الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عمار ثليجي *الأغواط*

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية في مقياس:

الإحصـــــــاء 2

مدعمة بأمثلة متنوعة وتمارين محلولة

موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك ل م د

من إعداد الدكتور: جدي العربي

السنة الجامعية: 2024-2025

اعتمدت هذه المطبوعة بعد مصادقة المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الأغواط، بناء على محضر رقم: 2025/02، المنعقد بتاريخ: 2025/03/15، تحت رقم اعتماد: 15/م/2024.

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، له الحمد وشكر ونعمة وله الفضل وثناء الحسن، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد،

شهدت في الفترة الأخيرة عملية التعامل مع الإحصاء تطورا كبيرا، وكذلك اتسع نطاق التعامل مع النظريات الإحصائية ، مما أدى إلى إعطاء الأهمية الكبيرة لموضوع الإحصاء، إذ أصبح له تطبيقات كثيرة ومتعددة في مختلف مجالات الحياة، وأصبح هذا الموضوع يدرس في مختلف أطوار العلم من مدارس ومعاهد وجامعات.

لذا يسرني أن أضع بين يدي طلبتي الاعزاء هذه المطبوعة الخاصة بمقياس الأحصاء2، التي اعتمدت في إعدادها على التبسيط من خلال تدعيم الدروس بالعديد من الأمثلة المتنوعة، ومجموعة من التمارين المحلولة في نهاية كل فصل حرصا مني على التوضيح وسهولة الفهم والاستيعاب الجيد للطلبة، وذلك لأن عملية توصيل العلم والمعرفة تحتاج إلى أفضل الطرق والأساليب ومنهجية تقديم وعرض الدروس.

جاء محتوى هذا المقياس وفق البرنامج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، حيث شملت هذه المطبوعة أربعة فصول هي:

- الفصل الأول: نظرية المجموعات.
- الفصل الثاني: التحليل التوافقي "طرق العد".
- الفصل الثالث: مبادئ الاحتمالات.
- الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية.

ومن خلال هذا العمل المتواضع حاولت الالمام بالموضوع قدر المستطاع، لهذا أرجوا منكم إبداء ملاحظتكم وآرائكم حول كل خطأ أو نقص في هذه المطبوعة حتى نتمكن من معالجة ذلك وتحسين هذا العمل في المستقبل.

د. جدي العربي

قائمة المحتويات:

الفصل الأول: المجموعات

الفصل الثاني: التحليل التوافقي "طرق العد"

الفصل الثالث: مبادئ الاحتمالات

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية

الفصل الأول:

نظرية المجموعات

مبدا الاحتمالات

قبل البدأ في مبدأ الاحتمالات سنتطرق الى بعض المفاهيم الأساسية تخص المجموعة وذالك لما هناك علاقة مهمة بهذا الفصل

المجموعات

ان أول من ابتكر نظرية المجموعات هو العالم الألماني الشهير "كانتور" وكان ذلك سنة (1845-1918)، حيث عرف المجموعة كما يلي

تعريف المجموعة: هي جمع او تجمع من الأشياء المحددة والمتمايزة والمتجانسة، وللمجموعة عناصر تميزها، وهي :

1/ إسم المجموعة واصطلح على أن يكون أحد الاحرف اللاتينية الكبيرة مثل A ,B , C

2/وجود عناصر المجموعة بين قوسين خاصين من نوع {}

3/ ان يرمز للعناصر بألاحرف اللاتينية الصغيرة a,b,c

4/ وجود الفواصل التي تفصل العناصر

طريقة وصف المجموعة:

إن عناصر المجموعة قد تكون عادة إما [أرقام، أو حروف، أو صفات، او أسماء، أو أية أشياء اجزائها محددة] ويمكن كتابة عناصر المجموعة بطرق عدة نذكر منها ما يأتي:

1- طريقة جدولة العناصر : كما تسمى كذلك بالطريقة الصريحة أو الطريقة القائمة تتلخص هذه الطريقة كتابة اسم المجموعة ولتكن (A) ثم كتابة (=) ثم نفتح قوسين من النوع {} ومن ثم كتابة عناصر المجموعة داخل المجموعة على ان يتم الفصل بينهما بفاصلة.

مثال(01): أكتب عناصر المجموعة (C)، بحيث عناصرها تمثل [الاعداد الزوجية والتي تبدأ بالعدد (2) واقل عدد (14)]، مع تبيان عدد عناصرها.

الحل

$$C=\{2,4,6,8,10,12\}$$

$$n\ (C) = 6$$

2- الطريقة الخاصة المميزة للعناصر: و تسمى بالطريقة الضمنية أو الطريقة القاعدة : تتلخص هذه الطريقة في ذكر الخاصية التي تميز عناصر المجموعة كالاتي:

$$B=\{x:x(A)\}$$

حيث أن :

X(A) : تمثل الصفة المميزة للعناصر (x)

مثال (02): أكتب عناصر المجموعة A، حيث أن:

$$A = \{x: x \geq 0\}$$

$$\Rightarrow A = \{0,1,2,3,4, \ldots\ldots\}$$

مثال (03): E عدد حقيقي يحقق العلاقة التالية

$$E = \{X: X^2 = 1\}$$
$$\Rightarrow E = \{-1\ , 1\}$$

مثال (04): إذا كانتy مجموعة المدارس الابتدائية الموجودة بمدينة الاغواط

$$y = \left\{X: X \text{ مدارس الابتدائية}\right\}$$

ملاحظة: اذا كان العنصر (a) مثلا ينتمي الى المجموعة (A)، ففي هذه الحالة يكتب بالصورة التالية $(a \in A)$ } ويقرأ [العنصر (a) ينتمي الى المجموعة (A)].

أما في حالة العكس فيكتب $(a \notin)$ ويقرأ [العنصر (a) لا ينتمي للمجموعة (A)].

مثال (05): ضع رمز $\in$ أو $\notin$ في الفراغات التالية :

1) $3 \ldots \{3\ , 6\ , 2\}$
2) $\{5\} \ldots \{5\ , 7\ , 2\}$
3) $0 \ldots \{1\ , 2\ , 9\}$
4) $\{7\} \ldots \left\{1\ , 6\ , \{7\}\right\}$

الحل:

$$1)\ 3 \in \{3\ ,6\ ,2\}$$
$$2)\ \{5\} \notin \{5\ ,7\ ,2\}$$
$$3)\ 0 \notin \{1\ ,2\ ,9\}$$
$$4)\ \{7\} \in \left\{1\ ,6\ ,\{7\}\right\}$$

المجموعة الخالية :

هي مجموعة لا تحتوي عل أي عنصر، ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو $\{\ \}$.

مثال (06): أكتب مجموعة الأعداد الطبيعية و أقل من 1.

الجل: $A = \emptyset = \{\ \}$

المجموعة الجزئية : نقول أن المجموعة (A) مجموعة جزئية من المجموعة (B) اذا كان جميع العناصر المجموعة (A) موجودة في المجوعة (B)، ويرمز لذلك بالرمز $A \complement B$ أي أان

$$A \complement B \Rightarrow a \in A\ , a \in B$$

مثال (07): لتكن لدينا المجموعات التالية التالية

A={2,3,4}

,B={1,2,3,4,5}

نقول أن $A \complement B$

B={a,b, d,e}

A={a,b,c,e}

$$A \not\subset B$$

لأن: العنصر: $c \in A$ و لكن $c \not\subset b$

مثال (8): لتكن لدينا المجموعات الجزئية لكg بالمجاميع التالية :

$$A = \{1 , 4\}$$

$$B = \{1 ,2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

$$D = \{4 , 5 , 6 , 7\}$$

نقول أن :

$A \subset B$ لان جميع العناصر المجموعة (A) موجودة في المجموعة (B).

$A \not\subset D$ لان العنصر (1) في المجموعة (A) غير موجود في المجموعة (D).

$D \not\subset B$ لان العنصر (7) موجود في المجموعة (D) وغير موجود في المجموعة (B)

تساوي مجموعتين : نقول عن مجموعتين انهما متساويتين اذا كان كل من (A) و(B) تحتويان على نفس العناصر حيث يتحقق الشرط التالي: $A \subset B$ و $B \subset A$

$$\Rightarrow A = B$$

مثال (09):

$$A = \{2,4,6,8\}$$

$$B = \{4,6,8,2\}$$

نلاحظ أن:

$$\begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B$$

$$A = \{1,7,11\}$$

$$B = \{11,5,7\}$$

نلاحظ أن:

$$\begin{cases} A \not\subset B \\ B \not\subset A \end{cases} \Rightarrow A \neq B$$

المجموعة الشاملة : هي المجموعة التي تحتوي أو تدرس جميع المجموعات تحت البحث باعتبارها مجموعات جزئية منها.

مثال (10): عند رمي زهرة النرد في تجربة عشوائية فإن المجموعة الكلية هي:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ومنه فإن المجموعات التالية :

$$\begin{cases} A = \{2,4,6\} \rightarrow A \subset S \\ B = \{1,3,5\} \rightarrow B \subset S \\ C = \{3\} \rightarrow C \subset S \end{cases}$$

هي مجموعات جزئية من المجموعة الكلية (أو الشاملة) (S).

