

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة عمّار ثليجي بالأغواط  
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

## *Mémoire de LICENCE*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique  
**Filière :** Mathématique  
**Option :** Mathématique

**Par:**

***TOUMI FATIMA***

**THEME**

---

***Équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique***

---

***Proposé par : Mr BELABBACI YOUCEF***

***Année Universitaire 2014/2015***

# Remerciement

*Avant tous, on remercie le bon Dieu  
Pour tout puissant qui nous a aidés à  
Terminer ce travaille  
Je remercie l'ensemble de tous les  
Enseignants de département de  
Mathématique.*

*Et plus particulièrement le  
Professeur  
**BELABBACI YUCEF***

# Dédicace

*Au nom de Dieu clément et miséricordieux et que le  
Salut de Dieu soit sur prophète Mohmed.*

*Au terme de ce travail, je tiens remercier le bon Dieu tout  
Puissant qui ma donne la force et la volonté de réaliser  
Ce modeste travail.*

*Je dédie ce travail qui est le fruit des années aux trois  
Etre qui me sont le plus chères dans ce monde :*

*A vous.....ma très chère mère*

*A mon chère père رحمة الله عليه*

*A vous.....mon chère frère*

*Qui sont l'origine de mon existence.*

*Je les remercie pour tous ce qu'ils faits pour moi, pour ces  
Encouragements et conseils pendant toutes les années.*

*Je dédie aussi ce travail à mes sœurs et mon frères et à  
toute la famille Toumi ,Zemmit, Boubakri, Zerdani, Barkat  
settala, Mekahal, Khaldi.*

*Je dédie aussi à mes enseignants de primaire et moyenne et  
Secondaire.*

*A ma encadreur : M. BELABBACI*

*A tous mes amis sur tout « souiad, Hamra, Fatima, Iman ».*

*A tous les enseignants de Département de Mathématique.*

**FATIMA**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Classification des équations aux dérivées partielles du second ordre :</b>	<b>3</b>
1.1	Cas de deux variables : . . . . .	3
1.1.1	Différents types : . . . . .	6
1.1.2	Exemples . . . . .	8
1.2	Cas de trois variables . . . . .	10
1.2.1	type : . . . . .	10
1.2.2	Exemples . . . . .	11
1.2.3	Forme canonique : . . . . .	12
1.2.4	Exemple . . . . .	14
1.3	Cas de n variables . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Méthodes de résolutions des EDP de type hyperbolique</b>	<b>18</b>
2.1	Méthode de d'Alembert . . . . .	18
2.1.1	Solution de D'Alembert . . . . .	18
2.1.2	Problème de Cauchy . . . . .	19
2.1.3	Application au problème de Dirichlet . . . . .	20
2.2	Méthode de la séparation des variables . . . . .	21
2.3	Méthode de l'intégrale de Fourier . . . . .	25
2.3.1	Exemples . . . . .	27

## Introduction :

Les équations aux dérivées partielles, constituent une branche importante des mathématiques .

Dans ce travail, que nous présentons sous forme d'un mémoire, nous étudions les EDP de type Hyperbolique.

Nous allons présenter dans le premier chapitre la classification des EDP (Hyperbolique, Parabolique, Elliptique).

Dans le second chapitre, nous allons présenter les méthodes de résolutions (D'Alembert, Séparation des variables, l'intégrale de Fourier) des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique.

# Chapitre 1

## Classification des équations aux dérivées partielles du second ordre :

### 1.1 Cas de deux variables :

**Définition :**

les EDP linéaire de second ordre à deux variables indépendantes peut être écrite sous la forme suivante :

$$AU_{x^2} + BU_{xy} + CU_{y^2} + DU_x + EU_y + FU = G \dots \dots \dots (1)$$

où  $A, B, C, D, E, F$  et  $G$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$  de classe  $C^2$  sur  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Le type :** \* Dans la géométrie analytique, l'équation d'une section canonique de la forme suivante :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

où  $A, B, C, D, E$  et  $F$  sont des constantes cette équation quadratique représente les forme géométriques suivantes :

- 1) une hyperbole : si  $B^2 - 4AC > 0$
- 2) une parabole : si  $B^2 - 4AC = 0$
- 3) une ellipse : si  $B^2 - 4AC < 0$

La classification de l'équation (1) est basée sur la possibilité de réduire de cette équation par une transformation de coordonnées à une forme canonique (standard)

\* soit la transformation suivante :

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{et} \quad \eta = \eta(x, y) \dots\dots\dots (2)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  sont des fonctions de classe  $c^2$  sur  $D \subset \mathbb{R}^2$  telle que le jacobien :

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

Alors, nous avons :

$$\begin{cases} U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x \\ U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y \\ U_{x^2} = U_{\xi^2} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta^2} \eta_x^2 + U_\xi \xi_{x^2} + U_\eta \eta_{x^2} \\ U_{xy} = U_{\xi^2} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y \xi_y \eta_x) + U_{\eta^2} \eta_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy} \\ U_{y^2} = U_{\xi^2} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta^2} \eta_y^2 + U_\xi \xi_{y^2} + U_\eta \eta_{y^2} \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

En remplaçant (3) dans l'équation (1) et on obtient :

$$A^* U_{\xi^2} + B^* U_{\xi\eta} + C^* U_{\eta^2} + D^* U_\xi + E^* U_\eta + F^* U = G^* \dots\dots\dots (4)$$

Où :

$$\begin{cases} A^* = A \xi_x^2 + B \xi_x \xi_y + C \xi_y^2 \\ B^* = 2A \xi_y \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C \xi_y \eta_x \\ C^* = A \eta_x^2 + B \eta_x \eta_y + C \eta_y^2 \\ D^* = A \xi_{x^2} + B \xi_{xy} + C \xi_{y^2} + D \xi_x + E \xi_y \\ E^* = A \eta_{x^2} + B \eta_{xy} + C \eta_{y^2} + D \eta_x + E \eta_y \\ F^* = F \\ G^* = G \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

\*on peut démontrer facilement que :

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC) \dots\dots\dots (6)$$

la classification de l'équation (1) dépend des coefficients  $A(x, y), B(x, y)$  et  $C(x, y)$  en un point  $(x, y) \in D$ .

Alors, récrire les équations(1) et (4) sous forme :

$$AU_{x^2} + BU_{xy} + CU_{y^2} = H(x, y, U, U_x, U_y) \dots\dots\dots (7)$$

$$A^*U_{\xi^2} + B^*U_{\xi\eta} + C^*U_{\eta^2} = H^*(\xi, \eta, U, U_{\xi}, U_{\eta}) \dots \dots \dots (8)$$

**La forme canonique :**  $AU_{x^2} + BU_{xy} + CU_{y^2} = H(x, y, U, U_x, U_y) \dots \dots \dots (7)$

$$A^*U_{\xi^2} + B^*U_{\xi\eta} + C^*U_{\eta^2} = H^*(\xi, \eta, U, U_{\xi}, U_{\eta}) \dots \dots \dots (8)$$

on suppose que les coefficient  $A, B$  et  $C$  sont non nuls et on pose dans (8) :

$$A^* = C^* = 0 \text{ alors :}$$

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0$$

Ces deux équations sont du même type donc on peut écrire sous la forme :

$$A\delta_x^2 + B\delta_x\delta_y + C\delta_y^2 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

en divisant l'équation (9) sur  $\delta_y^2$ , on obtient :

$$A \left( \frac{\delta_x}{\delta_y} \right)^2 + B \left( \frac{\delta_x}{\delta_y} \right) + C = 0 \dots \dots \dots (10)$$

sur la courbe  $\delta = cste$ , nous avons :

$$d\delta = \delta_x \cdot dx + \delta_y \cdot dy = 0$$

Alors on a :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\delta_x}{\delta_y} \dots \dots \dots (11)$$

en remplaçant (11) dans (10), on trouve l'équation quadratique suivante :

$$A \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - B \left( \frac{dy}{dx} \right) + C = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Donc les racines suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{cases} \dots \dots \dots (13)$$

Ces équations sont connus les équations caractéristiques et l'intégrale de ces équations sont appelés les courbes caractéristiques définies par :

$$\varphi(x, y) = c_1 \quad \text{et} \quad \phi(x, y) = c_2$$

avec cette transformation de coordonnées  $\xi = \varphi(x, y)$  et  $\eta = \phi(x, y)$  on peut trouver une forme canonique de l'équation(7).

