_k \|_k \leq \| x \|$.

Donc : $\forall x \in E \| \lambda x \| \leq |\lambda| \| x \|$.

Donc $\forall x \in E \| \frac{1}{\lambda} \lambda x \| \leq \frac{1}{|\lambda|} \| \lambda x \|$. Donc : $\forall x \in E |\lambda| \| x \| \leq \| \lambda x \|$.

Donc si $\lambda \neq 0$, on a $\forall x \in E \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$.

Pour $\lambda = 0$, l'égalité est évidente. Donc $\forall x \in E, \forall \lambda \in K \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$.

• $\| x + y \| = \max_{1 \leq k \leq p} \| x_k + y_k \|_k$. Or $\forall k \in [1, p] \| x_k + y_k \|_k \leq \| x_k \|_k + \| y_k \|_k$.

Donc $\forall k \in [1, p] \| x_k + y_k \|_k \leq \| x \| + \| y \|$. Donc $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Définition 2.1.4. Soit E un espace vectoriel réel. Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sur E sont dites équivalentes ssi $\exists a, b > 0$ telle que :

$$\forall x \in E, a \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq b \| x \|_1.$$

On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence.

Exemple :

Sur \mathbb{K}^n , notons $\|x\|_1 = \max_{1 \leq k \leq p} |x_k|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$.

Le maximum des $|x_k|$ est atteint, donc $\max_{1 \leq k \leq p} |x_k| = |x_j|$ et $\forall k \in [1, n] \quad |x_k| \leq |x_j|$.

donc $|x_j|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq n |x_j|^2$.

Donc $\forall x \in E \quad \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_1$.

Donc les deux normes sont équivalentes.

Proposition 2.1.2. *La relation définie précédemment entre les normes sur un espace vectoriel est une relation d'équivalence.*

Proposition 2.1.3. *Sur \mathbb{R}^n les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.*

Démonstration :

On va démontrer que $\forall x \in E$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \\ &= |x_j| \quad (\text{où } j \text{ est tel que } |x_j| = \|x\|_\infty) \\ &\leq \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} = \|x\|_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \|x\|_2^2 &= (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 \\ &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \\ &= (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 = \|x\|_1^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

$$\begin{aligned}
3. \quad \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\
&\leq n \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \\
&= n \|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.1.1. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.*

pour la démonstration : *Les compacts de $(\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et deux normes équivalentes ont les même ensembles compacts.*

Distance et boules

Définition 2.1.5. *(distance associée à une norme)*

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On dit que d est une distance sur E si et seulement si :

- *c'est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ ,*
- $\forall (x, y) \in E^2, (d(x, y) = 0) \implies (x = y),$
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x),$
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$ *(inégalité triangulaire).*

Si N est une norme sur E , l'application définie par :

$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = \|x - y\|$, *est une distance sur E , appelée distance associée (ou liée) à la norme $\|\cdot\|$.*

Démonstration :

Les différents points se démontrent sans difficulté :

- *d est bien une application de $E \times E$ dans \mathbb{R}^+ ,*
- *pour $(x, y) \in E^2, (d(x, y) = 0) \implies (\|x - y\| = 0) \implies (x - y = 0) \implies (x = y),$*
- *pour $(x, y) \in E^2, d(y, x) = \|y - x\| = \|-x - y\| = |-1| \cdot \|x - y\| = \|x - y\|,$*
- *pour $(x, y, z) \in E^3, d(x, z) = \|x - z\|$*

$$\begin{aligned}
&= \| (x - y) + (y - z) \| \leq \| x - y \| + \| y - z \| \\
&= d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}$$

2.2 Espaces complets.

Suites de Cauchy

Définition 2.2.1. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments d'un espace normé $(E; \| \cdot \|)$ est dite une suite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0; \exists N \in \mathbb{N}; \forall m, n > N : \| x_n - x_m \| < \epsilon$$

Proposition 2.2.1. 1. Toute suite convergente est de Cauchy, et toute suite de Cauchy est bornée. (Réciproques fausses en général).

