

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية التكنولوجيا  
FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



## *Memoire de Master*

**Domaine :** Technologie  
**Filière :** Génie Civil  
**Option :** Conception et Calcul des Structures en Génie Civil

**Réalisé par:**  
TOUIHAR SOUMIA  
BEN CHIOUKH HALIMA

### THEME

---

**Modélisation du comportement d'un élément  
structural en béton et en béton armé à la  
rupture par éléments finis : comparaison avec  
les essais de flexion 4 points**

---

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. Belaidi Akram Salah Eddine	MCA	Président
Mme. Ben Miloud Meriam	MAA	Examinatrice
Mr. Mouattah Kaddour	MCA	Encadreur
Mr. Krobba Benharzallah	MAA	Co-encadreur

**Année Universitaire 2016/2017**

# Remerciement

*Nous remercions tout d'abord ALLAH qui nous a aidés à mener à terme ce travail « Alhamdou li ALLAH ».*

*Nous tenons à remercier notre encadreur Pof.Mouattah Kaddour pour nous avoir proposé un sujet fort intéressant et pour la confiance qu'il nous a accordée. Il nous a dirigé tout au long de cette étude et nous a donné les grands axes de recherche. Nous le remercions aussi pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa sensibilité.*

*Nous exprimons également notre profonde reconnaissance à notre Co-encadreur Mr Krobba Ben Harzallah avec qui nous avons eu grand plaisir à travailler. Nous tenons spécialement à le remercier pour sa gentillesse, pour sa patience, pour sa motivation et pour sa grande disponibilité.*

*Nous exprimons également notre profonde reconnaissance à Mr BenThebetTayeb pour sa collaboration à résoudre les problèmes que nous avons rencontrés au cours de notre étude et sa patience.*

*Un bon résultat expérimentale ne peut exister sans bons technicien, alors Nous remercions toute l'équipe de laboratoire de génie civil surtout Aïssa Delles et Abdelkader Ben Safidine qui nous aident durant notre étude.*

*Nous devons exprimer notre profonde gratitude à tous les enseignants du département de génie civile qui nous ont aidé durant notre cursus universitaire et surtout monsieur Taher Nouioua.*

*Nous présentons nos sincères remerciements à monsieur les membres de jury qui ont accepté de faire partie pour pouvoir juger ce travail. Il s'agit, bien sûr de Mr. Belaidi Akram Salah-Eddine, et Mme Benmiloud Meriam. Nous leur en témoignons toute notre reconnaissance.*

*Merci pour tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

*Merci*

# TABLES DES MATIERES

	Pages
<b>Introduction générale .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton</b>	
I-1 Introduction.....	3
I-2 La théorie de la plasticité indépendante du temps.....	3
I-2-1 La limite d'élasticité.....	6
I-2-2 L'écrouissage .....	8
I-2-3 L'effet Bauschinger .....	9
I-3 L'effet de la température .....	10
I-4 Effet de la vitesse de déformation .....	11
I-5 Modélisation du comportement uniaxial.....	11
a. Modèle élastique parfaitement plastique.....	12
b. Modèle avec écrouissage linéaire .....	12
c. Modèle avec écrouissage exponentiel .....	12
d. Le modèle de Rammberg-Osgood.....	13
I-6 Plasticité tridimensionnelle.....	14
I-6-1 Surface de charge.....	14
I-6-1-1 Les critères pour les matériaux métalliques insensibles à la pression hydrostatique .....	15
a. Critère de Tresca.....	15
b. Critère de Von-Mises.....	15
I-6-1-2 Les critères pour les matériaux sensibles à la pression hydrostatique $\sigma_h$ .....	17
a. Critère de Mohr-Coulomb .....	17
b. Critère de Drucker-Prager .....	18
I-6-2 L'écrouissage.....	19

I-7	Modélisation incrémentale .....	20
I-7-1	Concepts de base .....	20
a.	Critère de charge .....	20
b.	Règle d'écoulement.....	21
c.	Règle d'écrouissage .....	22
d.	Paramètre d'écrouissage.....	23
e.	La condition de consistance (ou de cohérence).....	23
I-8	Comportement du béton et de béton armé en élasticité .....	24
I-8-1	Comportement uni-axial du béton .....	24
I-8-1-1	Les essais de compression uniaxiale.....	24
I-8-1-2	Les essais de traction uniaxiale.....	27
I-8-2	Comportement bi- axial du béton .....	28
I-8-3	Comportement triaxiale du béton .....	30
I-9	critère de rupture .....	32
I-9-1	Le modèle d'Ottosen à 4 paramètres.....	33
I-9-2	Le modèle à quatre paramètres de Hsieh- Ting- Chen.....	33
I-9-3	Le modèle de Willam-Warnke .....	34
I-10	L'effet d'échelle .....	36
I-11	Conclusion.....	37

## **Chapitre II : matériau, structure et essais (flexion 4 points)**

II-1	Introduction .....	39
II-2	Description des matériaux .....	39
II-2-1	Analyses granulométriques.....	39
II-2-2	Composition du béton.....	41
II-2-3	Caractéristiques du béton .....	41
II-2-3-1	Maniabilité.....	42
II-2-3-2	Résistances mécaniques.....	42

II-3 Analyse macroscopique de béton.....	43
II-4 Détails constructifs des poutres étudiées.....	44
II-4-1 Coffrage .....	44
II-4-2 Ferrailage .....	45
II-4-3 Coulage des poutres .....	46
II-4-4 Le décoffrage des poutres et la cure.....	47
II-5 Essai de flexion 4 points .....	48
II-5-1 Essais expérimentaux de béton.....	48
Description d'essai .....	48
II-6 Conclusion .....	50

### **Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion**

III-1 Introduction .....	51
III-2 Résolution d'un problème .....	51
III-2-1 Préprocessor .....	51
III-2-2 Solver .....	51
III-2-3 Postprocessor .....	51
III-2-3-1 Les méthodes de résolution directes.....	51
III-2-3-2 Les méthodes itératives .....	52
III-3 Modélisation de la structure.....	52
III-3-1 Poutre non-armée.....	52
III-3-2 Poutre armée.....	53
III-3-3 Modèle éléments finis de renforcement en aciers.....	53
III-4 Déroulement de la modélisation selon le mode GUI (Graphical users interface).....	54
III-5 Discrétisation du modèle physique .....	55
III-5-1 Types d'éléments .....	56
III-5-2 Propriétés des matériaux .....	57
III-5-3 Les constants réels .....	61
III-5-4 Maillage .....	62

III-5-5 Analyse .....	63
III-5-5-1 Hypothèses .....	64
III-5-5-2 Conditions aux limites .....	64
III-6 Résultats .....	65
III-6-1 Poutre non armée .....	65
III-6-1-1 Déformé de la poutre .....	65
III-6-1-2 Diagramme force-flèche.....	66
III-6-2 Poutre armée .....	66
III-6-2-1 Position déformé de la poutre .....	66
III-6-2-2 Les diagrammes force – flèche.....	67
III-7 Discussions des résultats et comparaison .....	67
➤ Poutre non_ armée .....	68
➤ Poutre armée.....	68
III-8 Conclusion.....	69
<b>Conclusion générale et perspectives.....</b>	<b>70</b>

## Liste des tableaux

<b>Tableau II-1</b> -Analyse granulométrique du gravier .....	39
<b>Tableau II-2</b> : Analyse granulométrique du sable.....	40
<b>Tableau II-3</b> : Les paramètres physiques de béton.....	41
<b>Tableau II-4</b> : Composition de béton pour 1m <sup>3</sup> .....	41
<b>Tableau II-5</b> : les résultats des essais à la compression.....	43
<b>Tableau III-1</b> : Types des éléments utilisés. ....	57
<b>Tableau III-2</b> : les propriétés des matériaux.....	57
<b>Tableau III-3</b> : Les constants réels de l'approche de fissures discrets .....	62
<b>Tableau III-4</b> : Les constants réels de l'approche de fissures réparties .....	62
<b>Tableau III-5</b> : la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour la poutre non armée .....	68
<b>Tableau III-6</b> : Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour la poutre armée .....	68

## Tableau des figures

<b>Figure</b>	<b>Titre de la figure</b>	<b>Page</b>
<b>Figure I-1</b>	Essai de traction monotone typique [Fung, 1965]	5
<b>Figure I-2</b>	Courbe contrainte-déformation pour un métal ductile (LCS) : traction et compression [Lubliner, 2008]	6
<b>Figure I-3</b>	Différentes définitions de la limite d'élasticité [MichnoetFindley, 1976]	7
<b>Figure I-4</b>	La limite d'élasticité conventionnelle	7
<b>Figure I-5</b>	Écrouissage pendant le cycle chargement-déchargement	8
<b>Figure I-6</b>	Evolution de la limite d'élasticité par déchargement et chargement successifs d'un alliage [Lemaitre & Chaboche, 1985]	9
<b>Figure I-7</b>	Schéma des deux types d'écrouissage a) isotrope b) cinématique	9
<b>Figure I-8</b>	Effet Bauschinger	10
<b>Figure I-9</b>	Courbe de contrainte-déformation en traction à différentes températures [Chakrabarty, 2006]	10
<b>Figure I-10</b>	Effet de la vitesse de déformation : Acier EN25 à 1000° C [Chakrabarty, 2006]	11
<b>Figure I-11</b>	Modèles élastoplastiques a) parfait b) avec écrouissage linéaire	12
<b>Figure I-12</b>	Modèle avec écrouissage exponentiel	13
<b>Figure I-13</b>	Modèle de Ramberg-Osgood	14
<b>Figure I-14</b>	Le critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales	15
<b>Figure I-15</b>	Le critère de Von-Mises dans l'espace des contraintes principales	16
<b>Figure I-16</b>	Comparaison entre les surfaces de charge initiales de l'acier 304 SS AISI recuit de Von Mises et expérimentale : a) l'éprouvette avec une prédéformation en torsion ; b) l'éprouvette avec une prédéformation combinée [Wu & Yeh, 1991]	16
<b>Figure I-17</b>	Représentation des SDC dans l'espace des contraintes principales	17
<b>Figure I-18</b>	Représentation du critère dans le plan de Mohr	18
<b>Figure I-19</b>	Représentation de critère de Mohr-Coulomb et celui de Drucker-Prager dans le repère des contraintes principales.	19
<b>Figure I-20</b>	Représentation de l'écrouissage dans l'espace des contraintes : a) isotrope b) cinématique	19
<b>Figure I-21</b>	Comportement élastoplastique avec écrouissage combiné	22
<b>Figure I-22</b>	Comportement du béton en compression simple vs.	24

	Déformation axiale, latérale et volumétrique [Chen, 1982]	
<b>Figure I-23</b>	Comportement cyclique du béton en compression uniaxial [Karsan and Jirsa, 1969]	25
<b>Figure I-24</b>	La courbe de compression de contraintes-déformations [Wischer ,1978]	26
<b>Figure I-25</b>	Relation entre contrainte- déformation, $\sigma/f'_c$ , et le coefficient de poisson, $\nu$	27
<b>Figure I-26</b>	Courbe contrainte-déformation sous traction uniaxiale avec différents types d'agrégats [Chen, 1982]	28
<b>Figure I-27</b>	Courbe contrainte –déformation dans la zone de compression biaxiale. [Kupfur et all.,1969]	29
<b>Figure I-28</b>	Enveloppe de critère de rupture du béton. [Kupfur et all..., 1969] all..., 1969]	30
<b>Figure I-29</b>	Relation contraintes-déformations du béton [Chen, 1982]	30
<b>Figure I-30</b>	Essai de compression hydrostatique du béton [Chen ,1982]	31
<b>Figure I-31</b>	Résistance ultime du béton sous un état de contraintes triaxiales [Chen, 1982]	31
<b>Figure I-32</b>	a) Le méridien de la surface de rupture, b) Section dans le plan déviatorique	32
<b>Figure I-33</b>	Comparaison de critère de Hsieh- Ting – Chen avec les données triaxial dans le plan déviatorique, les cercles ouverts [Launay et al., 1970]	34
<b>Figure I-34</b>	Le modèle de Willam-Warnke à 5 (cinq) paramètres	35
<b>Figure I-35</b>	L'effet d'échelle sur poutres en flexion 3 point [l'Hermite, 1973]	37
<b>Figure I-36</b>	Surface de rupture [Crapintri, 1989]	37
<b>Figure II-1</b>	Analyse granulométriques des granulats	40
<b>Figure II-2</b>	L'essai de cône d'Abrams	42
<b>Figure II-3</b>	L'essai d'écrasement des spécimens	42
<b>Figure II-4</b>	a) photo de MEB , b) surface de rupture	43
<b>Figure II-5</b>	La géométrie des poutres	44
<b>Figure II-6</b>	Coffrage des poutres	44
<b>Figure II-7</b>	a- Schéma de ferrailage, b- Les diagrammes du moment fléchissant et l'effort tranchant.	45
<b>Figure II-8</b>	Le ferrailage des poutres	46

<b>Figure II-9</b>	Le malaxage des constituants à l'aide d'une bétonnière	46
<b>Figure II-10</b>	La mise en œuvre de béton dans les coffrages.	47
<b>Figure II-11</b>	La vibration de béton.	47
<b>Figure II-12</b>	Essai de flexion quatre 4 points.	48
<b>Figure II-13</b>	La disposition de capteur de la flèche	49
<b>Figure II-14</b>	La propagation des fissures dans la poutre armée	49
<b>Figure II-15</b>	La rupture de la poutre non armée	50
<b>Figure III-1</b>	Représentation de la méthode itérative initiale.	52
<b>Figure III-2</b>	L'élément SOLID 65.	53
<b>Figure III-3</b>	L'élément LINK 180.	53
<b>Figure III-4</b>	Modèles pour le renforcement dans le béton armé [Rashid, 1968]: a) discret, b) smeared.	54
<b>Figure III-5</b>	L'interface d'ANSYS Workbench12.0	55
<b>Figure III-6</b>	Choix du modèle de structure statique pour créer une nouvelle analyse.	55
<b>Figure III-7</b>	La géométrie des poutres dans ANSYS. a) poutre non armé, b) poutre armé	56
<b>Figure III-8</b>	La courbe déformation-contrainte uniaxial de béton.	59
<b>Figure III-9</b>	la courbe de comportement élastoplastique de l'acier.	60
<b>Figure III-10</b>	Les courbes de différents valeurs de $\beta$	61
<b>Figure III-11</b>	a) maillage d'acier, b) maillage de béton.	63
<b>Figure III-12</b>	Relation constitutive typique pour le béton (adoucissement).	64
<b>Figure III-13</b>	Relation constitutive typique pour le béton (post-stiffening).	64
<b>Figure III-14a, b</b>	La déformation de la poutre non_ armé, a) poutre numérique, b) poutre expérimentale.	65
<b>Figure III-15</b>	Les courbes de la force-flèche pour les résultats numériques et expérimentales	66
<b>Figure III-16</b>	La déformation de la poutre armée, b) la déformation des aciers.	67
<b>Figure III-17</b>	les courbes de la force-flèche pour les résultats numériques et expérimentales	67
<b>Figure III-18</b>	: Position et l'ordre de point d'intégration pour l'élément SOLID65.	68



# Introduction générale

---

Le béton armé est le composite le plus utilisé dans la construction à travers le monde. Les structures vont des poutres, poteaux, dalles et plaques.

Deux critères sont très observés quant à la fiabilité d'une structure :

- Son aptitude fonctionnelle,
- La sécurité.

Comme le béton présente un comportement non-linéaire dû à la plasticité et la présence de la fissure, il est de ce fait indispensable d'étudier la réponse des structures en béton au-delà du domaine élastique.

Ceci peut être effectué par la réalisation d'essais sur les structures ce qui s'avère coûteux et lent.

À ce titre, l'utilisation de l'analyse par élément fini est plus bénéfique pour deux raisons majeures :

- i- la disponibilité des logiciels (gratuits ou commerciaux) très sophistiqués permettent l'utilisation de modèles de plus en plus compliqués à l'instar d'ABAQUS, ADINA ou ANSYS où le modèle de William-Warnke, est implanté.
- ii- la performance accrue des outils de calculs devenant à la portée de tout le monde ce qui rend les calculs non-linéaires moins onéreux alors ce point était, au passé, très dissuasif.

Ce travail vise, alors, à examiner la capacité du logiciel élément fini ANSYS à mieux rendre compte du comportement des structures en béton et en béton armé et ce en confrontant les résultats expérimentaux obtenus lors de cette étude consistant à réaliser des essais de flexion quatre points sur des poutres en béton et en béton armé et les résultats numériques obtenus en réalisant des analyses par élément fini sur les mêmes structures modélisées à l'aide de la MEF sous ANSYS.

L'objectif, alors, est de comparer les réponses expérimentales des poutres traduites par les courbes charge-flèche à celle numériques pour examiner la consistance du modèle utilisé ainsi que de l'analyse élément fini menée.

Le présent tapuscrit comporte une introduction générale, trois chapitres et une conclusion générale avec des perspectives.

Il est organisé selon le schéma suivant :

Le premier chapitre est consacré au comportement du béton, de l'acier et le composite béton-acier en élasticité et en plasticité en tenant compte des paramètres physiques (module d'élasticité, résistance à la compression. . . etc), sous différents types d'essais : uniaxial, biaxial et triaxial.

## **Introduction générale**

---

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation des matériaux ainsi que les essais réalisés au sein du laboratoire sur les poutres en béton et en béton armé.

Le troisième chapitre traite la modélisation à l'aide du logiciel ANSYS, les résultats numériques obtenus ainsi qu'une étude comparative entre ces résultats et les résultats obtenus expérimentalement.

Le tapuscrit se termine, bien évidemment, par une conclusion générale et des perspectives futures.

## **I-1 Introduction [Mouattah, 2005]**

Généralement les structures en béton armé sont composées de deux matériaux (acier/ béton) avec des caractéristique différentes. L'acier peut être considéré comme un matériau homogène. Par contre, le béton est un matériau composite et hétérogène (comportant un squelette granulaire), mais au niveau macroscopique, i. e au niveau du VER (Volume Élémentaire Représentative), il est admis de le considéré comme un matériau homogène et isotrope.

Par contre, au niveau microscopique il a un comportement complexe et fortement hétérogène : granulats, liants, vides,..., ce qui doit être pris en compte dans un traitement macroscopique.

Dans ce chapitre, on présente le comportement mécanique du béton à diverses histoires de chargement (uniaxial, biaxial et triaxial) pour mettre en évidence la relation entre le chargement, la fissuration et l'endommagement.

A vrai dire, le chargement appliqué est de type incrémental : lorsque ce chargement augmente, les microfissures se développent en se connectant entre elles pour former une microfissure. Ce phénomène physique peut engendrer à l'échelle macrostructurale une diminution des contraintes accompagnée d'une augmentation des déformations.

Il ne suffit pas d'étudier le béton dans le domaine élastique mais, il faut aller au-delà de ce domaine i. e, explores son comportement plastique

On passera en revue dans ce chapitre les grands thèmes de la plasticité avant d'examiner la plasticité du béton. On ne considère ici que la plasticité indépendante du temps sans tenir en compte le phénomène de viscosité lié au temps.

## **I-2 La théorie de la plasticité indépendante du temps**

La théorie de plasticité est la première théorie qui traite des transformations irréversibles. Etant donné que l'élasticité est la propriété des milieux continus qui, après suppression des sollicitations qui lui sont appliquées, reviennent à leur état initial, libre de contrainte, par le même chemin de chargement, la propriété de plasticité indique la persistance de déformation, dite permanente, après suppression des sollicitations extérieures.

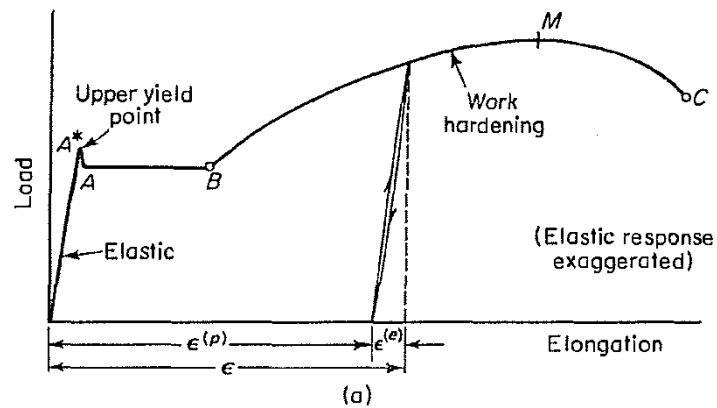
Macroscopiquement parlant, le comportement élastique correspond à des petits déplacements réversibles des atomes constituant le réseau cristallin autour de leur position d'équilibre.

D'un point de vue purement physique, les tests ont montré que l'origine la déformation plastique dépend de la nature du matériau. Ainsi, pour les géomatériaux, tels que le béton, c'est la nucléation et l'initiation des microfissures à l'interface agrégats-mortier ou dans le mortier lui-même qui provoquent ces déformations irréversibles alors que pour les matériaux métalliques, elle est due, principalement, aux glissements relatifs des plans cristallographiques suite aux contraintes de cisaillement le long de ces plans. Ce glissement s'opère selon les plans les plus denses. La déformation plastique est d'autant plus importante que le matériau possède un nombre élevé de plans de glissement potentiels.

Historiquement, la théorie de plasticité a été développée suite aux travaux de [Tresca, 1864] sur des expériences d'extrusion et de poinçonnement qui l'ont conduit à établir qu'un métal se déforme plastiquement quand la contrainte de cisaillement maximum atteint une valeur critique d'où son critère. Mais, en réalité, un premier critère a été proposé par [Coulomb 1773] pour les sols et qui a été utilisé par Poncelet et Rankine dans le calcul des murs de soutènement et la pression latérale des sols. Puis les travaux se sont succédé, plus particulièrement pour les métaux, et les mécanismes à l'échelle microscopique ont été assez bien appréhendés [Hill, 1958].

Expérimentalement, il est constaté que, pratiquement, aucune variation de volume ne résulte de la déformation plastique des métaux. Il est, par conséquent, admis qu'elle représente une pure distorsion et, de ce fait, seul le déviateur des contraintes est pris en compte dans l'élaboration de la théorie. Le comportement en traction est identique à celui en compression. L'effet de la contrainte hydrostatique est négligeable sur la plasticité des matériaux.