### 1.1.1 Différents types :

suivant le signe de  $B^2 - 4AC$  on distingue les types suivants :

1) Si  $B^2 - 4AC > 0$ , l'équation (7) est appelée équation hyperbolique.

dans ce cas les équations caractéristiques sont des équations réels et les courbes caractéristiques sont données par :

$$\varphi(x, y) = c_1 \quad \text{et} \quad \phi(x, y) = c_2$$

Avec le changement de coordonnées :

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \eta = \phi(x, y)$$

L'équation (8) se réduit à :

$$U_{\xi\eta} = H_1 \quad \text{où} \quad H_1 = \frac{H^*}{B^*} \dots \dots \dots (14)$$

l'équation (14) est appelée la première forme canonique de l'équation hyperbolique.

\* soit le changement suivant :

$$\alpha = \xi + \eta \quad \text{et} \quad \beta = \xi - \eta$$

Alors l'équation (14) est transformée en :

$$U_{\alpha^2} + U_{\beta^2} = H_2(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta) \dots \dots \dots (15)$$

L'équation (15) est appelée la deuxième forme canonique de l'équation hyperbolique.

2) Si  $B^2 - 4AC = 0$  l'équation (7) est appelée équation parabolique dans ce cas les

équations caractéristiques(13) coïncident :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$$

Avec l'intégration, on obtient :

$$\varphi(x, y) = c_1 \quad / \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

on pose :  $\xi = \varphi(x, y)$  et  $\eta = y$  (on peut choisir)

$$Jac = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

si  $A^* = 0$ , nous avons :

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$A^* = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y) = 0$$

$$B^* = 2A\xi_y\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_x$$

$$B^* = 2(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) = 0$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$C^* = C \neq 0$$

L'équation (8) devient :

$$U_{\eta^2} = H_3(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \dots \dots \dots (16)$$

si on pose :  $\eta = \phi(x, y)$  et  $\xi = x$  (choisie) l'équation (8) se réduit à :

$$U_{\xi^2} = H_3^*(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$$

3) Pour une équation elliptique, nous avons,  $B^2 - 4AC < 0$  par conséquent l'équation quadratique (12) admette deux famille des courbes caractéristiques conjuguées :

$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = c_1$$

$$\phi(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y) = c_2$$

Soit la transformation suivante :

$$\xi = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) \quad \text{et} \quad \eta = \alpha(x, y) - i\beta(x, y) \dots \dots \dots (17)$$

Donc on a

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) \dots \dots \dots (18)$$

Avec le changement (18) l'équation (8) devienne :

$$A^{**}(\alpha, \beta)U_{\alpha^2} + B^{**}(\alpha, \beta)U_{\alpha\beta} + C^{**}(\alpha, \beta)U_{\beta^2} = H_4(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta) \dots \dots \dots (19)$$

Alors on a :

$$A^* = C^* = 0$$

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$

$$A^* = (A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) + i [2A\alpha_x\beta_y + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y]$$

$$A^* = 0$$

$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$

$$C^* = (A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) - i [2A\alpha_x\beta_y + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y]$$

$$C^* = 0$$

Alors on a :

$$\begin{cases} A^{**} - C^{**} + iB^{**} = 0 \\ A^{**} - C^{**} - iB^{**} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A^{**} = C^{**} \\ B^{**} = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation (19) se transforme en le forme :

$$U_{\alpha^2} + U_{\beta^2} = H_5(\alpha, \beta U, U_{\alpha}, U_{\beta}) \dots \dots \dots (20)$$

Ceci est appelée la forme canonique de l'équation elliptique.

### 1.1.2 Exemples

$$1) U_{x^2} - \frac{1}{c^2} U_{y^2} = 0 \dots \dots \dots (*)$$

$$A = 1 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = -\frac{1}{c^2}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = \frac{4}{c^2} > 0$$

L'équation (\*) du second ordre de type hyperbolique.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} = \frac{1}{c} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} = -\frac{1}{c} \end{cases} \iff \begin{cases} dx = cdy \\ dx = -cdy \end{cases} \iff \begin{cases} x - cy = c_1 \\ x + cy = c_2 \end{cases}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} \xi(x, y) = x - cy \\ \eta(x, y) = x + cy \end{cases}$$

$$\xi_x = 1 \quad , \quad \xi_y = -c$$

$$\eta_x = 1 \quad , \quad \eta_y = c$$

$$U_x = U_{\xi} \xi_x + U_{\eta} \eta_x = U_{\xi} + U_{\eta}$$

$$U_{x^2} = U_{\xi^2} \xi_x^2 + U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta^2} \eta_x^2 = U_{\xi^2} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$U_y = U_{\xi} \xi_y + U_{\eta} \eta_y = -cU_{\xi} + cU_{\eta} = -c(U_{\xi} - U_{\eta})$$

$$U_{y^2} = -c[U_{\xi^2} \xi_y^2 + U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y] + c[U_{\eta^2} \eta_y^2 + U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y] = c^2 U_{\xi^2} - 2c^2 U_{\xi\eta} + c^2 U_{\eta^2} \dots \dots \dots (2)$$

En remplaçant (1) et (2) dans (\*), on obtient :

$$U_{\xi\eta} = 0 \iff U(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

Donc la solution générale :

$$U(x, y) = f(x - cy) + g(x + cy)$$

$$2) x^2 U_{x^2} + 2xy U_{xy} + y^2 U_{y^2} + xy U_x + y^2 U_y = 0 \dots \dots \dots (*)$$

$$A = x^2 \quad , \quad B = 2xy \quad , \quad C = y^2$$

$$\Delta = (2xy)^2 - 4x^2 y^2 = 0$$

Donc l'équation est de type parabolique.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{2xy}{2x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \implies \ln(y) - \ln(x) = \ln(c_1) \implies c_1 = \frac{y}{x}$$

On pose les coordonnées caractéristiques :

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \frac{y}{x} \\ \eta(x, y) = y \end{cases}$$

$$\xi_x = -\frac{y}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{x}$$

$$\eta_x = 0, \quad \eta_y = 1$$

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = -\frac{y}{x^2} U_\xi \dots \dots \dots (1)$$

$$U_{x^2} = \frac{2y}{x^3} U_\xi + \frac{y}{x^2} [U_{\xi^2} \xi_x + U_{\xi\eta} \eta_x] = \frac{2y}{x^3} U_\xi + \frac{y^2}{x^4} U_{\xi^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = \frac{1}{x} U_\xi + U_\eta \dots \dots \dots (3)$$

$$U_{y^2} = \frac{1}{x} [U_{\xi^2} \xi_y + U_{\xi\eta} \eta_y] + U_{\eta^2} \eta_y + U_{\xi\eta} \xi_y = \frac{1}{x^2} U_{\xi^2} + \frac{1}{x} U_{\xi\eta} + U_{\eta^2} \dots \dots \dots (4)$$

$$U_{yx} = -\frac{1}{x^2} U_\xi - \frac{y}{x^2} [U_{\xi^2} \xi_y + U_{\xi\eta} \eta_y] = -\frac{1}{x^2} U_\xi - \frac{y}{x^3} U_{\xi^2} - \frac{y}{x^2} U_{\xi\eta} \dots \dots \dots (5)$$