2. Une suite de Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ qui possède une valeur d'adhérence, converge.

Démonstration :

• Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite qui converge vers x dans un espace métrique $(X; d)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0; d(x_n; x) < \frac{\epsilon}{2} :$$

Alors par inégalité triangulaire

$$\forall n; m \geq n_0; d(x_n; x_m) \leq d(x_n; x) + d(x; x_m) < \epsilon;$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.

• *bornée* : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy. Choisissons $\epsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geq n_0; \forall n \geq n_0; d(x_n; x_m) < 1 :$$

et soit $\epsilon' = \sup_{n < n_0} d(x_n, x_{n_0})$ et $r = \max(1, \epsilon')$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \overline{B}(x_{n_0}, r) \Rightarrow (x_n)$ est bornée.

• Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n; m \geq n_0; d(x_n; x_m) < \frac{\epsilon}{2} :$$

Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ qui converge vers x . Donc, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1; d(x_{\varphi(n)}; x) < \frac{\epsilon}{2} :$$

Alors,

$$\forall n \geq \max(n_0; n_1); d(x_n; x) \leq d(x_n; x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}; x) < \epsilon;$$

ce qui montre que la suite converge

Exemple 2.2.1. • *Etude de la série harmonique* : On pose, pour tout

$$n \geq 1, \mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et on montre que la suite (\mathcal{S}_n) n'est pas de Cauchy c'est à dire que :

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geq N, n \geq N \text{ et } |\mathcal{S}_p - \mathcal{S}_n| \geq \epsilon,$$

Pour

$$p \geq n, \mathcal{S}_p - \mathcal{S}_n = \sum_{k=n+1}^p \frac{1}{k}$$

, donc si $p = 2n$, on obtient des inégalités

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \quad (k = n + 1, \dots, 2n)$$

on obtient

$$\mathcal{S}_{2n} - \mathcal{S}_n \geq \frac{1}{2}.$$

Donc pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ et pour tout N entier positif il existe des entiers n et $2n$ supérieurs à N tels que $\mathcal{S}_{2n} - \mathcal{S}_n \geq \frac{1}{2}$. La suite (\mathcal{S}_n) , dite série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k}$, ou série harmonique en raison de son rôle en acoustique, n'est pas de Cauchy, elle est donc divergente. On remarque, ici encore, que la différence entre deux termes consécutifs $\mathcal{S}_{n+1} - \mathcal{S}_n = \frac{1}{n+1}$ tend, elle, vers 0, alors que la suite n'est pas de Cauchy.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n} \end{cases}$ et

On remarque que l'on est là devant une relation qui lie u_{n+1} , u_n et n .

On peut alors exprimer $u_p - u_n$ pour $p > n$, suivant une méthode assez fréquemment utilisée, sous la forme suivante :

$$u_p - u_n = \sum_{k=n}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^k u_k}$$

Or, tous les u_n étant de façon évidente positifs, on a $u_{k+1} - u_k \geq 0$; la suite (u_n) est donc croissante et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

$$D'où, pour $p \geq n$: $0 \leq u_p - u_n \leq \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{p-n}}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$$

Les inégalités, pour $p \geq n$, $0 \leq u_p - u_n \leq 2^{-(n-1)}$, entraînent que (u_n) est une suite de Cauchy, elle est donc convergente.

Espaces complets

Définition 2.2.2. Un espace vectoriel normé $(E; \| \cdot \|)$ est dit complet si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes dans E pour sa norme.

Définition 2.2.3. Tout espace normé $(E; \| \cdot \|)$ de dimension finie est complet.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy. Cette suite est bornée, elle est donc incluse dans un compact (prendre par exemple une boule fermée de rayon assez grand).

On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite qui converge. En particulier, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une valeur d'adhérence, donc elle converge.

Exemple 2.2.2. Le Espace vectoriel ℓ^2 des suites de complexes (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ converge est complet pour la norme

$$\| (a_n) \|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}.$$

Preuve.

Notons tout d'abord que ℓ^2 est bien un Espace vectoriel : si (a_n) et (b_n) sont dans ℓ^2 , l'inégalité $|a_n + b_n|^2 \leq (|a_n| + |b_n|)^2 \leq 2(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ montre que la somme $(a_n + b_n)$ est dans ℓ^2

• De même directement pour $\lambda(a_n)$ si $\lambda \in \mathbb{C}$. Ensuite, $\| \cdot \|$ est bien une norme par passage à la limite dans l'inégalité de Minkowski. Passons à la complétude.

