الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : analyse fonctionnelle et applications.

Par :

Rouane Bahidja

Thème

Existence, unicité et stabilisation d'un système de type Timoshenko avec deuxième son en présence d'un terme de retard varié dans le temps

---

Devant le jury composé de :

YAGOUB Ameur	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
OUCHENANE Djamel	Professeur	Université de Laghouat	Examinateur
KHALILI Zineb	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023 -2024

Dédicace

Ce modeste travail est dédié :

À
Ma mère "**Rokia Siafa**" qui m'a donné tout le courage
À
Soutenez mes ambitions, mon père"**Maamer Rouane** "
À
Mon oncle" **Herzallah Rouane**
À
Mon bras mon frère "**Lakhedar Rouane**"
À
Toute ma famille. Spécialement : mes mes soeurs,mes tantes et mes oncles.
À
toutes mes amies surtout ma chérie" **Sarah Kazouai**"
À
tous nos professeurs distingués.
À
la grand familles" **Rouane**".

Rouane Bahidja

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail.
Je tiens à remercier chaleureusement, ma encadreuse" **Dr.Zineb Khalili**"
Tous mes remerciements et ma gratitude vont à" **Yagoub Ameur** " qui a donné et a été généreux en donnant et en allumant les lampes de la connaissance et de la connaissance dans nos coeurs, mille mercis
Tous mes remerciements et ma gratitude vont à "**Ouchenane Djamel**" Merci pour vos efforts inestimables pour faire progresser notre éducation
Tout mes sincères remerciements vont également à notre chef de département "**Fares Yazid**" Je remercie énormément tout mes maitres, de primaire jusqu'à l'université.

Rouane Bahidja

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة إمكانية إستقرار نظام تيموشينكو في وجود المرونة الحرارية ذات صوت ثانٍ مع فترة تأخير زمنية مختلفة في المؤثرات المرتدة الداخلية. الوضــع المستقر للمشكلــة يُكفــل باستخدام تقنية معيارية متغيرة لــ**كاتو** .وعلاوة على ذلك، يتضح استقرار النظام بتطبيق طريقةالطاقة

الكلمات المفتاحية:نظام تيموشينكو، درجة المرونة، الصوت الثاني، السد الخطي، الانحلال الإستعراضي

Abstract

The main goal of this work is to investigate the exponential stability of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a time-varying delay term in the internal feedback. The well-posedness of the problem is assured by using the variable norm technique of Kato. Furthermore the stability of the system is shown by applying the energy method.

Keywords : Timoshenko system, Thermoelasticity, Second sound, Linear damping, Exponential decay

Résumé

L'objectif principal de ce travail est l'étudier la stabilité exponentielle du système de Timoshenko en thermoélasticité de deuxième son avec un terme de retard veriée dans le temps dans des réactions internes, l'existence et l'unicite de la solution de notre système sont assurées par l'utilisation de technique de kato. De plus, la stabilité du notre système est démontrée par l'application de la méthode énergétique.

Mots clés : Système de Timoshenko, Thermoélasticité, Second son, Amortissement linéaire, Décroissance exponentielle

Table des matières

Notation

$D(A)$	domaine de l'operateur A
p. p	presque par tout
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev $1 \leqslant m < \infty$
$H^1(\Omega),\ H_0^1(\Omega),\ H^2(\Omega)$	Espaces de Sobolev
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue $1 \leqslant p \leqslant +\infty$
A^*	L'adjoint de l'opérateur A.
$(S(t))_{t\geqslant 0}$	Semi-groupe
$\|\|\|_E$	La norme sur l'espace vectoriel normé E.
$C_0(\Omega)$	Espace des fonctions continues a support compact contenu dans Ω.
$\dfrac{\partial u}{x_i}$	Dérivée de u par rapport x_i
$\langle,\rangle$	Produit scalaire
$\|\|\|_E$	La norme sur l'espace vectoriel normé E.
$C^k(\Omega)$	fonctions k fois continûment différentiables sur (Ω) $(k \geqslant 0)$
I	Identité
Δ	La placien
$\mathbb{E}$	Espace énergitique
Y	Forme bilinéaire

Introduction

L'étude des systèmes de Timoshenko a débuté en 1921 dans le travail de Timoshenko [9], dans lequel il a donné le système couplé suivant d'équations hyperboliques :

$$\begin{cases} \rho\phi_{tt} = (K(\phi_x - \psi))_x, & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty) \\ I\rho\psi_{tt} = (EI\psi_x)_x + K(\phi_x - \psi), & \text{dans } (0, L) \times (0, +\infty), \end{cases} \tag{I}$$

où t désigne la variable temporelle, x est la variable spatiale le long de la poutre de longueur L, dans sa configuration d'équilibre, ϕ est le déplacement transversal de la poutre et ψ est l'angle de rotation du filament de la poutre. Les coefficients $\rho, I\rho, E, I$ et K sont respectivement la densité (la masse par unité de longueur), le moment polaire d'inertie d'une section transversale, le module de Young de l'élasticité , le moment d'inertie d'une section et le module de cisaillement.

Dans le but de trouver la dissipation minimale telle que la solution du système couplé (I) décroisse uniformément vers zéro, lorsque le temps tend vers l'infini, plusieurs auteurs ont introduit différents types de mécanismes dissipatifs pour stabiliser le système (I). Par exemple, deux amortissements linéaires par frottement ϕ_t et ψ_t agissant respectivement sur la première et la deuxième équations ont été utilisés dans [8]. De plus, de nombreux auteurs ont prouvé que la présence d'un seul amortissement (amortissement par frottement ϕ_t, amortissement par frottement localisé $\alpha(x)\phi_t$, de type mémoire $(\int_0^t g(t-\tau)\psi_{xx}(\tau)d\tau)$ agissant dans le domaine sur une partie de celui-ci, suffit à stabiliser le système. L'amortissement par frottement avec un signe indéfini a également été récemment pris en compte dans [1].

Dans ce mémoire, on s'intérsse à l'étude du problème suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t) - K(\varphi_x + \psi)_x(x,t) + \mu_1\phi_t(x,t) + \mu_2\phi_t(x, t-\tau(t)) = 0 \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + K(\varphi_x + \psi)(x,t) + \gamma\theta_x(x,t) = 0 \\ \rho_3\theta_t(x,t) + \kappa q_x(x,t) + \gamma\psi_{tx}(x,t) = 0 \\ \tau_0 q_t(x,t) + \delta q(x,t) + \kappa\theta_x(x,t) = 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x) \\ \theta(x,t) = \theta_0(x), q(x,0) = q(x,0) = q_0(x), \varphi_t(x, t-\tau(0)) = f_0(x, t-\tau(0)) \\ \varphi(0,t) = \varphi(1, t = \psi(0,t) = \psi(1,t) = q(0,t) = q(1,t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Où $(x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \gamma, \tau_0, \delta, \kappa, \mu_1, \mu_2, K$ sont des constants poitives,$\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \theta_0$, q_0, f_0 sont des fonctions initial et $\tau(t) > 0$ est le retard variée dans le temps.

Et sous l'hypothèse $\mu_1 \leqslant \mu_2$

$$\mu_2 < \sqrt{1-d}\mu_1, \quad \text{pour tout} \ \ d < 1, \tag{2}$$

où la constante d satisfaite

$$\tau\prime(t) \leq d < 1, \quad \text{pour tout } t > 0, \tag{3}$$

et

$$\tau \in W^{2,\infty}([0,T]), \quad \text{pour} \ \ \text{tout } t > 0. \tag{4}$$

Ce travail constitue trois chapitres, le premier chapitre contient des rappels sur quelques outils mathématiques,on donne des définition sur les espaces fonctionnelles, citer quelques inegalités nécessaires et on a terminé par la théorie de Semi-groupes

Le seconde chapitre sera consacré à l'existence et l'unicité de la solution du problème considéré. La preuve est basée sur certaines hypothèses sur les données initiales et la technique de Kato[11].

Dans le dernièr chapitre, on montre que le comportement asymptotique de la solution est dépend du comportement de le terme $\tau(t)$ variée dans le temps. Nous donnons la décroissance exponentielle de la solution, en construisant une fonction Lyapunov L, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème considéré.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Espaces fonctionnelles

C'est un espace vectoriel dont les élèments sont des fonctions.

Espace normé

Définition 1:
un espace vectoriel normé, si a tout $x \in E$ correspond un nombre positive $\|x\|$ (appele norme de x) tel que : les trois axiomes suivantes, dits axiomes de la norme, sont vérifies :

1. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ainsi donc, la norme est une application définie sur E prenant des valeurs positives et vérifiant les propriétés 1 à 3.

Espaces de Banach

Définition 2:
un espace normé est dit complet si tout suite de cauchy est convergente.
Un espace normé complet est appele espace de Banach.

Espaces de Hilbert

Produit scalaire

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ .Un produit scalaire sur H est une fonction $\langle , \rangle : H \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in H, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$et $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\forall x \in H, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y, z \in H \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Définition 3:
un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est apple espace de Hilbert s'il est complet au sens de la norme associee au produit scalaire.

1.1.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue, les fonctions f seront considéres de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4:
Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p \leq \infty$, et Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ on défini :

$$L^p = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{N} : f \textit{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p dx \leq \infty \right\}.$$

On défini sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad si\ p = +\infty :$$

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \mapsto \mathbb{R}\ tel\ que\ \exists\ c \in \mathbb{R} \text{ vérifiant : } |f| \leq c.pp\ sur\ \Omega \}.$$

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = inf \{ c \in \mathbb{R}\ tq\ |f| \leq c.pp\ sur\Omega \}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 5:
Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}$ par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}.$$

Où :
$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \alpha_j \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \cdots \partial_1^{\alpha_n}$; où $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial_{xj}}$.
On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

et la norme associé à ce produit scalaire :

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^m}(\Omega) &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u(x)\|_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Espaces de Sobolev $(W^{m,p}(\Omega)(m \in \mathbb{N}, p \in [1, +\infty])$

Définition 6:
Soient $(m,p) \in \mathbb{N} \times [1, +\infty]$, on note $D^\alpha f = L_a$. Donc on défini $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \ tq : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ avec \ |\alpha| \leq m, \exists \ \mathcal{L}_a \in L^p(\Omega)\} \text{ vérifiant :}$$
$$\int_\Omega f(x) D^\alpha Q(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \mathcal{L}_a(x) \varphi(x) dx, \forall Q \in D(\Omega).$$

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}}(\Omega) = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{L}_a\|_{L^p(\Omega)}.$$

Si $1 \leq p \leq +\infty$, on peut considérons sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme équivalente

$$\|f\|_{W^{m,p}}(\Omega) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{L}\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cas particuilier :

1. $W^{0,p} = L^p(\Omega)$
2. $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Théorème 1:
(Densité) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $\leqslant q < \infty$. Alors il existe une suite u_n dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ **(Intégration par parties)** Soit $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Alors $(uv)' = u'v + uv'$.

De plus, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'v = -u(x)v(x) + u(y)v(y) - \int_x^y uv', \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1.2 Quelques Inégalités

1.2.1 Inégalité Tringlaire

$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|.$

Preuve 1:
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (\quad &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow |x+y| \leq |x| + |y|.$$

1.2.2 Inégalité du Minkowisky

Soit (x, A, μ) un espace mesuré avec $X \neq \varnothing$, $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions $f, g \in L^p(X)$, alors :

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

C'est-à-dire :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

Preuve 2:
L'espace $L^p(X)$ etant un espace vectoriel, $f+g$ est dans $L^p(X)$.
Si $\|f+g\|_p = 0$, (l'inégalité est vérifié).

On suppose maintenant que $\|f+g\|_P > 0$.
On a :

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_P^p &= \int_x |f+g|^p d\mu \\
&\leq (\int_x |f| + |g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\
&= \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \int |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1})} d\mu \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^p}).
\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtes par $(\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^p})$, on obtient l'inégalité cherché.

1.2.3 Inégalité du Young

Lemme 1:
pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$ on a

$$ab \leqslant \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}.$$

Où δ est une constante positif.