En remplaçant (1),(2),(3),(4) et (5) dans (\*) et on obtient :

$$U_{\eta^2} + U_\eta = 0$$

$$r^2 + r = 0 \implies r(r+1) = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = -1$$

$$U(\xi, \eta) = c_1(\xi) \exp(-\eta) + c_2(\xi)$$

Donc la solution général :

$$U(x, y) = c_1\left(\frac{y}{x}\right) \exp(-y) + c_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

telle que :  $c_1, c_2$  deux fonctions :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

$$3) 4U_{x^2} + U_{y^2} = 0$$

$$A = 4, \quad B = 0, \quad C = 1$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = -16 < 0$$

Donc cette équation est de type elliptique.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{-4i}{8} = \frac{-1}{2}i \\ \frac{dy}{dx} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i}{2} \implies 2dy = idx \implies 2y = ix + c \implies c = 2y - ix$$

$$\alpha = 2y \quad \text{et} \quad \beta = -x$$

$$U_x = U_\alpha \alpha_x + U_\beta \beta_x$$

$$U_{x^2} = -(U_{\beta\alpha} \alpha_x - U_{\beta^2}) = U_{\beta^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$U_y = U_\alpha \alpha_y + U_\beta \beta_y = 2U_\alpha$$

$$U_{y^2} = 2(2U_\alpha^2) = 4U_\alpha^2 \dots \dots \dots (2)$$

En remplaçant (1) et (2) dans (\*), on obtient :

$$4U_{\beta^2} + 4U_{\alpha^2} = 0 \implies U_{\beta^2} + U_{\alpha^2} = 0$$

## 1.2 Cas de trois variables

$$A_{11}U_{x^2} + A_{22}U_{y^2} + A_{33}U_{z^2} + 2A_{12}U_{xy} + 2A_{13}U_{xz} + 2A_{23}U_{yz} + F = 0 \dots \dots \dots (1)$$

### 1.2.1 type :

les fonction  $A_{ij}$  sont de classe  $c^1$  sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on note  $A = (A_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ .

Etant donné  $x^0 \in D$ , on note  $A_0 = (A_{ij}(x^0)) \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice  $A_0$  est symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles et  $A_0$  est diagonalisable, dans une base  $B'$  ortho-normée on a donc  $A_0 = PD^tP$  où  $P$  désigne la matrice de passage de la base canonique à  $B'$  et  $D$  est une matrice diagonale formée par les valeurs propres de  $A_0$ .

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

En considérant la forme quadratique associée à :

$$A_{11}t_1^2 + A_{22}t_2^2 + A_{33}t_3^2 + 2A_{12}t_1t_2 + 2A_{13}t_1t_3 + 2A_{23}t_2t_3 + F$$

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}t_it_j$$

Et en la réduisant a une somme de carrés.on a d'après le théorème de lagrange :

$$\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}t_it_j = \sum_{i,j=1}^3 \lambda_i t_i'^2$$

\* si les  $\lambda_i$  sont de même signe alors le type est elliptique.

\* si les  $\lambda_i = 0$  alors le type est parabolique.

\* si les  $\lambda_i$  ne sont pas de même signe et non nuls alors le type est hyperbolique.

### 1.2.2 Exemples

$$1) U_{x^2} - 4U_{xy} + 2U_{xz} + 4U_{y^2} + U_{z^2} - 2xyU_x + 3xU = 0$$

$$2) U_{x^2} + 3U_{y^2} + 3U_{z^2} - 2U_{xy} - 2U_{xz} - 2U_{yz} - 8U = 0$$

$$3) U_{x^2} + 2U_{xy} + 2U_{y^2} + 4U_{yz} + 5U_{z^2} = 0$$

$$4) 3U_{xy} - 2U_{xz} - U_{yz} - 4 = 0$$

:

$$1) U_{x^2} - 4U_{xy} + 2U_{xz} + 4U_{y^2} + U_{z^2} - 2xyU_x + 3xU = 0 \dots \dots \dots (*)$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 = 0$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 - (t_3 - 2t_2)^2 + 4t_2^2 + t_3^2$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 - 4t_2^2 - t_3^2 + 4t_2t_3 + 4t_2^2 + t_3^2$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + 4t_2t_3$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + (t_2 + t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2$$

On pose :

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 - 2t_2 + t_3 \\ \tau_2 = t_2 + t_3 \\ \tau_3 = t_2 - t_3 \end{cases}$$

$$q(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_3^2$$

Les  $\lambda_i$  ne sont pas de même signe alors l'équation (\*) est hyperbolique.

$$2) U_{x^2} + 3U_{y^2} + 3U_{z^2} - 2U_{xy} - 2U_{xz} - 2U_{yz} - 8U = 0$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 - 2t_2t_3 = 0$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2 - t_3)^2 - (-t_2 - 2t_3)^2 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_2t_3$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2 - t_3)^2 - t_2^2 - t_3^2 - 2t_2t_3 + 3t_2^2 + 3t_3^2 - 2t_2t_3$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2 - t_3)^2 + 2t_2^2 + 2t_3^2 - 4t_2t_3$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2 - t_3)^2 + 1/2(2t_2 - 2t_3)^2 - 1/2(2t_3)^2 + 2t_3^2$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - t_2 - t_3)^2 + 1/2(2t_2 - 2t_3)^2$$

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 - t_2 - t_3 \\ \tau_2 = 2t_2 - 2t_3 \\ q(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \tau_1^2 + 1/2\tau_2^2 \end{cases}$$

On a  $\lambda_3 = 0$ , donc l'équation (\*) est de type parabolique.

$$3) U_{x^2} + 2U_{xy} + 2U_{y^2} + 4U_{yz} + 5U_{z^2} = 0$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 + 2t_1t_2 + 2t_2^2 + 4t_2t_3 + 5t_3^2 = 0$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 + t_2)^2 + t_2^2 + 4t_2t_3 + 5t_3^2$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = (t_1 + t_2)^2 + (t_2 + 2t_3)^2 + t_3^2$$

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 + t_2 \\ \tau_2 = t_2 + 2t_3 \\ \tau_3 = t_3 \\ q(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 \end{cases}$$

Les  $\lambda_i$  sont de même signe alors l'équation (\*) est elliptique.

### 1.2.3 Forme canonique :

$$A_{11}U_{x^2} + A_{22}U_{y^2} + A_{33}U_{z^2} + 2A_{12}U_{xy} + 2A_{13}U_{xz} + 2A_{23}U_{yz} + F = 0 \dots \dots \dots (*)$$