<u>المجموعتان المنفصلتان</u>

نقول عن المجموعة (A) والمجموعة(B) انهما منفصلتان اذا كان $A \cap B = \emptyset$ أي لا يوجد بينهما عناصر مشتركة

مثال (11):

$$\boldsymbol{A = \{4, 9, 11\}}, B = \{1,5,7\} \rightarrow A \cap B = \emptyset$$

<u>المجموعة المتممة</u> نقول مثلا متممة (A) هي مجموعة العناصر المتممة الى المجموعة الكلية (S)، ولا تنتمي الى المجموعة (A) ويرمز لها بالرمز (A^c) أو $(\overline{A})$ أو (A') ويعبر عنها بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \{x : x \in S \ \cap x \notin A\}$$

$$\boldsymbol{a \in A}$$

فإن

$$\boldsymbol{a \notin \overline{A}}$$

مثال (12): ليكن لدينا ما يلي

$$S = \{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\}$$

$$A = \{2\ ,4\ ,6\}$$

المطلوب: جد: $\overline{A}, n(\overline{A})$

$$\overline{A} = S - A = \{1,2,3,4,5,6\} - \{2,4,6\} = \{1,2,3\} \rightarrow n(\overline{A}) = 3$$

العمليات الجبرية على المجموعات

1) **الاتحاد:** يرمز لاتحاد مجموعتين (A) و(B) بالرمز (AUB)، وجود مجموعة العناصر الموجودة في A أو B مع عدم تكرار العنصر ويعبر عنه بالعلاقة الرياضية كما يلي:

$$a \in (A \cup B) \Leftrightarrow a \in A \text{ أو } a \in B$$

$$A \cup B = \left\{x: x \in A \text{ أو } x \in B\right\}$$

مثال (13): اذا كان لدينا المجموعات الأتية،

$$A = \{2,3\}\,, B = \{1,2,4,6\}\,, C = \{7,8\}$$

المطلوب: جد ما يأتي مع تحديد عناصر كل مجموعة:

1. $A \cup B \quad , n(A \cup B)$
2. $A \cup C \quad , n(A \cup C)$
3. $B \cup C \quad , n(B \cup C)$

الحل : يمكن كتابة اتحاد المجموعات و عدد عناصرها كما يلي:

1. $A \cup B = \{1,2,3,4,6\} \rightarrow n(A \cup B) = 5$
2. $A \cup C = \{2,3,7,8\} \rightarrow n(A \cup C) = 4$
3. $B \cup C = \{1,2,4,6,7,8\} \rightarrow n(B \cup C) = 6$

ملاحظة: $\boldsymbol{A \cup \emptyset = A}\ ,\ \boldsymbol{A \cup A = A}$

2) **التقاطع :** يرمز لتقاطع مجموعتين (A) مع (B) بالرمز $(A \cap B)$، وهو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة (A) والعناصر الموجودة في المجموعة (B) في نفس الوقت، ويعبر عنه بالعلاقة الرياضية التالية:

$$a \in (A \cap B) \Leftrightarrow a \in A \text{ أو } a \in B$$

$$A \cap B = \left\{x: x \in A \text{ و } x \in B\right\}$$

مثال (14): لتكن لدينا المجموعات التالية:

$$A = \{7,3,2\}, B = \{4,7,9\}$$

المطلوب: اوجد: $A \cap B$

الحل:

$$A \cap B = \{7\}$$

3) **طرح المجموعات:** إن طرح المجموعة (B) من المجموعة (A) هو أن نطرح من (A) العناصر المشتركة للمجموعتين (A) و(B) ويرمز له A/B او A−B ويعبر عن ذالك كما يلي :

$$1)\overline{B} \cap A \text{ أو } A - B = A - (A \cap B)$$

$$2)\overline{A} \cap B \text{ أو } B - A = B - (A \cap B)$$

مثال (15): لتكن لدينا المجموعات التالية:

$$\mathrm{A} = \{4,7,9,11\}, \mathrm{B} = \{5,2,9,10,11\}$$

المطلوب:اوجد: $A - B\ , B - A$

$$A \cap B = \{9,11\} \Rightarrow \begin{cases} A - B = A - (A \cap B) = \{4,7\} \\ B - A = B - (A \cap B) = \{5,2,10\} \end{cases}$$

$$U = \{2,4,5,7,9,10,11\} \Rightarrow \begin{cases} \overline{B} = \{4,7\} \Leftrightarrow \overline{B} \cap A = \{4,7\} \\ \overline{A} = \{2,5,10\} \Leftrightarrow \bar{A} \cap B = \{5,2,10\} \end{cases}$$

- –

مثال (16): لتكن المجموعات التالية، والمطلوب جد: $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A$

$$A = \{x: x \in \aleph^* < 10\} \Rightarrow A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A = \left\{x: x \text{عدد فردي طبيعي} < 10\right\} \Rightarrow B = \{1,3,5,7,9\}$$

$$A \cap B = \{1,3,5;7;9\}, A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

AUB ={ 1,2,3,4,5,6,7,8,9}

$$A - B = A - \{A \cap B\} = \bar{B} \cap A = \{2,4,6,8\}$$

$$B - A = B - \{A \cap B\} = \bar{A} \cap B = \emptyset$$

<u>خواص العمليات الجبرية عل المجموعات</u>

1- <u>خاصية التبديل</u>

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2- <u>خاصية التجميع</u>

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3- <u>خاصية التوزيع</u>

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4- خاصية ديمورغان

$$1)\ \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$2)\ \left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

خصائص إضافية

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
2. $A \cup \overline{A} = U$
3. $\overline{A} \cap U = \overline{A}$
4. $A \cap U = A$
5. $\overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$
6. $\overline{A} \cup U = U$
7. $A \cup U = U$
8. $U \cup \emptyset = U$

مثال (17): ليكن لدينا ما يلي:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$C = \{4, 5\}$$

المطلوب: جد ما يلي مع تحديد عدد العناصر لكل منها

1. $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$
2. $A \cup B, A \cup C, B \cup C$
3. $A \cap B, A \cap C, B \cap C$
4. $\overline{A \cap B}$
5. $\overline{A \cup B}$
6. $\overline{A} \cup \overline{B}$
7. $\overline{A} \cap \overline{B}$

الحل: يمكن إيجاد متممة المجموعات واتحادها وعدد عناصر كل منها، كما يلي:

1) $\overline{A} = S - A = \{1,2,3,4,5,6\} - \{2,4,6\} = \{1,3,5\} \rightarrow n(\overline{A}) = 3$

$$\overline{B} = \{1,4,5,6\} \rightarrow n(\overline{B} = 4)$$

$$\overline{C} = \{1,2,3,6\} \rightarrow n(\overline{C}) = 4$$

2) $A \cup B = \{2,3,4,6\} \rightarrow n(A \cup B) = 4$

3) $A \cup C = \{2,4,5,6\} \rightarrow n(A \cup C) = 4$

4) $B \cup C = \{2,3,4,5\} \rightarrow n(B \cup C) = 4$
5) $A \cap B = \{2\} \rightarrow n(A \cap B) = 1$
6) $A \cap C = \{4\} \rightarrow n(A \cap C) = 1$
7) $B \cap C = \emptyset = \{\,\} \rightarrow n(B \cap C) = ZERO$
8) $\overline{A \cap B} = \{1,3,4,5,6\} \rightarrow n\left(\overline{A \cap B}\right) = 5$
9) $\overline{A \cup B} = \{1.5\} \rightarrow n\left(\overline{A \cup B}\right) = 2$
10) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,5\} \rightarrow n\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 2$
11) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,3,4,5,6\} \rightarrow n\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 5$

مثال (18):

لديك المجموعات الأتية:

$$S = \{HH\,,HT\,,TH\,,TT\}$$

$$A = \{HH\,,HT\}$$

$$B = \{HT\,,TT\}$$

المطلوب: اثبت صحة العلاقتين الاتيتين:

$$1)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$2)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

الحل: يمكن التحقق من صحة العلاقتين السابقتين على النحو التالي:

$$1)\ A \cup B = \{HH\,,HT\,,TT\}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cup B} = \{TH\}$$

$$\overline{A} = \{TH\,,TT\}$$

$$\overline{B} = \{HH\,,TH\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{TH\}$$

ومنه:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$2)\ A \cap B = \{HT\}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cap B} = \{HH\,,TH\,,TT\}=$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{HH\,,TH\,,TT\}$$

ومنه:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

تمارين محلولة حول الفصل الأول:

التمرين الأول: لتكن لدينا مجموعتان A و B، حيث أن:

$$A = \{b , 1 , 6 , 7\}$$
$$B = \{b , 1 , d , 5 , 7\}$$

المطلوب: أوجد $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A - B$

الحل:

$$A \cap B = \{b , 1 , 7\}$$
$$A \cup B = \{b , d , 1 , 5 , 6 , 7\}$$
$$A - B = \{6\}$$

التمرين الثاني: لتكن لدينا:

A تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية الأولية الأصغر من 10

B تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأصغر من 10

المطلوب:

1) أكتب المجموعتان A و B بطريقة القائمة
2) أوجد $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A - B$

الحل:

$$A = \{2 , 3 , 5 , 7\}$$
$$B = \{0 , 2 , 4 , 6 , 8\}$$
$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{0 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8\}$$
$$A - B = \{3 , 5 , 7\}$$

التمرين الثالث: لتكن لدينا المجموعة الآتية:

$$\Omega = \{a , b , c , d , e , f , g , h \}$$
$$A = \{a , b , c , d , e\}$$
$$B = \{d , e , f , g , h\}$$

المطلوب: أوجد $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و $A \cap B$ و $A \cup C$ و $\bar{A} \cap \bar{B}$ و $\bar{A} \cup \bar{B}$ ، $\overline{A \cap B}$ ، $\overline{A \cup B}$ ، $A - B$ ، $B - A$ ، $\bar{A} - B$ و $A \cap (\overline{A \cup B})$ ، $A \cap \bar{B}$ ، $(A - B) \cup B$

الحل:

$$\bar{A} = \{f , g , h\}$$
$$\bar{B} = \{a , b , c\}$$
$$A \cap B = \{d , e\}$$
$$A \cup B = \{a , b , c , d , e , f , g , h\}$$
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$$
$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{a , b , c , f , g , h\}$$
$$\overline{A \cap B} = \{a , b , c , f , g , h\}$$
$$\overline{A \cup B} = \phi$$

نلاحظ أن:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$A - B = \{a , b , c\}$$
$$B - A = \{f , g , h\}$$
$$A - A \cap B = \{a , b , c\}$$
$$B - A \cap B = \{f , g , h\}$$

نلاحظ أن :

$$A - B = A - A \cap B$$
$$B - A = B - A \cap B$$

$$A \cap (A \cup B) = \phi$$

$$A \cap \bar{B} = \{a , b , c\}$$

نلاحظ أن:

$$A \cap \bar{B} = A - B$$

$$(A-B)\cup B=\{a\,,b\,,c\,,d\,,e\,,f\;,g\,,h\}$$

نلاحظ أن:

$$(A-B)\cup B=A\cup B$$

التمرين الرابع: لتكن لدينا المجموعتان A و B ، حيث أن:

$$A=\{x\in R/|x+1|>3\}$$
$$B=\{x\in R/x^2+2x>15\}$$

المطلوب: أكتب المجموعتان A و B بطريقة القائمة.