Dans ce qui suit, certains traits essentiels de la plasticité sont mis en lumière à partir de l'essai de traction uniaxial monotone.



**Figure I-1** : Essai de traction monotone typique [Fung, 1965]

- Jusqu'au point **A**, le comportement est purement élastique linéaire réversible. Le point **A** représente la limite de proportionnalité (confondue avec la limite d'élasticité dans cette figure)  $\sigma_Y$ .

**OA** représente, donc, le domaine élastique.

- A partir de **A** et jusqu'au point **B**, l'éprouvette se comporte plastiquement (écoulement plastique).

- A partir de **B**, l'éprouvette se durcit (écrouissage positif) jusqu'au point **M** puis commence à s'adoucir (écrouissage négatif) marquant ainsi la résistance ultime à la traction  $\sigma_u$ .

- Le point **C** représente la rupture.

En fait, l'isotropie plastique, i. e, la similitude de comportement en traction et en compression n'est visible que si les courbes contrainte-déformation en traction et en compression sont exprimées en termes vrais et non en termes nominaux ce qui est le cas pour un matériau recuit.

La contrainte vraie (ou de Cauchy) est celle obtenue en divisant la force sur la section actuelle alors que la contrainte nominale (ou de Boussinesq) est celle obtenue en divisant la force par la section initiale de l'éprouvette.

La déformation vraie ou naturelle est donnée par :

$$\varepsilon_l = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (\text{I. 1})$$

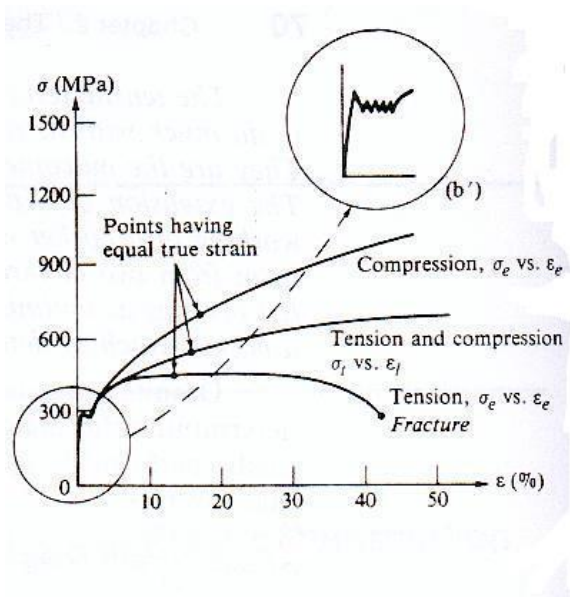
Où  $l$  et  $l_0$  sont, respectivement, la longueur finale et initiale de l'éprouvette.

La déformation conventionnelle est donnée par :

$$\varepsilon_e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (\text{I. 2})$$

$\Delta l$  étant la variation de dimension.

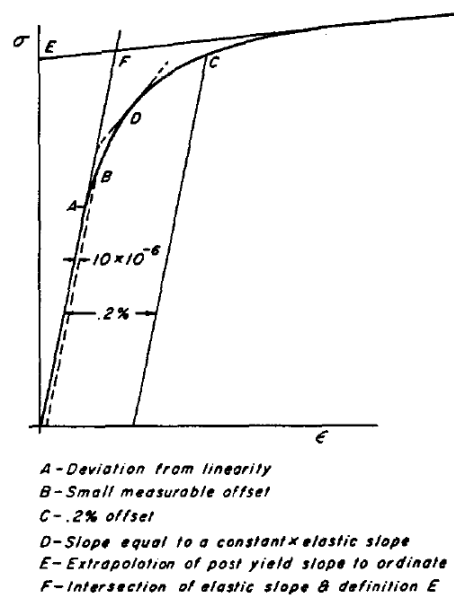
Il s'ensuit que  $\varepsilon_l = \ln(1 + \varepsilon_e)$  en traction et  $\varepsilon_l = -\ln(1 - \varepsilon_e)$  en compression. Ce qui fait que la déformation totale  $\varepsilon$  devient inférieure à  $\varepsilon_e$  en traction et supérieure à  $\varepsilon_e$  en compression comme le montre la figure I.2 Cette distinction est, bien entendu, inexistante, en HPP où les différentes mesures de contrainte et de déformation sont confondues.



**Figure I-2 :** Courbe contrainte-déformation pour un métal ductile (LCS) : traction et compression [Lubliner, 2008]

## I-2-1 La limite d'élasticité

La détermination de la limite d'élasticité de manière précise n'est pas chose aisée. A l'inverse des matériaux ductiles, il n'est pas toujours facile de distinguer une limite de proportionnalité claire pour les matériaux écrouissables. Il existe, alors, plusieurs définitions de cette limite comme le montre la figure I-3. Dans la pratique il est, alors, fait appel à une définition conventionnelle de cette limite en choisissant la valeur de la contrainte susceptible d'induire une certaine valeur conventionnelle ou « offset » de la déformation permanente de déformation en traçant une droite à partir de cette valeur ayant pour pente le module d'Young  $E$ . Les valeurs utilisées sont 0.1% (petite offset) ,0.2% (offset modérée) et 0.5% (grande offset). Or la valeur 0.2% est le plus souvent utilisée et il est indispensable, dans ce cas, de spécifier l'offset utilisé (comme par exemple  $\sigma_{Y(0.2)}$ ). Une valeur moins importante est prise, parfois, dans des problèmes de modélisation structurales, 0.1% par exemple [Lemaitre, 2001]. Certaines valeurs beaucoup moins élevées sont prises dans la détermination de la surface de charge (cf. intra) comme 10 $\mu$  ou même 5 $\mu$ .



**Figure I-3 :** Différentes définitions de la limite d'élasticité [Michno et Findley, 1976]

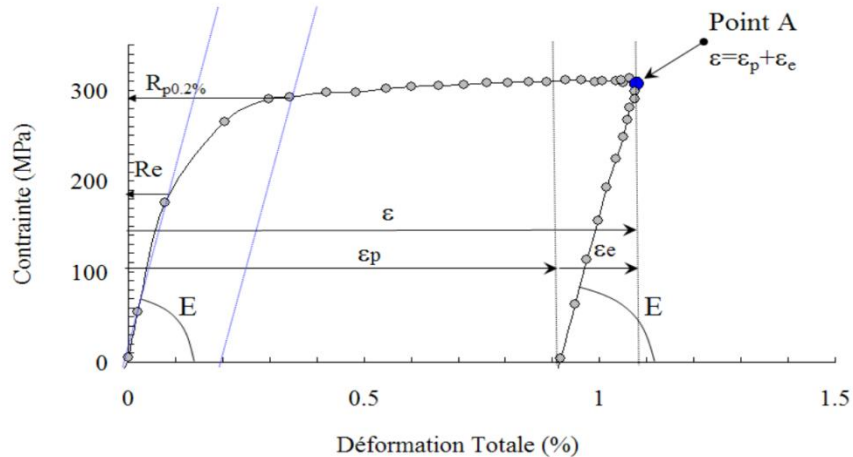


Figure I-4 : La limite d'élasticité conventionnelle

### I-2-2 L'écrouissage

Un autre phénomène à déceler est l'écrouissage. Il s'agit de l'évolution du domaine élastique pendant la variation de la déformation plastique. Ainsi, en opérant un déchargement à partir d'un point au-dessus de la limite d'élasticité (point **D**), et en rechargeant encore une fois, il est constaté que la limite d'élasticité a changé et devenue plus élevée (situé au point **D**), (figure I-5) L'étendue du domaine élastique est devenue  $d$ .

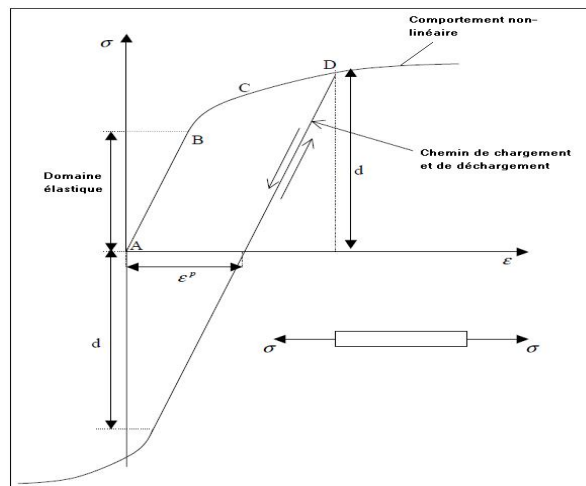
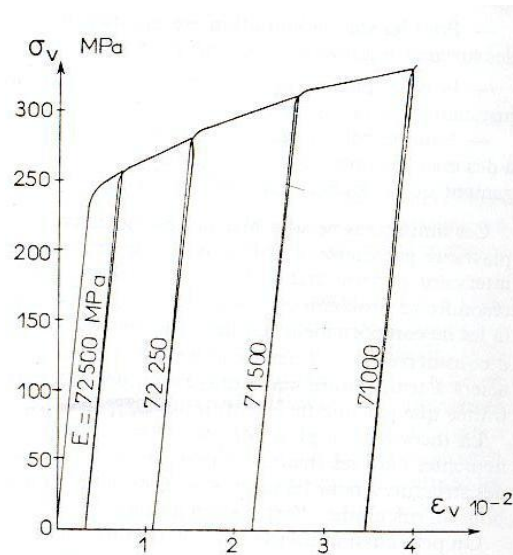


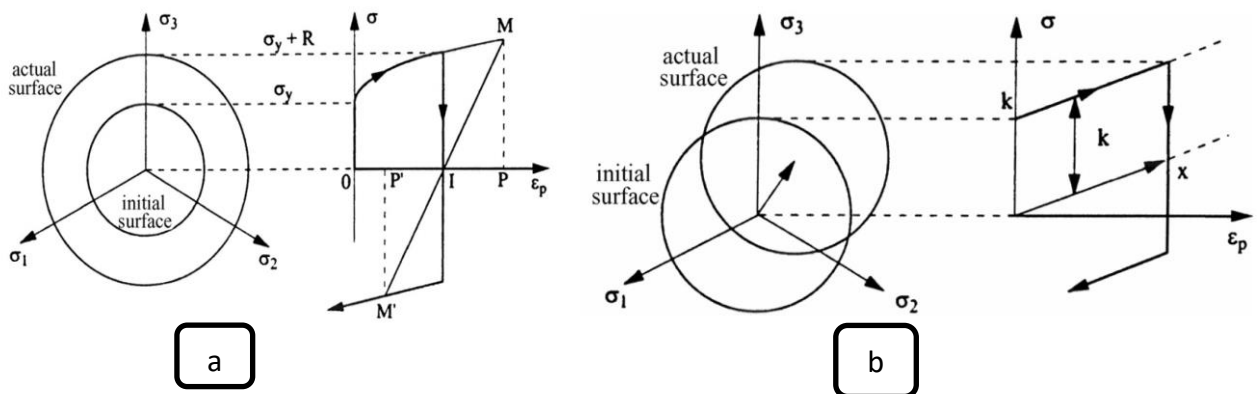
Figure I-5 : Ecrouissage pendant le cycle chargement-déchargement

Il convient de noter que le chemin déchargement est parallèle à celui de chargement. C'est ce qui est appelé : déchargement élastique. La figure I-6 montre bien cette propriété expérimentale.

Cette évolution du domaine élastique s'effectue parfois par une expansion (dilatation) appelée écrouissage isotrope. Elle est, parfois, une pure translation dans l'espace des contraintes appelée écrouissage cinématique (figure I-7).



**Figure I-6 :** Evolution de la limite d'élasticité par déchargement et chargement successifs d'un alliage [Lemaitre & Chaboche, 1985]



**Figure I-7 :** Schéma des deux types d'écrouissage a) isotrope b) cinématique

## I-2-3 L'effet Bauschinger

C'est un effet où la limite d'élasticité en traction est plus importante que celle en compression pour une éprouvette déjà soumise, au préalable, à un chargement et déchargement à l'état vierge.

Il est observé chaque fois qu'il y a une inversion de la direction de chargement comme lors d'une compression suivie d'une traction (figure I-8).

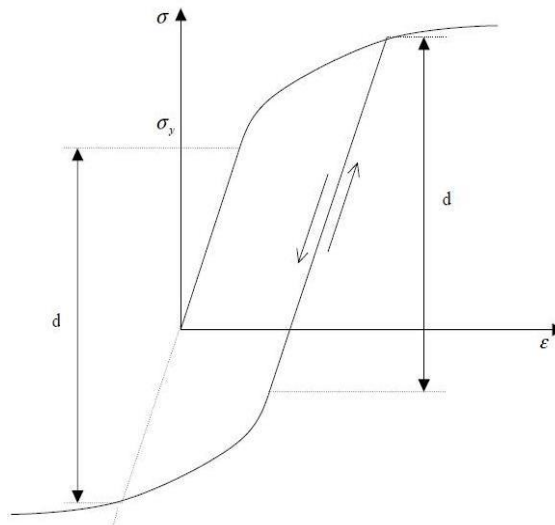
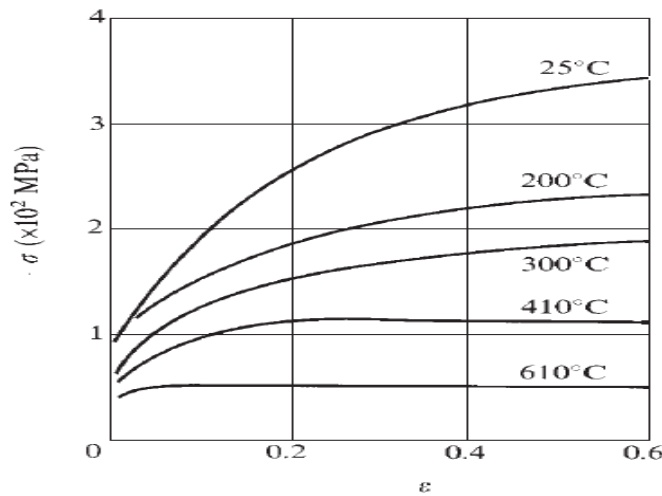


Figure I-8 : Effet Bauschinger

## I-3 L'effet de la température

Il est clair, au vu de ce qui précède, que la température joue un rôle primordial dans le comportement des métaux. C'est ainsi que certains phénomènes qui sont thermiquement activés vont être passés en revue. Le fluage et la relaxation en sont parmi les plus importants.

La figure I-9 montre la sensibilité de la réponse du cuivre recuit vis-à-vis de la température ( $\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$ ). Le matériau devient de plus en plus mou avec l'augmentation de la température.

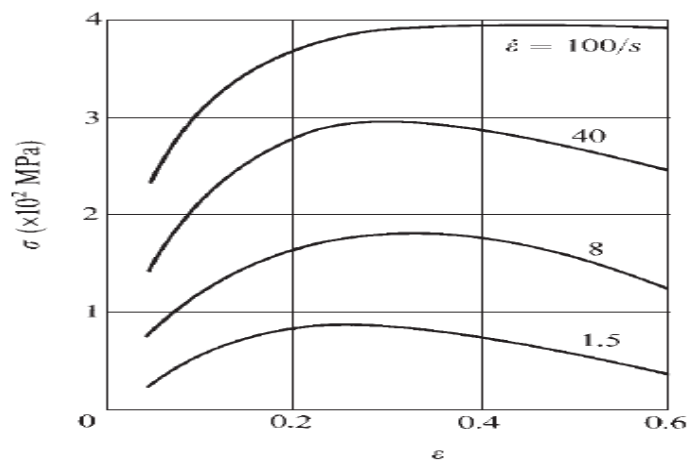


**Figure I-9** : Courbe de contrainte-déformation en traction à différentes températures

[Chakrabarty, 2006]

## I-4 Effet de la vitesse de déformation

Si les essais sont réalisés à des intervalles de temps normaux en température ambiante, les propriétés mécaniques de l'acier et d'autres matériaux réfractaires sont indépendantes de la vitesse de déformation. Toutefois, cette vitesse joue un rôle important dans les essais sur les matériaux malléables et dans les essais prolongés sur les aciers, cuivre et autres métaux (figure I-10). Cet effet est d'autant plus activé avec une température élevée. Ceci illustre le fait que la déformation plastique des métaux durs, dans les conditions normales, n'est pas relié au mouvement thermique des atomes.



**Figure I-10** : Effet de la vitesse de déformation : Acier EN25 à 1000° C [Chakrabarty, 2006]

### I-5 Modélisation du comportement uniaxial

Afin d'étudier la réponse des structures, il est nécessaire de modéliser leur comportement et ce l'idéalisant, i.e., en avançant certaines hypothèses simplificatrices sur le comportement réel négligeant certains aspects non nécessaires à l'usage auquel la structure en question est vouée.

C'est ainsi que le même matériau constituant la structure étudiée pourrait être considérée comme étant élastique, élastique parfaitement plastique, élastoplastique avec écrouissage.

#### a. Modèle élastique parfaitement plastique (figure I-11a)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} && \text{pour } \sigma < \sigma_Y \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_Y}{E} + \lambda && \text{pour } \sigma = \sigma_Y \end{aligned} \quad (I.3)$$

Où  $E$  est le module d'Young,  $\lambda$  est un scalaire positif.

Ce modèle est utilisé pour l'acier structural à l'état limite.

#### b. Modèle avec écrouissage linéaire (figure I-11b)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} && \text{pour } \sigma \leq \sigma_Y \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_Y}{E} + \frac{1}{E_T} (\sigma - \sigma_Y) && \text{pour } \sigma > \sigma_Y \end{aligned} \quad (I.4)$$

Où  $E_T$  est le module tangent.

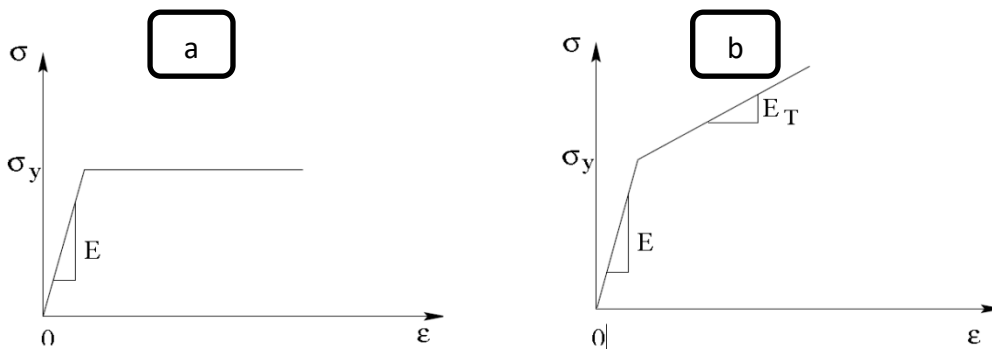
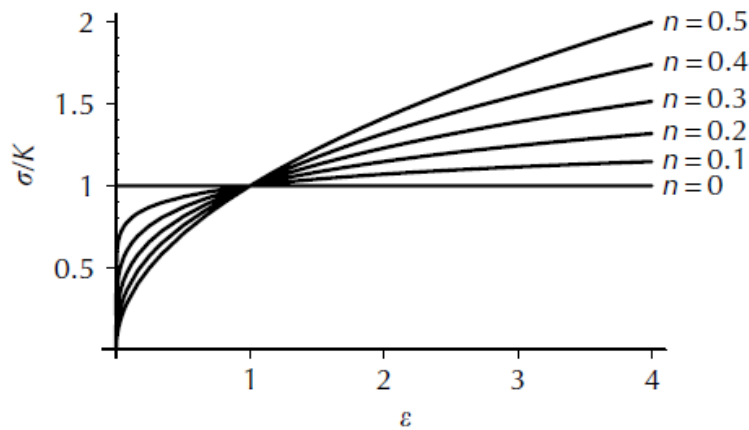


Figure I-11 : Modèles élastoplastiques a) parfait b) avec écrouissage linéaire

**c. Modèle avec écrouissage exponentiel (figure I-12)**

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon && \text{pour } \sigma \leq \sigma_Y \\ \sigma &= K \varepsilon^n && \text{pour } \sigma > \sigma_Y \end{aligned} \quad (I.5)$$

Où  $K$  est un coefficient de résistance et  $n$  est un exposant décrivant l'intensité de l'écrouissage compris entre 0 et 0.5.



**Figure I-12 :** Modèle avec écrouissage exponentiel

**d. Le modèle de Ramberg-Osgood (figure I-13)**

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + a \left( \frac{\sigma}{b} \right)^n \quad (I.6)$$

Où  $a, b$  et  $n$  sont des paramètres du matériau.

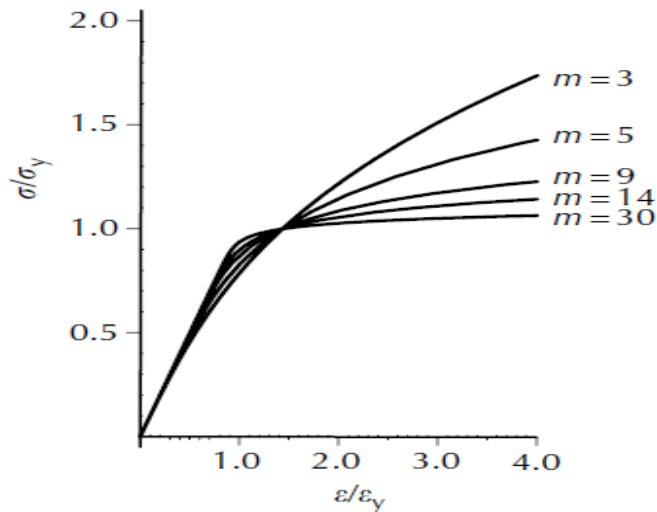
Il est exprimé, également, sous la forme :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = \frac{\sigma}{\sigma_Y} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^m \quad (I.7)$$

Où  $\alpha = \frac{E (\sigma_Y)^{m-1}}{K^m}$  et  $m = \frac{1}{n}$

La figure I-13 montre cette relation pour  $\alpha = 3/7$ .

Ce modèle est tiré en reliant la déformation à la densité de dislocation au niveau macroscopique [Lemaitre & Chaboche, 1985].



**Figure I-13:** Modèle de Ramberg-Osgood

## I-6 Plasticité tridimensionnelle

Après avoir passé en revue les notions de plasticité unidimensionnelle, le passage à la plasticité tridimensionnelle est effectué dans ce qui suit. Il s'agirait d'introduire une généralisation desdites notions, à savoir, la limite d'élasticité où l'on parlerait de surface de charge (ou critère de rupture) et la notion d'écrouissage.