Cherchons la matrice de transformation  $M$  :  $M$  exprime les anciennes coordonnées

en fonction du nouveau c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

Et on effectuant le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = {}^t M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ où } {}^t M = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xi(x, y, z) = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z$$

$$\eta(x, y, z) = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z$$

$$\varphi(x, y, z) = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z$$

$$\xi_x = c_{11}, \quad \xi_y = c_{12}, \quad \xi_z = c_{13}$$

$$\eta_x = c_{21} \quad , \quad \eta_y = c_{22} \quad , \quad \eta_z = c_{23}$$

$$\varphi_x = c_{31} \quad , \quad \varphi_y = c_{32} \quad , \quad \varphi_z = c_{33}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = \xi_x U_\xi + \eta_x U_\eta + \varphi_x U_\varphi \\ U_y = \xi_y U_\xi + \eta_y U_\eta + \varphi_y U_\varphi \\ U_z = \xi_z U_\xi + \eta_z U_\eta + \varphi_z U_\varphi \\ U_{x^2} = \xi_x^2 U_{\xi^2} + 2\xi_x \eta_x U_{\xi\eta} + \eta_x^2 U_{\eta^2} + 2\eta_x \varphi_x U_{\eta\varphi} + \varphi_x^2 U_{\varphi^2} + 2\varphi_x \xi_x U_{\xi\varphi} \\ U_{y^2} = \xi_y^2 U_{\xi^2} + 2\xi_y \eta_y U_{\xi\eta} + \eta_y^2 U_{\eta^2} + 2\eta_y \varphi_y U_{\eta\varphi} + \varphi_y^2 U_{\varphi^2} + 2\varphi_y \xi_y U_{\xi\varphi} \dots\dots (1) \\ U_{z^2} = \xi_z^2 U_{\xi^2} + 2\xi_z \eta_z U_{\xi\eta} + \eta_z^2 U_{\eta^2} + 2\eta_z \varphi_z U_{\eta\varphi} + \varphi_z^2 U_{\varphi^2} + 2\varphi_z \xi_z U_{\xi\varphi} \\ U_{xy} = \xi_x \xi_y U_{\xi^2} + \eta_x \eta_y U_{\eta^2} + \varphi_x \varphi_y U_{\varphi^2} + \xi_x \eta_y U_{\xi\eta} + \xi_x \varphi_y U_{\xi\varphi} + \eta_x \xi_y U_{\eta\xi} \\ \quad + \varphi_x \xi_y U_{\varphi\xi} + \varphi_x \eta_y U_{\varphi\eta} + \eta_x \varphi_y U_{\eta\varphi} \\ U_{xz} = \xi_x \xi_z U_{\xi^2} + \eta_x \eta_z U_{\eta^2} + \varphi_x \varphi_z U_{\varphi^2} + \xi_x \eta_z U_{\xi\eta} + \xi_x \varphi_z U_{\xi\varphi} + \eta_x \xi_z U_{\eta\xi} \dots\dots (2) \\ \quad + \varphi_x \xi_z U_{\varphi\xi} + \varphi_x \eta_z U_{\varphi\eta} + \eta_x \varphi_z U_{\eta\varphi} \\ U_{yz} = \xi_y \xi_z U_{\xi^2} + \eta_y \eta_z U_{\eta^2} + \varphi_y \varphi_z U_{\varphi^2} + \xi_y \eta_z U_{\xi\eta} + \xi_y \varphi_z U_{\xi\varphi} + \eta_y \xi_z U_{\eta\xi} \\ \quad + \varphi_y \xi_z U_{\varphi\xi} + \varphi_y \eta_z U_{\varphi\eta} + \eta_y \varphi_z U_{\eta\varphi} \end{array} \right.$$

En remplaçant (1) et (2) dans (\*), on obtient :

$$\begin{aligned} & A_{11}[\xi_x^2 U_{\xi^2} + 2\xi_x \eta_x U_{\xi\eta} + \eta_x^2 U_{\eta^2} + 2\eta_x \varphi_x U_{\eta\varphi} + \varphi_x^2 U_{\varphi^2} + 2\varphi_x \xi_x U_{\xi\varphi}] + \\ & A_{22}[\xi_y^2 U_{\xi^2} + 2\xi_y \eta_y U_{\xi\eta} + \eta_y^2 U_{\eta^2} + 2\eta_y \varphi_y U_{\eta\varphi} + \varphi_y^2 U_{\varphi^2} + 2\varphi_y \xi_y U_{\xi\varphi}] + \\ & A_{33}[\xi_z^2 U_{\xi^2} + 2\xi_z \eta_z U_{\xi\eta} + \eta_z^2 U_{\eta^2} + 2\eta_z \varphi_z U_{\eta\varphi} + \varphi_z^2 U_{\varphi^2} + 2\varphi_z \xi_z U_{\xi\varphi}] + \\ & A_{12}[\xi_x \xi_y U_{\xi^2} + \eta_x \eta_y U_{\eta^2} + \varphi_x \varphi_y U_{\varphi^2} + \xi_x \eta_y U_{\xi\eta} + \xi_x \varphi_y U_{\xi\varphi} + \eta_x \xi_y U_{\eta\xi} + \\ & \varphi_x \xi_y U_{\varphi\xi} + \varphi_x \eta_y U_{\varphi\eta} + \eta_x \varphi_y U_{\eta\varphi}] + A_{13}[\xi_x \xi_z U_{\xi^2} + \eta_x \eta_z U_{\eta^2} + \varphi_x \varphi_z U_{\varphi^2} + \\ & \xi_x \eta_z U_{\xi\eta} + \xi_x \varphi_z U_{\xi\varphi} + \eta_x \xi_z U_{\eta\xi} + \varphi_x \xi_z U_{\varphi\xi} + \varphi_x \eta_z U_{\varphi\eta} + \eta_x \varphi_z U_{\eta\varphi}] + A_{23}[\xi_y \xi_z U_{\xi^2} + \\ & \eta_y \eta_z U_{\eta^2} + \varphi_y \varphi_z U_{\varphi^2} + \xi_y \eta_z U_{\xi\eta} + \xi_y \varphi_z U_{\xi\varphi} + \eta_y \xi_z U_{\eta\xi} + \varphi_y \xi_z U_{\varphi\xi} + \varphi_y \eta_z U_{\varphi\eta} + \\ & \eta_y \varphi_z U_{\eta\varphi}] + F = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_{\xi^2} [A_{11} \xi_x^2 + A_{22} \xi_y^2 + A_{33} \xi_z^2 + 2A_{12} \xi_x \xi_y + 2A_{13} \xi_x \xi_z + 2A_{23} \xi_y \xi_z] + \\ & U_{\eta^2} [A_{11} \eta_x^2 + A_{22} \eta_y^2 + A_{33} \eta_z^2 + 2A_{12} \eta_x \eta_y + 2A_{13} \eta_x \eta_z + 2A_{23} \eta_y \eta_z] + \\ & U_{\varphi^2} [A_{11} \varphi_x^2 + A_{22} \varphi_y^2 + A_{33} \varphi_z^2 + 2A_{12} \varphi_x \varphi_y + 2A_{13} \varphi_x \varphi_z + 2A_{23} \varphi_y \varphi_z] + \\ & U_{\xi\eta} [2A_{11} \xi_x \eta_x + 2A_{22} \xi_y \eta_y + 2A_{33} \xi_z \eta_z + 2A_{12} (\xi_x \eta_x + \eta_x \xi_y) + 2A_{13} (\xi_x \eta_z + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta_x \xi_z) + 2A_{23}(\xi_y \eta_z + \eta_y \xi_z)] + U_{\xi\varphi}[2A_{11}\xi_x \varphi_x + 2A_{22}\xi_y \varphi_y + 2A_{33}\xi_z \varphi_z + \\
& 2A_{12}(\xi_x \varphi_x + \varphi_x \xi_y) + 2A_{13}(\xi_x \varphi_z + \varphi_x \xi_z) + 2A_{23}(\xi_y \varphi_z + \varphi_y \xi_z)] + \\
& U_{\eta\varphi}[2A_{11}\eta_x \varphi_x + 2A_{22}\eta_y \varphi_y + 2A_{33}\eta_z \varphi_z + 2A_{12}(\eta_x \varphi_x + \varphi_x \eta_y) + \\
& 2A_{13}(\eta_x \varphi_z + \varphi_x \eta_z) + 2A_{23}(\eta_y \varphi_z + \varphi_y \eta_z)] + F = 0 \\
& A_{11}^* U_{\xi^2} + A_{22}^* U_{\eta^2} + A_{33}^* U_{\varphi^2} + 2A_{12}^* U_{\xi\eta} + 2A_{13}^* U_{\xi\varphi} + 2A_{23}^* U_{\eta\varphi} + F = 0
\end{aligned}$$

telle que :

$$\begin{aligned}
A_{11}^* &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} c_{1i} c_{1j} \\
A_{22}^* &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} c_{2i} c_{2j} \\
A_{33}^* &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} c_{3i} c_{3j} \\
A_{12}^* &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} c_{1i} c_{2j} \\
A_{13}^* &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} c_{1i} c_{3j} \\
A_{23}^* &= \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} c_{2i} c_{3j}
\end{aligned}$$