Soit $p \rightarrow (a^p)$ une suite de Cauchy de ℓ^2 , où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a^p = (a_n^p)_n$. La condition de Cauchy se traduit par

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists p_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2; (p \geq p_\epsilon \text{ et } q \geq p_\epsilon) \\ \implies \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^q - a_n^p|^2} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Comme $|a_n^q - a_n^p| \leq \|a^p - a^q\|_2$, on constate que, pour chaque n fixé, la suite $p \mapsto (a_n^p)$ est de Cauchy, donc converge, mettons vers a_n . On retrouve alors les deux problèmes usuels :

1. Montrer que la suite (a_n) est dans ℓ^2 .
2. Montrer que la suite $p \mapsto (a_n^p)_p$ converge effectivement dans ℓ^2 vers (a_n) . Pour 1), on écrit que, pour tout N fixé dans \mathbb{N} ,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2; (p \geq p_1)$$

et $q \geq p_1$) $\implies \sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n^q - a_n^p|^2} \leq 1$. On bloque $p \geq p_1$ et l'on passe de façon licite à la limite quand $q \rightarrow +\infty$ dans la somme finie (ce ne serait pas possible si la somme était infinie !) pour obtenir

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \geq p_1) \implies \sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n - a_n^p|^2} \leq 1,$$

d'où, pour $p = p_1$ (en usant des propriétés de la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n).

$$\sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n|^2} \leq 1 + \sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n^{p_1}|^2} \leq 1 + \|a^{p_1}\|_2$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n=0}^N |a_n|^2$ sont donc bornées donc la série converge.

2) reprend en grande partie les idées ci-dessus. Bloquant $\epsilon > 0$ puis p_ϵ et N , on obtient

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2; (p \geq p_\epsilon$$

et $q \geq p_\epsilon$) $\implies \sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n^q - a_n^p|^2} \leq \epsilon$, d'où, par passage à la limite licite

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \geq p_\epsilon) \implies \sqrt{\sum_{n=0}^N |a_n - a_n^p|^2} \leq \epsilon$$

puis en faisant tendre N vers $+\infty$

$$\forall p \in \mathbb{N}, (p \geq p_\epsilon) \implies \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n - a_n^p|^2} \leq \epsilon.$$

Un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, muni de la distance associée à la norme, est un espace métrique complet.

Preuve :

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy. Cette suite est bornée, elle est donc incluse dans un compact (prendre par exemple une boule fermée de rayon assez grand).

On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite qui converge. En particulier, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ admet une valeur d'adhérence, donc elle converge.

Espace normé complet (de Banach).

Définition 2.2.4. Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 2.2.3.

1. Une reformulation du théorème précédent consiste à dire que tous les \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.
2. L'étape suivante consiste à exhiber des espaces de Banach qui sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension infinie.

Exemple 1 : L'espace $(\ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve :

Soit $(x^m)_{m \geq 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(\ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$. On note

$$x^m = (x_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$$

où $(x_n^m)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}$. Par définition, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $m_0 \geq 0$ tel que, pour tous $m, m' \geq m_0$

$$\sup_{n \geq 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \epsilon$$

Donc, pour chaque $n \geq 0$, la suite $(x_n^m)_{m \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{K}; |\cdot|)$, qui est un espace métrique complet. Cette suite converge vers une limite que l'on note $z_n \in \mathbb{K}$.

On note $z = (z_n)_{n \geq 0}$. Vérifions que $z \in \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ et que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x^m = z.$$

On sait que

$$\sup_{n \geq 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \epsilon,$$

pour $m, m' \geq m_0$.

Donc

$$|x_n^m - z_n| \leq \epsilon,$$

pour tout $m \geq m_0$.

Finalement, la suite z est bornée (prendre par exemple $\epsilon = 1$) et la suite $(x_m)_{m \geq 0}$ converge vers z pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exemple 2.2.4. Supposons que $(F; \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Alors, l'espace $\mathcal{L}(E; F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E; F)}$ est également un espace de Banach.