### I-6-1 Surface de charge

Il prend la forme suivante pour les matériaux non frictionnels isotropes indépendants de la pression hydrostatique comme les métaux, contrairement aux géomatériaux :

$$f(J_2, J_3) = 0 \quad (I.8)$$

Où  $J_2$  et  $J_3$  sont les deux invariants du déviateur de contrainte  $\sigma'$  donnés par :

$$J_2 = \frac{1}{2} tr(\sigma'^2) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (I.9)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} tr(\sigma'^3) = \frac{1}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki}$$

Plusieurs critères ont été proposés se basant sur la contrainte de cisaillement.

### I-6-1-1- Les critères pour les matériaux métalliques insensibles à la pression hydrostatique

#### a. Critère de Tresca

Le plus ancien en date est le critère de Tresca (1864) ou critère du cisaillement maximale qui exprime que la limite est atteinte si la contrainte de cisaillement maximum atteint une valeur critique  $k$ . Il s'écrit pour un matériau parfaitement plastique :

$$\tau_{\max} = \text{Max} \left( \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right) = k \quad (\text{I.10})$$

Où  $k$  est déterminé à partir d'un essai uniaxial. Il est représenté, dans l'espace des contraintes principales, par un prisme hexagonal régulier d'axe (1,1,1) (figure I-14)

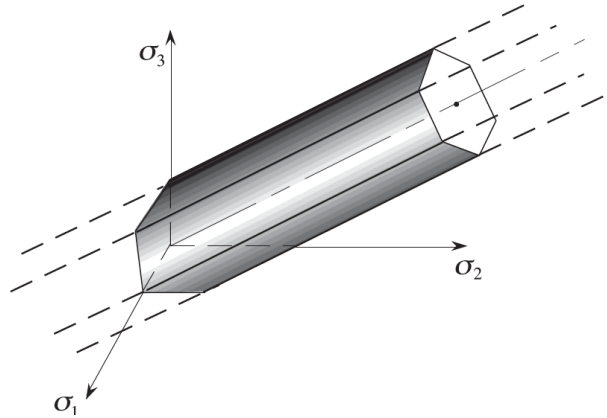


Figure I-14 : Le critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales

#### b. Critère de Von-Mises (1913) (cisaillement octaédrique)

Il s'agit d'utiliser la contrainte octaédrique ou l'énergie de déformation en distorsion au lieu de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2} = \frac{2}{3} k \quad (\text{I.11})$$

Où  $k$  est une constante du matériau et représente la contrainte limite dans un essai de cisaillement pur.

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (\text{I.12})$$

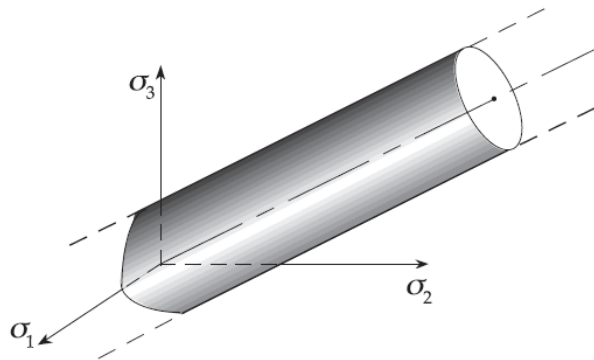
D'où sous forme polynomiale (en fonction des contraintes principales) :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2 \quad (\text{I.13})$$

Dans un essai uniaxial, la limite d'élasticité est atteinte lorsque  $\sigma_1 = \sigma_0$  ( $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  étant nulles) ce qui implique que :

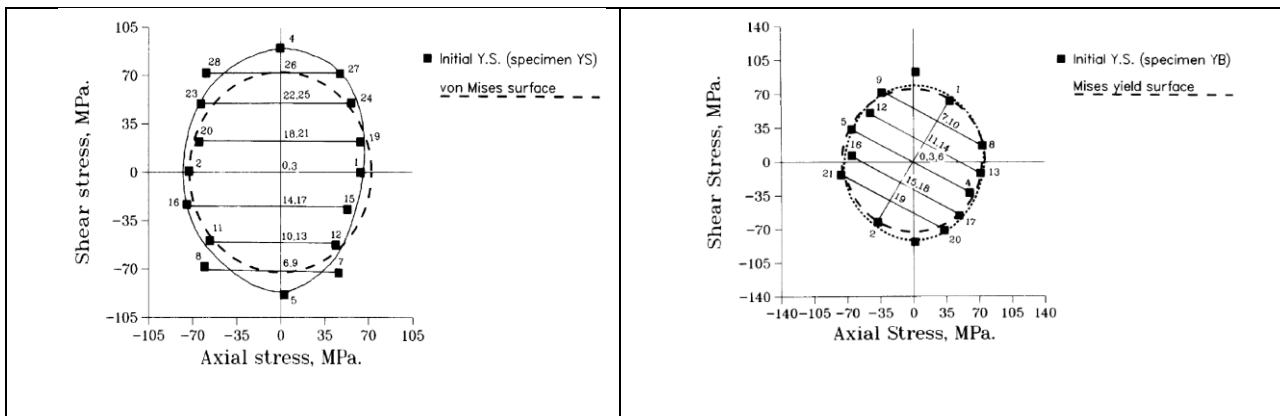
$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \tag{I.14}$$

Ce critère est représenté dans l'espace des contraintes principales par un cylindre circulaire droit de rayon  $k\sqrt{2}$  et d'axe (1,1,1) :



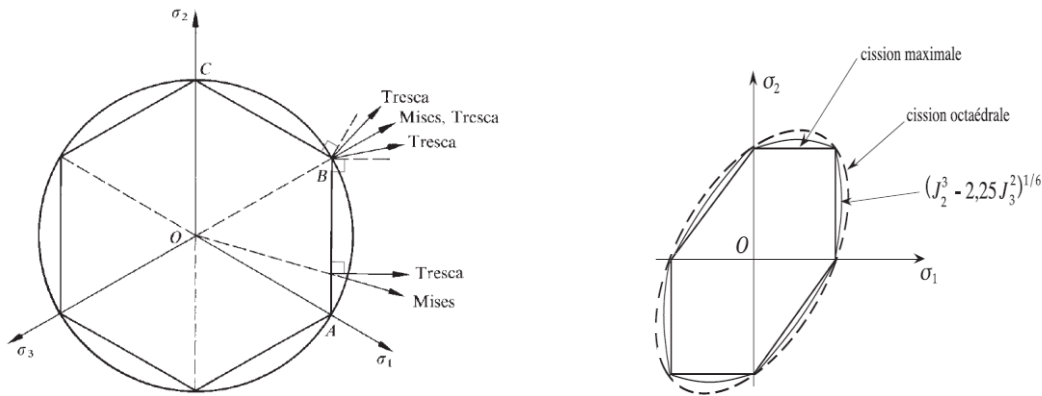
**Figure I-15 :** Le critère de Von-Mise dans l'espace des contraintes principales

La représentation des deux critères montre bien que le critère de Tresca est nettement plus conservatif que le critère de Von Mises (figure I-16). Expérimentalement, ce dernier représente mieux le critère de plasticité initial [Bui (1970), Wu & Yeh, 1991].



**Figure I-16 :** Comparaison entre les surfaces de charge initiales de l'acier 304 SS AISI recuit de Von Mises et expérimentale : a) l'éprouvette avec une prédéformation en torsion ; b) l'éprouvette avec une prédéformation combinée [Wu & Yeh, 1991]

Un autre critère proposé par Drucker (1962) où le cisaillement effectif est proportionnelle à  $(J_2^3 - 2.25J_3^2)^{1/6}$  est un cas intermédiaire entre les deux critères comme le montre la figure I.17 :



**Figure I-17 :** Représentation des SDC dans l'espace des contraintes principales

Les expressions précédentes peuvent être modifiées pour prendre en compte l'érouissage :

$$\text{Max} \left( \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right) = k(\xi) \quad (\text{I.15})$$

Où  $\xi$  représente l'ensemble des paramètres d'érouissage.

## I-6-1-2 Les critères pour les matériaux sensibles à la pression hydrostatique $\sigma_h$

Qui sont les matériaux frictionnels comme le béton, le sol, les roches...

### a. Critère de Mohr-Coulomb

Ce critère est généralement utilisé pour les sols, il est exprimé par la relation suivante :

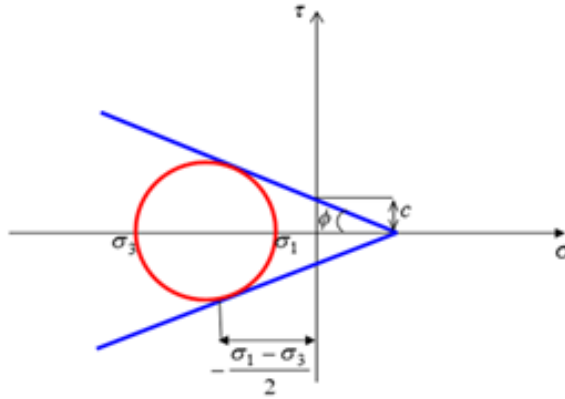
$$\tau = f(\sigma) \quad (\text{II.16})$$

Il est basé sur les cercles où la théorie développée par Mohr suppose que la rupture du matériau survient quand le cercle de Mohr est tangent à la courbe intrinsèque représentée dans le plan des contraintes de Mohr (contrainte normale  $\sigma$ , contrainte tangentielle  $\tau$ ) par l'équation suivante :

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{II. 17})$$

Où :  $\varphi$ : angle de frottement interne.

$c$  : Cohésion du matériau.



**Figure I-18** : Représentation du critère dans le plan de Mohr

- Les inconvénients de critère de Mohr-Coulomb sont :
  - Ne prend pas en considération la valeur de la contrainte intermédiaire  $\sigma_2$  dans les calculs.
  - La surface de charge est concave.

### b. Critère de Drucker-Prager

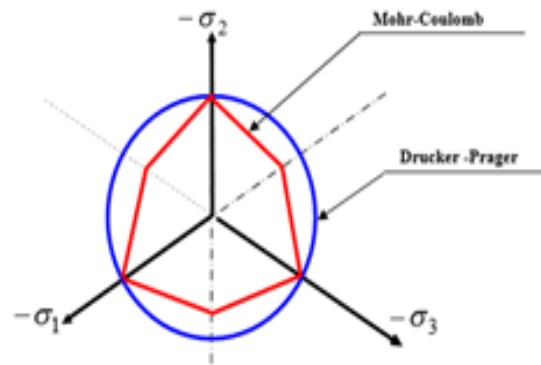
Drucker-Prager (1952) représente une approximation du critère de Mohr-Coulomb comme une modification du critère de Von-Mises. Il est généralement utilisé pour le béton.

Le critère s'exprime dans le repère de contraintes principales comme :

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k' \quad (\text{I.18})$$

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  : étant le premier invariant du tenseur de contraintes.

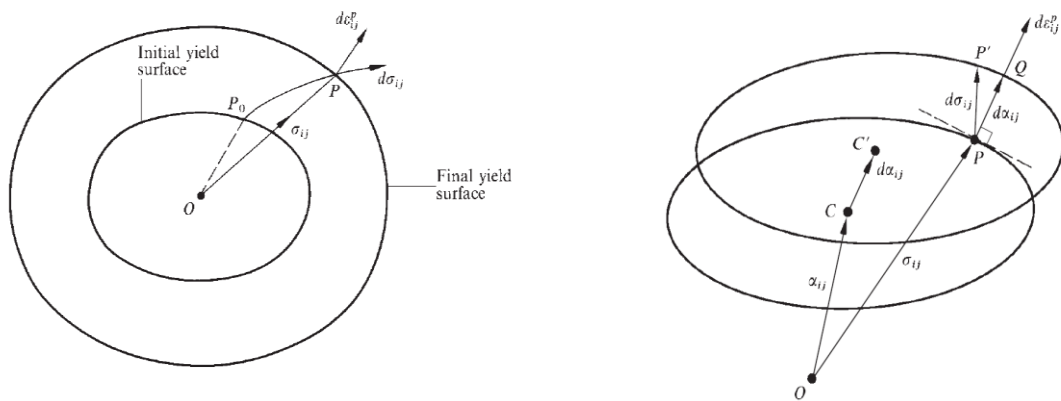
$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$  : étant le deuxième invariant du tenseur déviatorique.



**Figure I-19:** Représentation de critère de Mohr-Coulomb et celui de Drucker-Prager dans le repère des contraintes principales.

### I-6-2 L'écrouissage

Comme il est déjà mentionné précédemment, la notion d'écrouissage par déformation (strain-hardening ou work-hardening) en tridimensionnelle prend les formes isotropes, cinématique ou combinée. Des travaux ont montré que la SDC pourrait se transformer par distorsion [Wu et Yeh, 1991, Vincent, 2004, Rokhgireh et Nayebi, 2012].



**Figure I-20 :** Représentation de l'écrouissage dans l'espace des contraintes : a) isotrope

b) cinématique

## I-7 Modélisation incrémentale

Les modèles précédents sont incapables de prendre en compte la dépendance du comportement plastique de l'histoire de chargement. Par conséquent, ces modèles sont limités aux cas de chargements monotones. Pour les problèmes impliquant des déchargements et chargements inverses, les modèles incrémentaux doivent être utilisés.

### I-7-1 Concepts de base

Lors d'un chargement sur un matériau ou sur une structure, plusieurs aspects doivent être mis en lumière :

- 1- Quel type de déformation a eu lieu ? est-ce une déformation élastique ou une déformation anélastique ?
- 2- Dans le second cas, il faut déterminer le signe de la déformation anélastique,
- 3- Eventuellement, dans le cas d'un matériau écrouissable, définir le processus d'évolution du domaine d'élasticité,
- 4- Et à cette fin, enregistrer l'histoire de la déformation plastique origine de cette évolution du domaine d'élasticité,
- 5- De surcroît, pendant la déformation élastoplastique, la condition selon laquelle l'état de contrainte doit rester toujours sur les frontières du domaine d'élasticité doit être imposée.

La théorie de plasticité est fondée sur les concepts suivants :

- 1- Critère de charge,
- 2- Règle d'écoulement,
- 3- Règle d'écrouissage,
- 4- Paramètres d'écrouissage,
- 5- Condition de consistance.

#### a. Critère de charge

L'état élastique est défini comme étant l'état où l'état de contrainte est situé à l'intérieur du domaine d'élasticité (surface de charge). L'état plastique est celui situé sur les frontières du même domaine.

Si un incrément  $d\sigma$  est imposé sur un état de contrainte plastique  $\sigma$  qui se meut vers l'extérieur du domaine d'élasticité, à cause de  $d\sigma$ , alors il y a chargement (la déformation élastique et plastique changent). Dans le cas contraire, où l'état de contrainte se meut vers l'intérieur du domaine d'élasticité, il y a déchargement et seule la déformation élastique intervient. La distinction est faite à l'aide d'un critère de chargement. A ce titre, il faut définir une fonction  $f$  telle que :

$$\begin{aligned} f < 0 & \quad \text{Etat élastique} \\ f = 0 & \quad \text{Etat plastique} \end{aligned} \tag{I.19}$$

Cette fonction est appelée fonction de charge. La condition  $f=0$  désigne limite d'élasticité ou seuil de plasticité.

Le critère de chargement s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} f = 0 \text{ et } df > 0 & \quad \text{chargement (comportement élastoplastique)} \\ f = 0 \text{ et } df < 0 & \quad \text{déchargement (Etat élastique)} \end{aligned} \tag{I.20}$$

La surface représentant cette fonction est convexe. Ce qui est vérifié expérimentalement et à l'aide du principe du travail plastique maximal [Hill, 1950].

### b. Règle d'écoulement

La déformation plastique a lieu lorsque l'état de contrainte actuel  $\sigma$  avec l'incrément de charge  $d\sigma$  produisent un état  $\sigma+d\sigma$  à l'extérieur du domaine élastique. Les observations expérimentales montrent que le signe de  $d\varepsilon^p$  (l'incrément de déformation plastique) coïncide avec celui de  $d\sigma$ . On introduit un potentiel plastique  $g$  tel que :

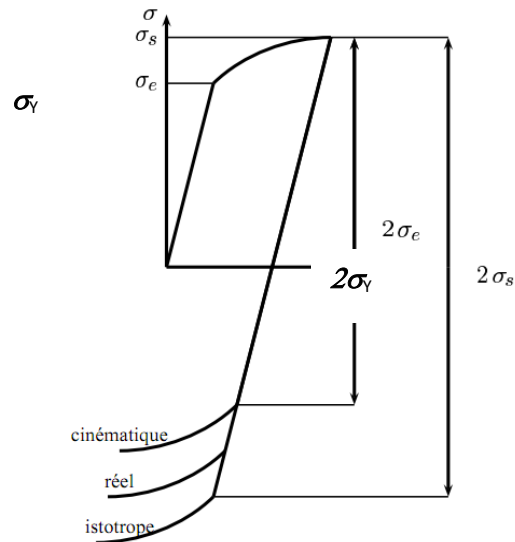
$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \tag{I.21}$$

avec  $d\lambda$  un scalaire non négatif appelé multiplicateur plastique à déterminer à l'aide de la condition de consistance  $\dot{f} = 0$ .  $d\varepsilon^p$  est, alors, perpendiculaire à la surface du potentiel plastique. Cette relation est dite *règle de normalité* qui découle du postulat de stabilité de Drucker [Chen, 1994].

Si  $f \equiv g$  on parle, alors, de la plasticité associée. Les matériaux ainsi définis sont dits « matériaux standards généralisés ».

**c. Règle d'écroissage**

Il s'agit de déterminer la dépendance fonctionnelle de la limite d'élasticité de l'histoire de chargement plastique. On distingue deux types d'écroissage : isotrope et cinématique comme vu précédemment. Il est, parfois, utile de combiner les deux types pour mieux représenter le comportement réel du matériau (figure I-21).



**Figure I-21 :** Comportement élastoplastique avec écroissage combiné

En uniaxial, la fonction de charge est écrite sous la forme :

$$f(\sigma, X) = (\sigma - X)^2 - \sigma_0 \tag{I.22}$$

Pour l'écroissage cinématique.

Où  $X$  est appelée contrainte de retour (back stress en terminologie anglo-saxonne).

$$f(\sigma, k) = \sigma^2 - k^2 \tag{I.23}$$

Pour l'écroissage isotrope.

Où  $k$  désigne l'évolution de la taille du domaine d'élasticité.

Pour un écroissage combiné :

$$f(\sigma, X) = (\sigma - X)^2 - k^2 \quad (\text{I.24})$$

### d. Paramètre d'écrouissage

Deux hypothèses sont, d'habitude prise. L'une est que le taux d'écrouissage est fonction du travail plastique total par unité de volume. La seconde est celle qui le prend fonction de la déformation plastique équivalente. En général, les deux mesures ne donnent pas les mêmes résultats sauf pour un matériau isotrope et homogène avec le critère de Von Mises. Le paramètre le plus utilisé est la déformation plastique effective (ou cumulée) pour l'écrouissage isotrope définie par :

$$\varepsilon_p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p : \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p} d\tau \quad (\text{I.25})$$

Et une variable cinématique notée  $\boldsymbol{\alpha}$ .

### e. La condition de consistance (ou de cohérence)

Pendant la déformation plastique, un état de contrainte reste sur les frontières du domaine d'élasticité ( $f > 0$  impossible). En d'autres termes, le domaine d'élasticité doit changer pour que l'état actuel reste sur les frontières du domaine lorsque le matériau subit une déformation élastoplastique.

Mathématiquement ceci s'exprime par :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\kappa}} d\boldsymbol{\kappa} = 0 \quad (\text{I.26})$$

Où  $\boldsymbol{\kappa}$  représente les variables ou paramètres d'écrouissage.

L'écriture d'une loi de comportement élastoplastique doit découler de toutes ces considérations. L'enjeu le plus important est la capacité de pouvoir décrire l'évolution de la surface de charge à l'aide des modèles d'écrouissage isotrope, cinématique ou combiné avec ou non prise en compte de la distorsion de cette surface. Le chapitre II traitera de ces aspects.

## I-8 Comportement du béton et de béton armé en élasticité

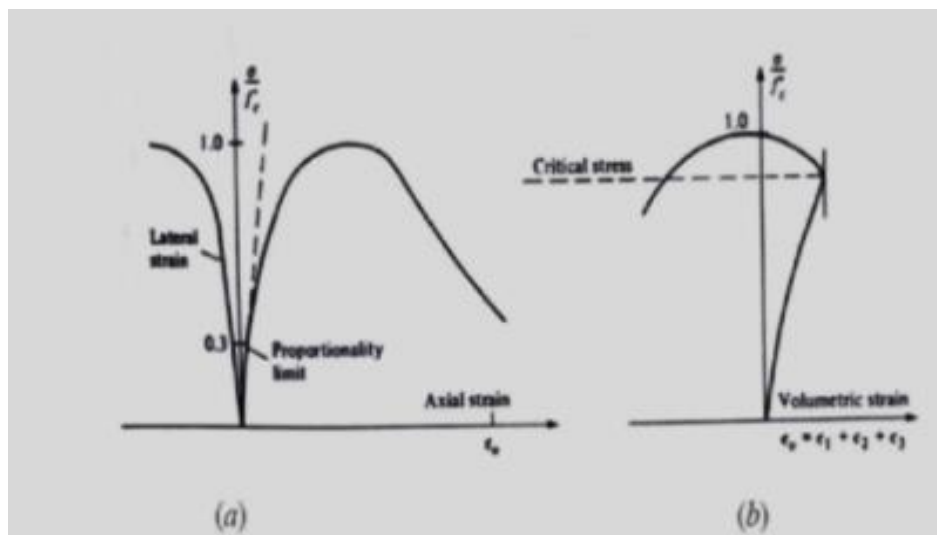
### I-8-1 Comportement uni-axial du béton

#### I-8-1-1 Les essais de compression uniaxiale

Le béton est un matériau qui résiste beaucoup plus à la compression, sa réponse uniaxiale à certain chargement monotone est contrôlée par l'évolution des divers systèmes de fissures. L'essai de compression uni axial est un essai qui a été largement étudié pour connaître la résistance à la compression du béton.