Preuve 3:
On a

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad (2\delta a - b)^2 \geqslant 0,$$

pour tout $\delta > 0$ on a :

$$4\delta^2 a^2 + b^2 - 4\delta ab \geqslant 0 \Rightarrow 4\delta ab \leqslant 4\delta^2 a^2 + b^2.$$

Donc :

$$ab \leqslant \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta}.$$

La forme standard de l'inegalite du Young

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in [1, +\infty[$ *tq* : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve 4:

La fonction $exp\theta \to exp(\theta)$ est convexe de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ (on dit que f est convexe si $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),\ avec\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad telque$
$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$) , on a donc pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ *et tout* $t \in [0,1]$

$$exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\ exp(\theta_1) + (1-t)exp(\theta_2),$$

soit $a, b > 0$, *on prend* $t = \frac{1}{p}$(*de sorte que* $1 - t = \frac{1}{q}$)

$$\theta_1 = p\ \ln(a)\ et\ \theta_2 = q\ \ln(b).$$

On obtient :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.2.4 Inégalité du Cauchy-Schwarz :

Soit; $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$, alors :

$$\left(\int_a^b |fg|\right) \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}.$$

Preuve 5:

On considére pour $\lambda \in \mathbb{R}$ le polynôme en λ

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \int_a^b (|f| + \lambda|g|)^2 dx \\ &= \int_a^b (|f|^2 + 2\lambda|f||g| + |g|^2\lambda^2) dx \\ &= \int_a^b (|f|^2 dx + 2\lambda \int_a^b (|f||g| dx + \lambda^2 \int_a^b |g|^2 dx. \end{aligned}$$

Le polynôme en λ de degré égal à 2 toujours positif, alors on obtient

$$\Delta = \left(2\int_a^b |f||g|\right)^2 - 4\int_a^b |f|^2 \int_a^b |g|^2 \leq 0.$$

L'inégalité $\Delta \leqslant 0$ est donc équivalente à

$$\left(\int_a^b |fg|\right) dx \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} dx \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2} dx.$$

1.2.5 Inégalité du Hölder

Soient $p, q \in [1, +\infty[\ tq \ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors pour tout $f, g \in \ L^{\alpha}(\Omega) : fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)},$$

$$i.e : \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_{\Omega} |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ \displaystyle\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|g\|_{L^{\infty}(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x)|dx. \end{cases}$$

$$Si \quad q = \infty \qquad et \quad p = 1$$

Preuve 6:
Premiere cas

Si $p = +\infty$, $ou \ q = +\infty$, supposons que $q = +\infty$ et $p = 1$ alors $g \leq \|g\|_{L^{\infty}}$

$$donc \ |fg| \leq |f| \|g\|_{L^{\infty}}.$$

Deuxième cas :

p et q sont finis l'égalité de Hölder est evidente si $\|f\|_p = 0 \ ou \ \|g\|_p = 0$.

En effet par example $\|f\|_p = 0 \ alors \ |g| = 0 \ Donc \ |fg| = 0 \ et \ par \ consequent \ \|fg\|_1 = 0$, nous supposons donc maintenant que $\|f\|_p \neq 0 \ et \|g\|_q \neq 0$.
Rappelons la concavité du logarithme :
$\forall \alpha \in [0, 1], \forall x, y > 0 \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha \ln(\alpha) + (1 - \alpha) \ln(y)$.

En posant $\alpha = \dfrac{1}{p} \ et \ donc \ 1 - \alpha = \dfrac{1}{q}, \ ainsi \ que \ f = |f_1|_p \ g = |g_1|_q$, on obtient :

$$\ln(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}) \geq \frac{1}{p} \ln(|f|^p) + \frac{1}{q} \ln(|g|^q) = \ln(|f_1 g_1|).$$

Et donc par croissance de l'exponentielle

$$\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \geq |f_1 g_1|.$$

Ainsi avec :

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}, g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

On obtient :

$$\frac{fg}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}.$$

En integrant chaque membre, la croissance de l'integrale implique :

$$\frac{fg}{\|f\|_p\|g\|_q}dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1.2.6 Inégalité du Sobolev-Poincare

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose borné, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$
tel que, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ (qui consiste en des fonctions appartenant à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ et satisfaisant certaines conditions aux limites) on a :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Où $\Delta u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, c'est -à-dire :

$$\int_\Omega u^2(x)dx \leq c \int_\Omega \sum_{i=0}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx.$$

Preuve 7:
On peut écrire, pour $x \in [a, b]$

$$u(x) = \int_a^x u(y\prime)dy.$$

Alors

$$u^2(x) = \left(\int_a^x u(y\prime)dy\right)^2 \leq \int_a^x (u(y\prime))^2 dy \int_a^x dy.$$

Donc :

$$\Rightarrow \int_a^x u^2(x) \leq \int_a^b \left[\int_a^x (u(y\prime))^2 dy \times (x-a)\right] dx \leq \|u\prime\|^2_{L^2_{(a,b)}} \times \int_a^x (x-a)dx.$$

Cela implique :

$$\Rightarrow \|u\|^2_{L^2_{(a,b)}} \leq \frac{(b-a)^2}{2}\|u\prime\|^2_{L^2_{(a,b)}} \Rightarrow \|u\|_{L^2_{(a,b)}} \leq \frac{(b-a)^2}{\sqrt{2}}\|u\prime\|_{L^2_{(a,b)}}.$$

D'où :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.3 Théorie des Semi-groupes

1.3.1 C_0-Semi-groupe

Définition 7:
Soit X un espace de Banach, on dit que la famille d'opérateurs linéaiers (une fonction entre deux

espaces vectoriels qui est linéaire sur son domaine de définition) $(S(t))_{t\geq 0}$ est un Semi-groupe (fortement continue) si :

1. $\forall t \geq 0, S(t) \in \mathcal{L}(X) S(0) = Id_{\mathcal{L}(X)}$

2. $\forall (s,t) \geq 0, S(s+t) = S(s) \circ S(t)$

3. $\forall x \in X \lim\limits_{t\to 0} S(t)x = x$.

Si on remplacer 3 par $\lim\limits_{t\to 0} \|S(t) - Id\|_{\mathcal{L}(x)}$ on dit que $(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformement continue. On définit le générateur infinitisimale (A, D(A)) d'un Semi-groupe fortement continue $(S(t))_{t\geq 0}$ continue l'opérateur non borné $A : D(A) \subset X \to X$ où :

$$D(A) : \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} existe \right\} \forall x \in D(A); Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

Dans le cas ou D(A) =X et $A \in \mathcal{L}(x)$ la famille d'opérateurs $(e^{tA})_{t\geq 0}$ (definie classiqument par sa série) est un Semi-groupes uniformement continue de générateur infinitisimale A.
On dit que le Semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est de contraction si $\forall t \geq 0 \quad \|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)} \leqslant 1$.

Propriétés des Semi-groupes de contraction

Théorème 2:
Soit X un espace de Banach, $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0 Semi-groupe de contraction sur X et $(A, D(A))$ un générateur infinitisimal alors :

1. $\forall x \in X \; le \; flot \; t \mapsto S(t)x \in \mathcal{C}^0(\mathcal{R}^+, X)$

2. $\forall x \in D(A) \; et \; \forall \; t \geq 0 \; on \; a \; S(t)x \in D(A) \; leflot \; t \mapsto S(t)x \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}^+, X)$ et vérifie $x'(t) - Ax(t)$

3. $(A, D(A))$ est fermé de domaine dense.

Théorème 3:
(Caractérisation des générateurs infinitisimaux)
Soit $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un opérateur non borné sur X on a l'équivalence :

1. (A, D(A)) est le générateur infinitisimal d'un Semi-groupe de contraction

2. D(A) est dense et pour toute condition initiale $x_0 \in D(A)$ il existe une unique solution $t \mapsto x(t) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}^+, X) de \; \mathbb{E}$.

de plus, sous cette hypothese, la solution $x(t)$ est a valeurs dans $D(A)$ et vérifie :

$$\|x(t)\|_X \leq \|x_0\|_X \; ainsi \; que \; \|x'(t)\|_X \leq \|Ax(t)\|_X \; (Ingalite \; d'nergie).$$

Opérateurs dissipatifs

Définition 8:
Un opérateur (A, D(A)) est dissipatif si :

$$\forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0,\ \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|.$$

Dans le cas ou $X = H$ est hilbertiene on montre que A est dissipatif si et seulment si :

$$\forall x \in D(A), \mathcal{R}e(\langle Ax, x\rangle_H) \leq 0.$$

Remarque : Si (A, D(A)) est un opérateur dissipatif, et $\lambda > 0$ alors l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est injectif car :

$$(I - \lambda A)x = 0 \Rightarrow 0 \leq \|x\| \leq \|(I - \lambda A)x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Si l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est surjectif on dit que $(A, D(A))$ est maximal dissipatif ou (m-dissipatif).

Propriétés des opérateurs m-dissipatif

Propriété 1:
Si (A, D(A)) est un opéateur m-dissipatf alors c'est un opérateur fermé.

Corollaire 1:
Pour $x \in D(A)$ *on pose* $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|$ alors $\|\|_{D(A)}$ est une norme pour laquelle D(A) est espace de Banach et $A \in \mathcal{L}((D(A), \|\|_X)), ((X, \|\|_X))$.

Propriété 2:
Si H est un espace hilbertien et $A : D(A) \subset H \mapsto H$ est m-dissipatf alors il est à domaine dense.

Propriété 3:
Résiproquement si $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est de domaine dense dissipatif fermé et tel que son adjoint $(A^*, D(A^*))$ est dissipatif alors $(A, D(A))$ est m-dissipatif.

Corollaire 2:
Toujours dans le cadre hilbertien

1. si (A, D(A)) est dissipatif autoadjoint a domaine dense alors il est m-dissipatif

2. si (A, D(A)) est anti-adjoint a domaine dense alors il est m-dissipatif.

1.3.2 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 4:
(Hille-Yosida) Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \mapsto X$ un opéateur non borné,on a l'équivalence.

1. (A, D(A)) est m-dissipatf à domaine dense.

2. (A, D(A)) est le générateur infinitisimal d'un semi groupe de contraction.
3. (A, D(A)) opérateur fermé à domaine dense, vérifié $[0, \infty] \subset \rho(A)$ *et* $\|R_{\lambda\|_{\mathcal{L}(X)}} \leq \frac{1}{\lambda}$ pour tout $\lambda > 0$.

   Ainsi ce hypothese pour tout conditions initiale $x_0 \in D(A)$ il existe une solution fort $t \to x(t)$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, (D(A), \|\|_{D(A)})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, (X_1, \|\|_X))$ lorsque la condition initiale et
   prise quelconque dans X on a une solution faible $t \to x(t) = S(t)x$ de class seulment $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, (X, \|\|_X))$.

1.3.3 Théorème de Lax-Milgrame

On dit que une forme bilinéaire $a(u; v) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ est

1. continue s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \qquad \forall u, v \in H,$$

2. coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Théorème 5:
(Lax-Milgrame) Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive . Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété
$u \in H \quad et \ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, v \rangle = \min_{v \in H}\{\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, v \rangle\}.$

Pour simplifier les choses on donne maintenant quelques exemples

Exemple 1:

L'équation de la chaleur

On ce donne Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^n$ *de* $\mathbb{R}^n$ on cherché a résoudre l'équation de la chaleur.