Preuve. Soit $(L_m)_{m \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(E; F); \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E; F)})$. Par définition, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tous $m; n \geq n_0$,

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \epsilon \|x\|_E :$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(F; \|\cdot\|_F)$, qui est un espace de Banach, donc elle converge vers une limite que l'on note $L(x) \in F$.

On vérifie

$$\text{e que } L \text{ est linéaire } L(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(y) = \lambda L(x) + \mu L(y) :$$

On sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \epsilon \|x\|_E :$$

pour $m, n \geq n_0$.

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L(x)\|_F < \epsilon \|x\|_E :$$

pour tout $n \geq n_0$.

En particulier,

$$\|L(x)\|_F \leq (\epsilon + \|L_{n_0}\|_{\mathcal{L}(E;F)}) \|x\|_E :$$

ce qui montre que L est continue et

$$\|L_n - L\|_{L(E;F)} < \epsilon ;$$

pour tout $n \geq n_0$.

Finalement, la suite $(L_n)_{n \geq 0}$ converge vers L dans $(\mathcal{L}(E; F); \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E; F)})$.

Chapitre 3

Espaces de Hilbert.

3.1 produit scalaire.

Définitions et Exemples

Définition 3.1.1. [?] Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), un produit scalaire sur E est une application, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ à valeurs dans \mathbb{K} , telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on ait :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et, si $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$; $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ et $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ et $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

Dans la deuxième point $\overline{\langle y, x \rangle}$ et $\bar{\alpha}$ sont les conjugués dans \mathbb{C} de $\langle y, x \rangle$ et α , lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ces barres du conjugaison sont inutiles.

Exemple 3.1.1. — Sur \mathbb{R}^n , l'application

$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

est un produit scalaire, appelé produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

- Sur l'ensemble $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ des suites réelles $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de carrés sommables $(\sum_n |x_n|^2 < +\infty)$, l'application

$$(x, y) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,$$

est un produit scalaire.

- Sur $M_N(\mathbb{R})$, on peut définir le produit scalaire $\langle A; B \rangle = \text{Trace}(AB^t)$.
- Pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on peut définir sur $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ le produit scalaire

$$\langle f; g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

.

Définition 3.1.2. On appelle espace **préhilbertien** un espace vectoriel normé définit un produit scalaire.

Notons qu'un espace préhilbertien est un espace normé :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Exemple 3.1.2.

Exemple 1 : L'espace préhilbertien le plus simple est l'espace \mathbb{C}^n des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ à coordonnées $x_i \in \mathbb{C}$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur \mathbb{C} et avec le produit scalaire.

$\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$. La norme de x est alors le nombre positif.

$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$. Il est facile de vérifier que les propriétés (1) à (3) de la définition ?? sont bien satisfaites.

Exemple 2 : Soient $a < b$ des réels. L'espace $C([a, b])$ des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continues muni des deux opérations usuelles somme : $f + g$ et multiplication par un scalaire : λf , avec $f + g : t \mapsto f(t) + g(t)$ et $\lambda f : t \mapsto \lambda f(t)$, est un espace vectoriel sur \mathbb{C} . On munit $C([a, b])$ d'un produit scalaire en posant

3)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt,$$

pour tous $f, g \in C([a, b])$; la norme de la fonction f étant alors donnée par :

4)

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Exemple 3 : Soit $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{x = \{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \zeta_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2 < \infty\}$.

D'après l'inégalité $|\zeta_k \overline{\eta_k}| \leq |\zeta_k|^2 + |\overline{\eta_k}|^2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k \overline{\eta_k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\eta_k}|^2,$$

pour tout $x = \zeta_k, y = \eta_k \in \ell^2(\mathbb{N})$, on en déduit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \overline{\eta_k}$ converge absolument. Ceci nous permet de définir

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \overline{\eta_k}$$

il est facile de voir que $\langle x, y \rangle$ est un produit scalaire, qu'on appellera le produit scalaire standard de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Ainsi $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace préhilbertien .