### 1.2.4 Exemple

$$3U_{xy} - 2U_{xz} - U_{yz} - 4 = 0$$

**Le type :**  $q(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 - 2t_1 t_3 - t_2 t_3 = 0$

$$q(t_1, t_2, t_3) = 3(t_1 t_2 - 2/3 t_1 t_3 - 1/3 t_2 t_3)$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = 3[(t_1 - 1/3 t_3)(t_2 - 2/3 t_3) - 2/9 t_3^2]$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = 3[1/4(t_1 + t_2 - t_3)^2 - 1/4(t_1 - t_2 + 1/3 t_3)^2 - 2/9 t_3^2]$$

$$q(t_1, t_2, t_3) = 3/4(t_1 + t_2 - t_3)^2 - 3/4(t_1 - t_2 + 1/3 t_3)^2 - 2/3 t_3^2$$

On pose :

$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 + t_2 - t_3 \\ \tau_2 = t_1 - t_2 + 1/3t_3 \\ \tau_3 = t_3 \end{cases}$$

$$q(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 3/4\tau_1^2 - 3/4\tau_2^2 - 2/3\tau_3^2$$

les  $\lambda_i$  ne sont pas de même signe alors l'équation (\*) est hyperbolique.

*La forme canonique :*

Cherchons la matrice de transformation  $M$ .

$M$  exprime les anciennes coordonnées en fonction du nouveau c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

On a directement :

$$t_3 = \tau_3 \quad \text{et} \quad t_2 = 1/2\tau_1 - 1/2\tau_2 + 2/3\tau_3 \quad \text{et} \quad t_1 = 1/2\tau_1 + 1/2\tau_2 + 1/3\tau_3$$

Donc

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le changement des variables :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = {}^t M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la fonction  $U(x, y, z)$  devient sur fonction  $V(\xi, \eta, \varphi)$  on a :

$$\xi(x, y, z) = 1/2x + 1/2y$$

$$\eta(x, y, z) = 1/2x - 1/2y$$

$$\varphi(x, y, z) = 1/3x + 2/3y + z$$

$$U_x = 1/2U_\xi + 1/2U_\eta + 1/3U_\varphi$$

$$U_y = 1/2U_\xi - 1/2U_\eta + 2/3U_\varphi$$

$$U_{xy} = 1/4U_{\xi^2} - 1/4U_{\eta^2} + 2/9U_{\varphi^2} + 1/2U_{\xi\varphi} + 1/6U_{\eta\varphi} \dots (1)$$

$$U_{xz} = 1/3U_{\xi^2} + 1/2U_{\xi\varphi} + 1/2U_{\eta\varphi} \dots (2)$$

$$U_{yz} = 2/3U_{\varphi^2} + 1/2U_{\xi\varphi} - 1/2U_{\eta\varphi} \dots (3)$$

en remplaçant (1), (2) et (3) dans (\*), on obtient :

$$3/4U_{\xi^2} - 3/4U_{\eta^2} - 2/3U_{\varphi^2} - 4 = 0$$

### 1.3 Cas de n variables

L'équation aux dérivées partielles linéaires de second ordre à n variables indépendantes, peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}U_{x_i x_j} + F(x_1, \dots, x_n, U, U_{x_1}, \dots, U_{x_n}) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

où  $A_{ij} = A_{ji}$  et  $A_{ij}$  sont des fonctions de variable  $(x_1, \dots, x_n)$  de classe  $c^2$  sur  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Au point fixé  $(x_1, \dots, x_n)$  . on considère la forme quadratique associée :

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}t_i t_j \dots \dots \dots (2)$$

On peut passer à l'aide de transformation linéaire et réduire (2) à une somme de carrés :

$$q(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i'^2 \dots \dots \dots (3)$$

\* si les  $\lambda_i$  de même signe, l'équation (1) sera alors de type elliptique.

\* si  $\lambda_i = 1$  pour  $j = 1, \dots, m < n$  et  $\lambda_i = -1$  pour  $j = m + 1, \dots, n$ , l'équation (1) est hyperbolique.

\* si  $\lambda_i = 0$  alors l'équation est parabolique.

Effectuons sur les variables indépendantes la transformation linéaire non-singulière :

$$M = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\xi_h = \sum_{j=1}^n C_{hj}x_j \dots \dots \dots (4)$$

Avec  $h = 1, \dots, n$

En posant  $U(x_1, \dots, x_n) = V(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$U_{x_j} = \sum_{h,k=1}^n C_{hj}U_{\xi_h}$$

$$U_{x_i x_j} = \sum_{h,k=1}^n C_{h_i} C_{k_i} U_{\xi_h \xi_k}$$

En substituant dans (2), on obtient :

$$\sum_{h,k=1}^n A_{hk}^* U_{\xi_h \xi_k} + F(\xi_1, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_n}) = 0$$

# Chapitre 2

## Méthodes de résolutions des EDP de type hyperbolique

### 2.1 Méthode de d'Alembert

#### 2.1.1 Solution de D'Alembert

Pour établir la solution de D'Alembert de l'équation hyperbolique homogène suivante,

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \dots\dots (1)$$

on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

Ce changement de variables conduit aux relations suivantes :

$$\begin{cases} U_x = U_\xi + U_\eta \\ U_t = c(-U_\xi + U_\eta) \\ \begin{cases} U_{x^2} = U_{\xi^2} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta^2} \\ U_{t^2} = c^2(U_{\xi^2} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta^2}) \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

L'équation (1) devient alors :

$$U_{\xi\eta} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

L'équation (4) peut être facilement intégrée on a :

$$U_{\xi}(\xi, \eta) = f(\xi) \quad \text{et donc} \quad U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \dots\dots\dots (5)$$

où  $F$  est la primitive de  $f$ .

On constate donc qu'une solution sur le domaine non bornée  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  se met sous la forme :

$$U(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions arbitraires que l'on suppose au moins deux fois continûment différentiables .

### 2.1.2 Problème de Cauchy

On introduit le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques :

$$\begin{cases} U_{t^2} - c^2 U_{x^2} = 0 & , x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ U(x, 0) = U^0(x) & , x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots (6) \\ U_t(x, 0) = V^0(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En utilisant la solution de D'Alembert (5), les conditions initiales conduisent à :

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = U^0(x) & \dots\dots\dots (7) \\ -cF' + cG' = V^0(x) \end{cases}$$

En intégrant la second équation en espace, on obtient :

$$c[G - F] = \int_{x_0}^x V^0(s)ds + k_1 \dots\dots\dots (8)$$

$$G - F = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x V^0(s)ds + k$$

D'où la détermination de  $F$  et  $G$  par rapport aux conditions initiales :

$$G(x) = 1/2[U^0(x) + 1/c \int_{x_0}^x V^0(s)ds + k]$$

$$F(x) = 1/2[U^0(x) - 1/c \int_{x_0}^x V^0(s)ds - k]$$

La solution complète du problème est donc par :

$$U(x, t) = 1/2[U^0(x + ct) + U^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} V^0(\eta) d\eta \dots \dots \dots (9)$$