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) & = 0 \\ u(x, 0) & = u_0(x). \end{cases}$$

Sur $(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty]$ pour une condition initial donné on peut recrire cette équation aux dérives partielles sous la forme d'une équation differencetielle ordinaire $y\prime(t) = A\, y(t)$ en posant $y(t) = u(.,t) \subset H$ et diffinissant (A, D(A)) par :

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \ et \ Ax = \Delta x \ pour \ tout \ x \in D(A).$$

Nous sommes dans le bon cadre pour utiliser la théorie des Semi-groupes et le théorème de **Hille-Yosida** reste à montrer que l'opérateur A est m-dissipatif.
Il est bien connu que le la placien est un opérateur autoadjoint

$$\langle Au, v\rangle_H = \int_\Omega (\Delta u)v = -\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega u(\Delta v) = \langle u, Av\rangle_H.$$

Exemple 2:

L'équation des ondes

L'équation des ondes homogène se formule dans un domaine Ω suffisamment régulier (c'est-à-dire $\mathcal{C}^2$ et sur un intervalle de temps $[0,T)$ avec $(T>0)$ selon

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \quad \Delta u(t,x) = 0 & \forall\ (t,x)\ \in (0,T)\times\Omega \\ \qquad\qquad u(0,x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ \qquad\qquad u(0,x) = g(x) & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

On se place dans la théorie des semi-groupes en mettant l'équation précédente au premier ordre en temps. On pose alors

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

avec $(v = u')$ et

$$\mathcal{Y}_0 = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

L'équation devient alors

$$\begin{cases} \mathcal{Y}'(t) & = \mathcal{A}\mathcal{Y}(t) \\ \mathcal{Y}(0) & = \mathcal{Y}_0. \end{cases}$$

Le domaine du Laplacien étant

$$\begin{array}{ll} D(\Delta) & = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \text{ celui de } \mathcal{A}\ est \\ D(\mathcal{A}) & = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\text{sur} \\ H & = H_0^1(\Omega)\times \mathcal{L}(\Omega), \end{array}$$

initiales seront alors prises dans H . Le produit scalaire dans H est défini pour tout couple (u,v) dans $H(u = (u_1,u_2)$ et $(v = (v_1,v_2)$ par

$$(u,v)_H = (\Delta_{u_1}, \Delta_{v_1})_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + (u_2, v_2)_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

Reste à vérifier que nous sommes bien dans les conditions d'application du théorème de **Hille-Yosida** :

i) $D(\mathcal{A})$ est dense dans H

ii) $\mathcal{A}$ est fermé

iii) $\mathcal{A}$ est dissipatif. Ce point mérite une preuve.

Première preuve

On utilise la caractérisation (**i**) du théorème. Soient $\lambda > 0$ et $(f, g) \in H$ L'équation résolvante s'écrit en (u, v)

$$\begin{cases} \lambda u - v & = f \\ \lambda v - \Delta u & = g. \end{cases} \tag{i}$$

D'où $(\lambda^2 I - \Delta)u = \lambda f + g$ qui admet une unique solution dans $u \in H_0^1(\Omega)$ via Lax-Milgram (car d'une part $\lambda^2 > 0$ et d'autre part les valeurs propres du Laplacien sont strictement négatives donc $(\lambda^2 I - \Delta)$ est un opérateur elliptique dont la forme bilinéaire associée vérifie les hypothèses du théorème de) **Lax-Milgram**). Et alors $v = \lambda u - f$ est dans $H_0^1(\Omega)$

L'estimation de l'opérateur résolvant $\mathcal{R}_\lambda$ vient du produit scalaire de $(i)_2$ par v en remplaçant par u sa valeur dans $(i)_1$:

$$\lambda(\|v\|^2_{\mathcal{L}^2} + \|\Delta u\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)}.$$

D'où, puisque $(u, v) = \mathcal{R}_\lambda(f, g)$, on obtient l'estimation attendue $\|\mathcal{R}_\lambda\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$. Le semi-groupe engendré par $\mathcal{A}$ est donc un semi-groupe de contraction.

Seconde preuve

On peut utiliser le **Corollaire 3** pour montrer que $\mathcal{A}$ est m-dissipatif en montrant que $\mathcal{A}$ est anti-adjoint. On a alors pour tout couple $(u, v) \in D(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u, v)_H &= (\nabla u_2, \nabla v_1)_{\mathcal{L}^2} \\ &= -(u_2, \nabla v_1)_{\mathcal{L}^2} \\ &= -(u, \mathcal{A}v)_H. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est anti-adjoint et à domaine dense donc m-dissipatif.

Chapitre 2

L'existence et l'unicité de la solution

Dans ce chapitre, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution de notre problème

2.1 Position de problème

Maintenant, on définir une nouvelle variable suivante

$$W(x,\rho,t)=\varphi_t(x,t-\tau(t)\rho),$$

comme

$$W_t(x,\rho,t)=\frac{\partial\varphi_t(x,t-\tau(t)\rho)}{\partial(t-\tau(t)\rho)}\times\frac{\partial(t-\tau(t)\rho)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_t(x,t-\tau(t)\rho)}{\partial(t-\tau(t)\rho)}\times(1-\tau\prime(t)\rho),$$

et

$$W_\rho(x,\rho,t)=\frac{\partial\varphi_t(x,t-\tau(t)\rho)}{\partial(t-\tau(t)\rho)}\times\frac{\partial(t-\tau(t)\rho)}{\partial\rho}=-\tau\prime(t)\frac{\partial\varphi_t(x,t-\tau(t)\rho)}{\partial(t-\tau(t)\rho)}.$$

Donc il est facile de vérifie que :

$$\tau(t)W_t(x,\rho,t)+(1-\tau\prime(t)\rho)W_\rho(x,\rho,t)=0.$$

Alors ,on peut reécrire notre probème comme suit :

$$\begin{cases}\rho_1\varphi_{tt}(x,t)-K(\varphi_x+\psi)_x(x,t)+\mu_1\phi_t(x,t)+\mu_2W(x,1,t)=0\\ \rho_2\psi_{tt}(x,t)-b\psi_{xx}(x,t)+K(\varphi_x+\psi)(x,t)+\gamma\theta_x(x,t)=0\\ \rho_3\theta_t(x,t)+\kappa q_x(x,t)+\gamma\psi_{tx}(x,t)=0\\ \tau_0q_t(x,t)+\delta q(x,t)+\kappa\theta_x(x,t)=0\\ \tau(t)W_t(x,\rho,t)+(1-\tau\prime(t)\rho)W_\rho(x,\rho,t)=0\\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\varphi_t(x,0)=\varphi_1(x),\psi(x,0)=\psi_0(x),\psi_t(x,0)=\psi_1(x)\\ \theta(x,t)=\theta_0(x),q(x,0)=q(x,0)=q_0(x),\varphi_t(x,t-\tau(0))=f_0(x,t-\tau(0))\\ W(x,0,t)=\varphi_t(x,t),W(x,1,t)=f_0(x,t-\tau(t)),\\ \varphi(0,t)=\varphi(1,t=\psi(0,t)=\psi(1,t)=q(0,t)=q(1,t)=0.\end{cases}\tag{2.1}$$

Où $(x,\rho,t)\in(0,1)\times(0,1)\times(0,\infty)$ et la fonction $\tau(t)$ satisfaite (3), (4) et la condition suivante

$$0<\tau_0\le\tau(t)\le\bar{\tau},\qquad \textit{pour toute } t>0.\tag{2.2}$$

2.2 Probleme de premier ordre

Pour utiliser l'approche de semi-groupe on reécrit le système $(2,1)$ comme un système de première order, donc on suppose que $\mathcal{X}=(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\theta,q,W)^T$ et on réécrit notre problème comme suit

$$\begin{cases}\mathcal{X}'=\mathcal{A}\mathcal{X},\\ \mathcal{X}(0)=\mathcal{X}_0=(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\theta,q,f_0(.,-\rho\tau(0)))^T,\end{cases} \tag{2.3}$$

avec

$$\mathcal{A}(t)\begin{pmatrix}\varphi\\ u\\ \psi\\ v\\ \theta\\ q\\ W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx}+\psi_x)-\frac{\mu_1}{\rho_1}u-\frac{\mu_2}{\rho_1}W(.,1)\\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi_{xx}+\psi_x)-\frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x\\ -\frac{k}{\rho_3}q_x-\frac{\gamma}{\rho_3}v_x\\ -\frac{\delta}{\tau_0}q-\frac{k}{\tau_0}\theta_x\\ (\tau'(t)\rho-1)\frac{W_\rho}{\tau(t)}\end{pmatrix}.$$

Où le domaine de $\mathcal{A}$ est

$$\begin{aligned}D(\mathcal{A}(t))=\big\{&(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\theta,q,W)^T\in H: W_\rho\in L^2((0,1)\times L^2(0,1)),u=W(.,1),\ dans\ (0,1)\ ,\\ &avec\\ &H=H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\\ &\times H_0^1(0,1)\times L^2((0,1)\times H^1(0,1))\big\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Et $\mathcal{A}$ l'opérateur differentiel défini par

$$\mathcal{A}(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0\\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx}&-\frac{\mu_2}{\rho_1}&\frac{k}{\rho_1}\partial_x&0&0&0&\frac{\mu_2}{\rho_1}\\ \frac{k}{\rho_2}\partial_x&0&(\frac{b}{\rho_2}\partial_{xx}-\frac{k}{\rho_2})&0&-\frac{\gamma}{\rho_2}\partial_x&0&0\\ 0&0&0&-\frac{\gamma}{\rho_3}\partial_x&0&-\frac{k}{\rho_3}\partial_x&0\\ 0&0&0&0&-\frac{k}{\tau_0}\partial_x&-\frac{\delta}{\tau_0}&0\\ 0&0&0&0&0&0&(\tau'(t)\rho-1)\frac{\partial\rho}{\tau(t)}\end{pmatrix}.$$

Notez que $D(\mathcal{A}(t))$ est indépendant de t
Maintenant, on définit l'espace d'énergie $\mathbb{E}$ comme

$$\mathbb{E}=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_0^1(0,1)\times(L^2(0,1))^2\times L^2(0,1)\times L^2((0,1)\times(0,1)),$$

avec le produit scalaire

$$\langle \mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}} \rangle_{\mathbb{E}} = \int_0^1 \left\{ \rho_1 u\tilde{u} + \rho_2 v\tilde{v} + k(\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi_x} + \tilde{\psi}) + b\psi_x \tilde{\psi}_x + \rho_3 \theta\tilde{\theta} \right\} dx + \int_0^1 \tau_0 q\tilde{q} dx$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 W(x,\rho)\tilde{W}(x,\rho) d\rho dx.$$

Pour $\mathcal{X} = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, W)^T, \tilde{\mathcal{X}} = (\tilde{\varphi}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \tilde{W})^T.$

Notre premiére résultat est :

2.3 Existence de la solution

Théorème 6:
Nous supposons que (2) est vrai et (3), (4), (2.2) sont satisfaits. Ensuite, pour tout $\mathcal{X}_0 \in D(\mathcal{A}(0))$, il existe une solution unique $\mathcal{X}$ de (2.1) satisfaisante

$$\mathcal{X} \in C([0,\infty), D(\mathcal{A}(0))) \cap C^1([0,\infty), \mathbb{E}).$$

La preuve du théorème ci-dessus est basée sur le théorème ci-dessous

Théorème 7:
L'hypothése suivante

i) $D(\mathcal{A}(0))$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{E}$.

ii) Pour tout $t > 0$, nous avons $D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}(0))$;

iii) $\mathcal{A}(t)$ générérateur d'un semi-groupe fortement continu sur $\mathbb{E}$ pour tout t $\in [0,T]$, et la famille $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t) : t \in [0,T]$ est stable avec des constantes de stabilité C et m indépendantes de t, c'est-à-dire le semi-groupe $(S_t(s))_{s\geq 0}$ génére par $\mathcal{A}(t)$ satisfait

$$\|S_t(s))(u)\|_{\varepsilon} \leq Ce^{ms}\|u\|_{\varepsilon}, pour\ tout\ u \in \varepsilon, s \geq 0, C > 0, m > 0.$$

iv) $\partial_t \tilde{A}(t) \in L_*^\infty([0,T], B(D(\mathcal{A}(0)), \mathbb{E}))$, où $L_*^\infty([0,T], B(D(\mathcal{A}(0)), \mathbb{E}))$, est l'espace des classes équivalentes de fonctions essentiellement délimitées et fortement mesurables de [0 ;T] dans l'ensemble $B(D(\mathcal{A}(0))\mathcal{E})$ de délimitées opérateurs de $D(\mathcal{A}(0))$ dans $\mathcal{E}$, sont retenus.2 Ensuite, étant donné une donnée initiale dans $D(\mathcal{A}(0))$, le problème (2.3) a une solution unique
$$\mathcal{X} \in C([0,T]), D(\mathcal{A}(0)) \cap C^1([0,T], \mathbb{E}).$$