La norme induite par ce produit scalaire est $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2}$

Exemple 4 : L'espace de Lebesgue $L^2([a, b])$ des classes d'équivalences de fonctions mesurables $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, pour la relation d'équivalence définie d'égalité presque partout, et telle que $\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$, est un espace préhilbertien, muni du produit scalaire

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt.$$

D'après l'inégalité $|x(t) \overline{y(t)}| \leq |x(t)|^2 + |\overline{y(t)}|^2$.

$$\int_a^b |x(t) \overline{y(t)}| dt \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt + \int_a^b |y(t)|^2 dt < \infty,$$

pour tout $x, y \in L^2([a, b])$, on peut alors définir

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt,$$

il est alors facile de vérifier que $\langle x, y \rangle$ est un produit scalaire, qu'on appellera produit scalaire stetard de $L^2([a, b])$. Ainsi $L^2([a, b])$ est un espace préhilbertien . Ce produit scalaire induit la norme $\| x \|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2}$

Théorème 3.1.1. (Inégalité de **Cauchy-Schwarz**)

Soit $(E; \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on note $\| x \| = \langle x, x \rangle$. On a alors l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \| y \|; \forall x, y \in E :$$

Ainsi, l'application $x \in E \rightarrow \| x \|$ est une norme sur E canoniquement associée au produit scalaire donnée qui confère ainsi à E une structure d'espace vectoriel normé.

Démonstration :

1) On va vérifier l'inégalité dans le cas où $K = \mathbb{R}$. Soit $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E ;$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ 0 &\leq \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \\ 0 &\leq \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ 0 &\leq a\lambda^2 + 2b\lambda + c \end{aligned}$$

$$\Delta' = b^2 - ac \leq 0$$

on a : $a = \langle y, y \rangle > 0$

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

2) Cas où H es réel $K = \mathbb{R}$. Si $x \neq 0, y \neq 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} \right| \leq 1 \\ -1 & \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} \leq 1 \\ & \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} = \cos(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi \\ \implies & \langle x, y \rangle = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \cos(\theta). \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1. [?] Un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé avec la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ induite par le produit scalaire.

preuve : La seule axiome non évident a obtenir est l'inégalité triangulaire, on a :

$$(\|x + y\|)^2 = (\|x\|)^2 + (\|y\|)^2 + 2 |\langle x, y \rangle|$$

de l'inégalité de Schwarz, on déduit que

$$2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|$$

d'où

$$(\|x + y\|)^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Théorème 3.1.2. [?] Soit H un espace préhilbertien muni du produit scalaire \langle, \rangle .
alors pour tout $x, y \in H$ on a :

(a) (l'identité du parallélogramme)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2);$$

(b) (l'identité de polarisation)

Si H est réel alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2);$$

(c) (l'identité de polarisation)

Si H est complexe alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 .$$

Démonstration : Comme

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \end{aligned} \tag{3.1}$$

et

$$\begin{aligned}
 \|x - y\|^2 &= \|x + (-y)\|^2 \\
 &= \|x\|^2 + \|-y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, -y \rangle) \\
 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

d'où l'identité (a) par :

$$\begin{aligned}
 \text{??} + \text{??} &\implies \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \\
 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(\text{??} - \text{??}) \implies \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle), \tag{3.3}$$

Alors si E est réel, on a (b). Si E est complexe, en remplaçant y dans ?? par iy , on aura :

$$\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2 = 2(\langle x, iy \rangle + \langle iy, xi \rangle) \tag{3.4}$$

finalement, ?? et ?? entraîne

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle) \\
 &= \frac{1}{2}(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + i\langle x, iy \rangle + i\langle iy, x \rangle) \\
 &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Définition 3.1.3. [?] Lorsqu'un espace préhilbertien H muni de la norme induite par le produit scalaire est complet, on dit que H est un espace de Hilbert.

Exemple 3.1.3. 1. l'espace euclidien $C^k = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k); x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, k\}$ muni du produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_i$$

est un espace de Hilbert.

2. L'espace de suites $\ell^2(\mathbb{N}) = \{x = \{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \zeta_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2 < \infty\}$ est un espace de Hilbert.