### 2.1.3 Application au problème de Dirichlet

La résolution du problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} U_{t^2} - c^2 U_{x^2} = 0 & , x > 0, t > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x) & , x > 0 \\ U_t(x, 0) = \psi(x) & , x > 0 \\ U(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

lorsque  $\varphi$  et  $\psi$  satisfont les conditions de compatibilité  $\varphi(0) = 0$  et  $\psi(0) = 0$ , se ramène à celle du problème de Cauchy par la méthode dite des images. en effet, si  $U$  est solution alors  $(x, t) \rightarrow U(-x, t)$  est solution du problème symétrique, posé sur  $\mathbb{R}^-$ , avec  $\varphi$  et  $\psi$  prolongées en des fonctions impaires :

$$\varphi(x) = -\varphi(-x) \quad \text{et} \quad \psi(x) = -\psi(-x) .$$

Donc la fonction  $U$  définie comme la superposition des deux solutions est une solution sur  $\mathbb{R}$  tout entier, sauf peut-être en 0. Réciproquement, soit

$$U(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

Cette fonction satisfait l'équation des ondes partout où elle est deux fois dérivable. c'est le cas si  $\varphi$  et  $\psi$  sont réciproquement deux fois et une fois dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , sauf peut-être sur le cône caractéristique  $\{(x, t), x \pm ct = 0\}$

(si  $\varphi$  satisfait la condition de compatibilité supplémentaire  $\varphi'(0) = 0$ , il n'y a pas de problème.)

de plus, lorsque  $\varphi$  et  $\psi$  sont impaires, il en est de même de  $U$ . par conséquent c'est bien une solution du problème de Dirichlet homogène, sauf peut-être sur la demi droite  $\{x = ct\}$ .

lorsque  $x > ct$ , les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont évaluées en des points positifs. Lorsque  $x < ct$ , on peut vouloir exprimer originales, définies sur  $\mathbb{R}^+$ . on trouve ainsi la formule

$$U(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(ct + x) + \varphi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y) dy$$

## 2.2 Méthode de la séparation des variables

Illustrons la méthode de séparation de variables pour le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{x^2} - \frac{1}{a^2} U_{t^2} = 0 \dots\dots\dots(1) \quad / 0 < x < l, 0 < t < +\infty \\ U(0, t) = U(l, t) = 0 \dots\dots\dots(2) \quad / 0 < t < +\infty \\ U(x, 0) = \varphi(x) \\ U_t(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

où 
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x & / 0 < x < x_0 \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0} & / x_0 < x < l \end{cases}$$

Considérons l'équation suivante :

$$U_{x^2} - \frac{1}{a^2} U_{t^2} = 0 \quad / 0 < x < l, 0 < t < +\infty$$

avec les condition initiales

$$U(x, 0) = \varphi(x) \text{ et } U_t(x, 0) = 0$$

et les conditions à la frontière

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \quad / 0 < t < +\infty$$

La première étape consiste à étudier un problème intermédiaire et de recherche de solution  $U(x, t)$  de la forme spéciale  $f(x).g(t)$  où  $f, g$  sont respectivement des fonctions de  $x$  et de  $t$  ayant au moins des dérivées premières et secondes continues.

La second étape consiste à substituer ces solutions spéciales dans l'edp .

Dans notre cas, considérons d'abord le problème intermédiaire avec les conditions à la frontière suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{x^2} - \frac{1}{a^2} U_{t^2} = 0 \dots\dots\dots(1) \quad / 0 < x < l, 0 < t < +\infty \\ U(0, t) = U(l, t) = 0 \dots\dots\dots(2) \quad / 0 < t < +\infty \end{array} \right.$$

On va cherche les solutions particulières de la forme :

$$U(x, t) = f(x).g(t) \dots\dots\dots(3)$$

qui vérifient les conditions (2), Ceci permet de scinder l'équation aux dérivées partiales (1) en deux équation différentielles ordinaires l'une en  $f$ , l'autre en  $g$ . En effet, reportant (3) dans (1), on a :

$$f''(x).g(t) - \frac{1}{a^2}g''(t).f(x) = 0$$

en divisant par  $f(x).g(t)$  et on obtient :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \dots\dots\dots (4)$$

Le membre de gauche ne d'epend que  $x$ , et celui de droite de  $t$  seulement.

Les deux variables  $x$  et  $t$  étant indépendantes, l'égalité (4) n'est possible que si les deux membres sont égaux à une même constante  $\lambda$ , l'équation (1) est donc équivalente aux deux équations :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \quad \text{c.à.d} \quad f''(x) - \lambda f(x) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{g''(t)}{g(t)} = \lambda \quad \text{c.à.d} \quad g''(t) - \lambda a^2 g(t) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

Discutons suivant les valeurs de  $\lambda$ .

\* si  $\lambda = k^2 > 0$ , alors la solution générale de l'équation (1) est de la forme :

$$f(x) = A \exp(-kx) + B \exp(kx)$$

où  $A$  et  $B$  sont des nombres réels, Les conditions  $f(0) = 0$  et  $f(l) = 0$  donnent  $A + B = 0$  et

$$A \exp(-kl) + B \exp(kl) = 0.$$

Ce système d'équations n'a qu'une seule solution, la solution triviale  $(A, B) = (0, 0)$

En effet, le déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp(-kl) & \exp(kl) \end{vmatrix} = \exp(kl) - \exp(-kl) = \frac{\exp(2kl)-1}{\exp(kl)} \neq 0$$

Si non  $\exp(2kl) - 1 = 0$  et donc  $2kl = 0$  Ceci est absurde parce que  $k$  et  $l$  sont différent de 0.

donc  $A = B = 0$ .

Ainsi dans le cas où  $\lambda = k^2 > 0$  alors  $f \equiv 0$  et donc aussi  $U(x, t) \equiv 0$  pour  $0 \leq x \leq l$  et  $t \geq 0$ .

\* si  $\lambda = 0$ , alors la solution générale de l'équation (1) est de la forme  $f(x) = A + Bx$  où  $A$  et  $B$  sont des nombres réels. Les conditions  $f(x) = 0$  et  $g(l) = 0$  donnent  $A = 0$  et  $A + Bl = 0$  comme ci-dessus, ce système n'a qu'une seule solution, la solution triviale  $(A, B) = (0, 0)$  car  $l \neq 0$ .

Ainsi dans le cas où  $\lambda = 0$ , alors  $f \equiv 0$  et  $U(x, t) \equiv 0$  pour tout  $0 \leq x \leq l$  et  $t \geq 0$ .

Les deux cas précédents sont donc à exclure.

\* si  $\lambda = -k^2$  alors la solution générale de (5) est :

$$f(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \dots \dots \dots (7)$$

Appliquons les conditions (2), ne portent que sur  $f(x)$  :

$$U(0, t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \text{ donc } B = 0$$

$$U(l, t) = 0 \Rightarrow f(l) = 0 \text{ donc } k = \frac{n\pi}{l}, n = 1, 2, \dots$$

Il y a donc une infinité de solutions possibles correspondant aux valeurs successives  $k_n = \frac{n\pi}{l}$ .

Pour ces valeurs, les solutions correspondantes de (6) s'écrivent :

$$g_n(t) = A_n \sin(U_n t) + B_n \cos(U_n t) \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{avec } U_n = K a = \frac{n\pi}{l} a$$

combinant (7) et (8) on obtient une infinité de solutions :

$$U_n(x, t) = (A_n \sin U_n t + B_n \cos U_n t) \sin k_n x \dots \dots \dots (9)$$

La solution formelle est alors :

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin U_n t + B_n \cos U_n t) \sin k_n x$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad U_t(x, 0) = 0$$

pour tout  $x$ ,  $0 \leq x \leq l$

Il nous faut seulement considérer les conditions initiales.