Preuve 8:
Notre preuve suit la méthode utilisée dans [7]

i) Densité de $D(\mathcal{A}(0))$ dans $\mathbb{E}$. Soit $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7)^T \in \mathbb{E}$ orthogonal à tous les éléments de $D(\mathcal{A}(0))$ avec le produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\mathbb{E}}$:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathcal{X}, G \rangle_{\mathbb{E}} = \int_0^1 & \{\rho_1 u g_2 + \rho_2 v g_4 + k(\varphi_x + \psi)(g_1 + g_3) + b\psi_x g_3 + \rho_3 \theta g_5\} dx \\ & + \int_0^1 \tau_0 q g_6 dx + \int_0^1 \int_0^1 W(x,\rho) g_7(x,\rho) d\rho dx, \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour tout $\mathcal{X} = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, W)^T, \in D(\mathcal{A}(0))$. Montrer que $g_j = 0$, *pour tout* $j = 1, \cdots, 7$ Nous prenons W $\in$ $D((0,1) \times (0,1))$ *et* $\varphi = u = \psi = v = \theta = q = 0$, donc $\mathcal{X} = (0,0,0,0,0,0,W)^T \in D(\mathcal{A}(0))$ Ainsi, de (2.5) on déduit que

$$\int_0^1 W(x,\rho) g_7 d\rho dx = 0,$$

puisque $D((0,1)\times(0,1))$ est dense en $L^2((0,1)\times(0,1))$, il s'ensuit alors que $g_7 = 0$. De même, soit u $\in D(0,1)$, puis $\mathcal{X} = (0,u,0,0,0,0,0)^T \in D(\mathcal{X}(0))$, ce qui implique d'aprés (2.5) que

$$\int_0^1 u g_2 dx = 0.$$

Donc, comme ci-dessus, $g_2 = 0$. De plus, soit $\mathcal{X} = (\varphi,0,0,0,0,0,0)^T \in D(\mathcal{A}(0))$, alors on obtient de (2.5) que

$$\int_0^1 \varphi g_{1x} dx = 0.$$

Il est immédiat que $\mathcal{X} = (\varphi,0,0,0,0,0,0)^T \in D(\mathcal{A}(0))$ *pour* $\varphi \in \mathcal{V}$ qui est dense dans $H_0^1(0,1)$, avec le produit scalaire

$$\langle g,h\rangle_{H_1^0(0,1)} = \int_0^1 g_x h_x dx.$$

On obtient $g_1 = 0$. Par les mêmes idées que ci-dessus, on peut aussi montrer que $g_3 = 0$,pour $v \in D(0,1)$, on obtient de (2.5)

$$\int_0^1 v g_4 dx = 0,$$

et par la densité de $D(0,1)$ in $L^2(0,1)$, on obtient $g_4 = 0$.
Pour $q \in D(0,1)$,on obtient de (2.5)

$$\int_0^1 q g_6 dx = 0,$$

et par la densité de $D(0,1)$ in $L^2(0,1)$, on obtient $g_6 = 0$.
Ensuite, soit $\mathcal{X} = (0,0,0,0,\theta,0,0)^T \in D(\mathcal{A}(0))$, alors nous obtenons de (2.5) que

$$\int_0^1 \theta g_5 dx = 0,$$

par conséquent $g_5 = 0$. Ceci complète la preuve de **(i)**.

ii) Pour tout $t > 0$, nous avons $D(\mathcal{A}(t)) = D(\mathcal{A}(0))$.

iii) $\mathcal{A}(t)$ généré un semi-groupe C_0 dans $\mathbb{E}$ pour un t fixe. Nous définissons le produit scalaire dépendant du temps sur $\mathbb{E}$, (qui est équivalent au produit scalaire classique)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}\rangle_t = &\int_0^1 \left\{\rho_1 u\bar{u} + \rho_2 v\bar{v} + k(\varphi_x+\psi)(\bar{\varphi}_x+\bar{\psi}) + b\psi_x\bar{\psi}_x + \rho_3\theta\bar{\theta}\right\} dx \\ &+ \int_0^1 \tau_0 q\bar{q} dx + \int_0^1 \xi\tau(t)\int_0^1 W(x,\rho)\bar{W}(x,\rho) d\rho . dx\end{aligned} \tag{2.6}$$

Où ξ satisfait

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}} \leq \xi \leq 2\mu_1 - \frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}}\ , \tag{2.7}$$

grâce aux hypothéses (4) on doit fixée

$x(t) = \dfrac{(\tau'(t)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2\tau(t)}$,

a ce stade nous montrons que la dissipativité de l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(t) - x(t)I.$

Pour un t fixée et $\mathcal{X} = (\varphi, u, \psi, v, \theta, q, W)^T \in D(\mathcal{A}(t))$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(t)\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle_t = \int_0^1 \Bigg\{ &\left[\rho_1(\frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx}+\psi_x) - \frac{\mu_1}{\rho_1}u - \frac{\mu_2}{\rho_1}W(.,1))u\right] + \left[\rho_2(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_{xx}+\psi_x) - \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x)\right.\\ &\left. v\right] + [K(u_x+v)(\varphi_x+\psi)] + [bv_x\psi_x] + \left[\rho_3(-\frac{k}{\rho_3}q_x - \frac{\gamma}{\rho_3}v_x)\theta\right]\Bigg\}\, dx\\ &+ \int_0^1 \tau_0\left[(-\frac{\delta}{\tau_0}q - \frac{k}{\tau_0}\theta_x)q\right] + \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\tau(t)}(\tau'(t)\rho - 1)W_\rho(x,\rho)w(x,\rho).\end{aligned}$$

On applique les conditions aux limites $(2.1)_9$, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(t)\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle_t = &-\delta\int_0^1 q^2dx - \mu_1\int_0^1 u^2(x)dx - \mu_2\int_0^1 W(x,1)u(x)dx\\ &- \xi\int_0^1\int_0^1 (1-\tau'(t)\rho)W(x,\rho)W_\rho(x,\rho)dxd\rho.\end{aligned} \tag{2.8}$$

En observant cela

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1 (1-\tau'(t)\rho)W(x,\rho)W_\rho(x,\rho)dxd\rho.\\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}W^2(1-\tau'(t)\rho)dxd\rho\\ &= \frac{\tau'(t)}{2}\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho)dxd\rho + \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{W^2(x,1)(1-\tau'(t)) - W^2(x,0)\right\}dx.\end{aligned} \tag{2.9}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(t)\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle_t = &-\delta\int_0^1 q^2dx - \mu_1\int_0^1 u^2(x)dx - \mu_2\int_0^1 W(x,1)u(x)dx\\ &- \frac{\tau'(t)\xi}{2}\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho)dxd\rho\\ &- \frac{\xi}{2}\int_0^1 W^2(x,1)(1-\tau'(t))dx + dx\xi 2\int_0^1 u^2(x)dx.\end{aligned} \tag{2.10}$$

En appliquant l'inégalité de Young et (2) on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(t)\mathcal{X}, \mathcal{X}\rangle_t \leq &\left(-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}} + \frac{\xi}{2}\right)\int_0^1 u^2(x)dx - \delta\int_0^1 q^2(x)dx\\ &+ \left(\frac{\mu_2\sqrt{1-d}}{2} - \xi\frac{(1-d)}{2}\right)\int_0^0 W^2(x,1)dx + \chi(t)\langle U, U\rangle_t.\end{aligned}$$

La condition (2.7) permet d'écrire

$$-\mu_1+\frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}}+\frac{\xi}{2}\leq 0, \frac{\mu_2\sqrt{1-d}}{2}-\xi\frac{(1-d)}{2}\leq 0.$$

Donc, l'opérateur $\tilde{A}(t)$ est dissipatif.
Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'opérateur $\lambda I-\mathcal{A}(t)$ est surjectif. Soit $(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7)^T\in\mathbb{E}$ et Supposons $\mathcal{X}=(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\theta,q,W)^T\in D(\mathcal{A}(t))$ solution de le système suivant
$(\lambda I-\mathcal{A})U=F$

$$\begin{cases}\lambda\varphi-u=f_1,\\ \lambda u-\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx}+\psi_x)-\dfrac{\mu_1}{\rho_1}u-\dfrac{\mu_2}{\rho_1}W(.,1)=f_2,\\ \lambda\psi-v=f_3,\\ \lambda\dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_{xx}+\psi_x)-\dfrac{\gamma}{\rho_2}\theta_x=f_4,\\ \lambda\theta+\dfrac{k}{\rho_3}q_x-\dfrac{\gamma}{\rho_3}v_x=f_5,\\ \lambda q+\dfrac{\delta}{\tau_0}q-\dfrac{k}{\tau_0}\theta_x=f_6,\\ \lambda W+\dfrac{(1-\tau'(t))\rho}{\tau(t)}W_\rho=f_7.\end{cases}\tag{2.11}$$

La première et la troisième équation de (2.11) donnent

$$\begin{cases}u=\lambda\varphi-f_1,\\ v=\lambda\psi-f_3.\end{cases}\tag{2.12}$$

De plus, par (2.11) on trouve que

$$W(x,0)=u(x), pour\ x\in(0,1).\tag{2.13}$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I\in\mathbb{R}$,α une constante et $t_0\in I$. La solution générale de l'équation

$$y'(t)=\alpha y(t)+f(t),$$

et donnée par

$$y(t)=Ce^{\alpha t}+\int_{t_0}^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s)ds.$$

Où C est une constante.

Donc les solutions de l'équation

$$W_\rho=-\tau(t)\lambda W+\tau(t)f_7,$$

sont donnée par

$$\begin{aligned} W(x,\rho) &= Ce^{-\tau(t)\lambda\rho} + \int_0^\rho \tau e^{-\lambda\tau(\rho-\sigma)} f_7(x,\sigma)d\sigma \\ &= Ce^{-\tau(t)\lambda\rho} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)\rho} + \int_0^\rho f_7(x,\sigma)e^{\lambda\tau(t)\sigma}d\sigma, \end{aligned}$$

d'aprés $(2,11)$ *et* (2.13) on obtient

$W(x,\rho) = u(x)e^{-\lambda\rho\tau(t)} + \tau(t)e^{-\lambda\rho\tau(t)} \int_0^1 f_7(x,\sigma)e^{-\lambda\rho\tau(t)} + d\sigma,\ si\ \tau'(t) \neq 0,$

et

$W(x,\rho) = u(x)e^{\upsilon_\rho(t)} + e^{\upsilon_\rho(t)} \int_0^1 \dfrac{f_7(x,\sigma)\tau(t)}{1-\tau'(t)\sigma} e^{-\upsilon_\rho(t)} d\sigma \qquad si\ \tau'(t) \neq 0.$