La figure (I-22a) illustre la relation typique contrainte-déformation pour le béton soumis à une compression, où ce dernier a un comportement élastique quasi-linéaire jusqu'à environ  $30\%f'_c$ . Au-dessus de ce point, la courbe montre une augmentation graduelle de courbure jusqu'à environ  $0.75f'_c$  à  $0.9f'_c$ . La courbe contrainte-déformation continue de décroître jusqu'à ce que l'écrasement se produise à une certaine déformation ultime  $\epsilon_u$ .

La figure (I-22b) : représente le développement de la déformation volumétrique ( $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ ) en fonction de la contrainte. Au début la variation de volume est presque linéaire jusqu'à environ  $0.77f'_c$  à  $0.9f'_c$ . A ce point, la direction de variation de volume est inversée, ce qui entraîne une dilatation volumétrique au voisinage ou à  $f'_c$ . Pour la déformation volumétrique minimal  $\epsilon_v$ , la contrainte est appelée « contrainte critique » [Richart et all, 1929].

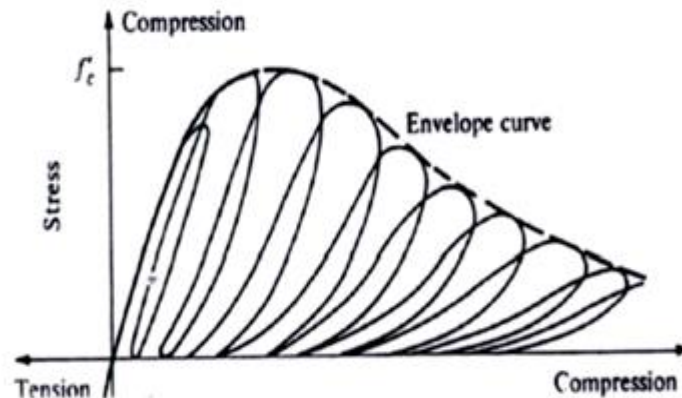


**Figure I-22:** Comportement du béton en compression simple vs. Déformation axiale, latérale et volumétrique [Chen, 1982]

Pour la courbe contrainte- déformation représenté dans la figure (I-23), on constate pour une contrainte dans le domaine allant jusqu'à environ  $30\%$  de  $f'_c$ , les fissures existant dans le béton avant chargement restent pratiquement inchangées ce qui indique que l'énergie interne

## Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

disponible nécessaire pour créer des nouvelles surfaces de microfissures. La contrainte d'environ 30% de  $f'_c$ , a été appelé début de fissuration localisée et a été considérée comme limite d'élasticité [Kotsovos et Newman, 1977].



**Figure I-23** : Comportement cyclique du béton en compression uniaxial

[Karsan and Jirsa, 1969]

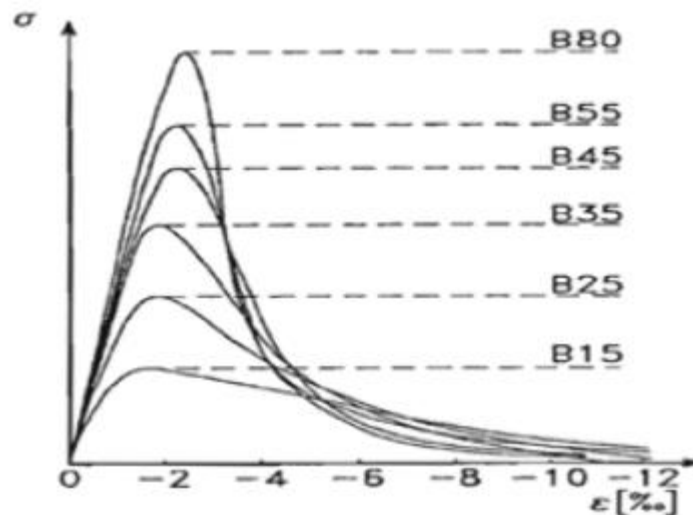
Pour une valeur de contrainte variant entre 30 et 50% de  $f'_c$ , on voit la propagation des fissures de liaison à cause de la concentration de contraintes aux pointes de fissure mais les fissures de mortier restent négligeables.

Si la contrainte atteinte une valeur entre 50 et 75% de  $f'_c$ , quelques fissures à la surface d'agrégats proches commencent approfondir sous la forme de fissures de mortier. En même temps, d'autres fissures d'adhérence continuent de croître lentement. Les fissures continuent à se propager avec une vitesse décroissante jusqu'à leur longueur finale pour des charges constantes. Si les contraintes de compression passent 75% de  $f'_c$ , les fissures les plus larges atteignent leur longueur critique. Alors, la vitesse de diffusion des fissures augmente et le système devient instable. On appelle 75% de  $f'_c$  le début de propagation de rupture ou de contrainte critique instable car il correspond à la valeur minimale de contrainte volumétrique.

Si nous déchargeons dans la partie de contraintes entre 50 et 75% de  $f'_c$ , la courbe de déchargement devient non linéaire. La figure (I-23) présente la courbe de chargement-déchargement qui forme une petite boucle. Cette courbe est assez parallèle à la tangente initiale de la courbe originale. Cependant, pour le déchargement supérieur à 75% de  $f'_c$ , les courbes présentent une non-linéarité plus importante. On peut observer une dégradation significative de la rigidité. Le rechargement montre que les propriétés de rigidité du matériau ont changé complètement.

## Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

La faiblesse du béton près de  $f'_c$  est généralement causée par des microfissures qui traversent le mortier. Si la contrainte de compression continue à augmenter, les dommages au matériau béton continuent à s'accumuler, et le béton entre dans la partie descendante de sa courbe contrainte-déformation, une région marquée par l'apparition de fissures macroscopiques.



**Figure I-24:** La courbe de compression de contraintes-déformations

[Wischer ,1978]

La figure (I-24) montre que le module initial d'élasticité du béton dépend fortement de la résistance à la compression. Au lieu des données d'essai réelles, le module d'élasticité initial  $E_0$  peut être calculé avec précision à partir de la formule empirique [American concrete Institute, 1977].

$$E_0 = 33w^{1.5}\sqrt{f'_c} \quad (\text{psi}) \quad (\text{I.27})$$

Avec  $w$  : est le poids de béton.

$f'_c$  : La résistance à la compression uniaxiale.

Le coefficient de poisson de béton sous chargement de compression uni axial varie entre 0.15 et 0.22 et reste constant jusqu'à 80% de  $f'_c$  comme la montre la figure (I-25) qui représente la variation de coefficient de poisson avec des différentes valeurs de  $f'_c$ .

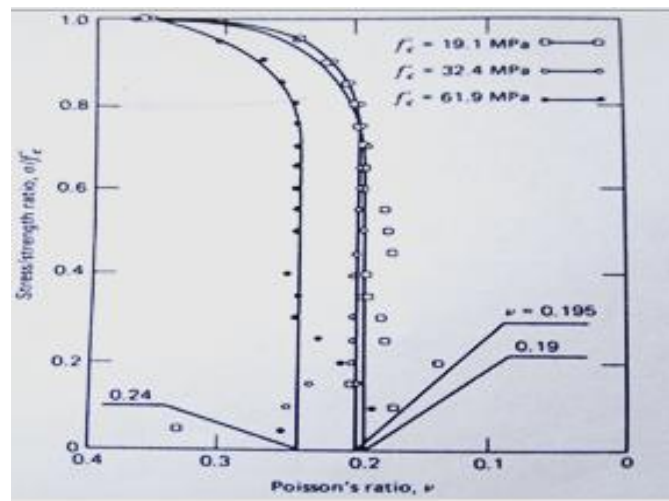


Figure I-25 : Relation entre contrainte- déformation,  $\sigma/f_c'$ , et le coefficient de poisson,  $\nu$

## I-8-1-2 Les essais de traction uniaxial

Le comportement mécanique du béton en traction est moins étudié que leur comportement en compression à cause de son comportement quasi-fragile. Des essais indirect de type flexion trois points sont réalisées pour étudié le comportement en traction lorsque l'essai de traction simple est difficile à réaliser.

La figure (I-26) montre les courbes contrainte-déformation du béton en traction uniaxiale. Toutes les courbes sont presque linéaires jusqu'à un niveau de contrainte relativement élevé. La forme des courbes présente de nombreuses analogies avec les courbes de compression uniaxiale figure (I-26).

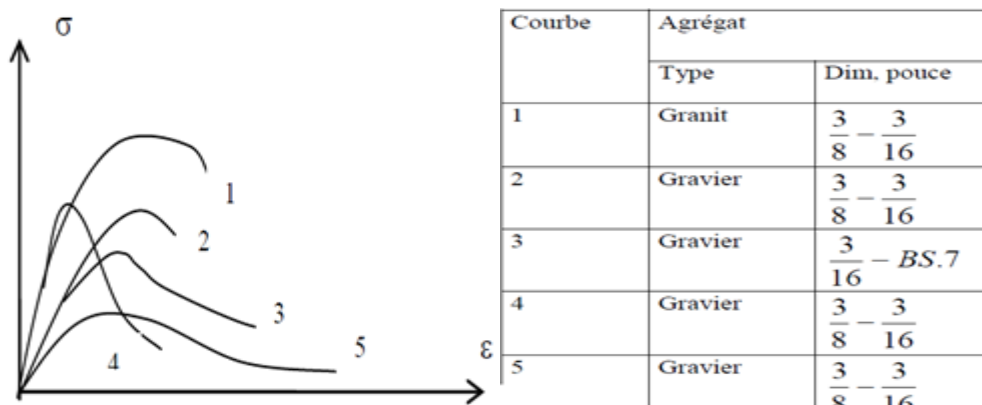
Pour des contraintes inférieures à 60% de la résistance à la traction uniaxiale  $f_t$ , la création de nouvelles microfissures est négligeable. Ce niveau de contrainte correspondra à une limite d'élasticité. Si on passe ce niveau, les microfissures de liaison commencent à croître. On peut s'attendre à ce que l'intervalle de propagation stable de fissures soit relativement court. Une valeur raisonnable pour l'apparition d'une propagation instable de la fissure sera donc d'environ 75% de  $f_t$  [Welch, 1966; Evens et Marathe, 1968].

La direction de propagation de la fissure pour la traction uniaxiale est perpendiculaire à la direction de la contrainte. La croissance de chaque nouvelle fissure réduira la zone de charge disponible et cette réduction entraînera une augmentation des contraintes aux pointes de fissure critique.

A partir de la propagation rapide des fissures, il est difficile de suivre la partie descendante de la courbe contrainte-déformation dans un essai expérimental.

# Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

Le rapport entre la résistance à la traction uniaxiale et la résistance à la compression  $\frac{f_t}{f_c}$  peut varier considérablement, mais il est compris, généralement, entre 0.05 et 0.1 [Hugh et Chapman 1966]. Le module d'élasticité sous traction uniaxiale est un peu plus élevé et le coefficient de Poisson est un peu inférieur par rapport à la compression uniaxiale.



**Figure I-26 :** Courbe contrainte-déformation sous traction uniaxiale avec différents types d'agrégats [Chen, 1982]

## I-8-2 Comportement biaxial du béton

Une grande quantité de recherches a été faite sur les propriétés mécaniques du béton en chargement biaxial.

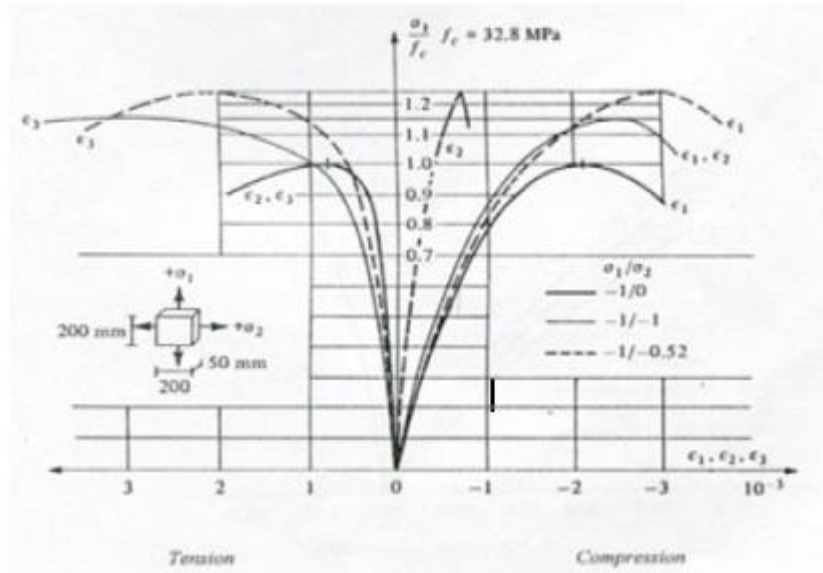
Les premières expériences ont porté principalement sur la résistance du béton. Des données expérimentales considérables sont maintenant disponibles concernant la résistance, les caractéristiques de déformation et le comportement de microfissuration du béton soumis à des contraintes biaxiales. Des études sur ce sujet sont trouvées dans [Kupfur, 1969], [Nelissen, 1972], [Tasuji et al, 1978].

La figure (I-27) montre des courbes expérimentales typiques de contrainte-déformation pour le béton sous compression bi-axiale [Kupfur et al, 1969].

Tout d'abord, les courbes contraintes-déformations sont linéaires jusqu'à 30% de la contrainte de rupture. Ce point est généralement considéré comme la limite élastique. Au-delà de cette valeur, les courbes sont non linéaires. La non linéarité est plus prononcée au niveau du pic de contrainte. Dans le cas d'un état de contrainte biaxiale, on remarque l'existence d'une branche descendante. Ce qui n'est pas le cas pour un état de contrainte traction-compression où on remarque que les déformations ultimes sont environ trois fois plus importantes pour un état de

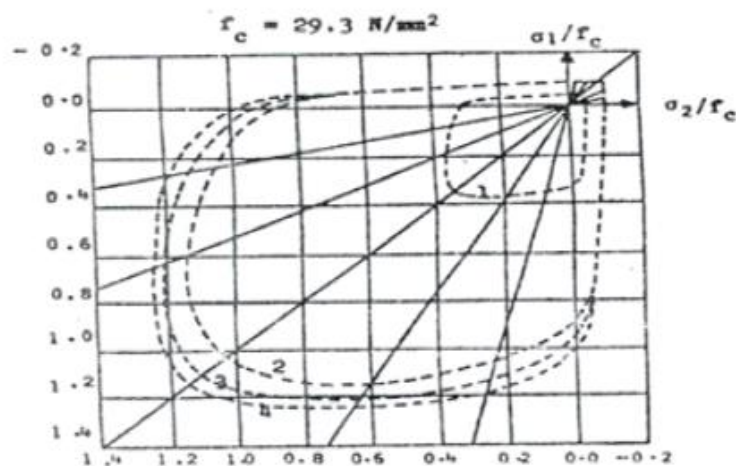
## Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

contraintes compression-compression que pour un état de contraintes traction-compression. En déduit que le béton possède un comportement ductile sous contraintes de confinement. Par contre il présente un comportement fragile en présence de la traction.



**Figure I-27 :** Courbe contrainte –déformation dans la zone de compression biaxiale. [Kupfur et all.,1969]

La figure (I-28) montre le développement des résistances ultime de différents bétons obtenues par [Kupfur et Gestle ,1973]. On voit que la résistance à la compression maximale augmente pour l'état de compression biaxiale. Une augmentation de résistance maximale d'environ 25% est obtenue à un rapport de contrainte de ( $\sigma_1 / \sigma_2 = 0.5$ ) et elle est réduite à environ 16% à un état de compression biaxiale égale ( $\sigma_1 / \sigma_2 = 1$ ). Sous traction-compression biaxial, la force de compression diminue presque linéairement à mesure que la contrainte de traction appliquée augmente [Chen, 1988].



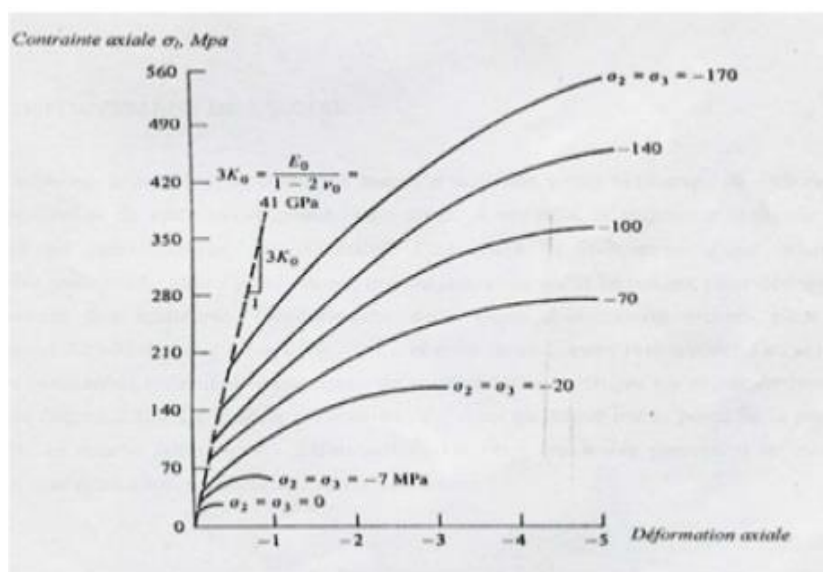
**Figure I-28:** Enveloppe de critère de rupture du béton.

[Kupfur et all..., 1969]

## I-8-3 Comportement triaxiale du béton

Les essais triaxiaux sur le béton sont très difficiles ; c'est pour cette raison les résultats sont rapportés dans la littérature. Les essais qui existent ont été conduits sous des contraintes de compression.

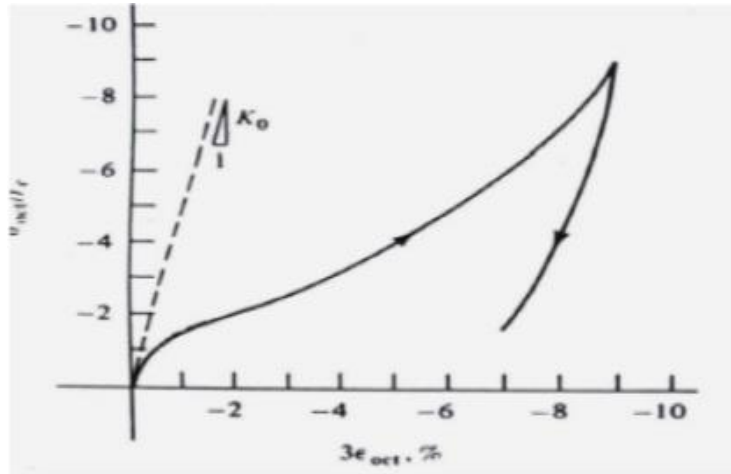
Des essais triaxiaux ont été effectués par [Chen, 1982] à des niveaux des contraintes de confinement élevées figure (I-29). Ces courbes montrent que le béton peut se comporter comme un matériau quasi-fragile.



**Figure I-29:** Relation contraintes-déformations du béton [Chen, 1982]

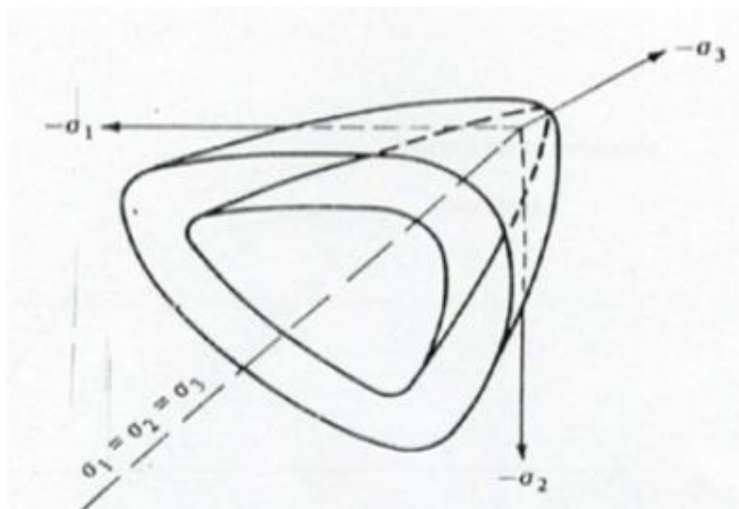
## Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

La figure (I-30) montre le comportement contrainte-déformation non-linéaire sous charge de compression hydrostatique. La courbe de pression hydrostatique- volumétrique-déformation présente une inversion de courbure. Lors de déchargement, la pente est presque constante et très proche de la pente pendant le chargement initiale.



**Figure I-30** : Essai de compression hydrostatique du béton [Chen ,1982]

La figure (I-31) représente la résistance ultime du béton sous un état de contraintes triaxiales. A partir de tous les essais sur la résistance triaxiale du béton. On remarque que ce critère ressemble à un cône qui possède une base plus au moins triangulaire à des basses contraintes de confinement qui évoluent vers une forme plus au moins circulaire à de hautes contraintes de confinement.



**Figure I-31** : Résistance ultime du béton sous un état de contraintes triaxiales [Chen, 1982]

# Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

Pour étudier le comportement plastique du béton, tous les ingrédients déjà expliqués dans la théorie de plasticité vont être utilisés. Le plus important est le critère de rupture :

## I-9 critère de rupture

La forme générale d'une surface de rupture d'un matériau isotrope peut être exprimée par :

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (\text{I.28})$$

$$f(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad (\text{I.29})$$

Les données expérimentales définissent la forme explicite de la fonction de rupture.

Dans la littérature, l'essai de résistance du béton est bien documenté, [Kurfur et al, 1969] et [Tasuji et al, 1978] couvrent toute la zone de contrainte biaxial. Mais dans l'état de contrainte triaxiale nous citons les résultats de [Mills et Zimmerman, 1970] ; [Launy et Gachon, 1970] et [Gerstle et al, 1978], entre autres. Les caractéristiques essentielles d'une surface de rupture sont clairement indiquées par les données expérimentales disponibles (figure I-32).

Le béton possède une surface de rupture avec des courbes méridiennes, ce qui montre que la pression hydrostatique augmente la capacité de cisaillement du matériau (figure I-32a). Le point de départ de méridien c'est le point de rupture de traction hydrostatique, et s'ouvre dans la direction de l'axe hydrostatique négatif.