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x & / 0 < x < x_0 \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0} & / x_0 < x < l \end{cases}$$

$$U_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0$$

sont respectivement les séries de Fourier sinus de  $\varphi(x)$  c'est à dire que nous avons :

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

On a :

$$B_n = \begin{cases} \frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{hx}{x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \dots\dots\dots (1) \\ \frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{h(l-x)}{l-x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) nous avons :

$$f(x) = \frac{hx}{x_0}, \quad g'(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$f'(x) = \frac{h}{x_0}, \quad g(x) = -\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{hx}{x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \left[ -\frac{hlx}{n\pi x_0} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_0^{x_0} + \frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{hl}{n\pi x_0} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{hx}{x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) + \frac{2}{l} \left[ \frac{h}{x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_0^{x_0}$$

$$\frac{2}{l} \int_0^{x_0} \frac{hx}{x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) + \frac{2h}{l} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)$$

Dans l'équation (2) nous avons :

$$f(x) = \frac{h(l-x)}{l-x_0}, \quad g'(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{h}{l-x_0}, \quad g(x) = -\frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{h(l-x)}{l-x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \left[ -\frac{lh(l-x)}{n\pi(l-x_0)} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_{x_0}^l - \frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{hl}{n\pi(l-x_0)} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{h(l-x)}{l-x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) - \frac{2}{l} \left[ \frac{h}{l-x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_{x_0}^l$$

$$\frac{2}{l} \int_{x_0}^l \frac{h(l-x)}{l-x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -\frac{2h}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) - \frac{2h}{l(l-x_0)} \sin(n\pi) + \frac{2h}{l(l-x_0)} \sin\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right)$$

Donc on a  $A_n = 0$

Nous allons maintenant déterminer des conditions suffisantes sur  $\varphi(x)$  pour que la solution formelle soit une solution du problème posé :

$$U(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0(l-x_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}$$

$$U_n(x, t) = (A_n \sin U_n t + B_n \cos U_n t) \sin k_n x \dots\dots\dots (9)$$

On a :

- 1)  $\varphi(x)$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $[0, l]$  et  $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$
- 2)  $\varphi'(x)$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $[0, l]$ .
- 3)  $\varphi''(x)$  est continue et lisse par morceaux sur l'intervalle  $[0, l]$  et  $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$

dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = U(x, 0) = \varphi(x)$$

et la série de Fourier sinus de  $\varphi$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} B_n \sin\left(\frac{n\pi(x-at)}{l}\right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi(x-at)}{l}\right) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} B_n \sin\left(\frac{n\pi(x-at)}{l}\right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi}{l}\right) (-a) \cos\left(\frac{n\pi(x-at)}{l}\right)$$

$$\text{La série de Fourier : } \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$$

est la série de Fourier sinus de la fonction  $\varphi$ .

## 2.3 Méthode de l'intégrale de Fourier

La transformée de Fourier de  $f(x)$  est définie par la formule :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\xi x) dx.$$

La transformation inverse de Fourier de  $\widehat{f}(\xi)$  est définie par la formule

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \exp(i\xi x) d\xi.$$

Supposons  $x \in ]0, +\infty[$  :

1) si  $f$  est paire.

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos \xi x - i \sin \xi x) dx$$

or les fonctions  $x \rightarrow f(x) \cos \xi x$  et  $x \rightarrow f(x) \sin \xi x$  sont respectivement paire et

impaire donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx + \int_{-\infty}^0 f(x) \cos \xi x dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx = 0$$

donc si  $f$  est paire,  $\mathcal{F}(f)(\xi)$  est un nombre réel et  $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \cos \xi x \, dx$$

2) si  $f$  est impaire alors on a de la même façon :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x \, dx.$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \sin \xi x \, dx$$

**Transformées de dérivées :** si  $x \in \mathbb{R}$

on voit que la dérivation en  $x$  dans le domaine du temps devient une multiplication par  $i\xi$  dans le domaine des fréquences. en effet, par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\xi) &= \widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \exp(-i\xi x) dx \\ &= f'(x) \exp(-i\xi x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi f(x) \exp(-i\xi x) dx \\ &= i\xi \mathcal{F}(f)(\xi) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(f'')(\xi) = \widehat{f''}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) \exp(-i\xi x) dx = \xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi)$$

où le terme intégré est nul en  $\pm\infty$  du fait que  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  avec  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

De même, la dérivée  $f'(\xi)$  de  $f(\xi)$  dans le domaine des fréquences provient de la multiplication par  $-ix$  dans le domaine du temps :

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f'(x) \exp(-i\xi x) dx = \widehat{(-ix)f}(\xi)$$

**Transformée cosinus :**  $0 < x < \infty$   $\mathcal{F}(f')(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = \int_0^{+\infty} f'(x) \cos \xi x \, dx$

on intègre par partie et on obtient :

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = \xi \mathcal{F}(f)(\xi) - f(0)$$

$$\mathcal{F}(f'')(\xi) = \widehat{f''}(\xi) = \xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi) - f'(0)$$

**Transformée sinus :**  $0 < x < \infty$   $\mathcal{F}(f')(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = \int_0^{+\infty} f'(x) \sin \xi x \, dx$

on intègre par partie et on obtient :

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \widehat{f'}(\xi) = -\xi \mathcal{F}(f)(\xi)$$

$$\mathcal{F}(f'')(\xi) = \widehat{f''}(\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}(f)(\xi) + \xi f(0)$$

### 2.3.1 Exemples

1) on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} U_{t^2} = a^2 U_{x^2} + f(x, t) & , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ U_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Pour ce problème en utilisant la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}(U)(\xi, t) = \widehat{U}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t) \exp(-i\xi x) dx$$

$$\mathcal{F}(U_x)(\xi, t) = \widehat{U}_x(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_x(x, t) \exp(-i\xi x) dx = \exp(-i\xi x) U(x, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi) U(x, t) dx$$

$$\widehat{U}_x(\xi, t) = (i\xi) \widehat{U}(\xi, t)$$

$$\mathcal{F}(U_{x^2})(\xi, t) = \widehat{U}_{x^2}(\xi, t) = (i\xi)^2 \widehat{U}(\xi, t)$$

La dérivée partielle en  $t$  par la transformation de fourier reste une dérivée partielle en  $t$  alors :

$$\widehat{U}_{t^2}(\xi, t) = -a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) + \widehat{f}(\xi, t)$$

$$\widehat{U}_{t^2}(\xi, t) + a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi, t)$$

L'équation se transforme, pour  $\xi$  fixé, en une équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre en  $t$  avec second membre :

$$\widehat{U}_{t^2}(\xi, t) + a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) = 0 \dots \dots \dots (E_0)$$

$$\widehat{U}_{t^2}(\xi, t) + a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi, t) \dots \dots \dots (E)$$

$$\Delta = -4a^2 \xi^2 = 4a^2 \xi^2 i^2 < 0$$

$$r_1 = -ia\xi \quad \text{et} \quad r_2 = a\xi i$$

La solution est de la forme :

$$\widehat{U}(\xi, t) = \widehat{U}_1(\xi, t) + \widehat{U}_2(\xi, t)$$

telle que

$$\begin{cases} \widehat{U}_1(\xi, t) \text{ est la solution générale de } (E_0) \\ \widehat{U}_2(\xi, t) \text{ est la solution particulière de } (E) \end{cases}$$

$$\widehat{U}_1(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t)$$

\* si  $\widehat{U}_2(\xi, t) = M \cos(\omega t) + N \sin(\omega t)$

où  $M, N, \omega \in \mathbb{R}$ , on a :

\* si  $(i\omega)$  n'est pas racine de l'équation caractéristique associée a  $(E_0)$  alors :

$$\widehat{U}_2(\xi, t) = a\xi \sin(\omega t)$$

Donc

$$\widehat{U}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t) + a\xi \sin(\omega t)$$

La solution générale est :

$$\widehat{U}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t) + a\xi \sin(\omega t)$$