الحل:

$$A=\{x\in R/|x+1|>3\}$$

$$\Rightarrow \bar{A}=\{x\in R/x\notin A\}$$

$$\Rightarrow \bar{A}=\left\{x\in R/\overline{|x+1|>3}\right\}$$

$$\Rightarrow \bar{A}=\{x\in R/|x+1|\leq 3\}$$

$$B=\{x\in R/x^2+2x>15\}$$

$$\Rightarrow \bar{B}=\{x\in R/x\notin B\}$$

$$\Rightarrow \bar{B}=\left\{x\in R/\overline{x^2+2x>15}\right\}$$

$$\Rightarrow \bar{B}=\{x\in R/x^2+2x\leq 15\}$$

التمرين الخامس: ليكن لدينا المجموعات التالية:

$$\Omega=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$$

$$A=\{1\,,2\,,3\}$$

$$B=\{2\,,4\,,6\}$$

$$C=\{2\,,3\,,5\}$$

المطلوب: أوجد

1) - $\overline{A \cup B \cup C}$ ، $\overline{A \cap B \cap C}$ ، $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ، $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

2) – ماذا تلاحظ.

الحل:

$$A \cup B \cup C = \{1 , 2 , 3 , 4 ,5 , 6\}$$

$$A \cap B \cap C = \{2\}$$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \phi$$

$$\overline{A \cap B \cap C} = \{1 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

$$\bar{A} = \{4 , 5 , 6\}$$

$$\bar{B} = \{1 , 3 , 5\}$$

$$\bar{C} = \{1 , 4 , 6\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \phi$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \{1 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

نلاحظ أن:

$$\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

<u>التمرين السادس:</u> لتكن لدينا المجموعات الآتية:

$$A = \{x \in z / x^2 \leq 25\}$$

$$B = A \cap [-3 , 5]$$

$$C = B \cap [-2 , 4]$$

المطلوب:

1) أكتب المجوعات A ، B ، C بتفصيل.

2) أوجد المتممات التالية $\complement_A^B$،$\complement_A^C$،$\complement_B^C$

الحل:

$$A = \{-5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$$

$$B = \{-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$$

$$C = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4\}$$

نلاحظ أن: $C \subset B \subset A$

$$\complement_A^B = \{-5 , -4\}$$

$$\complement_A^C = \{-5 , -4 , -3 , 5\}$$

$$\complement_B^C = \{-3 , 5\}$$

الفصل الثاني:

طرق العد

التحليل تو افقي "طرق العد" :

كمقدمة لمفهوم مبدأ الاحتمالات، ومن أجل ذلك لا بد أن نبدأ بتعلم كيف نحسب مجموعة من الأشياء بطريقة مختصرة، وهذا ما يسمى بمبدأ العد الذي يمكننا من مسألة العد أو إحصاء ما يسمى بحالات أو طرق أو إمكانات أو عناصر مجموعة...... إلخ.

أولا: حساب أشياء معينة

- **قاعدة الضرب:** لنفترض أنه لدينا تجربتين A و B الأولى لها n نت النتائج المختلفة وللثانية m من التجارب المختلفة، عندئذ يكون عدد النتائج الممكنة لهده التجارب معا هو: $n \times m$

ولتعميم قاعدة الضرب نفترض أنه لدينا k من التجارب هي A_1 ، A_2 ،........ A_K لها n_1 ، n_2، ....n_k من النتائج المختلفة على التوالي ، عندئذ يكون عدد النتائج الممكنة لهده التجارب معا هو:

$$= n_1 \times n_2 \times \dots \dots . \times n_k$$

مثال (01):

ما هو عدد السيارات في المعرض إذا علمت أن في هذا المعرض توجد 6 أنواع من السيارات، ومن كل نوع يوجد 3 نماذج، وفي كل نموذج يوجد 4 سيارات؟

الحل :

عدد السيارات في المعرض هي :

$$6 \times 3 \times 4 = 72$$

- **قاعدة الجمع:** لنفترض أنه لدينا تجربتين A و B الأولى لها n نت النتائج المختلفة وللثانية m من التجارب المختلفة، وكانت التجربتين متنافيتين ، عندئذ يكون عدد النتائج الممكنة من التجربة A أو التجربة B هو: $n + m$

ولتعميم قاعدة الضرب نفترض أنه لدينا k من التجارب هي A_1 ، A_2 ،........ A_K لها n_1 ، n_2، ....n_k من النتائج المختلفة على التوالي، وكانت التجارب متنافية ، عندئذ يكون عدد النتائج الممكنة من أحدى هذه التجارب هو:

$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad -$$

ولتوضيح الفرق بين قاعدة الضرب وقاعدة الجمع نأخذ المثال التالي:

لنفترض أنه توجد ثلاثة طرق مختلفة تؤدي من المدينة A إلى المدينة B، و توجد خمسة طرق مختلفة تؤدي من المدينة A إلى المدينة C، توجد ستة طرق مختلفة تؤدي من المدينة A إلى المدينة D، فأوجد عدد الطرق التي تؤدي من المدينة A إلى إحدى المدن الثلاثة.

الحل:

عدد الطرق التي تؤدي من المدينة A إلى إحدى المدن الثلاثة، هو:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 5 + 6 = 14$$

ثانيا: (أكثر أهمية) مسائل الأعداد

إذا كانت صيغة السؤال هي: كم رقم يمكن تشكيله باستخدام الأرقام.

نميز هنا عدة حالات :

<u>الحالة الأولى:</u> عندما يذكر في السؤال التكرار مسموح أو غير مسموح.

مثال (2):

كم عدد مكون من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الأرقام التالية {1 , 2 , 5 , 7 , 8 , 9}:

الحل:

1) إذا ذكر في السؤال التكرار مسموح عدد الأرقام هنا هو:

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

أي:

- عدد طرق اختبار الرقم الأول هو: 6
- :عدد طرق اختبار الرقم الثاني هو: 6
- عدد طرق اختبار الرقم الثالث هو:6

2) إذا ذكر في السؤال التكرار غير مسموح عدد الأرقام هنا هو:

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

أي :

- عدد طرق اختيار الرقم الأول هو: 6.
- عدد طرق اختيار الرقم الثاني هو: 5
- عدد طرق اختيار الرقم الثالث هو: 4

مثال (3) :

إذا كانت لدينا الأرقام التالية:

$$X = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$$

و المطلوب هو:

كم عدد مكون من 5 أرقام مختلفة يمكن تكوينه من عناصر X؟.

الحل :

لدينا 9 أرقام، وهو الأصل (عدد الارقام عناصر المجموعة X).

لدينا 5 أرقام، وهي الرتبة (عدد مراتب أو ارقام العدد المطلوب تكوينه من المجموعة X).

ملاحظة: كلمة مختلفة المذكورة في المثال تعني أن التكرار غير مسموح :

إذن :

عدد الاعداد مكونة من 5 أرقام مختلفة يمكن تكوينها من عناصرX، هي:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

أي:

- عدد طرق اختبار الرقم الأول هو: 9
- عدد طرق اختبار الرقم الثاني هو: 8
- عدد طرق اختبار الرقم الثالث هو: 7
- عدد طرق اختبار الرقم الرابع هو: 6
- عدد طرق اختبار الرقم الخامس هو: 5

الحالة الثانية : حينما يذكر في السؤال أن يكون العدد زوجي أو فردي.

ملاحظة: في هذه الحالة لا بدى من المراعاة للأحاد بحيث يكون عدد طرق اختيار الأحاد كما يلي:

- إذا كان العدد المطلوب تكوينه فردي (تحسب الأعداد الفردية فقط).
- إذا كان العدد المطلوب تكوينه زوجي (تحسب الأعداد الزوجية فقط).

مثال (04): كم عدد زوجي يمكن تكوينه مكون من 4 مراتب مأخوذة من الأرقام التالية :

$$\{5 , 1 , 6 , 2 , 7 , 4 , 8\}$$

في الحالات التالية:

أ) التكرار مسموح.

ب) التكرار غير مسموح.

الحل:

الاعداد الزوجية الموجودة في المجموعة السابقة هي:

$$\{6 , 2 , 4 , 8\}$$

عددها 4

أ) عدد الاعداد زوجية التي يمكن تكوينها ومكون من 4 مراتب مأخوذة من الأرقام:

$$\{5 , 1 , 6 , 2 , 7 , 4 , 8\}$$

في حالة التكرار مسموح هي:

$$4 \times 7 \times 7 \times 7 = 1372$$

أي:

- عدد طرق اختيار الاحاد هو: 4 (عدد الارقام الزوجية 4).
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 7.
- عدد طرق اختيار المئات هو: 7.
- عدد طرق اختيار الاف هو: 7.

ب) عدد الاعداد زوجية التي يمكن تكوينها ومكون من 4 مراتب مأخوذة من الأرقام:

$$\{5 , 1 , 6 , 2 , 7 , 4 , 8\}$$

في حالة التكرار غير مسموح هي:

$$4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$$

أي:

- عدد طرق اختيار الاحاد هو: 4 (عدد الارقام الزوجية 4).
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 6.
- عدد طرق اختيار المئات هو: 5.
- عدد طرق اختيار الاف هو: 4.

مثال (05):

إذا كان لدينا مجموعة الأرقام التالية :

$$\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$$

والمطلوب هو:

1) كم عدد مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من الأرقام السابقة بشرط أن يكون العدد فردي والتكرار غير مسموح ؟
2) كم عدد يتكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من الأرقام السابقة بشرط أن تكون ثلاث مراتب مختلفة والعدد يكون زوجي؟

الحل:

1) عدد الاعداد مكونة من ثلاث مراتب يمكن تكوينها من الأرقام السابقة بشرط أن يكون العدد فردي والتكرار غير مسموح هي:

$$4 \times 6 \times 5 = 120$$

أي:

الاعداد الفردية الموجودة في المجموعة السابقة هي:

$$\{1 , 3 , 5 , 7\}$$

عددها 4 ومنه:

- عدد طرق اختيار الاحاد هو: 4 (عدد الارقام الفردية 4).
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 6.

- عدد طرق اختيار المئات هو: 5.

2) عدد الاعداد مكونة من ثلاث مراتب يمكن تكوينها من الأرقام السابقة بشرط أن يكون العدد زوجي والمراتب مختلفة هي:

$$3 \times 6 \times 5 = 90$$

أي:

الاعداد الزوجية الموجودة في المجموعة السابقة هي:

$$\{2 , 4 , 6 \}$$

عددها 3 ومنه:

- عدد طرق اختيار الاحاد هو: 3 (عدد الارقام الزوجية 3).
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 6.
- عدد طرق اختيار المئات هو: 5.

الحالة الثالثة : عندما يذكر في السؤال عدد "أكبر من" أو "أصغر من ".