La figure (I-32b) montre une courbe transversale de la surface de rupture dans le plan déviatorique. La surface de rupture de béton possède des courbes méridiennes : le méridien de traction,  $\rho_t$ , méridien de cisaillement  $\rho_s$ , et le méridien de compression  $\rho_c$ , qui correspond à  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ , respectivement. La forme des traces est presque triangulaire pour les contraintes faibles de compression et a une forme pré-circulaire pour des contraintes de compression très élevées.

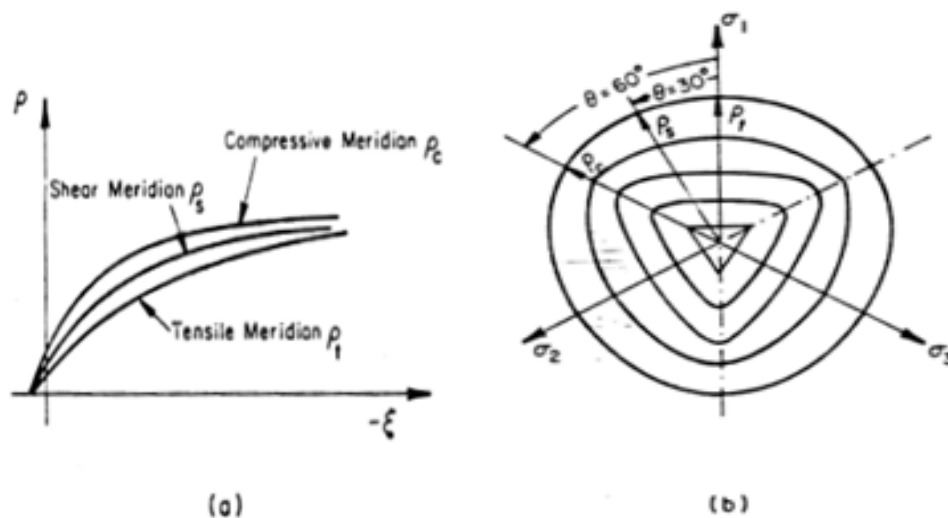


Figure I-32 : a) Le méridien de la surface de rupture, b) Section dans le plan déviatorique

# Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

On expose, très brièvement, les 3 modèles de comportement non-linéaire du béton à savoir : Le modèle d'Ottosen à 4 paramètres, Le modèle de quatre paramètres Hsieh- Ting- Chen et le modèle de Willam-Warnke à 5 paramètres :

## I-9-1 Le modèle d'Ottosen à 4 paramètres

Ottosen, 1977 a proposé un critère comprenant trois invariants des contraintes ( $I_1, J_2, \theta$ )

$$f(I_1, J_2, \theta) = aJ_2 + \lambda\sqrt{J_2} + bI_1 - 1 = 0 \quad (\text{I.30})$$

Avec :  $\lambda$  est la fonction de  $\cos 3\theta$  :

$$\lambda = \begin{cases} k_1 \cos\left[\frac{1}{3} \cos^{-1}(k_2 \cos 3\theta)\right] & \text{Pour } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(-k_2 \cos 3\theta)\right] & \text{Pour } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

Avec :  $a, b, k_1, k_2$  des constantes du matériau, qui peuvent être déterminé en se basant sur les quatre essais sur béton suivants :

1. La résistance à la compression uniaxiale  $f'_c$  ( $\theta = 60^\circ$ )
  2. La résistance à la traction uniaxiale  $f'_t$  ( $\theta = 0^\circ$ )
  3. La résistance à la compression biaxiale ( $\theta = 0^\circ$ )
- L'état de contrainte triaxial  $(\xi/f'_t, \rho/f'_c) = (-5, 4)$

Généralement, ce critère est valable pour un large domaine de combinaison de contrainte [Chen, 1994].

## I-9-2 Le modèle à quatre paramètres de Hsieh- Ting- Chen

Hsieh et al. , sont proposé une fonction de forme simple

$$\lambda(\theta) = b \cos \theta + c \quad (\text{I.32})$$

Où  $b, c$  des constantes de matériaux.

Avec :  $|\theta| \leq 60^\circ$

En remplaçant  $\lambda$  dans l'équation :

$$f(I_1, J_2, \theta) = aJ_2 + \lambda\sqrt{J_2} + bI_1 - 1 = 0 \quad (\text{I.33})$$

## Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

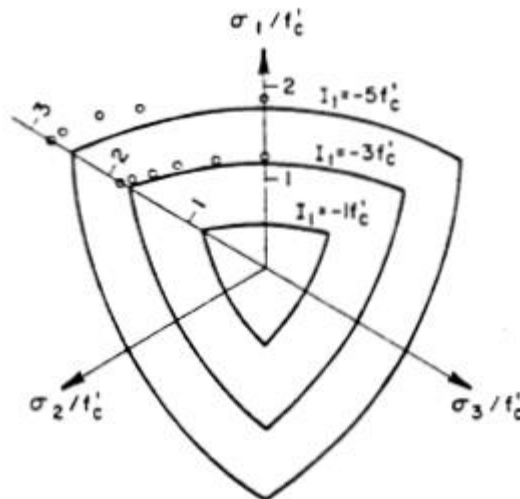
$$f(\xi, \rho, \theta) = a\rho^2 + (b \cos \theta + c)\rho + d\xi - 1 = 0 \quad (\text{I.34})$$

On détermine les quatre paramètres de modèle a, b et d par l'utilisation des essais biaxial de [Kurfur et al, 1969] et les essais triaxial de [Mills et Zimmerman, 1970], ces paramètres sont déterminé à partir des quatre zone de rupture suivantes :

1. La résistance à la compression uniaxial  $f'_c$
2. La résistance à la traction uniaxial ( $f'_t = 0.1f'_c$ )
3. La résistance à la compression biaxial  $f'_{bc} = 1.15f'_c$
4. La zone de la contrainte ( $\sigma_{oct}/f'_c, \tau_{oct}/f'_c$ )=(-1.95, 1.6)

### I.9.3. Le modèle de Willam-Warnke

Le modèle de 5(cinq) paramètres est illustré dans la figure I-33 :



**Figure I-33 :** Comparaison de critère de Hsieh- Ting – Chen avec les données triaxial dans le plan déviatorique, les cercle ouvert [Launay et al. , 1970]

Le méridien de compression expérimentale avec un parabole déviatorique sous les formes :

$$\sigma_m = a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2 \quad (\text{I.35})$$

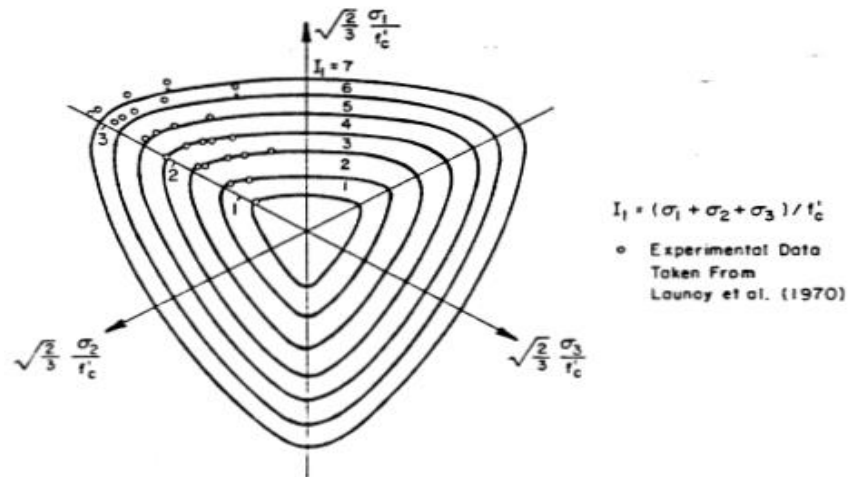
$$\sigma_m = b_0 + b_1\rho_c + b_2\rho_c^2 \quad (\text{I.36})$$

Avec :

$\sigma_m = \frac{I_1}{3}$  : Contrainte moyenne.

$\rho_t, \rho_c$  : Les composantes de contraintes parallèle à l'axe hydrostatique respectivement à ( $\theta = 0^\circ$ ) et ( $\theta = 60^\circ$ ).

Où :  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  sont des constants matériels.



**Figure I-34 :** Le modèle de Willam-Warnke à 5 (cinq) paramètres

On basant sur les essais biaxiaux de Kupfur et des autres essais triaxial, les 5 (cinq) paramètres de Willam-Warnke sont déterminés par les zones de rupture suivante :

1. La résistance à la compression uniaxiale  $f'_c$
2. La résistance à la traction uniaxiale  $f'_t = 0.1f'_c$
3. La résistance biaxial de compression  $f'_{bc} = 1.15f'_c$
4. La résistance à la compression biaxial de confinement  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$
5. La résistance à la compression biaxial de confinement  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$

Ce modèle de Willam-Warnke est implanté dans le code de calcul ANSYS.

A toutes ces difficultés relatives au comportement du béton en non-linéarité, il ne faut pas également, perdre de vue un problème lié au comportement des structures du béton qui est l'effet d'échelle qui se manifeste tant à l'échelle du matériau qu'à l'échelle de la structure.

## I-10 L'effet d'échelle

Il est bien connu que le comportement mécanique varie selon l'échelle d'étude prise. A cet effet, ce comportement à l'échelle de l'échantillon du matériau n'est pas identique à celui à l'échelle de la structure de fait de la non homogénéité du champ de contrainte au sein de la structure.

Plus encore, un effet d'échelle existe même entre des structures de différentes dimensions.

Cet effet d'échelle doit être, en principe, pris en compte pour avoir un « jugement de valeur » sur les résultats obtenus.

Pour l'effet d'échelle, on entend la dépendance des propriétés mécaniques d'une structure des dimensions de celle-ci.

Historiquement, le premier à relever cet effet d'échelle est [Leonardo Da Vinci], [Bazant, structure strength] en annonçant exagérément le résultat suivant :

« Parmi des cordes d'épaisseurs identiques, la plus longue est la moins solide ».

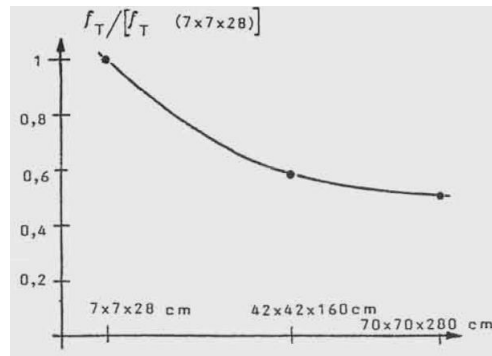
[Mariote, 1686] est allé plus loin, après avoir effectué des expériences sur des cordes de papier et d'étain, en annonçant le résultat suivant l'avènement de la théorie statique de l'effet d'échelle (ou de taille) :

« Une longue et une courte corde supportent toujours le même poids sauf si la plus longue d'entre elles peut comporter des zones défectueuses dans lesquelles elle briserait plus tôt que la corde courte »

[Griffiler, 1921] en élaborant la théorie de rupture des matériaux a également, relevé l'effet de taille. Sa conclusion est formulée comme suit :

« La faiblesse des matériaux isotropes est due à la présence de discontinuités ou de défauts. La résistance effective de matériaux peut être augmentée d'au moins 10 à 20 fois si ces défauts pouvaient être éliminés ».

[L'Hermitte, 1976] a effectué des essais de flexion 3 points sur des poutres de dimensions homothétiques. Ses résultats prouvent, bien, une dépendance des contraintes à la rupture des dimensions des poutres testées.



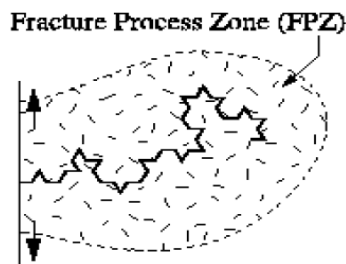
**Figure I-35 :** L'effet d'échelle sur poutres en flexion 3 point [l'Hermite, 1973]

Avec :

$f_T$  : Contrainte élastique calculée à la rupture en fibre tendue.

A l'heure actuelle, 3 (trois) théories de base pour prendre en compte l'effet de taille en mécanique des solides [Z. Bazant, 2005] :

1. Théorie statistique des résistances aléatoires de Weibull [Weibull, 1939].
2. Théorie de la redistribution de contraintes et relâchement d'énergie de rupture provoqué par des fissures large [Bazant, 1984].
3. Théorie liée à l'aspect fractal de la fissure [Carpintri, 1994].



**Figure I-36 :** Surface de rupture [Crapintri, 1989]

La structure fractale est traduite par des résultats dépendant de l'échelle d'observation selon une loi de type puissance avec un exposant caractéristique de ces derniers.

Une structure est dite fractale, si elle présente des irrégularités à toutes ses échelles d'observation tant au niveau microscopique et macroscopique.

## I-11 Conclusion

On constate d'après le comportement du béton sous différents états de sollicitation qu'il présente deux types de comportement selon l'état de contraintes. Sous des contraintes de traction, il est caractérisé par une rupture brutale accompagnée de petites déformations. Alors que, sous des contraintes de compression, il présente une rupture ductile.

## Chapitre I : Comportement élastoplastique du béton

---

Par contre, l'acier s'écoule une fois que la contrainte limite élastique est dépassée. Cette propriété aide les ingénieurs pour introduire l'acier sous forme d'armature dans le béton. Celles-ci jouent un double rôle dans la section du béton.

D'une part elles empêchent la propagation des fissures, améliorent la résistance à la traction du matériau béton armé, et d'autre part elles améliorent sa ductilité.

A l'issue de ce chapitre, il est clair que le comportement du béton est très complexe et que l'on ne peut pas prendre en considération tous les phénomènes liés à sa réponse non-linéaire. Des hypothèses simplificatrices de travail doivent être avancées.

Ceci sera évoqué dans le chapitre III, traitement de la modélisation.

# Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

## II-1-Introduction

Le béton est un matériau de construction qui contient un liant (ciment), de l'eau, du sable et des granulats. Ils sont très différents les uns des autres selon la nature, le pourcentage, le malaxage et la mise en œuvre. Donc il est important d'optimiser les proportions des divers constituants (ciment, eau, sable et gravies) de béton pour garantissant une bonne ouvrabilité et possédante après durcissement des bonnes caractéristiques mécaniques.

L'essai de flexion 4 point nous permet de connaître le mode de fissuration, le comportement non linéaire du béton et ainsi que le chargement correspondant à la rupture.

## II-2-Description des matériaux

Pour la confection du béton étudié dans la partie expérimentale de nos travaux nous avons utilisé le sable alluvionnaire et le gravier de Laghouat, du ciment Matine CPJ-CEM II /B 42.5N provenant des usines de M'sila et de l'eau potable.

### II-2-1-Analyses granulométriques

Le sable utilisé est un sable alluvionnaires (0/5) qui provient d'Oued M'ZI (Laghouat), le gravier calcaire utilisé est de classe (8/15) provienne de la carrière de concassage (OUAZZAN Laghouat).

L'analyse granulométriques des granulats est représentée dans les tableaux (II-1 et II-2) et la figure (II.1)

**Tableau II-1-Analyse granulométrique du gravier**

Tamis (mm)	Refus partiels (gr)	Refus cumulés (gr)	Refus cumulés (%)	Tamisa cumulé (%)
16	0.75	0.75	0.015	99.985
12.5	952.75	953.5	13.07	86.93
10	1700.57	2654.25	53.09	46.91
8	1750.75	4405	88.1	11.9
6.3	522.75	4927.75	98.56	1.44
5	26.75	4954.5	99.06	0.94
2.5	31.75	4986.25	99.75	0.25
fond	13.75	5000	100	0

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

Tableau II-2 : Analyse granulométrique du sable

Tamis (mm)	Refus partiels (gr)	Refus cumulés (gr)	Refus cumulés (%)	Tamisa (%)
5	0	0	0	100
2.5	131.43	131.43	6.57	93.43
1.25	137.17	268.6	13.43	86.57
0.63	303.25	571.85	28.6	71.4
0.315	558.9	1130.75	56.54	43.46
0.16	604.86	1735.61	86.76	13.24
0.08	156.47	1892.08	94.6	5.4
fond	105.73	2000	100	0

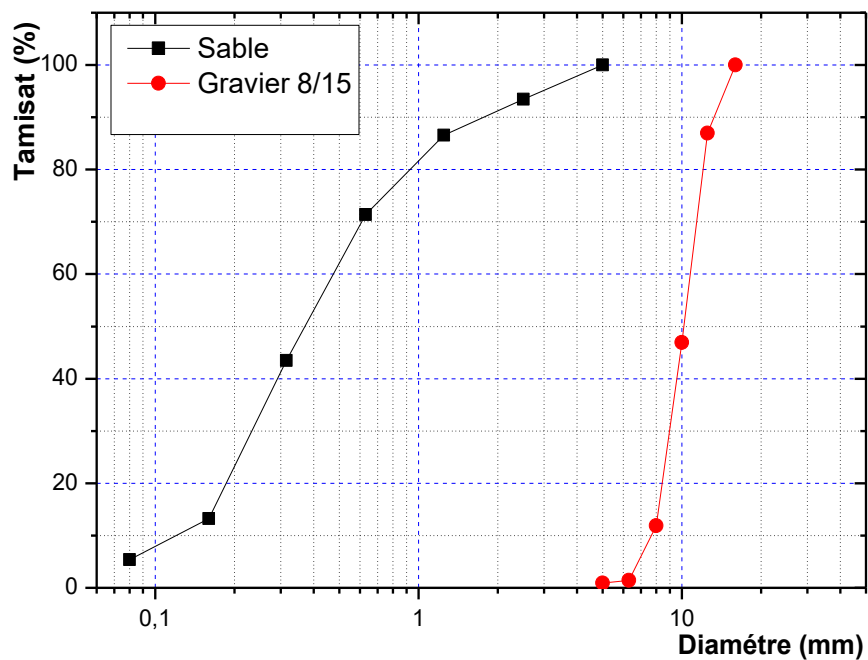


Figure II-1: Analyse granulométriques des granulats

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

Tableau II-3 : Les paramètres physiques de béton

	Masse volumique absolue (Kg/m <sup>3</sup> )	Coefficient d'absorption %	Classe vraie du ciment MPa
Ciment	3045	2	45
Gravier	2670	1	
Sable	2650	2	

### II-2-2-Composition du béton

L'étude de la composition d'un béton consiste à définir le mélange optimal des différents granulats dont on dispose ainsi que le dosage en ciment et en eau, afin de réaliser un béton dont les qualités soient celles recherchées pour la construction de l'ouvrage avec la prise en compte de deux critères :

- L'ouvrabilité désirée.
- La résistance mécanique souhaitée.

Dans le cadre de cette étude une maniabilité plastique (affaissement entre 5 et 9 cm) et une résistance à la compression de l'ordre de 25MPa sont visées.

Pour notre étude, la formulation du béton est élaborée selon la méthode de Dreux-Gorisse

La composition du béton trouvée pour 1 m<sup>3</sup> est présentée dans le tableau (II-4)

Tableau II-4: Composition de béton pour 1m<sup>3</sup>

Matériau	V (L)	Masse(Kg)
Ciment	115	350
Sable 0/5	300	795
Gravier 8/15	385	1028
Eau total	211.2	211.2
Eau efficace	185	185
Eau absorbé	26.2	26.2

### II-2-3-Caractéristiques du béton

Deux essais sont réalisées pour caractériser notre composition du béton ; l'essai à l'état frais pour évaluer la maniabilité et l'essai à l'état durci pour déterminer la résistance mécanique à la compression.

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

### II-2-3-1- Maniabilité

Pour caractériser la mise en œuvre de béton, nous avons réalisé l'essai d'affaissement au cône d'Abrams, cet essai nous a permis de trouver un affaissement de 7.5cm (Figure II-2)



Figure II-2 : L'essai de cône d'Abrams

### II-2-3-2- Résistances mécaniques

Conformément à la norme NFP18-406 l'essai de compression est effectué sur des éprouvettes cubiques de  $(10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3)$  conservées à l'eau. La résistance à la compression est obtenue aux échéances 7 et 28 jours à l'aide d'une presse hydraulique chargement de 0.5 MPa/s (Figure II-3). Les résultats trouvés sont regroupés dans le tableau (II-5)



Figure II-3 : L'essai d'écrasement des spécimens

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

Tableau II-5 : Les résultats des essais à la compression

	Spécimens	$F$ (KN)	La valeur moyenne de la contrainte ( $MPa$ )
7j	1	214.1	21.63
	2	227.8	
	3	207.1	
28j	4	374.8	36.38
	5	357.9	
	6	358.8	

### II-3-Analyse macroscopique de béton :

La figure (II-4a, b) représente deux photos de la surface béton prises à l'aide du MEB (figure II-4-a) et la seconde représentant la surface de rupture de la poutre (figure II-4-a).