Soit $x^n = (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe alors un entier $N(\epsilon) > 0$ tel que pour $m, p \geq N(\epsilon)$ on ait $\|x_k^m - x_k^p\|_2 \leq \epsilon$; i.e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k^m - x_k^p|^2 \leq \epsilon^2 \quad (3.6)$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $m, p \geq N(\epsilon)$ $|x_k^m - x_k^p| \leq \epsilon$ ce qui veut dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_k^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, par la complétude de \mathbb{C} , elle converge vers un point $x_k \in \mathbb{C}$.

On pose $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. D'après ??, pour tout $\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ et $m, p \geq N(\epsilon)$ on a

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{M}} |x_k^m - x_k^p|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k^m - x_k^p|^2 \leq \epsilon^2.$$

En passant à la limite lorsque $m \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{M}} |x_k - x_k^p|^2 = \sum_{k=0}^{\mathcal{M}} \lim_{m \rightarrow +\infty} |x_k^m x_k^p|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\mathcal{M}} |x_k^m - x_k^p|^2 \leq \epsilon^2,$$

et finalement en faisant tendre \mathcal{M} vers $+\infty$ on obtient : pour tout $p \geq N(\epsilon)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k - x_k^p|^2 \leq \epsilon,$$

i.e. $\|x - x^p\|_2 \leq \epsilon$ d'où $x - x^p \in \ell^2(\mathbb{N})$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = x$.

En conclusion, on a

$$\begin{cases} x = x^N(\epsilon) + (x - x^N(\epsilon)) \in \ell^2(\mathbb{N}) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = x \end{cases}$$

3.2 Orthogonalité

Définitions [?]

Définition 3.2.1. soit H un espace de Hilbert; et soient x et y deux vecteurs de H , on dit que x est orthogonal à y si $\langle x, y \rangle = 0$, et on note $x \perp y$.

Définition 3.2.2. Une famille $F = \vartheta_1, \vartheta_n$ d'un espace vectoriel X sur le corps \mathbb{R} est dite libre, et ses vecteurs sont dits linéairement indépendants, lorsque pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1 \vartheta_1 + \dots + \lambda_n \vartheta_n = 0$, nous avons $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Définition 3.2.3. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite orthogonale si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non-nuls est une famille libre.

Si (x_1, \dots, x_p) est une famille orthogonale, on a la relation de Pythagore

$$\left\| \sum_{k=1}^p x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2.$$

Définition 3.2.4. Soit M un sous-espace vectoriel de X . On appelle orthogonale de M l'ensemble $M^\perp = \{v \in X \text{ tel que } \langle u, v \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in M\}$

Remarque 3.2.1. Soit M un sous-espace vectoriel de X . Alors,

i) $M^\perp = \bigcup_{u \in M} u^\perp$ est un sous-espace fermé de X .

ii) $M \cap M^\perp = \{0\}$.

3.3 Projection orthogonale

Rappelons la notion de convexité.

Définition 3.3.1. Soit E un espace vectoriel réel. Une partie $C \subset E$ est dite convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $0 \leq t \leq 1$, $(1-t)x + ty \in C$ i.e. le segment joignant x à y défini par

$$[x; y] := \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$$

est contenu dans C .

L'ensemble C est dit strictement convexe si pour tout $x, y \in C$ et $t \in]0; 1[$, $(1-t)x + ty \in \text{int}(C)$

Théorème 3.3.1. *si F est un sous espace convexe de l'espace d'Hilbert H alors, $\forall a \in H$ existe une projection unique $b \in F$.*

Théorème 3.3.2. *si F est un sous espace fermé de l'espace d'Hilbert H , alors $\forall a \in H$ existe une projection unique $b \in F$, et $(a - b) \in F^\perp$, (ie); $\forall x \in F, \langle a - b, x \rangle = 0$*

$$F^\perp = \{x \in E, \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in F\}$$

preuve on prends $r = \inf_{y \in F} \|a - y\| = d(a, F)$

alors on peut construire une suite $(x_n)_n \in H$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r \leq \|a - x_n\| < r + \frac{1}{n}$$

par passage à limite, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a - x_n\| = r$.