ملاحظة: في هذه الحالة لا بدى من المراعاة للأخر مرتبة في العدد المراد أو المطلوب تكوينه، نأخذ مثال لتوضيح ذلك:

مثال(06) : كم عدد مكون من ثلاث أرقام وأصغر من 600 يمكن تكوينه من الأرقام التالية:

$$\{5 , 3 , 6 , 2 , 7 , 9\}$$

في الحالات التالية:

أ) التكرار مسموح.

ب) التكرار غير مسموح.

الحل :

المرتبة الاخيرة في العدد الثلاثي المراد تكوينه هي المئات وبالتالي:

ملاحظة: أكبر من 600 ⟵ رقم المئات أكبر من 6 مع 6

أصغر من 600 ⟵ رقم المئات أصغر من 6 دون 6

عدد الأرقام الأصغر من 6 هي:

$$\{5 , 3 , 2\}$$

وعددها 3 ومنه:

أ) عدد الاعداد مكون من ثلاث أرقام وأصغر من 600 يمكن تكوينه من الأرقام السابقة في حالة التكرار مسموح به، هي:

$$3 \times 6 \times 6 = 108$$

أي:

- عدد طرق اختيار المئات هو: 3
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 6
- عدد طرق اختيار الآحاد هو: 6

ب) عدد الاعداد مكون من ثلاث أرقام وأصغر من 600 يمكن تكوينه من الأرقام السابقة في حالة التكرار غير مسموح به، هي:

$$3 \times 5 \times 4 = 60$$

أي:

- عدد طرق اختيار المئات هو: 3
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 5
- عدد طرق اختيار الآحاد هو: 4

مثال (07):

بالرجوع للمثال السابق والمطلوب هنا هو كم عدد ثلاثي أكبر من 500 ممكن تكوينه من الارقام السابقة مع التكرار:

الحل:

المرتبة الاخيرة في العدد الثلاثي المراد تكوينه هي المئات وبالتالي:

ملاحظة: أكبر من 500 ⟵ رقم المئات أكبر من 5 مع 5

أصغر من 500 ⟵ رقم المئات أصغر من 5 دون 5

عدد الأرقام الأكبر من 5 هي:

$$\{5\,,6\,,7,9\}$$

وعددها 4 ومنه:

عدد الاعداد مكون من ثلاث أرقام وأكبر من 500 يمكن تكوينه من الأرقام السابقة مع التكرار، هي :

$$4 \times 6 \times 6 = 144$$

أي:

- عدد طرق اختيار المئات هو: 4
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 6
- عدد طرق اختيار الآحاد هو: 6

مضروب العدد "عاملي n ":

يرمز له بـ n!

ويحسب كمايلي:

n! = n(n-1) (n-2) 1

مثال (08):

أحسب ما يلي :

$$2! = 2 \times 1 = 2$$
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$8! = 8 \times 7! = 8 \times 7 \times 6 \times 5! = 8 \times 7 \times 6 \times 120 =$$
$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$
$$\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!\,2!} = 5 \times 2 = 10$$

لدينا بعض الحالات الخاصة:

مثال (09):

ايجاد قيمة $n!$، إذا علمت أن:

$$n! = 120$$

الحل:

لا يجاد $n!$، نستخدم القسمة كالتالي:

120	1
120	2
60	3
20	4
5	5
1	

ومنه:

$$n! = 5$$

مثال (10):

ايجاد قيمة $n!$، إذا علمت أن:

$$n! = 5040$$

الحل:

لا يجاد $n!$، نستخدم القسمة كالتالي:

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

ومنه:

$$n! = 7$$

مثال (11):

ايجاد قيمة n، إذا كان :

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 72$

الحل:

نحن نعلم أن:

$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

$$(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)!$$

وعليه يمكن ايجاد العلاقات السابقة، كما يلي:

a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!} = 30$

$$\Rightarrow n(n+1) = 30$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 30$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -6 \end{cases}$$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72$

$$\Rightarrow n(n-1) = 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 72$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -8 \\ n = 9 \end{cases}$$

طرق العـــــد:

التباديل .

التراتيب.

التوفيقات.

1- التباديل :

سوف نميز بين نوعين من التباديل :

- التباديل دون تكرار.
- التباديل مع التكرار.

1-1- التباديل دون تكرار:

يمكن أن نسمي ترتيب n من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر المأخوذة K في كل مرة، شرط أن تؤخذ جميع العناصر، أي $n = k$

ويعبر عنها بالعلاقات التالية :

$$P_n^k = n!$$

n!: يقرأ n عاملي أو مضروب n .

مثال (12) :

ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف $\{a , b , c\}$ ؟.

الحل :

بالرجوع إلى مبدأ العد يمكن الحصول على عدد الطرق الممكنة لترتيب مجموعة الحروف $\{a , b , c\}$ ، هي:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

أي :

- عدد طرق اختيار الحرف الأول هو: 3.
- عدد طرق اختيار الحرف الأول هو: 2.
- عدد طرق اختيار الحرف الأول هو: 1.

أو بتطبيق قاعدة أةالعلاقة الرياضية السابقة الخاصة بالتباديل بدون تكرار نحصل على :

$$P_n = n!$$

$$\Rightarrow P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

حيث أن: التكرار غير مسموح .

مثال (13) :

لتكن لدينا الحروف التالية $\{l\ ,k\ ,a\ ,\}$، والمطلوب كم كلمة يمكن تشكيلها من هذه الحروف وقد لا يكون للكلمة معنى؟.

الحل:

حسب ما سبق لدينا (بتطبيق المبدأ الأساسي للعد نجد) :

- لدينا الأصل هو 4
- الرتبة هي 4

وعليه نجد عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من الحروف السابقة وقد لا يكون للكلمة معنى، هي:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

أي:

- عد طرق اختيار الحرف الأول هو: 4
- عد طرق اختيار الحرف الثاني هو: 3
- عد طرق اختيار الحرف الثالث هو: 2
- عد طرق اختيار الحرف الرابع هو: 1

أو بتطبيق قاعدة أةالعلاقة الرياضية السابقة الخاصة بالتباديل بدون تكرار نحصل على :

$$P_n = n!$$

$$\Rightarrow P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

حيث أن: التكرار غير مسموح .

1-2- حالة خاصة من التباديل (التباديل الدائرية):

إذا كنا بصدد تباديل عناصر مجموعة ما بشكل دائري فإن عدد الطرق المختلفة الناتجة من ترتيب n من الأشياء حول دائرة يعطى بالعلاقة التالية:

$$P_{\bar{n}} = \{n-1\}!$$

وهي حالة خاصة من التباديل تسمى بالتباديل الدائرية .

مثال (14) :

بكم طريقة يمكن جلوس7 أشخص حول طاولة (بشكل دائري) ؟.

الحل:

عدد طرق جلوس7 أشخص حول طاولة (بشكل دائري)، هو:

$$P_{\bar{n}} = (n-1)!$$

$$P_{\bar{7}} = (7-1)! = 6!$$

$$\Rightarrow P_{\bar{7}} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

1-3- التباديل مع التكرار :

في بعض الأحيان يطلب معرفة عدد التباديل مجموعة من العناصر يكون بعضها متكررا مثل الأعداد (3362 – 45555 .....) أو مثل الحروف في الكلمات أو الأسماء(اليابان – ليبيا – Recherche ....) أو في حالة السحب مع اعادة العنصر إلى المجموعة، فإن معرفة عدد التباديل يكون وفق النظرية التالية:

إذا كان لدينا n_1 من الأشياء من النوع الأول و n_2 من الأشياء من النوع الثاني، n_k من الأشياء من النوع K ، وكان :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots n_k$$

فإن عدد التباديل يعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n^{n_1,n_2,\cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

مثال (15) :

كم كلمة يمكن تشكيلها (أو تبديلة) من جميع أحرف كلمة (السلاسل) وكذلك كلمة(Recherche)؟.

الحل :

كلمة السلاسل مكونة من 3أحرف مختلفة هي : ا – ل – س ولكنها متكررة حيث أن :

- ا تكرر مرتين وهو يمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 2$
- ل تكرر 3مرات وهو يمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 3$

- س تكرر مرتين وهو يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 2$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$\Rightarrow n = 2 + 3 + 2 = 7$$

فإن عدد الكلمات المختلفة الممكن تكوينها هو (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$
$$\Rightarrow P_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210$$

كلمة (Recherche) مكونة من 4 أحرف مختلفة هي r - e - c – h وهي متكررة حيث أن :

- r تكرر مرتين وهو يمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 2$
- e تكرر 3مرات وهو يمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 3$
- c تكرر مرتين وهو يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 2$
- h تكرر مرتين وهو يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 2$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$
$$\Rightarrow n = 2 + 3 + 2 + 2 = 9$$

فإن عدد الكلمات المختلفة الممكن تكوينها هو (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}$$
$$\Rightarrow P_7^{2,3,2,2} = \frac{9!}{2!\,3!\,2!\,2!} = 7560$$

مثال(16):

كم عدد يمكن تشكيله من رقم 67763؟.

الحل :

العدد 67763 مكون من 3أرقام مختلفة هي : 6 – 7 – 3 ولكنها متكررة حيث أن :

- 6 تكرر مرتين وهو يمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 2$
- 7 تكرر مرتين وهو يمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 2$

- س تكرر مرة واحدة وهو يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 1$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$\Rightarrow n = 2 + 2 + 1 = 5$$

فإن عدد الارقام المختلفة الممكن تكوينها هو (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$
$$\Rightarrow P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\, 2!\, 1!} = 30$$

مثال (17) :

إذا كان لدينا 3مصابيح حمراء و 4 زرقاء و 3 صفراء ، كم هي عدد الطرق الممكنة في ترتيب الأنواع الثلاثة من المصابح في نشرة ضوئية ؟

الحل :

لدينا 3 ألوان مختلفة لمجموعة من المصابيح هي : حمراء، زرقاء، صفراء، حيث أن :

- ثلاثة مصابيح حمراء تمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 3$
- أربعة مصابيح زرقاء تمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 4$
- ثلاثة مصابيح صفراء تمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 3$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$\Rightarrow n = 3 + 4 + 3 = 10$$

فإن عدد الطرق الممكنة في ترتيب الأنواع الثلاثة من المصابيح في نشرة ضوئية ؟

هو (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$
$$\Rightarrow P_{10}^{3,4,3} = \frac{10!}{3!\, 4!\, 3!} = 4200$$

إذا يوجد 4200 طريقة ممكنة في ترتيب الأنواع الثلاثة من المصابيح في النشرة الضوئية .