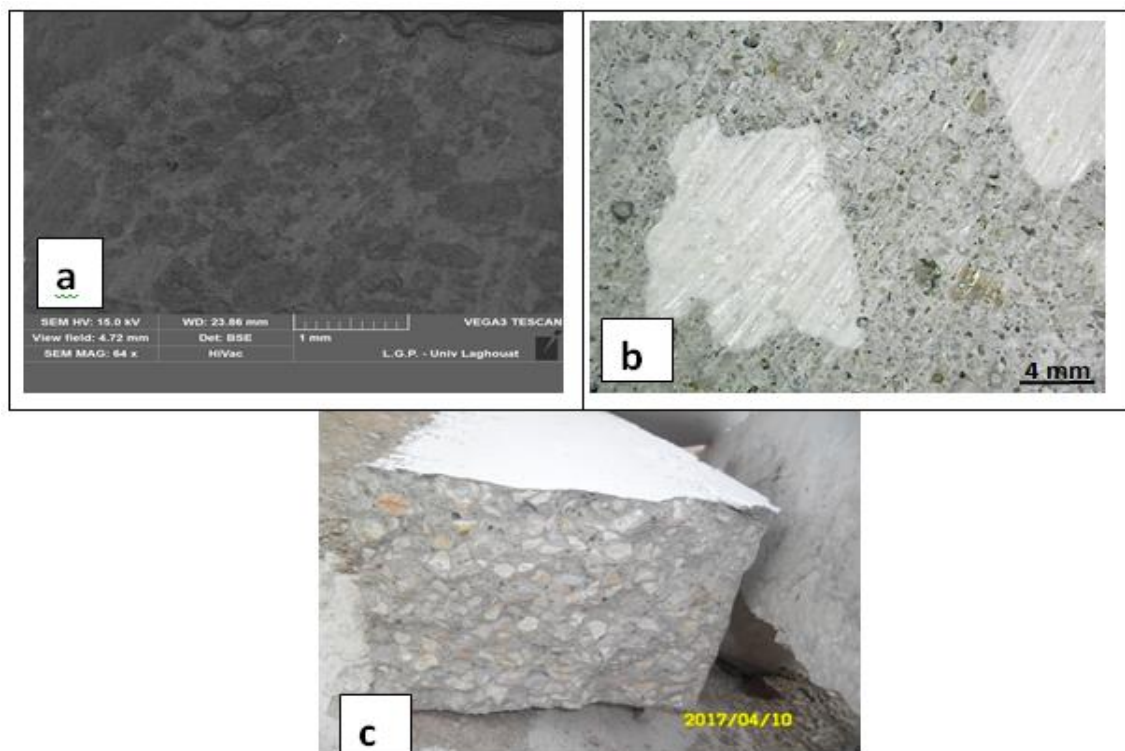


Figure II-4: a) Photo de MEB ,b) Surface de rupture

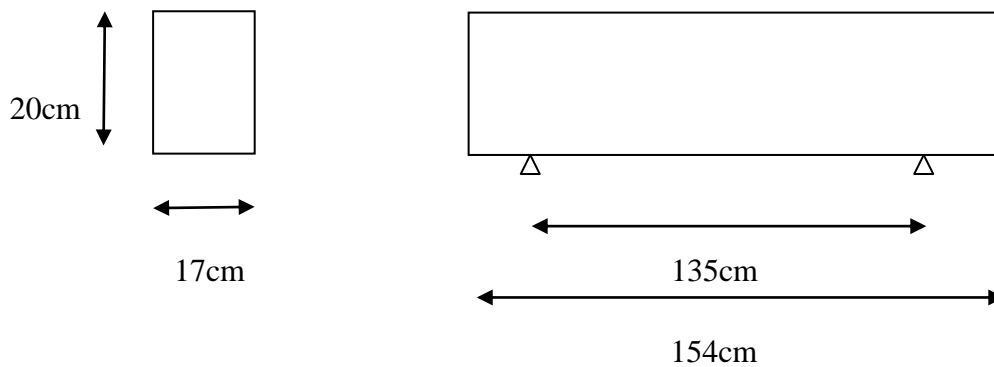
## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

Il est clair, de ces photos, que le béton a une structure fortement hétérogène. Ceci n'empêche pas de le considérer homogène et isotrope au niveau du VER.

### II-4- Détails constructifs des poutres étudiées

#### II-4-1-Coffrage

Pour minimiser l'effet d'échelle rencontré dans les structures en béton armé, les dimensions des poutres ont été choisies les plus proches possibles à la réalité, la géométrie de ces poutres est présentée à la figure (II-5).



**Figure II-5 :** La géométrie des poutres

Dans le cadre de cette étude nous avons réalisé 04 poutres (figures II-6)

- Deux poutres ferrillées (avec armatures)
- Deux poutres non ferrillées (sans armatures)



**Figure II-6:** Coffrage des poutres

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

### II-4-2-Ferraillage

Le ferraillage adopté est le même pour les deux poutres, soit 2HA12 en zone tendue, 2HA 10 en zone comprimée et 14HA8 pour les cadres transversaux. L'espacement entre les cadres est 10cm. (Figures II-7, II-8).

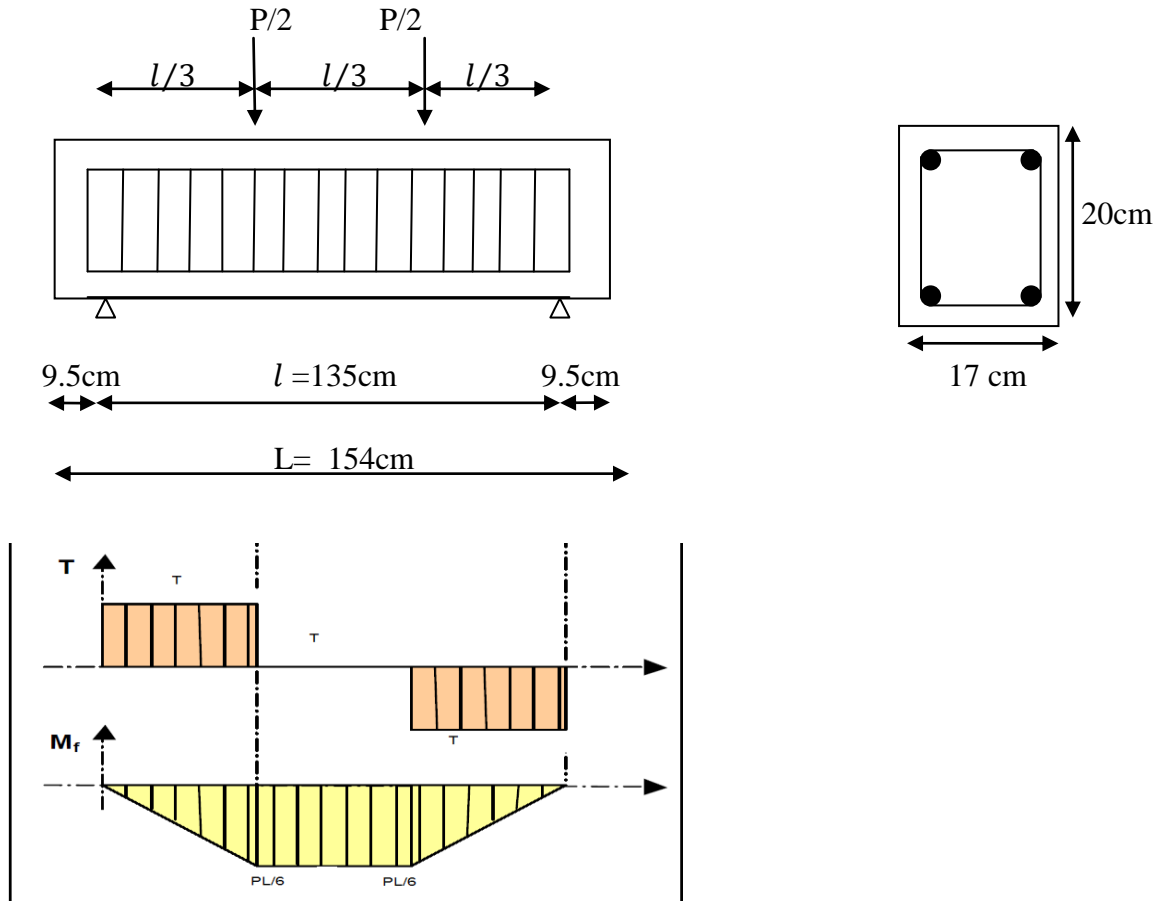


Figure II-7 : a) Schéma de ferraillage, b) Les diagrammes du moment fléchissant et l'effort tranchant.

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)



Figure II-8: Le ferrailage des poutres

### II-4-3-Coulage des poutres

Le malaxage des constituants est réalisé à l'aide d'une bétonnière de 50L de volume (figure II-9).

Les matériaux sont introduits comme suit : gravier, ciment sable. L'eau ne peut pas être ajoutée qu'après un premier malaxage à sec du mélange gravier ciment sable (4 min).



Figure II-9- Le malaxage des constituants à l'aide d'une bétonnière

Le béton est gâché dans un malaxeur à axe vertical pendant 10 minutes jusqu'à l'obtention d'un mélange plastique et homogène. Après le malaxage, on verse le béton dans le coffrage

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

(figure II-10) avec une vibration adéquate afin d'obtenir un béton de bon qualité (figureII.11).



**Figure II-10** : La mise en œuvre de béton dans les coffrages.



**Figure II-11** : La vibration de béton.

### II-4-4-Le décoffrage des poutres et la cure

Les poutres sont décoffrées après 24 heures. La cure de béton est la protection apportée pour éviter l'évaporation d'eau. Pour notre travail, la cure est réalisée à l'aide des toiles de jute qui sont humidifiées chaque jour (une fois par jour) après le décoffrage.

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)

### II-5-Essai de flexion 4 points

L'essai de flexion 4 points est un essai classique utilisé pour les matériaux fragiles. Il est similaire à l'essai de flexion 3 points avec l'avantage de ne pas positionner l'appui au niveau de la zone de rupture et permet de bénéficier d'une zone centrale dans laquelle le moment est uniforme. Ceci est en effet une limitation du système à 3 points ou l'appui central peut endommager la poutre et fausser les résultats. [Christian Nader, 2013].

La flexion provoque une distribution de contrainte, et détermine l'aptitude à la déformation et à la fissuration d'une structure posée sur deux appuis avec une application de deux efforts à une distance de  $l/3$ . On impose à une poutre une force, à une vitesse de chargement constante, et on mesure la déformation qu'oppose la poutre à cette force, ainsi la propagation et formation de la première fissure.

L'essai de flexion 4 points peut nous donner les valeurs de la force en fonction de la flèche dans des intervalles de temps bien précis.

#### II-5-1-Essais expérimentaux de béton

##### Description d'essai

Après une cure de 28 jours des poutres, on a réalisé l'essai de flexion 4 points (figure II-12)



**Figure II-12:** Essai de flexion quatre 4 points

Les essais de flexion ont été réalisés au laboratoire de génie civil à l'aide d'un bâti de flexion de capacité de 300 KN et un capteur de déplacement fixé à mi-portée de la poutre (figure II.13) piloté par un micro-ordinateur avec une vitesse de chargement de 400N/s pour les poutres armées et 200N/s pour les poutres non armée. Les appuis sont placés à 9.5cm du nu des poutres.



**Figure II-13:** La disposition de capteur de la flèche

Les 4 poutres ont été chargées en troisième et en quatrième points le long des poutres, ces points situés à 0,45 m à partir des appuis c'est-à-dire à un tiers de la portée ( $l/3$ ) de manière symétrique et monotone, jusqu'à la fissuration (II-14) (II-15), sous contrôle de la flèche dans des intervalles des temps constants.



**Figure II-14:** La propagation des fissures dans la poutre armée

## Chapitre II : Matériaux, structure et essais (flexion 4 points)



**Figure II-15 :** La rupture de la poutre non armée

Sous chargement, des fissures verticales et parallèles à la force apparaissent en partie centrale. Ceci est dû, évidemment, au moment fléchissant.

La figure (II-15) montre le mode de rupture de la poutre non-armée (une fissure large unique) qui est clairement fragile ce qui était prévu étant donné que le béton se comporte en matériau fragile en traction.

Pour le béton armé, à l'inverse, des fissures apparaissent réparties sur la partie tendue. À ce moment, le béton a donc cessé de résister en traction et c'est l'acier qui a pris le relais. Donc, les armatures s'opposent aux microfissures jusqu'à ce que l'acier de renfort cesse de développer une résistance où la structure rompra (figure II-14).

### II-6-Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons décrit la préparation des matériaux, la préparation des échantillons et ainsi les poutres. On a trouvé des bonnes caractéristiques (résistance à 28 jours, la résistance à 7 jours et la maniabilité) du béton qui correspond à une bonne formulation.

D'après l'essai de flexion quatre points, le béton armé possède un comportement ductile qui tend à retarder la propagation des fissures. Par contre le béton non armé a une faible résistance à la traction car il atteint une rupture brusque sous faible chargement.

Les fissures développées sont des fissures verticales, centrées et parallèles à la force de chargement qui sont le résultat du moment fléchissant. On s'aperçoit, également, qu'il n'y a pas eu de fissures obliques dues à l'effort tranchant du fait qu'elles ont été empêchées par les cadres positionnés de manière serrée.

Dans le chapitre suivant, la prise en main du logiciel ANSYS et la conduite de la modélisation ainsi que les résultats vont être détaillés.

### III-1 Introduction

ANSYS est un logiciel d'éléments finis. Il peut traiter des différents problèmes dans des différents domaines telle que : la mécanique, thermique, mécanique des fluides, électromagnétique, et analyse du champ électrique.

### III-2 Résolution d'un problème

La modélisation par élément finis présente une méthode numérique qui donne des solutions aux problèmes délicats à l'aide d'une analyse numérique par ANSYS.

ANSYS est un logiciel qui contient un ensemble des programmes de simulation d'ingénierie.

La création de modèle d'élément finis dans ANSYS nécessite à plusieurs tâches qui doivent être complétées pour que le modèle s'exécute d'une façon correcte.

L'analyse d'une structure par ANSYS comporte trois phases :

**III-2-1 Préprocessor** : dans cette étape, on définit le modèle d'élément finis et les facteurs environnementaux appliqués:

- a) Définir le type d'élément, les constantes réelles, les modèles des matériaux.
- b) Maillage d'élément.

**III-2-2 Solver** : analyse et solution des modèles des éléments finis :

- a) Appliquer les conditions aux limites et les charges.
- b) Solution.

**III-2-3 Postprocessor** : traitement dépouillement des résultats :

Il existe différents algorithmes de résolution pour traiter les problèmes éléments finis. On peut citer deux classes de méthodes :

- les méthodes de résolution directes.
- les méthodes itératives.

#### III-2-3-1 les méthodes de résolution directes

Les méthodes directes sont utilisées pour des systèmes de taille moyenne et le temps de calcul est sensiblement proportionnel au nombre d'inconnus.

Ces méthodes conduisent à la solution en un nombre fini d'opérations. Elles sont adaptées au mode de stockage de la matrice [K]. Si cette matrice est symétrique, généralement, la méthode

de décomposition de Choleski la plus utilisée. Si elle ne l'est pas, les logiciels recourent à la méthode d'élimination de Gauss.

### III-2-3-2 Les méthodes itératives

Ces méthodes sont utilisées pour des systèmes de grande taille, ou le traitement par la méthode directe sera insuffisant en termes de temps de calcul.

La solution approchée des méthodes itératives est atteinte en un nombre infini d'opérations convergeant vers la solution analytique. Donc, ces méthodes intègrent un critère d'arrêt, lorsque la solution approchée est suffisamment proche de la solution analytique (figure III-1)

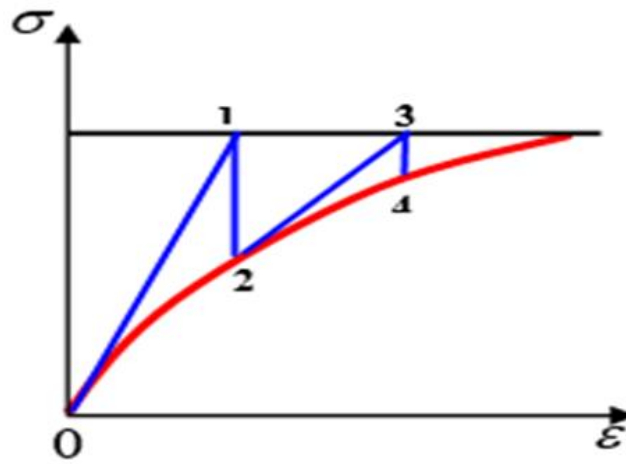


Figure III-1: Représentation de la méthode itérative initiale.

La méthode de Newton-Raphson pour la résolution des systèmes d'équations non-linéaires, étant donné que le comportement du béton de cette étude est considéré non-linéaire (comportement plastique), l'utilisation de la méthode des éléments finis conduit à un système d'équations non-linéaires qu'il est indispensable de résoudre en ayant recours aux méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations non-linéaire. La méthode la plus utilisée est la méthode de Newton-Raphson.

## III-3 Modélisation de la structure

### III-3-1 Poutre non-armée

Les structures étudiées consistent en une poutre en béton et une poutre en BA.

La poutre non-armée a été modélisée avec des éléments SOLID65. Cet élément est implanté dans ANSYS pour prendre en compte la rupture du béton (CONCRETE) selon un mode d'écrasement ou fissuration (crushing /cracking).

Cet élément possède huit nœuds avec 3 (trois) degrés de libertés (translation en x, y et z) pour chaque nœud (figure III-2).

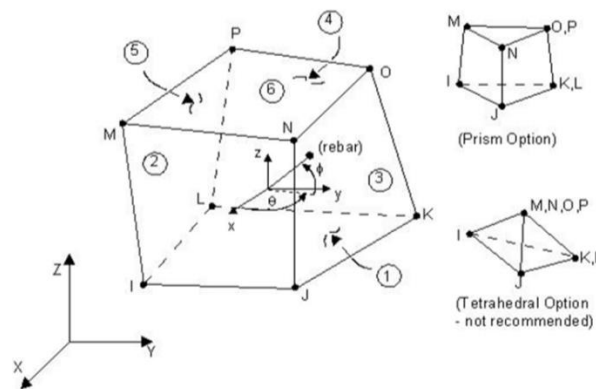


Figure III-2 : L'élément SOLID 65.

### III-3-2 Poutre armée

Cette structure est constituée de deux matériaux : béton et acier. Le béton est modélisé à l'aide de SOLID65 tandis que pour l'acier, ANSYS propose d'utiliser l'élément (LINK8) ou (LINK180). Dans notre étude, on a opté pour l'élément LINK180 qui est représenté sur la figure (III-3). Cet élément est un élément 3D à deux nœuds avec 3(trois) degrés de libertés pour chaque nœud: translation dans la direction x, y et z.

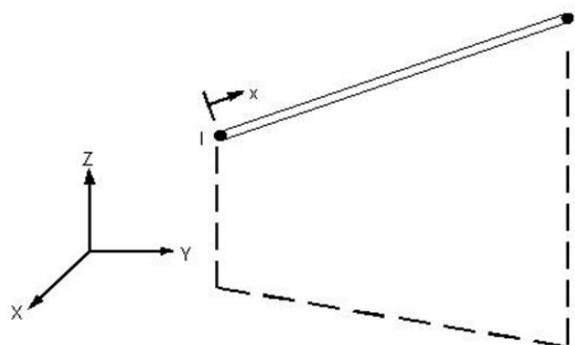
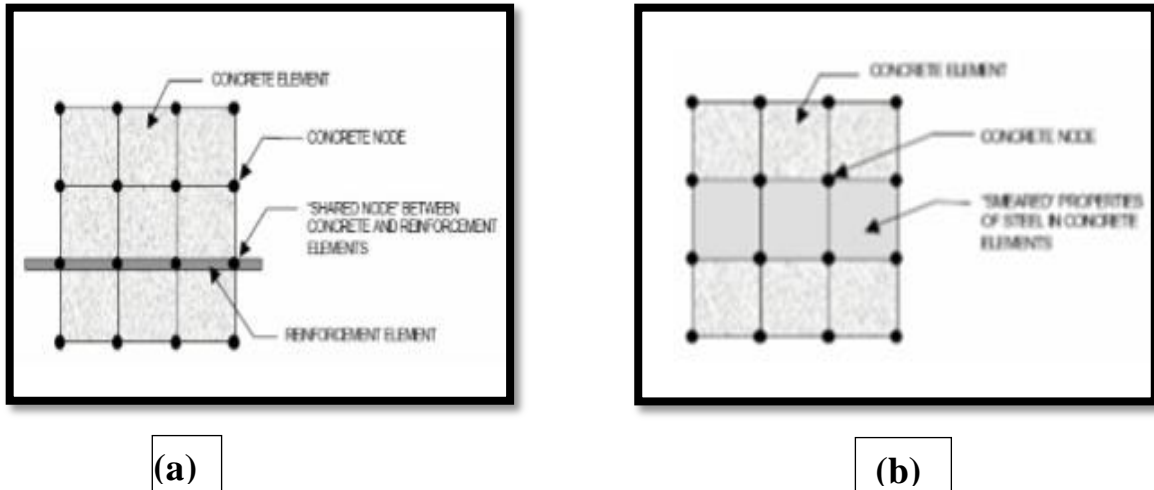


Figure III-3 : L'élément LINK 180.

### III-3-3 Modèle éléments finis de renforcement en aciers

Pour modéliser le renforcement en acier dans les modèles à éléments finis pour le béton armé, il existe deux approches qui sont traitées, qui sont présentées dans la figure (III-4) : le modèle discret, le modèle réparti (smeared) [Rashid, 1968].



**Figure III-4:** Modèles pour le renforcement dans le béton armé [Rashid, 1968]: a) discret, b) smeared.

La figure (III-4a) représente le renfort dans le modèle discret qui utilise des éléments de barre ou de poutre qui sont connectés à des nœuds de mailles de béton. Par conséquent, le béton et le maillage de renfort partagent les mêmes nœuds. L'inconvénient de ce modèle qu'il impose l'endroit de la fissuration (sur le côté de l'élément) et qu'il est, par conséquent, indispensable de refaire le maillage. Un autre inconvénient relevé par certains auteurs est la sensibilité vis-à-vis du maillage.

Le modèle réparti (figure III-4b) suppose que le renfort soit uniformément réparti dans tous les éléments en béton dans une région définie du maillage. Cette approche est utilisée pour les modèles à grande échelle.