D'où $\upsilon_\rho(t) = \lambda \dfrac{\tau(t)}{\tau'(t)} \ln(1-\tau'(t)\rho),$, à partir de (2.12) , nous avons

$$W(x,\rho) = \lambda\varphi(x)e^{-\lambda\rho\tau(t)} - f_1 e^{-\lambda\rho\tau(t)} + \tau(t)e^{-\lambda\rho\tau(t)} \int_0^1 f_7(x,\sigma)e^{-\lambda\rho\tau(t)}d\sigma, \qquad si\ \tau'(t) = 0, \tag{2.14}$$

et

$$W(x,\rho) = \lambda\varphi(x)e^{\upsilon_\rho(t)} - f_1 e^{\upsilon_\rho(t)} + e^{\upsilon_\rho(t)} \int_0^1 \frac{f_7(x,\sigma)\tau(t)}{1-\tau'(t)\sigma}\ e^{-\upsilon_\rho(t)}d\sigma \qquad si\ \tau'(t) \neq 0, \tag{2.15}$$

en utilisant (2.11) et (2.12) , on obtient

$$\begin{cases} \left(\lambda^2 + \dfrac{\mu_1}{\rho_1}\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau\frac{\mu_2}{\rho_1}}\right)\varphi + \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2 + \left(\lambda + \dfrac{\mu_1}{\rho_1}\right) f_1 - \dfrac{\mu_2}{\rho_1} W_0(x) \\ \lambda^2\psi - \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{\gamma}{\rho_2}\theta_x = f_4 + \lambda f_3, \\ \lambda\theta + \dfrac{k}{\rho_3}q_x - \dfrac{\gamma\lambda}{\rho_3}\psi_x = f_5 + \dfrac{\gamma}{\rho_3} f_{3x}, \\ \lambda q + \dfrac{\delta}{\tau_0}q - \dfrac{k}{\tau_0}\theta_x = f_6, \end{cases} \tag{2.16}$$

en résolvant le système (2.16) , on obtient

$$(\varphi, \psi, \theta, q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times H^2(0,1) \times H_0^1(0,1),$$

tel que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 ((\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau(t)}\mu_2)\varphi w + k(\varphi_x + \psi)w_x)dx = \int_0^1 (\rho_1 f_2 + (\lambda\rho_1 + \mu_1)f_1 - \mu_2 W_0(x))w dx, \\ \displaystyle\int_0^1 (\rho_2\lambda^2\psi X + \psi_x X_x + k(\varphi_x + \psi)X + \gamma\theta_x X)dx = \int_0^1 (\rho_2(f_4\lambda f_3)X dx, \\ \displaystyle\int_0^1 (\rho_3\lambda\theta w_1 + kq_x w_1 + \gamma\lambda\psi_x w_1)dx = \int_0^1 (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x})w_1 dx, \\ \displaystyle\int_0^1 ((\tau_0\lambda + \delta)qX_1 + k\theta_x X_1)dx = \int_0^1 \tau_0 f_6 dx, \end{cases} \tag{2.17}$$

pour tout $(w, X, w_1, X_1) \in H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$ De (2.14) et (2.15), on a

$$W(x,1) = \begin{cases} \lambda\varphi(x)e^{-\lambda\tau(t)} + W_0(x), si\ \tau'(t) = 0 \\ \lambda\varphi(x)e^{\upsilon_\rho(t)} + W_0(x), \quad si\ \tau'(t) \neq 0. \end{cases}$$

Où x $\in (0,1)$ et

$$W_0(x) = \begin{cases} -f_1 e^{-\lambda\tau(t)} + \tau(t)e^{-\lambda\tau(t)}\int_0^1 f_7(x,\sigma)e^{-\lambda\tau(t)}d\sigma,\ si\ \tau'(t) = 0, \\ -f_1 e^{\upsilon_\rho(t)}\int_0^1 \frac{f_7(x,\sigma)\tau(t)}{1-\tau'(t)\sigma}e^{-\upsilon_\rho(t)}d\sigma, \qquad si\ \tau'(t) \neq 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Ainsi, le problème (2.17) est équivalent à

$$Y((\varphi,\psi,\theta,q),(w,X,w_1,X_1)) = \varrho(w,X,w_1,X_1). \tag{2.19}$$

Où le bilinéaire de

$$Y : [H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)]^2 \to \mathbb{R},$$

et le linéaire de

$$\varrho : (H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)) \to \mathbb{R},$$

sont définis par

$$\begin{aligned} Y((\varphi,\psi,\theta,q),(w,X,w_1,X_1)) &= \int_0^1 \left(\left(\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau(t)}\mu_2\right)\varphi w + k(\varphi_x+\psi)(w_x+X)\right)dx \\ &+ \int_0^1 (\rho_2\lambda^2\psi X + \psi_x X_x + \gamma\theta_x w_{1x})dx \\ &+ \int_0^1 (\rho_3\lambda\theta w_1 + kq_x w_1 + \gamma\lambda\psi_x w_1)dx \\ &+ \int_0^1 ((\tau_0\lambda+\delta)qX_1 + k\theta_x X_{1x})dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varrho(w,X,w_1,X_1) = &\int_0^1 (\rho_1 f_2 + (\lambda\rho_1+\mu_1)f_1 - \mu_2 W_0(x))w\ dx, \\ &+ \int_0^1 (\rho_2(f_4\lambda f_3)X dx + \int_0^1 (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x})w_1 dx, \\ &+ \int_0^1 \tau_0 f_6 dx, \end{aligned} \tag{2.20}$$

si $\tau'(t) = 0$ Où $W_0(x)$ satisfait la première équation de (2.18),

$si\ \tau'(t) \neq 0$nous définissons

$$\begin{aligned} Y((\varphi,\psi,\theta,q),(w,X,w_1,X_1)) &= \int_0^1 \left(\left(\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{\upsilon_\rho(t)}\mu_2\right)\varphi w + k(\varphi_x+\psi)(w_x+X)\right)dx \\ &+ \int_0^1 (\rho_2\lambda^2\psi X + \psi_x X_x + \gamma\theta_x w_{1x})dx \\ &+ \int_0^1 (\rho_3\lambda\theta w_1 + kq_x w_1 + \gamma\lambda\psi_x w_1)dx \\ &+ \int_0^1 ((\tau_0\lambda+\delta)qX_1 + k\theta_x X_{1x})dx. \end{aligned}$$

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram il suffit de vérifié la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire Y et la continuité de la forme linéaire ϱ.

(1) **Continuité de Y** : en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
\Big|Y((\varphi,\psi,\theta,q),(w,X,w_1,X_1))\Big| &= \Big|\int_0^1 \left(\left(\lambda^2\rho_1+\mu_1\lambda+\lambda e^{-\lambda\tau(t)}\mu_2\right)\varphi w \right.\\
&+ k(\varphi_x+\psi)(w_x+X)\big)\,dx + \int_0^1 (\rho_2\lambda^2\psi X+\psi_x X_x+\gamma\theta_x w_{1x})dx\\
&+ \int_0^1 (\rho_3\lambda\theta w_1 + kq_x w_1 + \gamma\lambda\psi_x w_1)dx\\
&+ \int_0^1 ((\tau_0\lambda+\delta)qX_1 + k\theta_x X_{1x})dx\Big|\\
Y((\varphi,\psi,\theta,q),(w,X,w_1,X_1)) &\le \max\big((\lambda^2\rho_1+\mu_1\lambda+\lambda e^{\upsilon_\rho(t)}\mu_2), K, \rho_2\lambda^2, b, \gamma, \rho_3\lambda, \kappa, \gamma\lambda,\\
&(\tau_0\lambda+\delta)\big)\,(\|\varphi\|_{L^2}+\|\varphi\|_{L^2}+\|\psi\|_{L^2}+\|\theta\|_{L^2}+\|q)\\
&(\|_{L^2}+\|\|_{L^2}+\|\mathcal{X}\|_{L^2}+\|_1\|_{L^2}+\|\mathcal{X}_1\|_{L^2})\\
&\le C_1\left(\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_0^1}+\|\theta\|_{H^1}+\|q\|_{H_0^1}\right)\\
&\left(\|\|_{H_0^1}+\|\mathcal{X}\|_{H_0^1}+\|_1\|_{H^1}+\|\mathcal{X}_1\|_{L^2}\right)\\
&\le C_1\Big|(\varphi,\psi,\theta,q)\Big|,\Big|(w,X,w_1,X_1)\Big|.
\end{aligned}$$

Donc Y est continue

(2) **Coercivité de Y**

$$\begin{aligned}
Y((\varphi,\psi,\theta,q),(\varphi,\psi,\theta,q)) &= \int_0^1 \left(\left(\lambda^2\rho_1+\mu_1\lambda+\lambda e^{-\lambda\tau(t)}\mu_2\right)\varphi w + k(\varphi_x+\psi)(w_x+X)\right)dx\\
&+ \int_0^1 (\rho_2\lambda^2\psi X+\psi_x X_x+\gamma\theta_x w_{1x})dx\\
&+ \int_0^1 (\rho_3\lambda\theta w_1 + kq_x w_1 + \gamma\lambda\psi_x w_1)dx\\
&+ \int_0^1 ((\tau_0\lambda+\delta)qX_1 + k\theta_x X_{1x})dx,
\end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Young, on trouve

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 \varphi_x \psi dx &\leq \int_0^1 |\varphi_x \psi| dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2 dx \\
\int_0^1 \varphi_x \psi dx &\geq -\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{(-1)}{2}\int_0^1 \psi^2 dx \\
Y((\varphi,\psi,\theta,q)(\varphi,\psi,\theta,q)) &\geq \int_0^1 \Big\{ (\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau(t)}\mu_2)\varphi^2 + \frac{K}{2}\varphi_x^2 + (\rho_2\lambda^2 + \frac{K}{2})\psi^2 + (b+\gamma^2 \\
&\quad)\psi_x^2 + \rho_3\lambda\theta^2 + (\gamma+\kappa)\theta_x^2 + (\tau_0\lambda+\delta)q^2 + \kappa q^2 x \Big\} dx \\
&\geq \min\Big((\lambda^2\rho_1 + \mu_1\lambda + \lambda e^{-\lambda\tau(t)}\mu_2), \frac{K}{2}, (\rho_2\lambda^2 + \frac{K}{2}), (b+\gamma^2), (\rho_3\lambda), \\
&\quad (\gamma+\kappa), (\tau_0\lambda+\delta), \kappa\Big) \Big(\|\varphi\|^2_{H_0^1} + \|\psi\|^2_{H_0^1} + \|\theta\|^2_{H^1} + \|q\|^2_{H_0^1} \Big) \\
&\geq C_2 \Big| (\varphi,\psi,\theta,q) \Big|^2_W .
\end{aligned}
$$

(3) **Continuité de** ϱ d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$
\begin{aligned}
\Big| \varrho(w,X,w_1,X_1) \Big| &= \Big| \int_0^1 (\rho_1 f_2 + (\lambda\rho_1 + \mu_1) f_1 - \mu_2 W_0(x)) w \, dx \\
&\quad + \int_0^1 (\rho_2(f_4\lambda f_3) X dx + \int_0^1 (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x}) w_1 dx \\
&\quad + \int_0^1 \tau_0 f_6 dx \Big| \\
&\leq \max\big((\rho_1 f_2 + (\lambda\rho_1+\mu_1) f_1 - \mu_2 W_0(x)), (\rho_2 f_4 + \lambda f_3), (\rho_3 f_5 + \gamma f_{3x}) \, , \\
&\quad (\tau_0 f_6) \, (\|w\|_{L^2}, \|X\|_{L^2}, \|w_1\|_{L^2}, \|X_1\|_{L^2}) \\
&\leq C_3 \Big(\|w\|_{H_0^1}, \|X\|_{H_0^1}, \|w_1\|_{H_0^1}, \|X_1\|_{H_0^1} \Big) \\
&\leq C_3 \Big| (w,X,w_1,X_1) \Big|_W .
\end{aligned}
$$

Et, on a l'opérateur ϱ est défini par la formule (2.20) ci-dessus. Ainsi, en appliquant le théorème de **Lax-Milgram**, le problème (2.19) a une solution unique (φ,ψ,θ,q) pour tout $(w,X,w_1,X_1) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$. En utilisant la régularité classique, il résulte de (2.17) que $(\varphi,\psi,\theta,q) \in H^2(0,1) \times H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$. Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}(t)$ est surjectif

$$
\lambda I - \tilde{\mathcal{A}}(t) = (\lambda + x(t))I - \mathcal{A}(t), \qquad \textit{Pour tout } t > 0 \textit{ et } \lambda > 0.
$$