مثال (18) :

منتجات مصنع معين تصنف إلى 3 أنواع : جيدة - متوسطة – رديئة ، بكم طريقة يمكن الحصول على 10 قطع منها 3من المنتجات الجيدةو5من المنتجات المتوسطة و 2من المنتجات الرديئة؟

الحل:

منتجات المصنع تصنف إلى 3 أنواع: جيدة، متوسطة، رديئة، حيث أن :

- المنتجات الجيدة تكررت ثلاثة مرات وهي تمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 3$
- المنتجات المتوسطة تكررت خمسة مرات وهي تمثل n_2 ، حيث أن: $n_2 = 3$
- المنتجات الرديئة تكررت مرتين وهي تمثل n_3 ، حيث أن: $n_3 = 3$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$\Rightarrow n = 3 + 5 + 2 = 10$$

فإن طرق التي الممكنة للحصول على 10 قطع منها 3من المنتجات الجيدةو5من المنتجات المتوسطة و 2من المنتجات الرديئة هو (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$
$$\Rightarrow P_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3!\, 5!\, 2!} = 2520$$

مثال (19) :

يتوجه فوج من السواح يتكون من (12) شخصا إلى فندق وكان به 4 غرف فارغة، حيث أن :

- غرفة بسريرين
- غرفة بثلاثة أسرة
- غرفة بثلاثة أسرة
- غرفة بأربعة أسرة

فبكم طريقة يمكن أن يبيت هؤلاء السواح في هذا الفندق؟.

الحل:

عدد الغرف الفارغة بهذا الفندق اربعة غرف، حيث أن

- غرفة بسريرين، وهي تمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 2$
- غرفة بثلاثة أسرة، وهي تمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 3$

- غرفة بثلاثة أسرة، وهي تمثل n_3، حيث أن: $n_2 = 3$
- غرفة بأربعة أسرة، وهي تمثل n_4، حيث أن: $n_2 = 4$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$
$$\Rightarrow n = 2 + 3 + 3 + 4 = 12$$

فإن عدد طرق التي يمكن أن يبيت بها هؤلاء السواح في هذا الفندق هو (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4}$$
$$\Rightarrow P_{12}^{2,3,3,4} = \frac{12!}{2!\,3!\,2!\,4!} = 277200$$

2- التراتيب :

الآن سنعالج موضوع آخر من طرق العد هو التراتيب .

نفترض أنه يراد سحب مجموعة جزئية مؤلفة من K عنصرا حيث أن $n \geq K$ مثل اختيار 3 كرات من وعاء فيه n من الكرات تسمى هذه العملية بالترتيبة، وقد نميز نوعين من التراتيب، هي:

- التراتيب مع الإعادة.
- التراتيب بدون إعادة .

2-1- التراتيب مع الإعادة :

إن طريقة السحب مع الإعادة تسمح لنا بسحب أو اختيار العنصر الواحد من المجموعة (S) أكثر من مرة، وحسب المبدأ الأساسي للعد نحصل على :

$$n \times n \times n \times \cdots n = n^k$$

ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية :

$$AR_n^k = n^k$$

مثال (20):

ما هو عدد الأعداد المشكلة من 3 أرقام التي يمكن تكوينها من الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية ؟.

الحل :

الأرقام الزوجية في القاعدة العشرية:

$$\{2\,,4\,,6\,,8\}$$

عددها هو 4، ومنه:

$$n = 4 \quad , \quad k = 3$$

إذا :

حسب مبدأ العد لدينا :

- عدد طرق اختيار الرقم الأول، هو: 4
- عدد طرق اختيار الرقم الثاني، هو: 4
- عدد طرق اختيار الرقم الثالث، هو: 4

ومنه عدد الطرق، هو:

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

بالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة مع الاعادة)، فإن:

$$AR_n^k = n^k$$
$$\Rightarrow AR_4^3 = 4^3 = 64$$

مثال(21) :

لتكن لدينا مجموعة الأعداد الفردية ضمن القاعدة العشرية، والمطلوب هو إيجاد كافة الأعداد المؤلفة، من:

أ) مرتبتين

ب) ثلاثة مراتب

ج) أربعة مراتب

الحل :

الأرقام الفردية في القاعدة العشرية:

$$\{1\,,3\,,5\,,7\,,9\}$$

عددها هو 5.

بالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة مع الاعادة) مباشرة، فإن:

أ) كافة الأعداد المؤلفة من مرتبتين، هي:

$$n = 5 \quad , \quad k = 2$$
$$AR_n^k = n^k$$

$$\Rightarrow AR_5^2 = 5^2 = 25$$

ب) كافة الأعداد المؤلفة من ثلاثة مراتب، هي:

$$n = 5 \quad , \quad k = 3$$

$$AR_n^k = n^k$$

$$\Rightarrow AR_5^3 = 5^3 = 125$$

ج) كافة الأعداد المؤلفة من أربعة مراتب، هي:

$$n = 5 \quad , \quad k = 4$$

$$AR_n^k = n^k$$

$$\Rightarrow AR_5^4 = 5^4 = 625$$

مثال (22):

ما هو عدد المجموعات الجزئية المشكلة من حرفين والتي يمكن تكوينها من الحروف التالية :

$$\{a , b , c\}$$

بحيث يسمح بإعادة الحرف أكثر من مرة .

الحل : :

حسب مبدأ العد لدينا :

- عدد طرق اختيار الحرف الأول، هو: 3
- عدد طرق اختيار الحرف الثاني، هو: 3

ومنه عدد المجموعات الجزئية المشكلة من حرفين والتي يمكن تكوينها من الحروف السابقة، هي:

$$3 \times 3 = 9$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة مع الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n = 3 \quad , \quad k = 2$$

ومنه، نجد:

$$AR_n^k = n^k$$

$$\Rightarrow AR_3^2 = 3^2 = 9$$

2-2- الترا تيب بدون إعادة :

هذه الطريقة تشترط علينا عدم إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة n ، وبالتالي فعدد طرق السحبة الأولى هو n ، وعدد طرق السحبة الثانية هو n-1 ، وهكذا حتى السحبة الأخيرة n-K+1، أي حسب المبدأ الأساسي للعد نحصل على :

$$n(n-1)(n-2)\cdots n-k+1$$

ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية :

$$AR_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال (23):

ما هو عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 5 ، 3 حروف التي يمكن تشكيلها من كلمة mathématique بدون إعادة أو تكرار الحرف .

الحل :

عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 3 حروف التي يمكن تشكيلها من كلمة mathématique بدون إعادة أو تكرار الحرف، هي:

حسب مبدأ العد لدينا :

$$n = 12 \quad , \quad k = 3$$

إذا:

- عدد طرق اختيار الحرف الأول، هو: 12
- عدد طرق اختيار الحرف الثاني، هو: 11
- عدد طرق اختيار الحرف الثالث، هو: 10

ومنه عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 3 حروف التي يمكن تشكيلها ، هي:

$$12 \times 11 \times 10 = 1320$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة دون الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n = 12 \quad , \quad k = 3$$

ومنه، نجد:

$$AR_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow AR_{12}^{3}=\frac{12!}{(12-3)!}=1320$$

عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 5 حروف التي يمكن تشكيلها من كلمة mathématique بدون إعادة أو تكرار الحرف، هي:

حسب مبدأ العد لدينا :

$$n=12 \quad , \quad k=5$$

إذا:

- عدد طرق اختيار الحرف الأول، هو: 12
- عدد طرق اختيار الحرف الثاني، هو: 11
- عدد طرق اختيار الحرف الثالث، هو: 10
- عدد طرق اختيار الحرف الرابع، هو: 9
- عدد طرق اختيار الحرف الثالث، هو: 8

ومنه عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 5 حروف التي يمكن تشكيلها ، هي:

$$12\times 11\times 10\times 9\times 8=95040$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة دون الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n=12 \quad , \quad k=5$$

ومنه، نجد:

$$AR_{n}^{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow AR_{12}^{5}=\frac{12!}{(12-5)!}=95040$$

مثال (24):

ما هو عدد الكلمات الثنائية (المكونة من حرفين) الممكن تشكيلها من احرف اسم زهير إذا كنا نستخدم الحرف مرة واحدة ؟.

الحل:

عدد الكلمات الثنائية (المكونة من حرفين) الممكن تشكيلها من احرف اسم زهير إذا كنا نستخدم الحرف مرة واحدة ، هي:

حسب مبدأ العد لدينا :

$$n = 4 \quad , \quad k = 2$$

إذا:

- عدد طرق اختيار الحرف الأول، هو: 4
- عدد طرق اختيار الحرف الثاني، هو: 3

ومنه عدد الكلمات (قد لا يكون للكلمة معنى) المتكونة من 3 حروف التي يمكن تشكيلها ، هي:

$$4 \times 3 = 12$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة دون الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n = 4 \quad , \quad k = 2$$

ومنه، نجد:

$$AR_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$\Rightarrow AR_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

3- التو افيق :

التوافيق هو اختيار عشوائي لـK من الأشياء من بين x من الأشياء المعطاة مع ملاحظة أن الترتيب مهم في التباديل، بينما الترتيب ليس له أهمية في التوافيق، وإذا أردنا توضيح هذا المفهوم ، فيمكن أخذ المثال التالي:

ماهي عدد تباديل المكونة من $k = 2$ التي يمكن تشكيلها من الحروف :

$$\{a , b , c , d\}$$

الحل:

- عندما نريد حساب التراتيب، فنحصل على:

ab , ac , ad , ba , bc , bd , ca , cb , cd , da , db , dc

- عندما نريد حساب التوافيق، فنحصل على:

ab , ac , ad , bc , bd , cd

ومنه:

يمكن توضيح العلاقة بين الترتيبة والتوفيقة في الجدول التالي:

التباديل	التو افيق
ab , ba	Ab
ac , ca	Ac
ad , da	Ad
bc , cb	Bc
bd , db	Bd
cd , dc	Cd

إذا التوفيقة: هي عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها اختيار r من الأشياء من بين n ،دون مراعاة التكرار ويرمز لها بـالرمز : C_k^n ، وتكتب بالعلاقة التالية :

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال (25):

جد قيمة كل من :

1) C_3^4
2) C_4^6

الحل:

1) $C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4\times3!}{3!} = 4$
2) $C_4^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\times5\times4!}{4!\times2\times1} = 15$

مثال (26) :

ما هو عدد اللجان المشكلة من أربعة أفراد التي يمكن تكوينها من مجموعة متكونة من عشرة أشخاص؟ -

الحل:

لدينا:

$$n = 10 \quad , \quad k = 4$$

وبتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\Rightarrow C_4^{10} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = 210$$

ومنه توجد 210 لجنة مختلفة.