### III-4 Déroulement de la modélisation selon le mode GUI (Graphical users interface)

Pour lancer ANSYS, il suffit de faire :

Windows Start Menu: **Pogramme** > **ANSYS12.0** > **Workbench** > **OK** (figureIII-5)

## Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

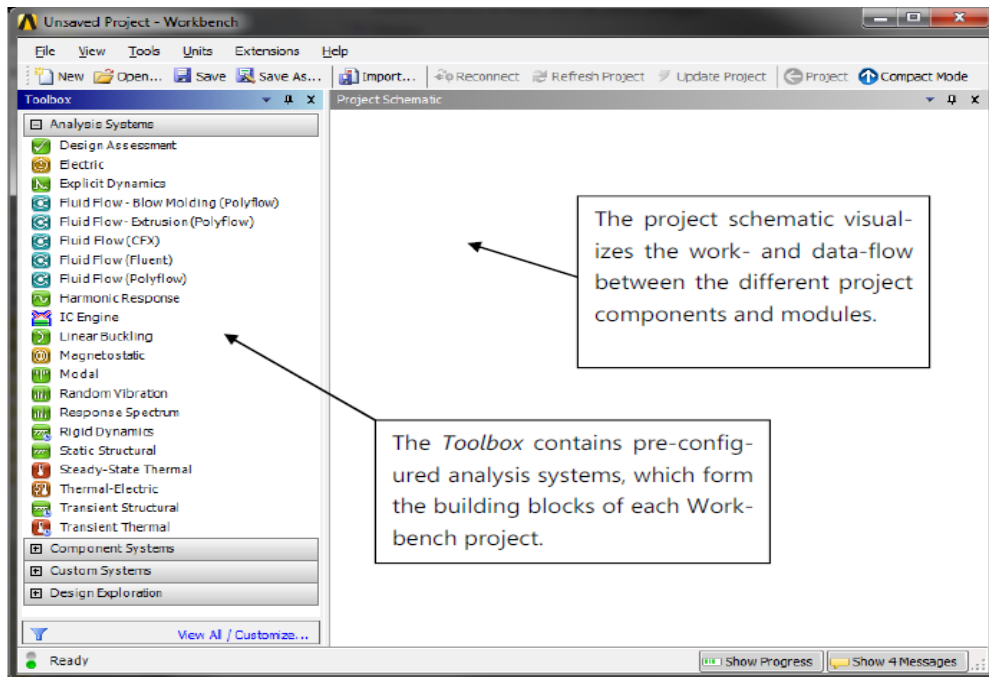


Figure III-5: L'interface d'ANSYS Workbench12.0

Pour créer un nouveau modèle d'analyse il faut de choisir **Static structural** (figure III-6)

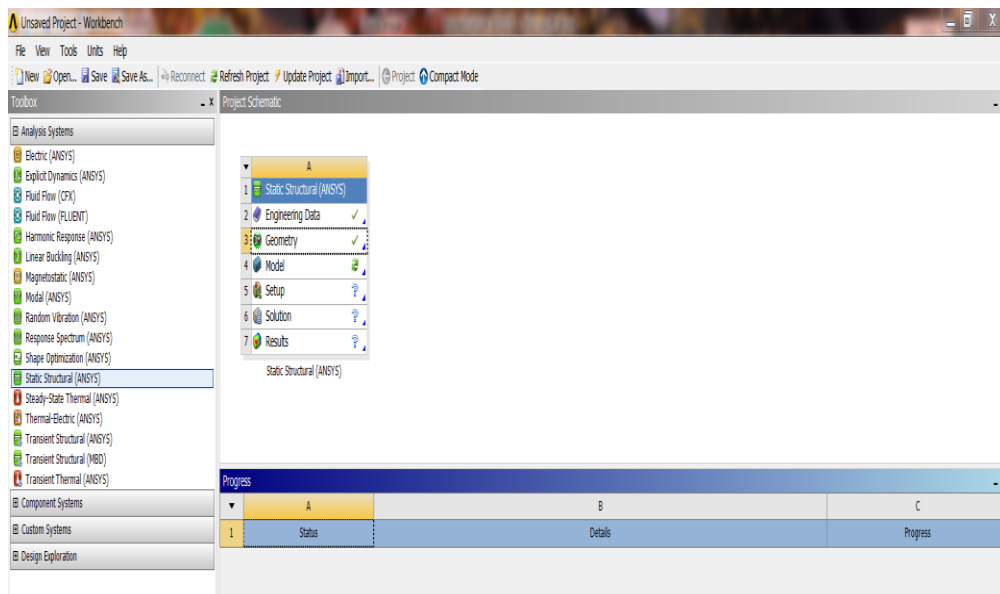
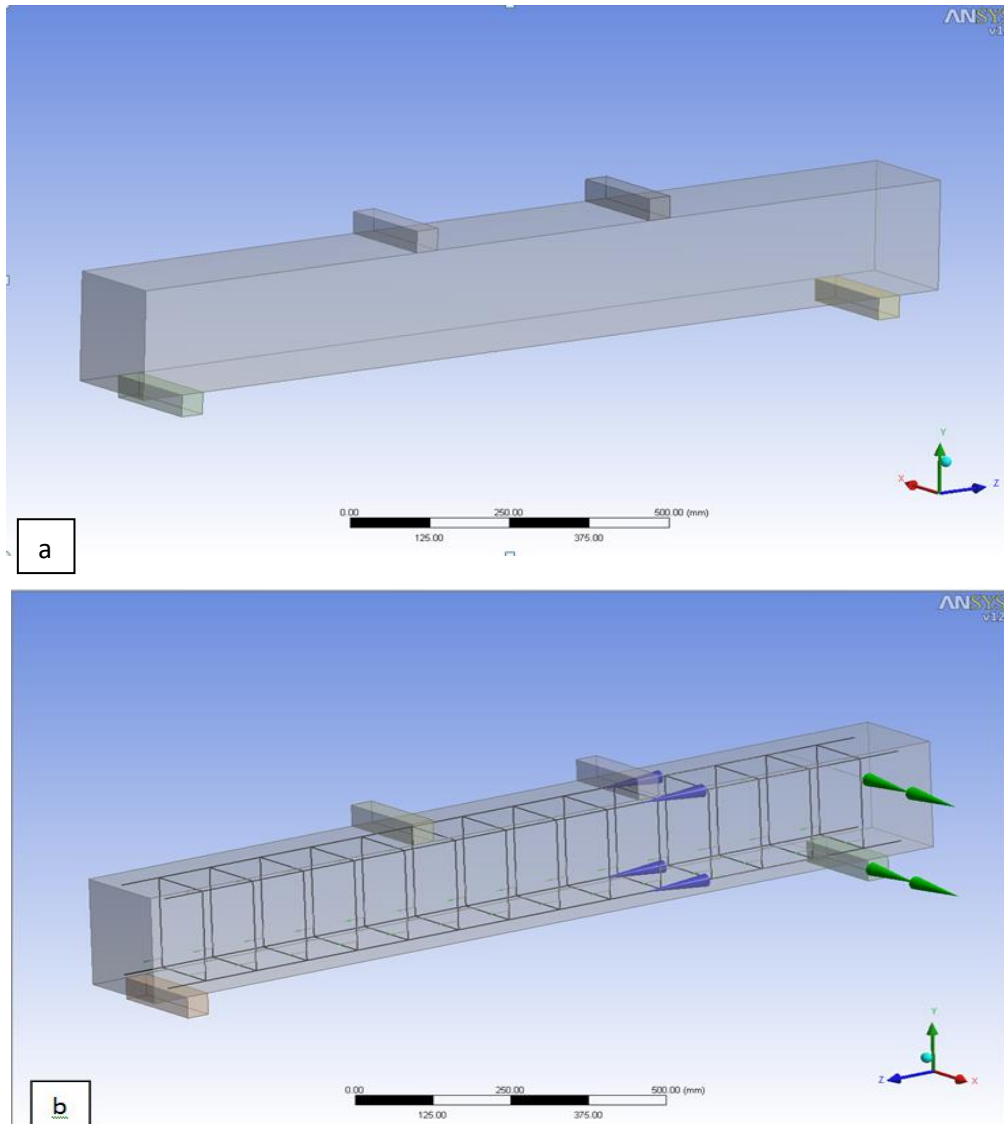


Figure : III-6 : Choix du modèle de structure statique pour créer une nouvelle analyse.

### III-5 Discrétisation du modèle physique

Deux poutres en béton et en béton armé de 1.54m de longueur, 0.17m de largeur et de 0.20m de hauteur sont montrées dans les figures (III-7a), (III-7b) respectivement.



**Figure III-7 :** La géométrie des poutres dans ANSYS. a) poutre non armée, b) poutre armée

### III-5-1 Types d'éléments

Le tableau (III-1) représente les trois types d'éléments pour ce modèle.

**Tableau III-1 :** Types des éléments utilisés.

Type d'élément	Par ANSYS
Béton	SOLID65
Acier derenforcement	LINK180



## Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

---

EX est calculé comme suit :

$$E_c = 57000\sqrt{f'_c} \text{ (Psi)} \quad (\text{III-2})$$

Avec :  $f'_c = 36.38 \text{ MPa}$ .

$$\nu = 0.2.$$

Les équations ci-dessous sont utilisées pour obtenir la relation contrainte- déformation uni axial pour le modèle de béton. [Mac Gregor 1992]

$$f = \frac{E_c \varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2} \quad (\text{III-3})$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2f'_c}{E_c} \quad (\text{III-4})$$

$$E_c = \frac{f}{\varepsilon} \quad (\text{III-5})$$

Avec :  $f$  : contrainte à n'importe quelle  $\varepsilon$ .

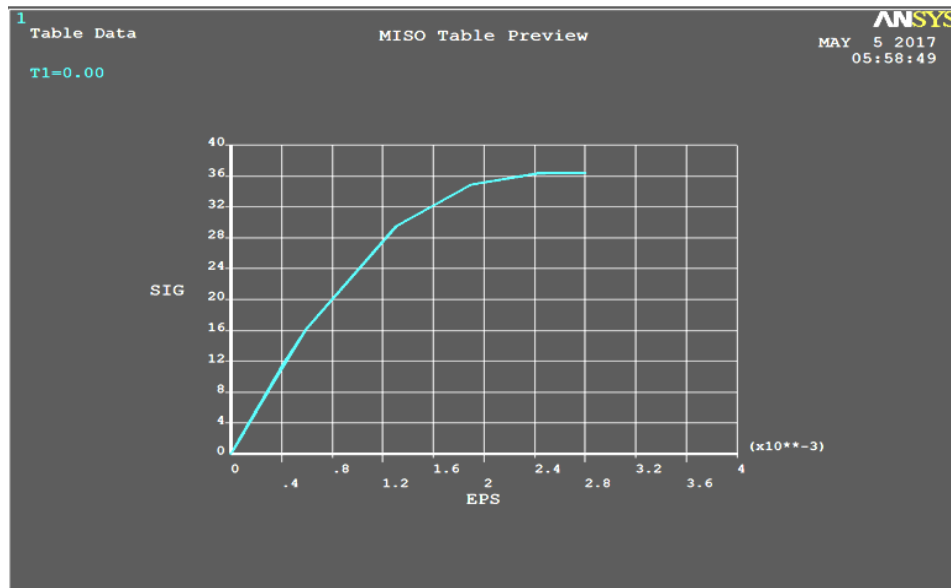
$\varepsilon$  : Déformation à une contrainte  $f$ .

$\varepsilon_0$  : Déformation à la contrainte de compression limite  $f'_c$ .

Le premier point de la courbe déformation – contrainte multilinéaire isotrope doit satisfaire la loi de Hook :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{III-6})$$

Pour faciliter la convergence de l'algorithme de solution non linéaire, on a utilisé la courbe multilinéaire (figure III-8).



**Figure III-8 :** La courbe déformation-contrainte uniaxial de béton.

On a défini le point 1 par  $0.3 f'_c$  à partir de l'équation (III-6). Les points 2, 3, 4 et 5 sont obtenues à partir de l'équation (III-3), avec :

$\varepsilon_0$  : est obtenue à partir de l'équation (III-4).

Le point 6 est défini à  $f'_c$  et  $\varepsilon_0=0.000255$ .

Le modèle du matériau de Willam-Warnke dans ANSYS nécessite la définition de 9 paramètres :

1. Coefficients de transfert de cisaillement pour une fissure ouverte ( $\beta$ );
2. Coefficients de transfert de cisaillement pour une fissure fermée ( $\alpha$ );
3. Contrainte de rupture de traction uniaxiale ( $f_r$ );
4. Contrainte de compression uniaxiale (positive) ( $f'_c$ );
5. Contrainte de compression biaxiale (positive) ( $f'_{cb}$ );

$$f'_{cb} = 1.2f'_c \quad (\text{III-7})$$

6. Etat de contrainte hydrostatique ambiant à utiliser avec les constantes 7 et 8 ( $\sigma_h$ )

$$\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}) \quad (\text{III-8})$$

Avec :  $\sigma_{xp}$ ,  $\sigma_{yp}$  et  $\sigma_{zp}$  sont les contraintes principales dans les directions principales.

7. Contrainte de compression biaxiale (positive) sous l'état de contrainte hydrostatique ambiante (constante 6) ( $f_1$ ) ;

$$(f_1 = 1.45f'_c) \quad (\text{III-9})$$

## Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

8. Contrainte de compression uniaxiale (positive) sous l'état de contrainte hydrostatique ambiante (constante 6) ( $f_2$ ) ;

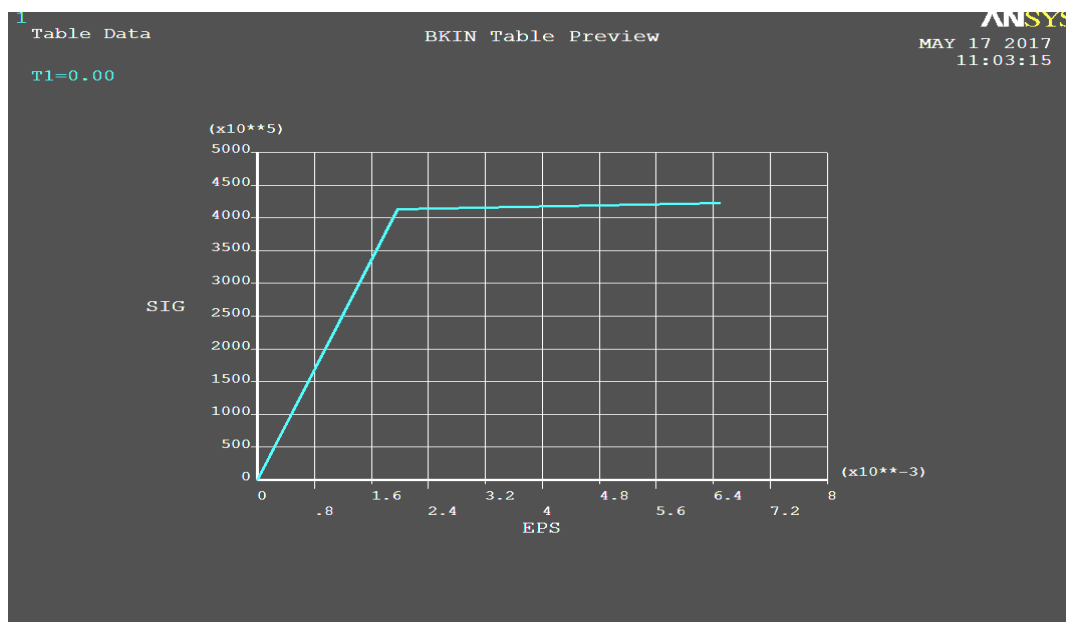
$$f_2 = 1.725f'_c \quad (\text{III-10})$$

9. Multiplicateur de rigidité pour l'état de fissures traction.

Pour le déroulement des calculs, il faut introduire les paramètres de matériaux : béton (supposé suivre le modèle de Willam-Warnke), et acier (supposé être un matériau élastoplastique avec un écrouissage linéaire (figure III-9).

Toutefois, la surface de ruine peut être spécifiée à l'aide des deux paramètres  $f_t$  et  $f'_c$  seulement à condition que :

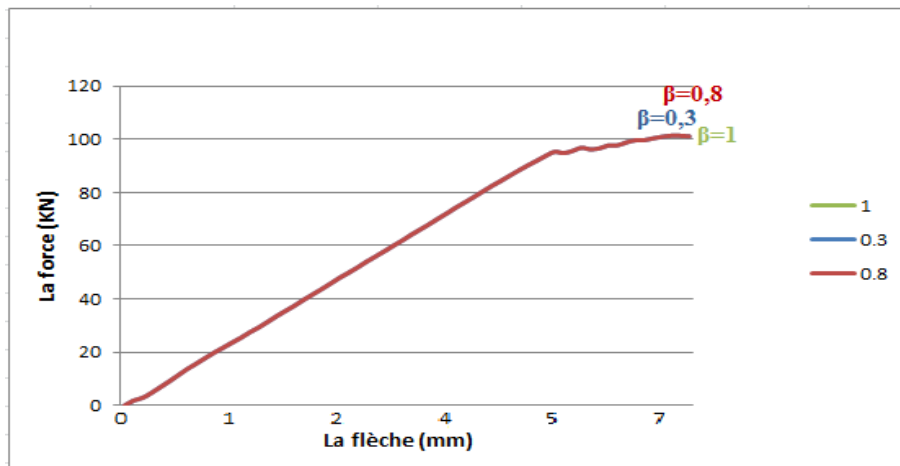
$$|\sigma_h| \leq \sqrt{3}f'_c \quad (\text{III-11})$$



**Figure III-9** : La courbe de comportement élastoplastique de l'acier.

Pour le coefficient  $\beta$ , trois valeurs : 0.3, 0.8, 1 ont été examinées pour mener une étude paramétrique sur l'influence de ce coefficient sur l'analyse. On a constaté qu'il n'y a pas eu une grande différence comme le montre la figure (III-10).

En général, la valeur de  $\beta$  compris entre 0 et 1. La valeur 0 signifie qu'il n'y a pas de transformation de fissuration et la valeur 1 représente une transformation totale de ces fissures.



**Figure III-10** : Les courbes de différents valeurs de  $\beta$

La contrainte de traction uniaxial été basé sur le module de rupture :

$$f_r = 7.5\sqrt{f'_c} \text{ (psi)} \quad \text{(III-12)}$$

La contrainte de compression uniaxial est basé sur la résistance à la compression  $f'_c$ , il prend une valeur de (-1) pour désactiver la capacité de rupture de élément en béton [Kachlakev, et all 2001] ; des problèmes de convergence ont été répétés lorsque la capacité de rupture par compression a été active.

### III-5-3 Les constants réels

Pour l'élément SOLID65 aucune constanteréelle n'est requise dans une approche discrète, tandis que LINK 180 nécessite la donnée de l'aire de la section. Dans une approche répartie, il faut rajouter certaines constantes comme le montre le tableau (III-3-b).

Dans cette étude, les deux approches de fissuration, à savoir, fissure répartie (smeared) et la fissure discrète (discrete) ont été étudiées (tableaux III-3 et III-4)

## Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

**Tableau III-3** : Les constants réels de l'approche de fissures discrets

Real Constant Set	Element Type	Constants			
			Real Constants for Rebar 1	Real Constants for Rebar 2	Real Constants for Rebar 3
1	Solid 65	Material Number	0	0	0
		Volume Ratio	0	0	0
		Orientation Angle	0	0	0
		Orientation Angle	0	0	0
2	Link 180	Cross-sectional Area (mm <sup>2</sup> )	50.24		
		Initial Strain	0		
3	Link180	Cross-sectional Area (mm <sup>2</sup> )	78.5		
		Initial Strain	0		
4	Link180	Cross-sectional Area (mm <sup>2</sup> )	113.04		
		Initial Strain	0		

**Tableau III-4** : Les constants réels de l'approche de fissures réparties

Real Constant Set	Element Type	Constants			
			Real Constants for Rebar 1	Real Constants for Rebar 2	Real Constants for Rebar 3
1	Solid 65	Material Number	0	0	0
		Volume Ratio	0.001	0	0
		Orientation Angle	0	0	0
		Orientation Angle	0	0	0
2	Link 180	Cross-sectional Area (mm <sup>2</sup> )	50.24		
		Initial Strain	0		
3	Link180	Cross-sectional Area (mm <sup>2</sup> )	78.5		
		Initial Strain	0		
4	Link180	Cross-sectional Area (mm <sup>2</sup> )	122.4		
		Initial Strain	0		

### III-5-4 Maillage

On a généré le maillage à l'aide de SOLID 65, les plaques d'acier et LINK180 de telle sorte les nœuds des éléments de renforcement et les éléments en béton partagent les mêmes nœuds.

## Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

Les éléments utilisés dans le maillage sont des éléments carrés de 25mm de dimension et nombre totale égal à 3584 (figure III-11).

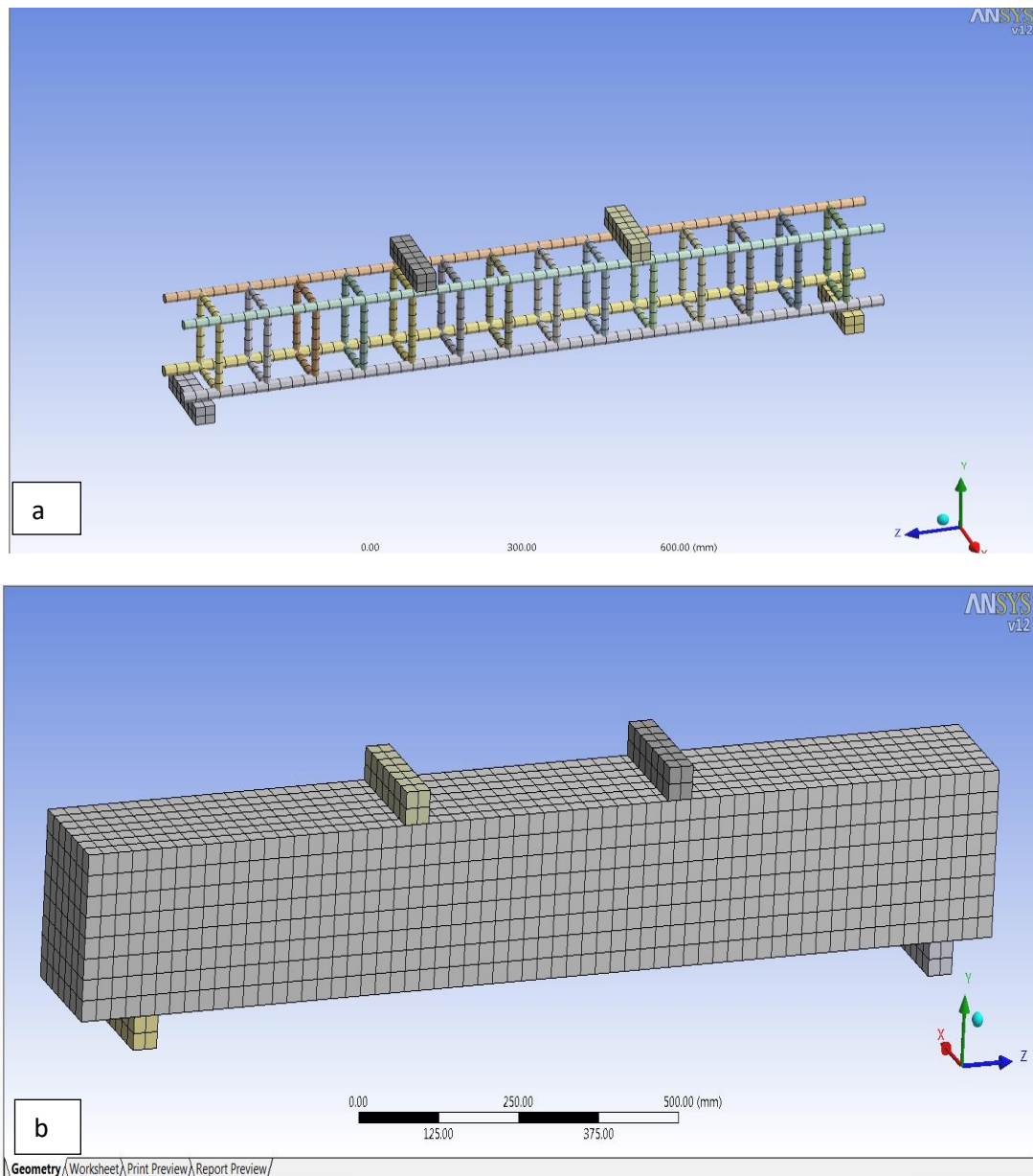


Figure III-11 :a) Maillage d'acier, b) Maillage de béton.