la suite $(x_n)_n$ est de cauchy, car

$$\frac{1}{2} \|x_p - x_q\|^2 + 2 \|a - x_{pq}\|^2 = \|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2$$

” l'inégalité de l'intermédiaire ”

x_{pq} est le milieu de $\|x_p - x_q\|$

$$\Rightarrow x_{pq} = \frac{1}{2}(x_p + x_q) \Rightarrow \|a - x_{pq}\|^2 \geq r^2$$

$$\Rightarrow \lim_{p, q \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \|x_p - x_q\|^2 = \lim_{p, q \rightarrow +\infty} \|a - x_p\|^2 + \|a - x_q\|^2 - 2 \|a - x_{pq}\|^2 =$$

$0 \Rightarrow (x_n)$ converge car F est complet (un fermé dans complet).

Exemple 3.3.1. (Le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles)

On note \mathcal{S} l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n \in \mathbb{N}$. Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ; autrement dit $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

• Loi interne. Soient $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ et $v = (v_n)_n \in \mathbb{N}$ deux suites appartenant à

\mathcal{S} . La suite $u+v$ est la suite $w = (w_n)_n \in \mathbb{N}$ dont le terme général est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + v_n$$

(où $u_n + v_n$ désigne la somme de u_n et de v_n dans \mathbb{R}).

• *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ un élément de \mathcal{S} , $\lambda \cdot u$ est la suite $v = (v_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda \cdot u_n$$

où \cdot désigne la multiplication dans \mathbb{R} .

• *Élément neutre.* L'élément neutre de la loi interne est la suite dont tous les termes sont nuls.

• *Symétrique.* Le symétrique de la suite $u = (u_n)_n \in \mathbb{N}$ est la suite $u' = (u'_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = -u_n.$$

Elle est notée $-u$.

Exemple 3.3.2. (*Les matrices*)

L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} est muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel. La loi interne est l'addition de deux matrices. La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire. L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls). Le symétrique de la matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. De même, l'ensemble $M_{n,p}(K)$ des matrices à coefficients dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace

vectoriel.

Autres exemples :

- (a) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P(X) = a_n X^n + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$.
L'addition est l'addition de deux polynômes $P(X) + Q(X)$, la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot P(X)$. L'élément neutre est le polynôme nul.
L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$.

Le résultat qui permet de manipuler l'application de projection orthogonale est le suivant :

Proposition 3.3.1. *L'application p_F qui à un point de H fait correspondre sa projection orthogonale sur un sous espace fermé F , possède les propriétés suivantes :*

(a) $p_F(\alpha x + \beta y) = \alpha p_F(x) + \beta p_F(y)$.

(b) $p_F + p_{(F)^\perp} = id_H$.

(c) $(\|x\|)^2 = (\|p_F(x)\|)^2 + (\|(id - p_F)(x)\|)^2$.

(d) $p_F(x_n) \longrightarrow p_F(x)$, si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

(e) $x \in F \Leftrightarrow p_F(x) = x$.

(f) $x \in F^\perp \Leftrightarrow p_F(x) = 0$.

(g) $p_F(p_F)(x) = p_F(x)$.

$$(h) F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow p_{F_1}(p_{F_2})(x) = p_{F_1}(x).$$

Théorème 3.3.3. $H = F \oplus F^\perp$ et la décomposition de $x \in H$ dans cette somme directe est :

$$x = p(x) + (id - p)(x)$$

Démonstration. pour tout $x \in H$, $x = p(x) + (x - p(x))$ appartient à $H = F + F^\perp$ et $F \cap F^\perp = \{0\}$, la somme est donc directe, $H = F \oplus F^\perp$. Ceci veut dire que p est la projection sur F parallèlement à F^\perp . On appelle donc cette application la projection orthogonale de H sur F . \square

Corollaire 3.3.1. Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Autrement dit, pour vérifier qu'un sous-espace F est dense de H , il suffit de vérifier que $\forall a \in \mathbb{H}, \langle x, a \rangle = 0$.