مثال (27):

إذا كان لدينا 6 رجال و 5 نساء ، ما هي عدد اللجان المشكلة من 5 أشخاص ثلاث رجال و امرأتين التي يمكن تكوينها ؟ .

الحل:

لدينا:

$$n = 6 \quad , \quad k = 3 \rightarrow \text{رجال}$$

$$n = 5 \quad , \quad k = 2 \rightarrow \text{نساء}$$

وبتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\Rightarrow C_3^6 \times C_2^5 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} \times \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 20 \times 10 = 200$$

ومنه توجد 200 لجنة مختلفة.

مثال (28) : بكم طريقة يمكن اختيار أربعة كتب من ثمانية كتب ؟

الحل : عدد طرق الاختيار :

لدينا:

$$n = 8 \quad , \quad k = 4$$

وبتطبيق قانون التوفيقة نحصل على:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\Rightarrow C_4^8 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = 70$$

ومنه توجد 70 طريقة لاختيار أربعة كتب من ثمانية كتب.

تمارين حول الفصل الثاني:

التمرين الأول:

إذا كان أمام أحد الطلاب أربعة مقاييس، المقياس الأول في الاحصاء والثاني في المحاسبة والثالث في الاقتصاد والمقياس الرابع في الرياضيات، مع العلم أن في مقياس الاحصاء يوجد أربعة مقررات مختلفة وفي مقياس المحاسبة يوجد أربع مقررات كذلك مختلفة والاقتصاد يوجد مقررين وفي الرياضيات يوجد ثلاثة مقررات.

المطلوب :

1) فبكم طريقة مختلفة يمكن لهذا الطالب أن يختار أربعة مقررات؟.
2) فبكم طريقة مختلفة يمكن لهذا الطالب أن يختار أحد مقررات؟.

الحل:

1) عدد الطرق المختلفة التي يمكن من خلالها أن يختار هذا الطالب أربعة مقررات، هي:

إن عملية اختيار أربعة مقررات تتكون من أربعة مراحل، بحيث:

المرحلة الأولى: اختيار مقرر من مقياس الاحصاء وعددها أربعة (أي يوجد أربعة طرق للاختيار) $n_1 = 4$

المرحلة الأولى: اختيار مقرر من مقياس المحاسبة وعددها أربعة (أي يوجد أربعة طرق للاختيار) $n_2 = 4$

المرحلة الأولى: اختيار مقرر من مقياس الاقتصاد وعددها اثنان (أي يوجد طريقتين للاختيار) $n_3 = 2$

المرحلة الأولى: اختيار مقرر من مقياس الرياضيات وعددها ثلاثة (أي يوجد ثلاثة طرق للاختيار) $n_4 = 3$

وبالرجوع لقاعدة الضرب فإن عدد طرق المختلفة التي يمكن من خلالها أن يختار هذا الطالب أربعه مقررات ، هي:

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$$

$$n = 4 \times 4 \times 2 \times 3 = 96$$

2) عدد الطرق المختلفة التي يمكن من خلالها أن يختار هذا أحد مقررات، هي:

العملية الأولى: اختيار مقرر من مقياس الاحصاء وعددها أربعة (أي يوجد أربعة طرق للاختيار) $n_1 = 4$

العملية الثانية: اختيار مقرر من مقياس المحاسبة وعددها أربعة (أي يوجد أربعة طرق للاختيار) $n_2 = 4$

العملية الثالثة: اختيار مقرر من مقياس الاقتصاد وعددها اثنان (أي يوجد طريقتين للاختيار) $n_3 = 2$

العملية الرابعة: اختيار مقرر من مقياس الرياضيات وعددها ثلاثة (أي يوجد ثلاثة طرق للاختيار)
$n_4 = 3$

وبالرجوع لقاعدة الجمع فإن عدد طرق المختلفة التي يمكن من خلالها أن يختار هذا الطالب أحد مقررات ، هي:

$$\mathrm{n} = n_1 + \mathrm{n}_2 + \mathrm{n}_3 + \mathrm{n}_4$$
$$\mathrm{n} = 4 + 4 + 2 + 3 = 13$$

<u>التمرين الثاني:</u>

عند القيام بدراسة طبية صنفنا المريض حسب زمرة الدم AB , A , B , o ، وكذلك حسب ضغط الدم مرتفع، معتدل، منخفض.

المطلوب:

1) بكم طريقة يمكن تصنيف المريض من حيث زمرة الدم و ضغط الدم.
2) بكم طريقة يمكن تصنيف المريض من حيث زمرة الدم أو ضغط الدم.

الحل:

1) عدد الطرق تصنيف المريض من حيث زمرة الدم أو ضغط الدم، هي:

العملية الأولى: تصنيف المريض من حيث زمرة الدم وعددها أربعة (أي يوجد أربعة طرق للتصنيف) $\boldsymbol{n_1 = 4}$

العملية الثانية: تصنيف المريض من حيث ضغط الدم وعددها ثلاثة (أي يوجد ثلاثة طرق للتصنيف)
$\boldsymbol{n_2 = 4}$

وبالرجوع لقاعدة الجمع فإن عدد طرق المختلفة التي يمكن من خلالها تصنيف المريض من حيث زمرة الدم و ضغط الدم، هي:

$$\mathrm{n} = n_1 + \mathrm{n}_2$$
$$\mathrm{n} = 4 + 3 = 7$$

2) عدد الطرق تصنيف المريض من حيث زمرة الدم و ضغط الدم، هي:

المرحلة الأولى: تصنيف المريض من حيث زمرة الدم وعددها أربعة (أي يوجد أربعة طرق للتصنيف)
$\mathrm{n}_1 = 4$

العملية الثانية: تصنيف المريض من حيث ضغط الدم وعددها ثلاثة (أي يوجد ثلاثة طرق للتصنيف)

$$n_2 = 3$$

وبالرجوع لقاعدة الضرب فإن عدد طرق المختلفة التي يمكن من خلالها تصنيف المريض من حيث زمرة الدم و ضغط الدم، هي:

$$n = n_1 \times n_2$$

$$n = 4 \times 3 = 12$$

التمرين الثالث:

أراد احد الموظفين تركيب جهاز هاتف ثابت، وهذا المواطن يتشاءم من الرقم الذي يقسم على (3)، ويريد أول رقم من اليسار أن يكون الرقم (2)، إذا تألف رقم الهاتف من خمسة أرقام (خانات)، بكم طريقة يمكن أن يختار المواطن رقم هاتفه (مع/بدون تكرار)؟.

الحل:

أ) التكرار مسموح.

أولا: هذا المواطن يتشاءم من الرقم الذي يقسم على (3). أي أمام هذا المواطن الأرقام (0،1،2،4،5،7،8) فقط وعددها سبعة أرقام.

ثانيا: هذا المواطن يريد أول رقم من اليسار أن يكون الرقم (2). أي في الخانة الخامسة لا أن نضع رقم (2).

ثالثا: التكرار مسموح. أي في الخانة الرابعة نضع الرقم (0 أو 1 أو 2 أو 4 أو 5 أو 7 أو 8) يعني لدينا سبعة طرق، وهكذا بالنسبة للخانات الثلاثة المتبقية (الخانة الثالثة والثانية و الأولى)

إذا يكون: لدبنا

- عدد حالات إختيار رقم الخانة الأولى، هو: 7 طرق.
- عدد حالات إختيار رقم الخانة الثانية، هو: 7 طرق.
- عدد حالات إختيار رقم الخانة الثالثة، هو: 7 طرق.
- عدد حالات إختيار رقم الخانة الرابعة، هو: 7 طرق.
- عدد حالات إختيار رقم الخانة الخامسة، هو: طريقة واحدة.

وعلي يكون الناتج:

$$1 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$$

ت) التكرار غير مسموح:

أولا: هذا المواطن يتشاءم من الرقم الذي يقسم على (3). أي أمام هذا المواطن الأرقام (7،8،0،1،2،4،5) فقط وعددها سبعة أرقام.

ثانيا: هذا المواطن يريد أول رقم من اليسار أن يكون الرقم (2). أي في الخانة الخامسة لا أن نضع رقم (2).

ثالثا: التكرار غير مسموح. أي الرقم لا يتكرر في الخانات. إذا يكون: لدبنا

- عدد حالات اختيار رقم الخانة الأولى، هو: 3 طرق.
- عدد حالات اختيار رقم الخانة الثانية، هو: 4 طرق.
- عدد حالات اختيار رقم الخانة الثالثة، هو: 5 طرق.
- عدد حالات اختيار رقم الخانة الرابعة، هو: 6 طرق.
- عدد حالات اختيار رقم الخانة الخامسة، هو: طريقة واحدة.

وعلي يكون الناتج:

$$1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

<u>التمرين الر ابع:</u>

صندوق فيه (8) كريات، سحبت منه عينة مكونة من (3) كرات، أحسب عدد العينات في كل من الحالات التالية:

أ) السحب مع الارجاع.

ب) السحب بدون ارجاع.

الحل:

أ) عدد العينات في حالة السحب مع الارجاع، هي:

حسب مبدأ العد لدينا :

- عدد طرق سحب الكرة الأول، هو: 8
- عدد طرق سحب الكرة الثانية، هو: 8
- عدد طرق سحب الكرة الثالثة، هو: 8

ومنه عدد العينات المكونة من (3) كرات والتي يمكن تكوينها من (8) كرات، هي:

$$8 \times 8 \times 8 = 512$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة مع الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n = 8 \quad , \quad k = 3$$

ومنه، نجد:

$$AR_n^k = n^k$$

$$\Rightarrow AR_8^3 = 8^3 = 512$$

ب) عدد العينات في حالة السحب بدون ارجاع، هي:

حسب مبدأ العد لدينا :

إذا:

- عدد طرق سحب الكرة الأولى، هو: 8
- عدد طرق سحب الكرة الثانية، هو: 7
- عدد طرق سحب الكرة الثالثة، هو: 6

ومنه عدد العينات المكونة من (3) كرات والتي يمكن تكوينها من (8) كرات، هي:

$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة دون الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n = 8 \quad , \quad k = 3$$

ومنه، نجد:

$$AR_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\Rightarrow AR_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

التمرين الخامس:

أوجد عدد الطرق الممكنة لترتيب سبعة كريات أربعة منها بيضاء و اثنان منها حمراء و واحدة صفراء

الحل:

لدينا 3 ألوان مختلفة لمجموعة كريات هي : بيضاء، حمراء، صفراء، حيث أن :

- أربعة كريات بيضاء تمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 4$
- كريتان حمراء تمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 2$
- كرية واحدة صفراء تمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 1$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$\Rightarrow n = 4 + 2 + 1 = 7$$

فإن عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه سبعة الكريات ،هي (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$
$$\Rightarrow P_7^{4,2,1} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = 105$$

إذا يوجد 105 طريقة ممكنة في ترتيب الأنواع الثلاثة من الكريات.