### III-5-5 Analyse

Le modèle des éléments finis est une poutre armée simple sous charge transversale. Pour ce modèle on a utilisé une analyse de type statique.

### III-5-5-1 Hypothèses

- On a négligé l'adoucissement (figure III-12).

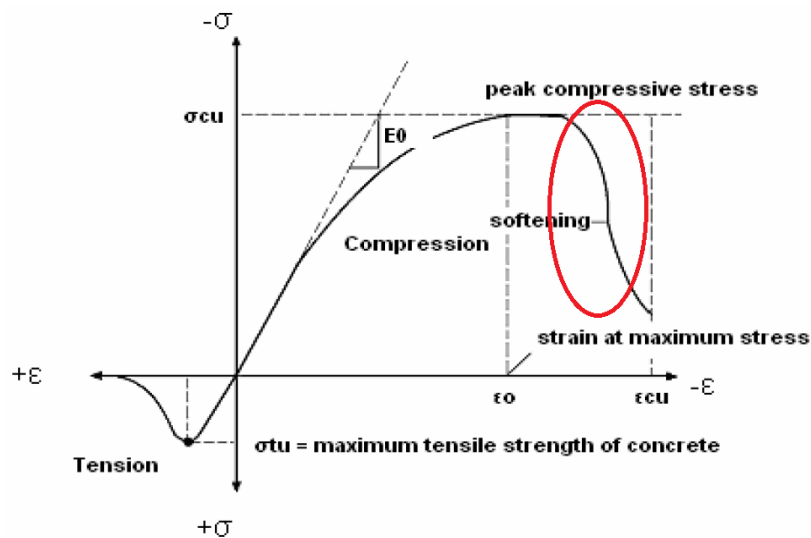


Figure III-12 : Relation constitutive typique pour le béton (adoucissement), [Bangash, 1989]

- On a négligé l'effet de post-stiffening (figure III-13)

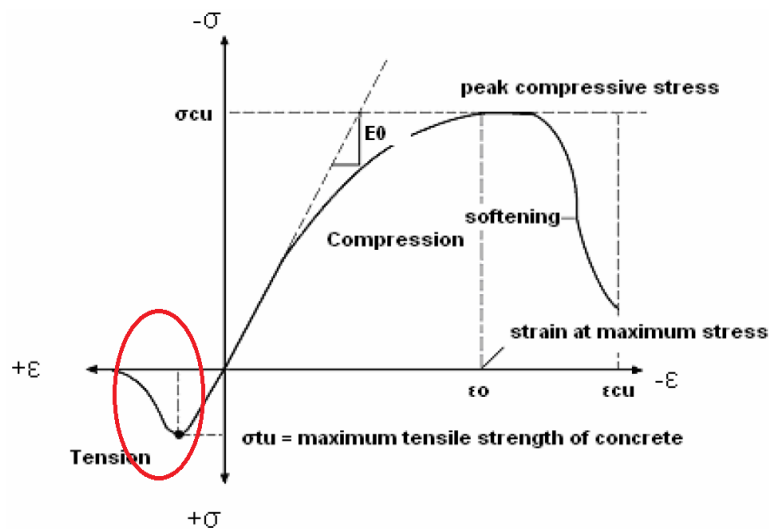


Figure III-13 : Relation constitutive typique pour le béton (post-stiffening), [Bangash, 1989]

### III-5-5-2 Conditions aux limites

Appuis : Les poutres reposent sur deux appuis doubles ( $U_x=U_y=0$ ).

# Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

Chargement : les poutres sont soumises à des charges monotones statiques.

## III-6 Résultats

### III-6-1 Poutre non armée

#### III-6-1-1 Déformé de la poutre

La figure (III-14a, b) représente la déformation de la poutre non\_ armée numérique et expérimentale respectivement :

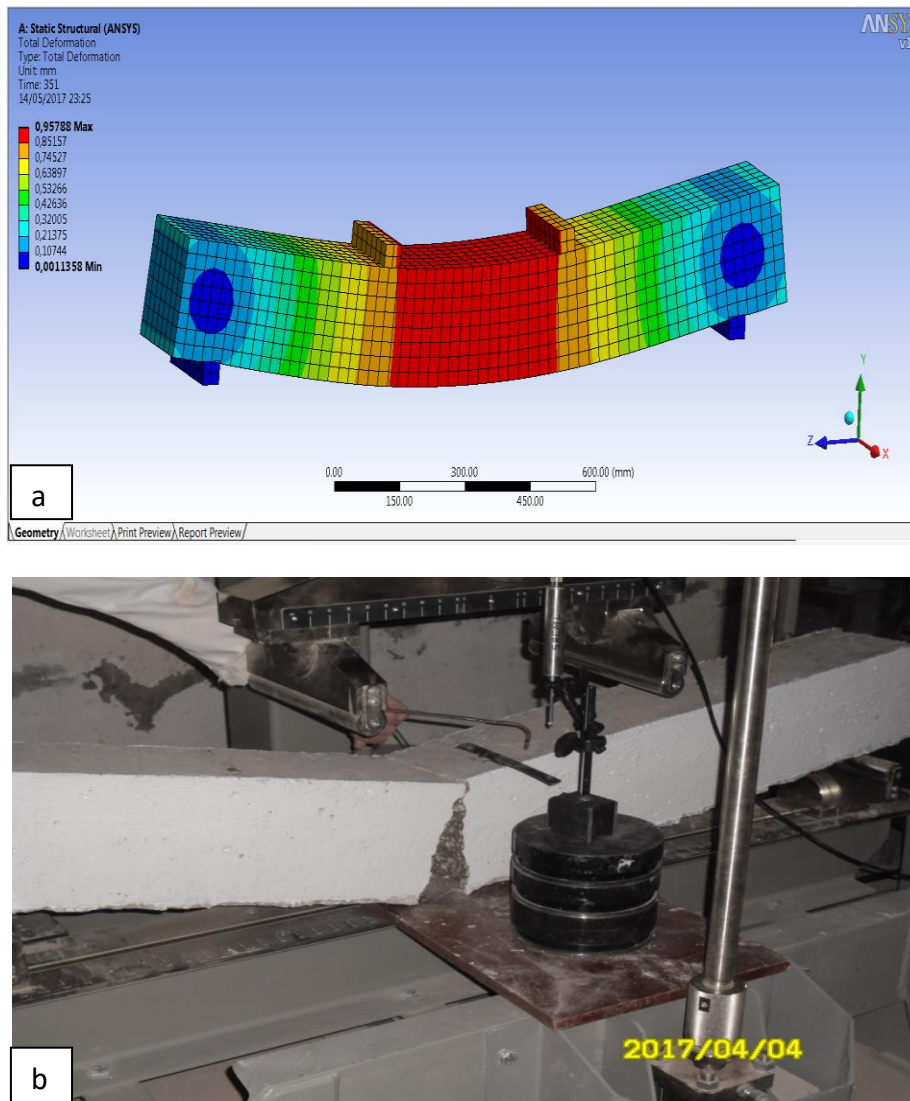


Figure III-14a, b : La déformation de la poutre non\_ armée, a) poutre numérique, b) poutre expérimentale.

## III-6-1-2 Diagramme force-flèche

Les courbes force – flèche obtenues expérimentalement et numériquement sont illustré dans la figure (III-15).

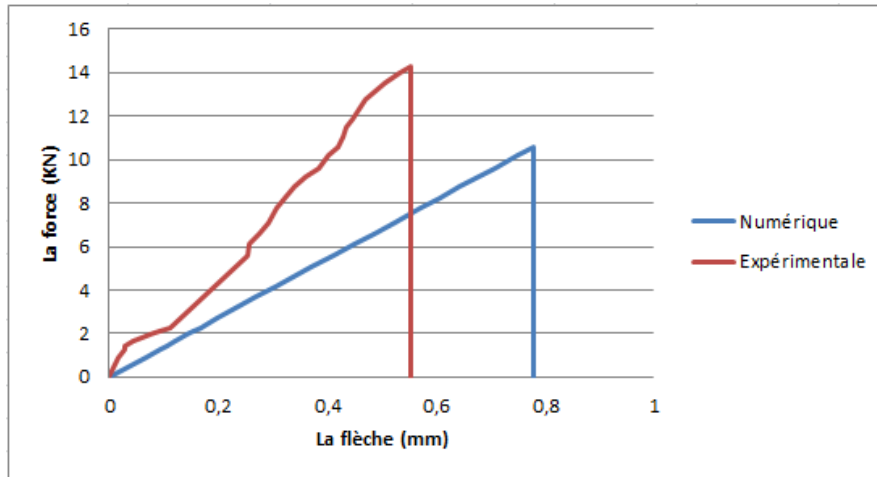
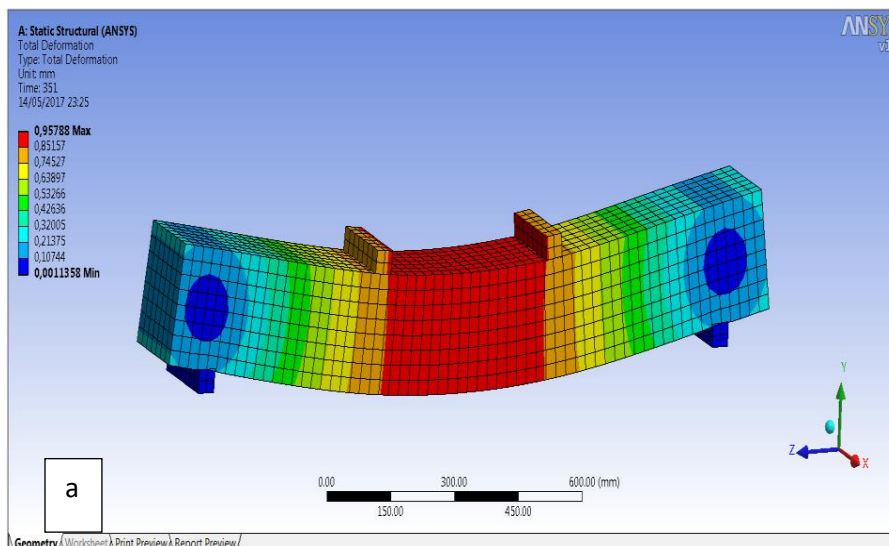


Figure III-15 : Les courbes de la force-flèche pour les résultats numériques et expérimentales

## III-6-2 Poutre armée

### III-6-2-1 Position déformé de la poutre

La figure (III-16a, b) présente la déformé de la poutre armée.



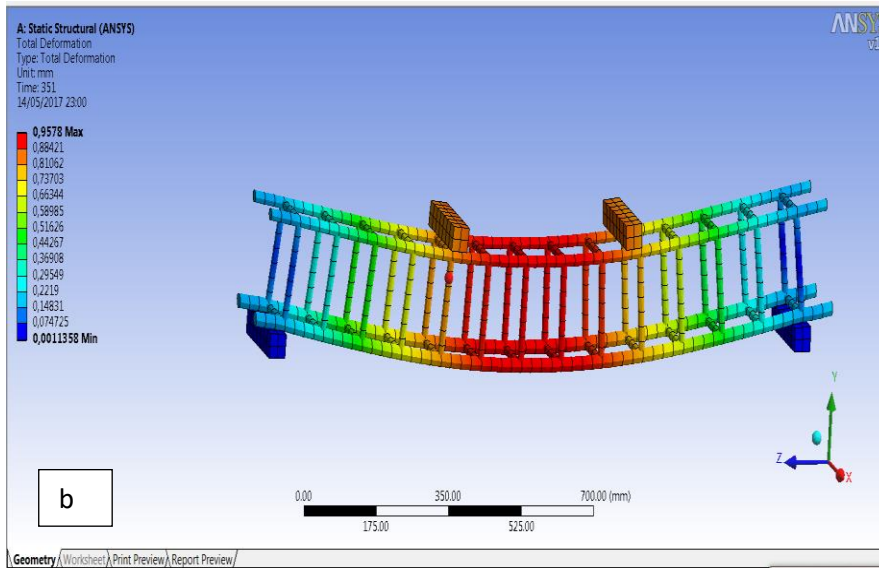


Figure III-16 : a) La déformation de la poutre armée, b) La déformation des aciers.

### III-6-2-2 Les diagrammes force - flèche

La figure (III-17) montre la comparaison entre les courbes de la flèche-force pour les résultats numériques et expérimentaux.

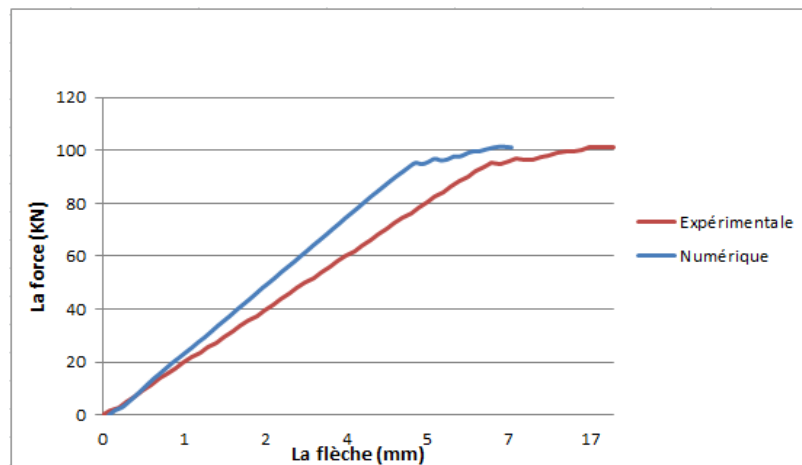


Figure III-17 : Les courbes de la force-flèche pour les résultats numériques et expérimentales

### III-7 Discussions des résultats et comparaison

Les résultats expérimentaux et numériques pour la poutre non armée et la poutre armée sont représentés dans le tableau (III-4 et III-5) respectivement.

## Chapitre III : Modélisation, résultats et discussion

### ➤ Poutre non\_ armée

**Tableau III-5:** La comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour la poutre non armée

		Poutre NA		Déviation %
La 1 <sup>ère</sup> fissure	La force (KN)	expérimentale	14.29	
		numérique	10.59	
	La flèche (mm)	expérimentale	0.555	29%
		numérique	0.779	

### ➤ Poutre armée

**Tableau III-6 :** Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour la poutre armée

		Poutre armé		déviation %
Force de rupture	La force (KN)	expérimentale	101.1	
		numérique	101.1	
	La flèche (mm)	expérimentale	17.33	58%
		numérique	7.43	

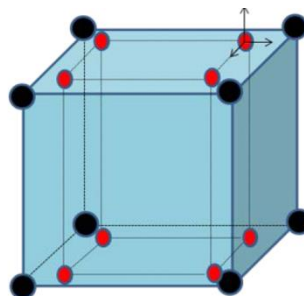
On observe une différence entre les résultats expérimentaux et numériques. Ceci peut être expliqué par plusieurs facteurs qui influent sur le comportement.

Parmi les facteurs qui influent sur la qualité de solution d'étude du comportement non linéaire d'une poutre en BA soumise à une force monotone allant de zéro jusqu'à la charge de rupture, il faut compter :

1-L'effet de la taille de maillage (mesh size) qui est la plus important d'après Chai et Kwak, (1989).

2-Le pas de charge.

3-L'ordre d'intégration (figure III-18).



**Figure III-18 :** Position et l'ordre de point d'intégration pour l'élément SOLID65.

- 4-l'effet de taille d'après Brinckeratal (1999).
- 5-la prise en compte de l'effet tension-stiffening.
- 6-la prise en compte de l'adoucissement (compression).
- 7-Paramètres du modèle et le modèle lui-même.

### III-8 Conclusion

Les résultats de comparaison montre un bon accord entre résultats expérimentaux et numériques et ce en dépit des hypothèses simplificatrices adoptées.

Le comportement non linéaire des poutres en béton et en béton armé peuvent être simulé par la modélisation ANSYS à trois dimensions. Cette analyse par la méthode des éléments finis sous ANSYS pourrait être économique du point de vue coût, temps et efforts et donner l'occasion d'étudier des aspects difficiles à mener dans les études expérimentales.

On a fait la comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques par rapport à la force, à la flèche et à la forme déformée qui sont montrés un accord satisfaisant.

### Conclusion générale et perspective

Dans ce tapuscrit, on s'est fixé un objectif principal qui consiste à examiner la capacité du logiciel EF ANSYS à modéliser le comportement non-linéaire du béton et béton armé et ce en comparant les résultats expérimentaux que nous avons conduits au sein du laboratoire de génie civil et les résultats numériques obtenus à l'aide de ANSYS. Les grandeurs étudiées sont, en priorité, la réponse force-flèche à mi-travée des poutres armées et non-armées.

On a procédé, également, à une étude comparative entre deux approches de modélisation, à savoir, l'approche discrète et l'approche répartie. Une étude paramétrique a été, de surcroît, effectuée pour explorer la sensibilité de l'analyse EF vis-à-vis des valeurs prises par le coefficient de transfert du cisaillement  $\beta$ .

À l'issue de ce travail, un certain nombre de conclusions peuvent être tirées :

- Il est bien clair que l'analyse EF reproduit de manière très satisfaisante le comportement des poutres armées et non-armées et ce tant sur l'allure des courbes que sur les valeurs de la force et de la flèche et notamment au début du chargement ce qui prouve que notre choix du module d'élasticité était judicieux et que ANSYS (et le modèle utilisé) peut capter de manière convenable la réponse des structures du béton et du béton armé. Une exception doit être mentionnée qui est celle de la flèche de la poutre armée où la valeur expérimentale diffère sensiblement de celle calculée numériquement. Cet écart peut être attribué à :
  - des paramètres du matériau de Willam-Warnke qui n'étaient pas, peut-être, très adéquats.
  - Des hypothèses restrictives : la non-prise du stiffening effect et du comportement adoucissant du béton en compression.
  - L'effet d'échelle dans les structures du béton ainsi que d'autres effets.
- Il a été constaté que les deux approches de fissure donnent pratiquement les mêmes résultats. Ceci est dû, probablement, au pourcentage très faible des armatures de traction.
- Il est, aussi, observé que la valeur prise par le coefficient  $\beta$  : 0.3, 0.8 et 1 n'a pas eu d'influence sur l'analyse et notamment sur la convergence comme il a été signalé par certains auteurs. On peut, donc, choisir une valeur de 0.3 dans les calculs.

En fin de compte, ce travail nous a été bénéfique à plusieurs égards. Citons à titre d'exemple :

- Il nous a permis d'appréhender certains aspects du béton qui nous étaient inconnus et particulièrement son comportement non-linéaire en plasticité.
- Il nous a permis, également, de prendre en main le logiciel ANSYS pour la première fois et ce en analyse non-linéaire Par EF,
- Ceci dit, ce travail doit être poursuivi afin de mieux cerner le comportement non-linéaire du béton. Pour cela, nous proposons d'examiner d'autres modèles autres que

## **Conclusion générale et perspective**

---

le modèle de Willam-Warnke et d'effectuer une série d'études paramétriques pour mettre en lumière l'effet de certains paramètres mécaniques comme la résistance à la compression qui est, dans ce type de calcul, d'une importance cruciale.

# *BIBLIOGRAPHIE*

**Carpinteri, A, 1994**, Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties, *Mechanics of Materials* 18(2): 89-101

**Bangash, M, Y, H., 1989**, *Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications.*, Elsevier Science Published Ltd., London, England

**Bazant, Z.P, Pfeiffer P,A., 1987**, Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Materials Jour.*, vol. 84, pp. 463-480

**Bazant Z.P, Planas J, 1998**, 'Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials'. CRC press.

**Chen, W, F,Saleeb, A.F,1994**, *Constitutive equations for Engineering materials* ,vol 1, Elasticity and Modeling, Elsevier

**Chen.W.F,Saleeb, A.F,1994**, *Constitutive equations for Engineering materials* ,vol 2,Plasticity and Modeling, Elsevier

**Christiane Nader, 2013**, Fissuration d'éléments en béton armé et effet d'échelle., 6 Septembre 2013. Université LIBANAISE.BRACHE II.

**Drucker, D. C. Prager, W, 1952**, Soil mechanics and plastic analysis or limit design". *Quart. Appl. Math.*, 10, pp.157-165.

**J. MAZARS Octobre 1989**, l'effet d'échelle dans les structures en béton (scale effect for concrete structures); Laboratoire de Mécanique et Technologie. *Rev. Franç. Géotech.* N° 49

**Kupfur, H.B, Hilsdorf, H.K, Rusch, H , 1969**, Behavior of concrete under bi-axial stresses. *Int. Journal*, Aug; PP 656-666.

**Mouattah, K, 2005**, notes de cours de plasticité, université de Laghouat

**Mourad, K. 2000**, Analyse par éléments finis des panneaux en béton armé , Thèse de Magister, Dept. Génie Civil, UMMTO, Septembre.

**Rashid, Y.R, 1968**, Ultimate Srength Analysis of Pre-stressed Concrete Pressure Vessels, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, pp.334-344

**SAS, ANSYS 12.0**, Finite Element Analysis System, SAS IP, Inc

**Srinivas, S, Datti, 2010**, Finite Element Analysis Using ANSYS 11.0, PHI Learning Private Limited

**Weibull, W, 1939.** The phenomenon of rupture in solids. In: Proc., Royal Swedish Institute of Engineering Research (Ingenioersvetenskaps Akad. Handl.), vol. 153, pp. 1-55 (Stockholm)

**Willam, K.J. and Warnke, E.P., 1974,** Constitutive Model for Triaxial Behaviour of Concrete, Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, International Association of Bridge and Structural Engineering Conference, Bergamo, Italy, p.174