$c_1$  et  $c_2$  étant deux fonctions de  $\xi$  indépendantes de  $t$  que nous déterminons à l'aide

des conditions initiales alors :

$$\begin{cases} \widehat{U}(\xi, 0) = 0 \\ \widehat{U}_t(\xi, 0) = 0 \end{cases}, t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{U}(\xi, 0) = c_1(\xi) = 0 \\ \widehat{U}_t(\xi, 0) = a\xi c_2(\xi) + \omega a\xi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) = -\omega \end{cases}$$

Donc

$$\widehat{U}(\xi, t) = -\omega \sin(a\xi t) + a\xi \sin(\omega t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t) \exp(-i\xi x) dx$$

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}(\xi, t) \exp(i\xi x) d\xi$$

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\omega \sin(a\xi t) + a\xi \sin(\omega t)] \exp(i\xi x) d\xi$$

$$U(x, t) = \frac{-\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(a\xi t) \exp(i\xi x) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a\xi \sin(\omega t) \exp(i\xi x) d\xi$$

\* si  $(i\omega)$  est racine simple de l'équation caractéristique associée a  $(E_0)$  alors :

$$\widehat{U}_2(\xi, t) = at\xi \sin(\omega t)$$

Donc

$$\widehat{U}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t) + at\xi \sin(\omega t)$$

La solution générale est :

$$\widehat{U}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t) + at\xi \sin(\omega t)$$

$c_1$  et  $c_2$  étant deux fonctions de  $\xi$  indépendantes de  $t$  que nous déterminons à l'aide

des conditions initiales alors :

$$\begin{cases} \widehat{U}(\xi, 0) = 0 \\ \widehat{U}_t(\xi, 0) = 0 \end{cases}, t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{U}(\xi, 0) = c_1(\xi) = 0 \\ \widehat{U}_t(\xi, 0) = a\xi c_2(\xi) + \omega at\xi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(\xi) = 0 \\ c_2(\xi) = -\omega t \end{cases}$$

Donc

$$\widehat{U}(\xi, t) = -\omega t \sin(a\xi t) + at\xi \sin(\omega t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t) \exp(-i\xi x) dx$$

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{U}(\xi, t) \exp(i\xi x) d\xi$$

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\omega t \sin(a\xi t) + at\xi \sin(\omega t)] \exp(i\xi x) d\xi$$

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\omega t \sin(a\xi t) \exp(i\xi x) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a t \xi \sin(\omega t) \exp(i\xi x) d\xi$$

2) nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} U_{t^2} = a^2 U_{x^2} & , 0 < x < +\infty, t > 0 \\ U(0, t) = \mu(t) & x > 0 \\ U_t(x, 0) = U_t(\xi, 0) = 0 \end{cases}$$

\*) si  $U(x, t)$  est paire, alors :

$$\mathcal{F}(U)(\xi, t) = \widehat{U}(\xi, t) = \int_0^{+\infty} U(x, t) \cos \xi x \, dx$$

$$\mathcal{F}(U_\xi)(\xi, t) = \widehat{U}_\xi(\xi, t) = \int_0^{+\infty} U_x(x, t) \cos \xi x \, dx$$

$$\mathcal{F}(U_{\xi\xi})(\xi, t) = \widehat{U}_{\xi\xi}(\xi, t) = [U(x, t) \cos \xi x]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \xi U(x, t) \sin \xi x \, dx$$

$$\mathcal{F}(U_\xi)(\xi, t) = \widehat{U}_\xi(\xi, t) = \xi \widehat{U}(\xi, t) - \widehat{U}(0, t) = \xi \widehat{U}(\xi, t) - \mu(t)$$

$$\mathcal{F}(U_{\xi^2})(\xi, t) = \widehat{U}_{\xi^2}(\xi, t) = \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) - \widehat{U}_\xi(0, t) = \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) - \mu'(t)$$

Donc on a :

$$\widehat{U}_{t^2} = a^2 \widehat{U}_{\xi^2} = a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) - \mu'(t)$$

$$\widehat{U}_{t^2} - a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) = -\mu'(t)$$

On a une équation différentielle du second ordre avec second membre alors :

$$\Delta = 4a^2 \xi^2 > 0$$

Donc les racines suivantes :  $r_1 = -a\xi$  et  $r_2 = a\xi$

$$U(\xi, t) = U_1(\xi, t) + U_2(\xi, t)$$

$$U_1(\xi, t) = c_1(\xi) \exp(a\xi t) + c_2(\xi) \exp(a\xi t)$$

$$U(\xi, t) = c_1(\xi) \exp(a\xi t) + c_2(\xi) \exp(a\xi t) + U_2(\xi, t)$$

\*) si  $U(x, t)$  est impaire, alors :

$$\mathcal{F}(U)(\xi, t) = \widehat{U}(\xi, t) = \int_0^{+\infty} U(x, t) \sin \xi x \, dx$$

$$\mathcal{F}(U_\xi)(\xi, t) = \widehat{U}_\xi(\xi, t) = \int_0^{+\infty} U_x(x, t) \sin \xi x \, dx$$

$$\mathcal{F}(U_{\xi\xi})(\xi, t) = \widehat{U}_{\xi\xi}(\xi, t) = [U(x, t) \sin \xi x]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \xi U(x, t) \cos \xi x \, dx$$

$$\mathcal{F}(U_\xi)(\xi, t) = \widehat{U}_\xi(\xi, t) = -\xi \widehat{U}(\xi, t)$$

$$\mathcal{F}(U_{\xi^2})(\xi, t) = \widehat{U}_{\xi^2}(\xi, t) = -\xi^2 \widehat{U}(\xi, t) + \xi \widehat{U}(0, t) = -\xi^2 \widehat{U}(\xi, t) + \xi \mu(t)$$

Donc on a :

$$\widehat{U}_{t^2} = a^2 \widehat{U}_{\xi^2} = -a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) + \xi \mu(t)$$

$$\widehat{U}_{t^2} + a^2 \xi^2 \widehat{U}(\xi, t) = \xi \mu(t)$$

On a une équation différentielle du second ordre avec second membre alors :

$$\Delta = -4a^2 \xi^2 < 0$$

Donc les racines suivantes :  $r_1 = ia\xi$  et  $r_2 = -ia\xi$

La solution est de la forme :

$$\widehat{U}(\xi, t) = \widehat{U}_1(\xi, t) + \widehat{U}_2(\xi, t)$$

telle que

$$\begin{cases} \widehat{U}_1(\xi, t) \text{ est la solution générale de } (E_0) \\ \widehat{U}_2(\xi, t) \text{ est la solution particulière de } (E_0) \end{cases}$$
$$\widehat{U}(\xi, t) = c_1(\xi) \cos(a\xi t) + c_2(\xi) \sin(a\xi t) + \widehat{U}_2(\xi, t)$$

## **Conclusion**

Nous avons étudié les équations aux dérivées partielles du second ordre de type hyperbolique, Nous avons commencé le travail par une classification des EDP en trois types en suite nous avons étudié les méthodes de résolution de ces EDP.

On a traité quelques exemples.

## Bibliography

- [1] Malik MAMODE, Mathématiques pour la physique, Ellipses, 2001.
- [2] Robert Bédard, MAT4112, Kluwer, London, juillet 2007 .
- [3] Sylvie Benzoni, Introduction aux équations aux dérivées partielles,  
DiderotEditeur, 2005.
- [4] Claude BARDOS et Thierry PAUL, Equations aux dérivées partielles,  
Masson, Paris, 1983.
- [5] Jean-Pierre ANTOINE, MÉTHODE MATHÉMATIQUE DE LA PHYSIQUE,  
Journal of mathematical physics, 1971.
- [6] Michel LECOMTE, Transformation de Fourier, Ecoledes Mines de Douai,2001.