التمرين السادس:

1) بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة قسطنطينية.
2) بكم طريقة يمكن ترتيب أرقام العدد 3361.
3) كم كلمة يمكن تكوينها من كلمة recherche.

الحل:

1) عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب كلمة قسطنطينية:

تتكون هذه الكلمة من تسعة حروف، حيث أن :

- حرف ق يمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 1$
- حرف س يمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 1$
- حرف ط يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 2$

- حرف ن يمثل n_4، حيث أن: $n_4 = 2$
- حرف ي يمثل n_5، حيث أن: $n_5 = 2$
- حرف ت يمثل n_6، حيث أن: $n_6 = 1$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6$$
$$\Rightarrow n = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$$

فإن عدد الطرق الممكنة لترتيب حروف كلمة قسطنطينية،هي (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!\, n_4!\, n_5!\, n_6!}$$
$$\Rightarrow P_9^{1,1,2,2,2,1} = \frac{9!}{1!\,1!\,2!\,2!\,2!\,1!} = 45360$$

إذا يوجد 45360 طريقة ممكنة في ترتيب حروف كلمة قسطنطينية.

2) عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب يمكن ترتيب أرقام العدد 3361:

يتكون هذا العدد من أربعة أرقام، حيث أن :

- الرقم 3 يمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 2$
- الرقم 6 يمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 1$
- الرقم 1 يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 1$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$
$$\Rightarrow n = 2 + 1 + 1 = 4$$

فإن عدد الطرق الممكنة لترتيب أرقام العدد 3361،هي (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}$$
$$\Rightarrow P_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$$

إذا يوجد 12 طريقة ممكنة في ترتيب أرقام العدد 3361.

3) عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من كلمة recherche:

تتكون هذه الكلمة من تسعة حروف، حيث أن :

- حرف r يمثل n_1 ، حيث أن: $n_1 = 2$

- حرف e يمثل n_2، حيث أن: $n_2 = 3$
- حرف c يمثل n_3، حيث أن: $n_3 = 2$
- حرف h يمثل n_4، حيث أن: $n_4 = 2$

مع:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$
$$\Rightarrow n = 2 + 3 + 2 + 2 = 9$$

فإن عدد الكلمات الممكن تكوينها من كلمة recherche ،هي (حسب العلاقة السابقة) :

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}$$
$$\Rightarrow P_9^{2,3,2,2} = \frac{9!}{2!\,3!\,2!\,2!} = 7560$$

إذا يوجد 7560 كلمة يمكن تكوينها من كلمة recherche.

<u>التمرين السابع:</u>

1) بكم طريقة يمكن لمجموعة مؤلفة من سبعة أشخاص أن يجلسوا حول طاولة مستديرة.
2) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة "تقوى".
3) كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من الأرقام (1،2،3،4،5) مع تكرار.
4) كم عدد مكون من ثلاثة أرقام وأصغر من 500 يمكن تكوينه من الأرقام (1،2،3،4،5،6،7،8،9)(مع/بدون تكرار).

الحل:

1) عدد الطرق التي يمكن لمجموعة مؤلفة من سبعة أشخاص أن يجلسوا حول طاولة مستديرة:

$$P(n-1)! = P(7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

2) عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب حروف كلمة "تقوى":

$$n! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

3) عدد الأعداد الثلاثية التي تكوينها من الأرقام (1،2،3،4،5) مع تكرار:

حسب مبدأ العد لدينا :

- عدد طرق اختيار الرقم الأول، هو:5
- عدد طرق اختيار الرقم الثاني، هو:5

- عدد طرق اختيار الرقم الثالث، هو:5

ومنه عدد الأعداد الثلاثية التي تكوينها من الأرقام (1،2،3،4،5) مع تكرار ، هي:

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

وبالرجوع إلى العلاقة السابقة (قانون الترتيبة مع الاعادة) مباشرة، فإن:

لدينا:

$$n = 5 \quad , \quad k = 3$$

ومنه، نجد:

$$AR_n^k = n^k$$
$$\Rightarrow AR_5^3 = 5^3 = 125$$

4) عدد الأعداد الثلاثية التي تكوينها من الأرقام (1،2،3،4،5،6،7،8،9) وأصغر من 500 بدون تكرار:

المرتبة الاخيرة في العدد الثلاثي المراد تكوينه هي المئات وبالتالي:

ملاحظة: أكبر من 500 ⟵ رقم المئات أكبر من 5 مع 5

أصغر من 500 ⟵ رقم المئات أصغر من 5 دون 5

عدد الأرقام الأصغر من 5 هي:

$$\{1\ ,2\ ,3,4\}$$

وعددها 5 ومنه:

عدد الاعداد مكون من ثلاث أرقام وأصغر من 500 يمكن تكوينه من الأرقام السابقة مع التكرار، هي :

$$4 \times 8 \times 7 = 224$$

أي:

- عدد طرق اختيار المئات هو: 4
- عدد طرق اختيار العشرات هو: 8
- عدد طرق اختيار الآحاد هو: 7

<u>التمرين الثامن:</u>

يراد اختيار لجنة مكونة من (5) أعضاء ينتخبون من بين (6) أساتذة و(8) طلاب. فبكم طريقة يمكن:

أ) اختيار اللجنة.

ب) اختيار لجنة مكونة من (2) أساتذة و(3) طلاب.

ج) اختيار لجنة مكونة من (4) أساتذة على الأقل.

د) اختيار لجنة من أستاذ واحد على الأكثر.

الحل:

أ) عدد طرق اختيار اللجنة:

$$C_5^{14} = \frac{14!}{5!\,(14-5)!} = \frac{14!}{5! \times 9!} =$$

ب) عدد طرق اختيار لجنة مكونة من (2) أساتذة و(3) طلاب:

$$C_2^6 \times C_3^8 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \times \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{8!}{3! \times 5!} =$$

ج) عدد طرق اختيار لجنة مكونة من (4) أساتذة على الأقل:

$$C_4^6 \times C_1^8 + C_5^6 \times C_0^8 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} \times \frac{8!}{1!\,(8-1)!} + \frac{6!}{5!\,(6-5)!}$$

$$= \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{8!}{1! \times 7!} + \frac{6!}{5! \times 1!} =$$

د) عدد طرق اختيار لجنة من أستاذ واحد على الأكثر:

$$C_0^6 \times C_5^8 + C_1^6 \times C_4^8 = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} + \frac{6!}{1!\,(6-1)!} \times \frac{8!}{4!\,(8-4)!}$$

$$= \frac{8!}{5! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{8!}{4! \times 4!} =$$

الفصل الثالث:

مبادئ الاحتمالات

التجربة والحادث والفراغ العيني:

لنفترض أننا نقوم بإلقاء حجر أو زهرة النرد فنلاحظ أن النتائج الممكنة هي ظهور أحد الأوجه الستة 1 ،2 ، 3 ، 4 ، 5 أو 6 ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم زوجي أي 2 أو 4 أو 6 وبالتالي فإن:

- عملية رمي زهرة النرد تسمى تجربة.
- جميع النتائج الممكنة تسمى بالفراغ العيني أو الفضاء العيني.
- ظهور رقم زوجي الذي هو محل اهتمامنا يسمى حادثا والحادث قد يكون حالة أو أكثر من حالة من الفراغ العيني.

الحالات الممكنة:

هي الحالات أو النتائج الممكن ظهورها عند القيام بتجربة معينة، نأخذ مثالا على ذلك:

- رمي زهرة النرد مثلا فالحالات الممكن ظهورها هي: 1 أو 2 أو3 أو 4 أو 5 أو 6 ، وبالتالي عددها هو 6
- رمي قطعة نقود مثلا فالحالات الممكن ظهورها هي صورة أو كتابة، وبالتالي عددها هو 2.

الحالات المواتية (أو الحالات الملائمة):

هي النائج أو الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي يهمنا، مثال:

- عند رمي قطعة نقدية وكنا نرغب في الحصول على صورة وهنا عدد الحالات المواتية هو 1.

الحالات المتماثلة:

إذا كان لدينا كيس به مجموعة من الكريات لها نفس الخصائص أو الصفات بمعنى لها نفس اللون والحجم والكثافة والمادة المصنوعة منها، وقمنا بخلطها وسحبنا منها كرة وبالتالي فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لها نفس النصيب في السحب.

الحالات المتنافية:

نقول عن الحادثين A و B أنهما متنافيين إذا كان وقوع أحدهما ينفي وقوع أو ظهور الآخر، بمعنى آخر إذا استحال حدوثهما معاً، مثال:

- عند رمي زهرة النرد لا يمكن الحصول على وجهين في نفس الوقت.
- في المواليد لا يمكن للمولود أن يكون ذكراً أو أنثى في نفس الوقت، بطبيعة الحال إذا كانت ظروفه الصحية جيدة

الحالات المستقلة:

نقول على الحادثين A وB أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر أو يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحادث الآخر، مثال:

- عند رمي قطعة النقود مرتين متتاليتين.

الحالات الشاملة:

تسمى الحوادث ..... A,B,C حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لا بد من حدوث أحداهما عند إجراء التجربة.

مثال : صفة الفرد: مدخن أم لا، إلقاء زهرة النرد....

أنواع الحدث:

1- **الحدث البسيط**: نقول عن الحدث أنه حدث بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة، مثال: ظهور العدد 5 عند رمي زهرة النرد فهو بمثابة حدث بسيط من Ω لأنه غير قابل للتجزئة وتقيسمه إلى حوادث أخرى ، حيث أن: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2- **الحدث المركب**: نقول عن الحدث E أنه حدث مركب إذا أمكن تجزئته (تفكيكه) إلى حوادث بسيطة

مثال: عند رمي زهرة نرد و كان محل اهتمامنا الحصول على رقم زوجي نكون أمام حدث مركب هو $E=\{2,4,6\}$ لأنه مركب من ثلاثة حوادث بسيطة .