Puisque $x(t) > 0$,on conclut à la surjectivité de l'opérateur $\lambda I - \tilde{\mathcal{A}}(t)$. Dans cette étape, il suffit de prouver

$$
\frac{\|\phi\|_t}{\|\phi\|_s} \leq e^{\frac{c}{2r_0}|t-s|}, \ \textit{pour tout } t, s \in [0,T], \tag{2.21}
$$

où $\phi = (\varphi,u,\psi,v,\theta,q,W)^T$. D'après (2.6) , nous avons

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_t^2 = \langle \phi, \phi\rangle_t = &\int_0^1 \rho_1 u^2 + \rho_2 v^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2 dx \\
&+ \xi\tau(t)\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho)d\rho dx, \\
\|\phi\|_s^2 = \langle \phi, \phi\rangle_s = &\int_0^1 \rho_1 u^2 + \rho_2 v^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2 dx \\
&+ \xi\tau(s)\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho)d\rho dx,
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
\|\phi\|_t^2 - \|\phi\|_s^2 e^{\frac{c}{2r_0}|t-s|} =& 3y\left(1-e^{\frac{c}{2r_0}|t-s|}\right)\int_0^1 \rho_1 u^2 + \rho_2 v^2 + k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2 dx \\
&+ \xi\left(\tau(t) - \tau(s)e^{\frac{c}{2r_0}|t-s|}\right)\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho)d\rho dx.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Ici, nous montrons que $\tau(t) - \tau(s)e^{\frac{c}{2r_0}|t-s|}$ nous avons

$$\tau(t) = \tau(s) + \tau'(a)(t-s),$$

avec $a \in (s,t)$ on obtient

$$\frac{\tau(t)}{\tau(s)} \leq 1 + \frac{\tau'(a)}{\tau(s)}|t-s|.$$

En utilisant $\tau \in W^{2,\infty}([0,T])$ et τ' est borné, on déduit que

$$\frac{\tau(t)}{\tau(s)} \leq 1 + \frac{r}{\tau_0}|t-s| \leq e^{\frac{c}{2r_0}|t-s|}$$

Ce qui prouve (2.21) et donc (iii)
(iv) on a l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}(t)$ est dissipatif, ce qui signifie que

$$\langle A(t)U, U\rangle_t - X(t)\langle U, U\rangle_t \leq 0.$$

Où

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = A(t) - X(t)I,$$

et

$$X(t) = \frac{(\tau'(t)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2\tau(t)}.$$

De plus

$$X'(t) = \frac{\tau'(t)\tau''(t)}{2\tau(t)(\tau'(t)^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\tau'(t)(\tau'(t)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{2\tau(t)^2},$$

est borné sur $[0,T]$, $\forall\, T>0$ alors il est facile de vérifier que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t)\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\tau''(\tau(t)\rho - \tau'(t)(\tau'(t)\rho - 1))}{\tau^2(t)} W_\rho \end{pmatrix}.$$

Puis en utilisant (3) et (2.2) , donc

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{A}}(t) \in L^\infty_*([0,T], B(D(A(0)), \mathcal{H})),$$

où (iv) est valable dans [10] . alors, nous concluons que le probléme

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{X}}_t = \tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{\mathcal{X}} \\ \tilde{\mathcal{X}}(0) = \tilde{\mathcal{X}}_0, \end{cases} \tag{2.23}$$

admet une solution unique $\tilde{\mathcal{X}} \in C([0,+\infty), \varepsilon)$ et si $\mathcal{X}_0 \in D(\mathcal{A}(0))$, alors

$$\tilde{\mathcal{X}} \in C([0,+\infty), D(\mathcal{A}(0)) \cap C^1([0,+\infty), \varepsilon).$$

Maintenant, laisse

$$\mathcal{X}(t) = e^{\beta(t)}\tilde{\mathcal{X}}(t).$$

Où $\beta(t) = \displaystyle\int_0^1 k(s)ds$, alors nous avons en utilisant (2.23)

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t(t) &= k(t)\; e^{\beta(t)}\tilde{\mathcal{X}}(t) + e^{\beta(t)}\tilde{\mathcal{X}}(t) \\ &= k(t)\; e^{\beta(t)}\tilde{\mathcal{X}}(t) + e^{\beta(t)}\tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{\mathcal{X}}(t) \\ &= \; e^{\beta(t)}\left(k(t)\tilde{\mathcal{X}}(t) + \tilde{\mathcal{A}}(t)\tilde{\mathcal{X}}(t)\right) \\ &= e^{\beta(t)}\mathcal{A}(t)\tilde{\mathcal{X}}(t) \\ &= \mathcal{A}(t)\; e^{\beta(t)}\tilde{\mathcal{X}}(t) \\ &= \mathcal{A}(t)\mathcal{X}(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{X}(t)$, est un unique solution de (2.3).

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution

Dans cette section, nous donnons quelques lemmes techniques et nous prouvons les résultats de stabilité, en suivant [10] , nous introduisons la nouvelle variable

$$\bar{\theta}(x,t) = \theta(x,t) - \int_0^1 \theta_0(x)dx.$$

Nous intégrons les deux côtés

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \bar{\theta}(x,t)dx &= \int_0^1 (\theta(x,t) - \int_0^1 \theta_0(x)dx)dx \\
&= \int_0^1 \theta(x,t)dx - \int_0^1 \int_0^1 \theta_0(x)dxdx \\
&= \int_0^1 \theta(x,t)dx - \int_0^1 \theta_0(x)dx \int_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \theta(x,t)dx - \int_0^1 \theta_0(x)1dx \\
&= \int_0^1 \theta(x,t)dx - \int_0^1 \theta_0(x)dx \\
&= \int_0^1 (\theta(x,t) - \theta_0(x))dx.
\end{aligned}$$

D'aprés $(1,2)_7$ on obtient

$$\int_0^1 \bar{\theta}(x,t)dx = 0.$$

Alors, $(\varphi, \psi, \theta, q, W)$ satisfait le systéme (2.1).
Pour une constante ξ positive satisfaisante

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}} \leq \xi \leq 2\mu_1 - \frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}}. \tag{3.1}$$

Nous définissons la fonctionnelle énergétique comme

$$\begin{aligned} E(t) &= E(t,\varphi,\psi,\theta,q,W) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2+\rho_3\theta^2\right\}dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 \tau_0 q^2 dx + \frac{\xi}{2}\tau(t)\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho,t)d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.2}$$

en multipliant le système (2.1) par $\varphi_t,\psi_t,\theta,q$, respectivement, on obtient

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}(x,t)\varphi_t(x,t) - K(\varphi_x+\psi)_x(x,t)\varphi_t(x,t) + \mu_1\varphi_t^2(x,t) + \mu_2 W(x,1,t)\varphi_t(x,t) = 0 \\ \rho_2\psi_{tt}(x,t)\psi_t(x,t) - b\psi_{xx}(x,t)\psi_t(x,t) + K(\varphi_x+\psi)(x,t)\psi_t(x,t) + \gamma\theta_x(x,t)\psi_t(x,t) = 0 \\ \rho_3\theta_t(x,t)\theta(x,t) + \kappa q_x(x,t)\theta(x,t) + \gamma\psi_{tx}(x,t)\theta(x,t) = 0 \\ \tau_0 q_t(x,t)q(x,t) + \delta q^2(x,t) + \kappa\theta_x(x,t)q(x,t) = 0, \end{cases}$$

en intégrant sur $(0,1)$, et en les résumant, on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left\{\rho_1\varphi_{tt}\varphi_t - K(\varphi_x+\psi)\varphi_{tx} + \mu_1\varphi_t^2 + \mu_2 W(x,1,t)\varphi_t\right\}dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \{\rho_2\psi_{tt}\psi_t - b\psi_x\psi_{tx} + K(\varphi_x+\psi)\psi_t + \gamma\theta_x\psi_t\}dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \{\rho_3\theta_t\theta + \kappa q_x\theta + \gamma\psi_{tx}\theta\}dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \left\{\tau_0 q_t q + \delta q^2 + \kappa\theta_x q\right\}dx = 0. \end{cases}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{\rho_1\varphi_{tt}\varphi_t + k(\varphi_x+\psi)k(\varphi_{xt}+\psi_t) + \mu_1\varphi_t^2 + \mu_2 W(x,1,t)\varphi_t + \rho_2\psi_{tt}\psi_t + b\psi_x\psi_{tx}0. \\ &\quad + \rho_3\theta_t\theta + \tau_0 q_t q + \delta q^2\right\}dx = 0. \end{aligned}$$

D'autre part ; on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left\{\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2\right\}dx = \int_0^1 \{\varphi_{tt}\varphi_t + \psi_{tt}\psi_t\}dx$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left\{K(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2\right\}dx \\ &= \int_0^1 \{k(\varphi_x+\psi)(\varphi_{tx}+\psi_t + b\psi_x\psi_{tx} + \rho_3\theta_t\theta + \tau_0 q_t q\}dx. \end{aligned}$$

Alors, on trouve l'égalité suivante

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2+\rho_2\psi_t^2)dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \left\{k(\varphi_x+\psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3\theta^2 + \tau_0 q^2\right\}dx \\ &= -\delta\int_0^1 q^2 dx - \mu_1\int_0^1 \varphi_t^2(x,t)\mu_2\int_0^1 \varphi_t(x,t)W(x,1,t)dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On multiplie $(2.1)_5$ par W

$$\begin{aligned}\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1 \tau(t)W^2(x,\rho,t)d\rho dx &= -\xi\int_0^1\int_0^1 (1-\tau'(t)\rho W(x,\rho,t)W_\rho(x,\rho,t)d\rho dx \\ &+\frac{\xi}{2}\tau'(t)\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho,t)d\rho dx, \\ &= -\frac{\xi}{2}\int_0^1\int_0^1((1-\tau'(t)\rho)W(x,\rho,t))d\rho dx \\ &= \frac{\xi}{2}\int_0^1 (W^2(x,0,t)-W^2(x,1,t))dx + \frac{\xi\tau'(t)}{2}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

De (3.2), (3.3) et (3.4) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= -\left(\mu_1-\frac{\xi}{2}\right)\int_0^1 \varphi^2(x,t)dx + \left(\frac{\xi\tau'(t)}{2}-\frac{\xi}{2}\right)\int_0^1 W^2(x,1,t)dx \\ &- \mu_2\int_0^1 \varphi(x,t)W^2(x,1,t)dx - \delta\int_0^1 q^2 dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Grâce à l'inégalité de Young, le dernier terme entre (3.5) peut être estimé comme suit

$$\begin{aligned}&\mu_2\int_0^1 \varphi(x,t)W^2(x,1,t)dx \\ &\le \frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}}\int_0^1 \varphi^2(x,t)dx + \frac{\mu_2\sqrt{1-d}}{2}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx,\end{aligned} \tag{3.6}$$

Preuve 9:
on a

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}} \le \xi \le 2\mu_1 - \frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}},$$

et

$$\mu_2 < \sqrt{1-d} \Rightarrow \mu_2 < 1$$

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{1-d}} \le \xi, \qquad \textit{on choisier } \xi = \frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}}.$$

D'aprés Young on obtien

$$\mu_2\int_0^1 \varphi(x,t)W^2(x,1,t)dx \leqslant \xi\mu_2\int_0^1 \varphi_t^2(x,t)dx + \frac{\mu_2}{4\xi}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx,$$

alors

$$\mu_2\int_0^1 \varphi(x,t)W^2(x,1,t)dx \leqslant \frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}}\int_0^1 \varphi^2(x,t)dx + \frac{\mu_2}{4}\frac{1}{\sqrt{1-d}}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx,$$

alors

$$\begin{aligned}&\mu_2\int_0^1 \varphi(x,t)W^2(x,1,t)dx \\ &\le \frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}}\int_0^1 \varphi^2(x,t)dx + \frac{\mu_2\sqrt{1-d}}{2}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx.\end{aligned} \tag{3.7}$$

En insérant (3.6) dans (3.5) ,on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} \leq &-\left(\mu_1 - \frac{\xi}{2} - \frac{\mu_2}{2\sqrt{1-d}}\right)\int_0^1 \varphi^2(x,t)dx - \delta\int_0^1 q^2dx\\ &+\left(\frac{\xi}{2}(\tau'(t)-1) + \frac{\mu_2\sqrt{1-d}}{2}\right)\int_0^1 W^2(x,1,t)dx.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Alors, on déduit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -\delta\int_0^1 q^2dx - C\left\{\int_0^1 \varphi^2(x,t)dx + \int_0^1 W^2(x,1,t)dx\right\}. \tag{3.9}$$

Alors, E est une fonction non croissante.