Démonstration. Si F est dense, alors $\overline{F} = H$ et $F^\perp = \overline{F}^\perp = \{0\}$. Inversement, si F n'est pas dense, il existe $u \in H', u \neq 0$ telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Il existe $x \in H', x \neq 0$ tel que $u = \Lambda_x$. Alors $\langle x, a \rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et $a \neq 0$, donc $F^\perp = \{0\}$ \square

Bases orthonormales

Définition 3.3.2. Soit H un espace de Hilbert; $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs est dite :

(a) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$

(b) orthonormale si de plus $|e_i| = 1, \forall i \in I$

Exemple 3.3.3. Soit $L^2[-\pi, +\pi]$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$, la famille $(e_p(t))_{p \in \mathbb{Z}} = (e^{ipt})_{p \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale.

Définition 3.3.3. Un espace de Hilbert H est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans H .

Théorème 3.3.4. Soit H un espace de Hilbert séparable, il possède une base et même une infinité de bases orthonormales. Toute ses bases possèdent le même nombre d'élément appelé la dimension de l'espace de Hilbert H .

Définition 3.3.4. Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une famille dénombrable d'un espace de Hilbert H . On dit que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est une **base hilbertienne** si :

- i) pour tous $n \neq m$ on a $\langle e_n; e_m \rangle = 0$, et $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in N$;
- ii) l'espace vectoriel $\text{Vect}\{e_n : n \in N\}$ des combinaisons linéaires **finies** des vecteurs e_n , pour $n \in N$, est dense dans H .

Attention : une base hilbertienne n'est pas une base algébrique car pour une base algébrique, tout élément de l'espace est combinaison linéaire finie d'éléments de la base.

Théorème 3.3.5. Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H . Tout $x \in H$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une série convergente dans H

$$x = \sum_{n \geq 0} x_n e_n$$

où

$$x_n := \langle x, e_n \rangle \in \mathbb{C}.$$

Théorème 3.3.6. De plus, on a l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Réciproquement, si $\sum_{n \geq 0} |x_n| < +\infty$, alors $\sum_{n \geq 0} x_n e_n$ converge dans H .

Lemme 3.3.1. Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une famille orthonormale de vecteurs de H et $x \in H$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, est la projection orthogonale de x sur \overline{F} , l'adhérence du sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e_n . Le théorème de Pythagore nous permet décrire

$$\|x\|^2 = \|x - P(x)_{\overline{F}}\|^2 + \|P(x)_{\overline{F}}\|^2 = \|x - P(x)_{\overline{F}}\|^2 + \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

On en déduit *l'inégalité de Bessel* :

$$\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Conclusion.

Soit H un espace de Hilbert séparable, il possède une base et même une infinité de bases orthonormales. Toute ses bases possèdent le même nombre d'élément appelé la dimension de l'espace de Hilbert H . En conclu un espace de hilbert est un espace normé complet non nécessairement de dimension finie, dont la nore dérive d'un prodouit scalaire comme la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ de \mathbb{R}^\times , ce qui lui confère une géométrie euclidienne qui permet de généraliser simplement certaines propriétés de la dimension finie.

L'archétype des espaces de Hilbert (non de dimension finie) est l'espace des suites dénombrables (ie. indexée par \mathbb{N} , par une bijéction convenable par \mathbb{Z} .

Bibliographie

- [1] *C. C. Cowen and B. D. MacCluer. Composition operators on spaces of analytic functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.*
- [2] *H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson (1983).*
- [3] *J. Ph. Labrousse, Quelques topologies.*
- [4] *M. Rumin réécrit par J. Kulsar.*
- [5] *M. L. Gallardo, Licence 3^eme année univ de tours année 2007, 2008.*
- [6] *M1 – AF – cours espace hilbert-SF-Dec 2012.*
- [7] *Sophie Chemla de l'univ pierre et Marie Curie, revent des parties d'un cours de Hilbert. Ledret.*
- [8] *W. Hengtner, M. Lambert C. Reischer. Introduction à l'analyse Fonctionnelle, 1981.*
- [9] *W. S. Cohn. Carleson measures and operators on star-invariant subspaces, J. Operator Theory, 15(1)(1986), 181 – 202.*
- [10] *P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970..*
- [11] *S. R. Garcia, W. T. Ross, , Model spaces : a survey, Contemp. Math. 638 (2015), 197-245.*