3.1 Stabilité exponentielle

Notre deuxième résultat est :

Théorème 8:
Soit $U_0 \in D(\mathcal{A}(0))$. Supposons que (2) soit vrai. Puis sous les hypothèses (3), (4) et (2.2) toute solution du problème (2.1) . Satisfait

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.10}$$

pour certaines constantes positives C et γ idedépendant de t.
Pour dériver la décroissance exponentielle de la solution, nous construisons une fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$ qui est équivalente à l'énergie $E(t)$ et satisfait

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -\Lambda\mathcal{L}(t)), \qquad \forall t \geq 0,$$

pour une constante $\Lambda > 0$.
Considérons d'abord la fonction I_1 donnée par

$$I_1(t) := \int_0^1 \rho_1\varphi_t\varphi dx + \frac{\mu_2}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx. \tag{3.11}$$

Par conséquent, nous obtenons

Lemme 2:
Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, W)$ la solution de (2.1).Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} \leq &\left(-k + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + \frac{\mu_{2^c}}{2}\right)\right)\int_0^1 \varphi_t^2dx + \frac{k}{2\varepsilon_1}\int_0^1 \psi_x^2dx\\ &+\frac{\mu_2}{2\varepsilon_1}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2dx, \quad \text{où } c = \frac{1}{\pi^2}.\ et\ \varepsilon_1 > 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve 10:
En dérivant I_1 ,on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^1 \rho_1\varphi_t\varphi dx + \frac{\mu_2}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx\right] \\
\frac{dI_1}{dt} &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\rho_1\varphi_t\varphi)(x,t)dx + \frac{\mu_2}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi^2)(x,t)dx \\
\frac{dI_1}{dt} &= \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \mu_1\int_0^1 \varphi\varphi_t dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Grâce à $(2.1)_1$, on trouve

$$\frac{dI_1}{dt} = -k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)\varphi_x dx - \mu_2\int_0^1 \varphi W(x,1,t)dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

Ainsi

$$\frac{dI_1}{dt} = k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)_x\varphi dx - \mu_2\int_0^1 \varphi\varphi_t(x,t\tau(t))dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx.$$

L'utilisation des inégalités de Young et de Poincaré conduit à (3.12).
Maintenant, soit w soit la solution de

$$-w_{xx=} = \psi_x, \quad w(0) = w(1) = 0. \tag{3.14}$$

Ensuite, nous obtenons

$$w(x,t) = -\int_0^x \psi(y,t)dy + x\left(\int_0^1 \psi(y,t)dy\right).$$

Lemme 3:
La solution de (3.14) satisfait

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leq \int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

et

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Preuve 11:
Multiplier (3.14) par w et intégrer par parties et appliquer l'inqualité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$-\int_0^1 w_{xx}w dx = \int_0^1 \psi_x w dx,$$

et par l'integration par partie, on trouve

$$\int_0^1 w_x^2 dx - [w_x w]_0^1 = -\int_0^1 \psi w_x dx + [w\psi]_0^1,$$

les conditions aux bord impliquent

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leqslant -\int_0^1 \psi w_x dx,$$

et en utilisant l'integral de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leqslant \sqrt{\int_0^1 w_x^2 dx}\sqrt{\int_0^1 \psi^2 dx.}$$

Après la simplification, on trouve

$$\int_0^1 w_x^2 dx \leqslant \int_0^1 \psi_x^2 dx.$$

De même, en derivant (3.14) ,par rapport à t , on obtient

$$\int_0^1 w_t^2 dx \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Ceci complète la preuve du lemme.

Nous introduisons la fonction suivante

$$I_2(t) := \int_0^1 \left(\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\varphi_t w - \frac{\gamma\tau_0}{k}\psi q\right) dx. \tag{3.15}$$

Lemme 4:
Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, W)$ la solution de (2.1) . Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dt} &\leqslant \left(-b + \frac{c\mu_1\varepsilon_2}{2} + \frac{c\mu_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\delta\gamma\varepsilon_2 c}{2k}\right)\int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_2}\int_0^1 W^2(x,1,t)dx \\ &+ \left(\rho_2 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2k} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2}\right)_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2}\right)\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &+ \left(\frac{\gamma\tau_0}{2k\varepsilon_2} + \frac{\delta\gamma}{2k\varepsilon_2}\right)\int_0^1 q^2 dx, \quad \text{où } \varepsilon_2 > 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Preuve 12:
En dérivant (3.15) , on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{dI_2}{dt} &= \left[\int_0^1 \left(\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\varphi_t w - \frac{\gamma\tau_0}{k}\psi q\right) dx\right] \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\varphi_t w)(x,t)dx - \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \frac{d}{dt}(\psi q)(x,t)dx \\ &= \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\psi(x,t)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2(x,t)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}w(x,t)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t w_t(x,t)dx \\ &+ \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}w(x,t)dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t w_t(x,t)dx - \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \psi_t q(x,t)dx - \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \psi q_t(x,t)dx. \end{aligned}$$

Par consequent, en utilisant les première et deuxième equations de (2.1) nous pouvons ecrire

$$\begin{aligned}
\frac{dI_2}{dt} &= b\int_0^1 (\psi_{xx}\psi(x,t))dx - K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)\psi)(x,t)dx\rho_2\int_0^1 \psi_t^2(x,t)dx + K\int_0^1 (\varphi_x+\psi)_x w-(x,t)\\
&- mu_1\int_0^1 \varphi_t(x,t)dx - \mu_1\int_0^1 W(x,1,t)(x,t)dx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t w_t(x,t)dx - \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \psi_t q(x,t)dx\\
&- \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \psi q_t(x,t)dx\\
&= -b\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \varphi\psi_x dx - k\int_0^1 \psi^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - k\int_0^1 \varphi_x w_x dx\\
&- k\int_0^1 \psi w_x dx - \mu_1\int_0^1 \varphi_t w - \mu_2\int_0^1 W(x,1,t)wdx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t w_t dx\\
&- \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\gamma\delta}{k}\int_0^1 \psi q dx.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.14) et le lemme 2 , nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{dI_2}{dt} &\leqslant -b\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 \varphi\psi_x dx - k\int_0^1 \psi^2 dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + k\int_0^1 \varphi_x w_x dx\\
&+ k\int_0^1 \psi w_x dx - \mu_1\int_0^1 \varphi_t w - \mu_2\int_0^1 W(x,1,t)wdx + \rho_1\int_0^1 \varphi_t w_t dx\\
&- \frac{\gamma\tau_0}{k}\int_0^1 \psi_t q dx + \frac{\gamma\delta}{k}\int_0^1 \psi q dx.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young et de Poincaré et en utilisant le lemme 2 , on obtient (3.16).

Maintenant, nous avons défini la fonction

$$I_3 := \xi\tau(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}W^2(x,\rho,t)dxd\rho. \tag{3.17}$$

Il satisfait l'estimation énoncée dans le lemme suivant

Lemme 5:
Soit $(\varphi,\psi,\theta,q,W)$ la solution de (2.1), ensuite nous avons

$$\frac{dI_3}{dt} \leqslant -2I_3(t) + \xi\int_0^1 \varphi_t^2(x,t)dx. \tag{3.18}$$

Preuve 13:
Nous dérivons (3.18) , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dI_3}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\xi\tau(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}W^2(x,\rho,t)dxd\rho\right] \\
\frac{dI_3}{dt} &= \xi\tau(t)\int_0^1\int_0^1 \frac{d}{dt}(e^{-2\tau(t)\rho}W^2(x,\rho,t))dxd\rho \\
\frac{dI_3}{dt} &= \xi\tau'(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}W^2(x,\rho,t)dxd\rho \\
&- 2\xi\tau(t)\tau'(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}W^2(x,\rho,t)dxd\rho \\
&+ 2\xi\tau(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}W_t(x,\rho,t)W(x,\rho,t)dxd\rho.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

En utilisant $(2.1)_3$ et le dernier terme dans (3.19) nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\tau(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}W_t(x,\rho,t)W(x,\rho,t)dxd\rho \\
&= \int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}(\tau'(t)\rho-1)W_t(x,\rho,t)W(x,\rho,t)dxd\rho.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Aussi, on peut voir que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}(\tau'(t)\rho-1)W_t(x,\rho,t)W(x,\rho,t)dxd\rho \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(e^{-2\tau(t)\rho}(\tau'(t)\rho-1)W^2(x,\rho,t)\right)dxd\rho \\
&+ \tau(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}(\tau'(t)\rho-1)W^2(x,\rho,t)dxd\rho \\
&- \frac{\tau'(t)}{2}\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}(\tau'(t)\rho-1)W^2(x,\rho,t)dxd\rho.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En utilisant (3.21) et (3.20) , l'équation (3.19) prend la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dI_3}{dt} &= -2\xi\tau(t)\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau(t)\rho}(\tau'(t)\rho-1)W^2(x,\rho,t)dxd\rho + \xi\int_0^1 \varphi_t^2 x(,t)dx \\
&- \xi e^{-2\tau(t)}(1-\tau'(t))\int_0^1 W^2(x,1,t)dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

La preuve du lemme est alors terminée.

Maintenant, comme dans [7] ,nous introduisons la fonction

$$I_4(t) := \rho_2\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \theta(t,y)dy\right)\psi_t(t,x)dx. \tag{3.23}$$

Lemme 6:
Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, W)$ la solution de (2.1), ensuite nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dI_4}{dt} &\leqslant \left(-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4\rho_2 k}{2}\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_4\rho_3}{2}(b+2k)\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &+ \frac{\varepsilon_4' k\rho_3 c}{2}\int_0^1 \varphi_x^2 dx + \left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}(b+2k)\right)\int_0^1 \theta^2 dx \\ &+ \frac{\rho_2 k}{2\varepsilon_4}\int_0^1 q^2 dx, \quad \text{où } \varepsilon_4, \varepsilon_4' > 0.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Preuve 14:
En dériver (3.23) et utiliser $(2.1)_3$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dI_4}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\rho_2\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \theta(t,y)dy\right)\psi_t(t,x)dx\right] \\ \frac{dI_4}{dt} &= \rho_2\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \frac{d}{dt}(\theta(t,y)dy\right))\frac{d}{dt}(\psi_t(t,x))dx. \\ \frac{dI_4}{dt} &= \int_0^1\left(\int_0^x \rho_3\theta_t dy\right)\rho_2\psi_t dx + \int_0^1\left(\int_0^x \rho_3\theta dy\right)\rho_2\psi_{tt}dx \\ &= -\int_0^1\left(\int_0^x (kq_x + \gamma\psi_{tx})dy\right)\rho_2\psi_t dx \\ &+ \int_0^1\left(\int_0^x \rho_3\theta dy\right)(b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi) - \gamma\theta_x)dx \\ &= -\gamma\rho_2\int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_2 k\int_0^1 q\psi_t dx - b\rho_3\int_0^1 \theta\psi_x dx \\ &+ k\rho_3\int_0^1 \theta\varphi dx - k\rho_3 + \int_0^1\left(\int_0^x \theta dy\right)\psi dx + \gamma\rho_3\int_0^1 \theta^2 dx.\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young et Poincaré, on trouve (3.24).

Ici, nous introduisons la fonction

$$I_5 := -\tau_0\rho_3\int_0^1 q(t,x)\left(\int_0^x \theta(t,y)dy\right)dx. \tag{3.25}$$

Lemme 7:
Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, W)$ la solution de (2.1), ensuite nous avons

$$\begin{aligned}\frac{dI_5}{dt} &\leqslant \left(-\rho_3 k + \frac{\varepsilon_5\rho_3\delta c}{2}\right)\int_0^x \theta^2 dx + \frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2}\int_0^x \psi_t^2 dx \\ &\left(\tau_0 k + \frac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'}\right)\int_0^x q^2 dx, \text{pour toute } \varepsilon_5, \varepsilon_5' > 0.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Preuve 15:
En dériver (3.25) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dI_5}{dt} &= -\rho_3 \int_0^1 \tau_0 q_t \left(\int_0^x \theta dy\right) dx - \tau_0 \int_0^1 q\left(\rho_3 \theta_t dy\right) dx \\
&= \rho_3 \int_0^1 (-\delta q - \kappa \theta_x) \left(\int_0^x \theta dy\right) dx \\
&- \tau_0 \int_0^1 q \left(\int_0^x -\kappa q_x - \gamma \psi_{tx} dy\right) dx \\
&= \rho_3 \delta \int_0^1 q \left(\int_0^x \theta dy\right) dx + \rho_3 \kappa \int_0^1 \theta_x \left(\int_0^x \theta dy\right) dx \\
&+ \tau_0 \kappa \int_0^1 q \left(\int_0^x q_x dy\right) dx + \tau_0 \gamma \int_0^1 q \left(\int_0^x \psi_{tx} dy\right) dx \\
&= \frac{\rho_3 \delta}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon_5 \left(\int_0^x \theta^2 dy\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_5} q^2\right) dx - \rho_3 \kappa \int_0^1 \theta^2 dx \\
&+ \tau_0 \kappa \int_0^1 q^2 dx + \frac{\tau_0 \gamma}{2} \int_0^1 \varepsilon_5' \psi_t^2 + \frac{1}{\varepsilon_5'} q^2 dx, \quad \text{pour tout} \varepsilon_5, \varepsilon_5' > 0.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités de Young et Poincaré, on trouve (3.26).

Preuve 16:
(Preuve du théorème 6) nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}$ comme suit :

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + I_1(t) + N_2 I_2(t) + I_3(t) + N_4 I_4(t) + N_4 I_4(t). \tag{3.27}$$

Où $N, N_2, N_4, N_5 > 0$.
En combinant (3.9), (3.12), (3.16), (3.18), (3.24) et (3.26) , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leqslant& \left[\frac{k}{2\varepsilon_1} + N_2\left(-b + \frac{c\mu_1\varepsilon_2}{2} + \frac{c\mu_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\delta\gamma\varepsilon_2 c}{2k}\right) + N_4\left(\frac{\varepsilon_4'\rho_3}{2}(b+kc)\right)\right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
&+ \left[-k + \varepsilon_1\left(\frac{k}{2} + \frac{\mu_2 c}{2}\right) + N_4 \frac{\varepsilon_4' k \rho_3 c}{2}\right] \int_0^1 \varphi_x^2 dx - 2I_3(t) \\
&+ \left[-NC + \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1} N_2 \frac{\mu_2}{2\varepsilon_1}\right] \int_0^1 W^2(x,1,t) dx \\
&+ \left[-NC + N_2\left(\frac{\mu_1}{2\varepsilon_2} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon_2}\right) + \rho_1 + \xi\right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
&+ \left[N_2\left(\rho_1 + \frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2k} + \frac{\rho_1\varepsilon_2}{2}\right) + \frac{1}{2\tau} + N_4\left(-\gamma\rho_2 + \frac{\varepsilon_4\rho_2 k}{2}\right) + N_5 \frac{\varepsilon_5'\tau_0\gamma}{2}\right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
&+ \left[N_\gamma N_2 \left(\frac{\gamma\tau_0}{2k\varepsilon_2}\right) N_4 \frac{\rho_2 k}{2\varepsilon_4} + N_5\left(\tau_0 k + \frac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_5} + \frac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'}\right)\right] \int_0^1 q^2 dx \\
&+ \left[N_4\left(\gamma\rho_3 + \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'}\right)(b+2k) + N_5\left(-\rho_3 k + \frac{\varepsilon_5\rho_3\delta c}{2}\right)\right] \int_0^1 \theta^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Choisissez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ et ε_5 assez petit, tel que

$$\varepsilon_1\left(\frac{c\mu_1}{2}\frac{c\mu_2}{2}+\frac{\delta\gamma c}{2k}\right)\leqslant\frac{b}{2},\quad \varepsilon_1\left(\frac{k}{2}+\frac{\mu_2 c}{2}\right)\leqslant\frac{k}{2},$$
$$\varepsilon_4\leqslant\frac{\gamma}{k},\varepsilon_5\leqslant\frac{k}{\delta c}.$$

Nous pouvons choisir N_2 assez grand pour que

$$N_2\geqslant\frac{2k}{b\varepsilon_1}.$$

Et aussi N_4 assez grand pour que

$$N_4\frac{\gamma\rho_2}{4}\geqslant N_2\left(\rho_2+\frac{\gamma\tau_0\varepsilon_2}{2k}+\frac{\rho_1\varepsilon_2}{2}\right)+\frac{1}{2\tau}.$$

Fixée N_2 et N_4 nous avons

$$\varepsilon_4'\leqslant\min\left\{\frac{N_2 b}{4N_4\rho_3(b+kc)},\frac{k}{2N_4 k\rho_3 c}\right\}.$$

Soit N_5 soit suffisamment grand pour que

$$\frac{N_5\rho_3 k}{4}\geqslant N_4\left(\gamma\rho_3+\frac{\rho_3}{2\varepsilon_4'(b+2k)}\right).$$

Nous fixonson ε_5' assez petit, on a

$$\varepsilon_5'\leqslant\frac{N_4\gamma\rho_2}{4N_5\tau_0\gamma}.$$

Maintenant nous avons

$$\begin{cases}\dfrac{CN}{2}\geqslant\max\left\{\dfrac{\mu_2}{2\varepsilon_1}+N_2\dfrac{\mu_2}{2\varepsilon_1},N_2\left(\dfrac{\mu_1}{2\varepsilon_2}+\dfrac{\rho_1}{2\varepsilon_2}\right)\rho_1\right\}\\ \dfrac{N\gamma}{2}\geqslant N_2\left(\dfrac{\gamma\tau_0}{2k\varepsilon_2}+\dfrac{\delta\gamma}{2k\varepsilon_2}\right)+N_4\dfrac{\rho_2 k}{2\varepsilon_4}+N_5\left(\tau_0 k\dfrac{\rho_3\delta}{2\varepsilon_5}\dfrac{\tau_0\gamma}{2\varepsilon_5'}\right).\end{cases}$$

On voit que (3.28) est équivalent à

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)\leqslant\eta_1\int_0^1\left(\psi_t^2+\psi_x^2+\varphi_t^2+(\varphi_x+\psi)^2+\theta^2+q^2\right)dx-\eta_1\int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho,t)d\rho dx, \quad (3.29)$$

ensuite nous avons

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t)\leqslant\eta_2 E(t),\qquad \text{pour toute } t\geqslant 0, \quad (3.30)$$

où $-\eta_1$ et η_2 comme constante positive.

Lemme 8:
Il existe deux constantes positives β_1, β_2 tel que

$$\beta_1 E(t)\leqslant\mathcal{L}(t)\leqslant\beta_2 E(t),\qquad \textit{pour toute } t\geqslant 0. \quad (3.31)$$

Preuve 17:
On définit le fonctionnelle

$$H((t) = I_1(t) + N_2I_2(t) + I_3(t) + N_4I_4(t) + N_5I_5(t),$$

et nous le prouvons

$$|H(t)| \leqslant CE(t) \qquad ,C > 0.$$

A partir de $(3.11), (3.15), (3.17), (3.23)$ *et* (3.25) on trouve

$$\begin{aligned} |H(t)| \leqslant & \left|\int_0^1 \rho_1\varphi_t\varphi dx + \frac{\mu_1}{2}\int_0^1 \varphi^2 dx\right| + N_2\left|\int_0^1 \left(\rho_2\psi_t\psi dx + \rho_1\varphi_t w - \frac{\gamma\tau_0}{k}\psi q\right) dx\right| \\ & + \left|\int_0^1\int_0^1 e^{-2\tau\rho}W^2(x,\rho,t)d\rho dx\right| + N_4\left|\rho_2\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \theta(t,y)dy\right)\psi_t(t,x)dx\right| \\ & + N_5\left|\tau_0\rho_3\int_0^1 q(t,x)\left(\int_0^x \theta(t,y)dy\right)dx\right|. \end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\int_0^1 \varphi^2 dx \leqslant 2c\int_0^1 (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2c\int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

de plus, en appliquant les inégalités de Young et Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |H(t)| \leqslant & \alpha_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \alpha_2\int_0^1 \psi_t^2 dx + \alpha_3\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \alpha_4\int_0^1 \psi_x^2 dx + \alpha_4\int_0^1 \theta^2 dx \\ & + \alpha_6\int_0^1 q^2 dx + \int_0^1\int_0^1 W^2(x,\rho,t)d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.32}$$

où les constantes positives $\alpha_1, \cdots, \alpha_6$ sont :

$$\begin{cases} \alpha_4 := \frac{1}{2}(\rho_1 + N_2\rho_1, \\ \alpha_4 := \frac{1}{2}(N_2\rho_2 + N_4\rho_2\rho_3), \\ \alpha_4 := \rho_1 c \\ \alpha_4 := \frac{1}{2}(\frac{N_2\gamma\tau_0 c}{k} + N_2\rho_1\rho_1c^2 + N_2\rho_2\rho_1c^2), \\ \alpha_4 := \frac{1}{2}(N_4\rho_2\rho_3c + N_5\tau_0\rho_3c), \\ \alpha_4 := \frac{1}{2}(N_2\frac{\gamma\tau_0}{k} + N_5\tau_0\rho_3). \end{cases}$$

Par (3.31) ,on obtient

$$|H| \leqslant \tilde{C}E(t), \quad \tilde{C} = \frac{\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}}{\min\{\rho_1,\rho_1,\rho_1,K,b,k,\gamma,\delta,\tau_0\}}$$

on a

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leqslant \tilde{C}E(t).$$

En combinant (3.29) , et (3.30) , on en déduit que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leqslant -\Lambda\mathcal{L}(t), \qquad \textit{pour toute } t, \Lambda \geqslant 0. \tag{3.33}$$

Alors

$$\mathcal{L}(t) \leqslant \mathcal{L}(0)e^{-\Lambda t}, \qquad \textit{pour toute } t \geqslant 0. \tag{3.34}$$

La preuve du théorème est donc complète.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème de type Timoshenko avec deuxième son en présence d'un terme de retard varié dans le temps, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème en basant sur la technique de Kato[11].Finalment,nous avons étudié le comportement asymptotique de la solution et sous certains conditions on a démontré la décroissance exponentielle de la fonctionnelle d'énergie.

Bibliographie

[1] Z.Khalili, D.Ouchenane, Exponential stability for a Timoshenko thermoelastic system with second sound and a time-varying delay term inthe internal feedback, J. Asymptotic Analysis 1 (2021) 1-6

[2] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and M. N. O. Castro. Expoenetial stability for the Timo-shenko system with two weak dampings. J. Appl. Math. Lett., 18 :535.541, 2005.

[3] D.Ouchenane, A stability result of the Timoshenko system in thermoelasticity of second sound with a delay term in the internal feedback, G. Math. J., 21(4) : 475–489, (2014).

[4] J. E. Munoz Rivera and R. Racke. Timoshenko systems with indenite damping. J. Math. Anal. Appl., 341(2) :1068.1083, 2008.

[6] M.Kirane, B.Said-houari, M.N.Anwar, Stability result for the Timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks, Pure and Applied Analysis. v10,N2,(2011)667-686.

[7] S.A.Messaoudi, M.Pokojovy and B.Said-Houari, Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound—Globalexistence and exponential stability, Math. Methods Appl. Sci. 32 (2009), no. 5, 505–534.

[8]S. C. Cowin and J. W. Nunziato. Linear elastic materials with voids. J. Elast., 13(2) :125-147, 1983.

[9] S. Timoshenko. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars. Philosophical Magazine., 41 : 744–746, (1921).

[10] S.Nicaise, C.Pignotti and J.Valein, Exponential stability of the wave equation with boundary time-varying delay, submit-ted.

[11] T.Kato, Linear and quasilinear equations of evolution of hyperbolic type, C.I.M.E., II (1976), 125191.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي بالأغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : analyse fonctionnelle et applications.

Par :

Rouane Bahidja

Thème

Existence, unicité et stabilisation d'un système de type Timoshenko avec deuxième son en présence d'un terme de retard varié dans le temps

Devant le jury composé de :

YAGOUB Ameur	Maître de conférence A	Université de Laghouat	Président
OUCHENANE Djamel	Professeur	Université de Laghouat	Examinateur
KHALILI Zineb	Maître de conférence B	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023 -2024