3- **الحدث الأكيد:** هو الحدث الذي تحقيقه مؤكدا بنتيجة التجربة، أي أنه يتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بهذه التجربة.

مثال : عند رمي زهرة النرد نقول أن الحصول على رقم أصغر من 7 هو حدث أكيد لأننا كلما رمينا حجرة النرد نحصل على رقم من 1 إلى 6 ونرمز له بالرمز $A = \Omega$.

4- **الحدث المستحيل:** هو الحدث غير القابل للتحقق أي مستحيل وقوعه مهما أعدنا التجربة.

مثال: نقول عن ظهور رقم 7 عند رمي حجرة نرد أنه حدث مستحيل لأننا مهما رمينا حجرة النرد فمن المستحيل الحصول على رقم 7 ونرمز له بالرمز $A = \emptyset$.

5- **الحادث المتمم (المعاكس):** لكل حادث A مرتبط بالتجربة E متمم يتكون من مجموعة الحالات غير المحققة لـA والمرتبطة ب E ونرمز له بـ: $\bar{A}, A', A^c, C^A$ ، أي :

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \,;\, x \notin A\}$$

أي أن :

$$\bar{A} = \Omega - A$$

مثال: في تجربة إلقاء حجرة النرد إذا كان A يمثل الأرقام الزوجية :

$$A = \{2 - 4 - 6\}.$$

فإن الحادث المتمم لـA هو:

$$\bar{A} = \{1 - 3 - 5\}$$

6- بعض خواص الحوادث المتممة:

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{\bar{A}} = A \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \\ \bar{\Omega} = \emptyset \\ \bar{\emptyset} = \Omega \end{gathered}}$$

<u>الحوادث المتنافية وغير المتنافية:</u>

7- **الحوادث المتنافية:** يقال عن الحادثين A وB أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا، أي أن وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر، وبالتالي فإن :

$$A \cap B = \emptyset.$$

مثال: عند رمي قطعة نقد لا يمكن ظهور الوجه والصورة في وقت واحد .

8- **الحوادث غير المتنافية:** يقال عن الحادثين A و B أنهما غير متنافيان إذا أمكن وقوعهما في آن واحد، أي أن وقوع أحدهما لا ينفي وقوع الآخر، وبالتالي فإن :

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

مثال (01) : عند رمي حجر النرد فإن الحالات الممكنة لهذه التجربة:

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

نفترض أن:

- الحادث A هو ظهور رقم زوجي.
- الحادث B هو ظهور رقم فردي.
- الحادث C هو ظهور رقم أولي.

المطلوب:

1) عين المجموعة الأساسية "فضاء العينة" جميع الحالات الممكن حدوثها.
2) عين الحوادث A ,B , C .
3) هل الحادثين A وC غير متنافيين؟
4) هل الحادثين A وB متنافيين؟

<u>الحل:</u>

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

$$A = \{2 , 4 , 6\}$$

$$B = \{1 , 3 , 5\}$$

$$C = \{2 , 3 , 5\}$$

الحادثين A وC هما حادثان غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون الرقم الذي يظهر زوجيا و أوليا في نفس الوقت، أي أن:

$$.A \cap C = \{2\}$$

الحادثين A و B متنافيان لأنه لا يمكن أن يكون العدد فرديا و زوجيا في نفس الوقت، وبالتالي يكون:

$$A \cap C = \emptyset$$

مثال (02) : عند رمي قطعة نقود مرتين و إذا كان الحادث A يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل والحادث B يمثل ظهور صورتين فقط، بينما الحادث C يمثل ظهور كتابتين فقط.

<u>المطلوب:</u>

1) عين المجموعة الأساسية "فضاء العينة" جميع الحالات الممكن حدوثها.
2) عين الحوادث A ,B , C .
3) هل الحادثين A و B متنافيين" منفصلين " ؟
4) هل الحادثين A وC متنافيين "منفصلين"؟

الحل:

$$\Omega = \{PP\ ,PF, FP, FF\}$$

$$A = \{FF, PF, FP\}$$

$$B = \{FF\}$$

$$C = \{PP\}$$

A و B ليسا متنافيين لأن تقاطعهما لا يساوي Ø:

$$A \cap B = \{FF\}.$$

Aو C هما حدثين متنافيين لان تقاطعهما = Ø :

$$A \cap C = \emptyset = \{\ \}$$

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة:

1- **الحوادث المستقلة:** يعتبر الحادثين A و B حادثين مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر ، مثال :

عند رمي قطعة نقود مرتين أو عدة مرات ، فنتائج الرمية الأولى لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج الرمية الثانية أو الثالثة .... إلخ .

2- **الحوادث غير المستقلة :** هي الحوادث التي عند وقوع أحدها يؤثر على احتمال وقوع الحوادث الأخرى ، أو وقوع أحدها يكون مشروطاً بوقوع الحوادث الأخرى ، مثال :

إذا سحبنا كرة من صندوق بدون إعادة به n كرية ، إذا هي حوادث غير مستقلة فهناك ترابط لأن السحبة الأولى أو الثانية تؤثر على احتمال السحبات الموالية و عكس مع الإعادة فالحوادث هنا مستقلة.

حساب الاحتمال (قياس الاحتمال):

يعد علم الاحتمال من أهم فروع علم الاحصاء، وله العديد من التعاريف منها ما هو بسيط، ومنها ماهو مبني على النظريات، نذكر منها، ما يلي:

تعريف الاحتمال: هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد. تدل القيمة صفر على حالة استحالة الحدوث و القيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع .

طريقة حساب أو تقدير الاحتمال :

يمكن حساب وتقدير الاحتمال بطريقتين :

1- الاحتمال النظري "التقليدي"

2- الاحتمال الاحصائي "التجريبي"

و لغرض الدراسة سنركز على الاحتمال النظري "التقليدي" و يعرف كذلك بالاحتمال الكلاسيكي:

يعرف الاحتمال النظري لحدوث حادثة ما على أنه نسبة عدد الحالات المواتية (الملائمة) إلى عدد الحالات الممكنة حدوث. بفرض أن كل الحالات لها نصيب متكافئ في الحدوث .

إذا كان حدوث الحدث A يمكن أن يقع بطرق عددها K نسميها عدد الحالات الملائمة (المواتية) من النتائج الكلية للتجربة (عدد الحالات الممكنة) Ω فإن حساب احتمال وقوع الحدث A هـو :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{K}{\Omega}$$

خصائص هامة :

إذا كان الحدث A في فضاء العينة Ω فإن احتمال هذا الحدث يمثل P(A) حيث أن:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) $P(\Omega) = 1$

c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

ملاحظة: تكون الحالة C صحيحة في حالة كون عدد غير منتهي من الحوادث المتتابعة: $A_1 , A_2 ......, A_n$، ومتنافية فإن: $P(A1 \cup A2 \cup \dots \dots \dots \cup An) = P(A1) + P(A2) + \dots \dots \dots P(An)$.

أمثلة في حساب الاحتمال :

مثال(03): عند رمي حجرة النرد فإن عدد الحالات الممكنة هي:

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

وإن كل حادث من الحوادث الناتجة لها نفس فرصة الظهور ، بحيث يكون لدينا :

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

وبالتالي يكون عدم احتمال ظهور الرقم 6 مثلا هو :

$$P(\bar{6}) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(6) + P(\bar{6}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

مثال (04): ما هو احتمال ظهور عدد فردي عند إلقاء ظهرة النرد مرة واحدة ؟

$$\Omega = \{2 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6\} \quad , \qquad n(\Omega) = 6$$

الحادث الملائم "المرغوب" هو:

$$A = \{1 - 3 - 5\} \quad , \ n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

قوانين عامة في نظرية الاحتمال :

تنقسم العمليات على الاحتمالات إلى عمليات أو قواعد الجمع التي تكون في الحوادث المتنافية وغير المتنافية وعمليات الضرب التي تستخدم في الحوادث المستقلة وغير المستقلة والمتمثلة كقاعدة عامة في نظرية الاحتمالات : الرمز"U "يقرأ اتحاد ويكون في محل "أو" أي "+" والرمز " ∩ " يقرأ تقاطع ويكون في محل "و" أي " X " .

قـــوانين الاحتمالات :

1- **جمع الاحتمالات** :

1-1- **في حالة الحوادث المتنافية**:

إذا كانت الحوادث A_1, A_2, A_3.... حوادث متنافية فإن احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث ، فإذا كان مثلا A و B حادثين متنافيين فإن:

$$P\left(A \text{أو} B\right) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

مثال (05): عند رمي زهرة نرد ، ما هو احتمال الحصول على الرقم 4 أو 6 ، وما هو احتمال الحصول على عدد فردي ؟

الحل :

$$\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$$

$$P\left(6 \text{أو} 4\right) = P(6 \cap 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(4) = \frac{1}{6} , \qquad P(6) = \frac{1}{6}$$

أما : $P\left(1 \text{أو} 3 \text{أو} 5\right) = P(1 \cap 3 \cap 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

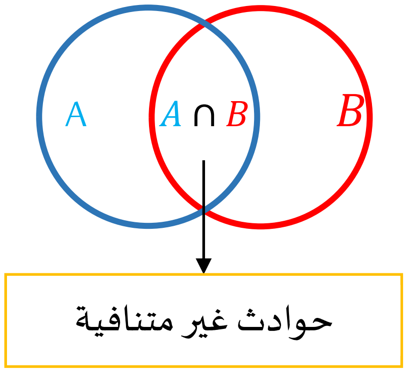
مثال (06) : عند رمي زهرة نرد مرتين، ما هو احتمال الحصول على وجهين متشابهين ؟

الحل : الحصول على (1 و 1) أو (2 و 2) أو (3 و 3) ..... أو (6 و 6) ، هما الوجهين المتشابهين وفي نفس الوقت هي حوادث متنافية واحتمال كل منها هو $\frac{1}{36}$ وعليه :

$$P\left(\text{أساس}\right) = P\left(1\text{و}1\right) + P\left(2\text{و}2\right) + \quad \dots\dots\dots.. + P(6\text{و}6)$$
$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

1-2- في حالة الحوادث غير المتنافية :

لدينا الشكل التالي :



إذا : P(A) وP(B) تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضافة إليها مجموعة الحالات المواتية للحادث B، وبالتالي يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية أو الملائمة للوقوع A و B معا، ومنه فإن في حالة جمع P(A) و P(B) فإننا نجمع P (A و B) مرتين لهذا لا بد من طرح P(A و B) مرة واحدة للحصول على احتمال P (A أو B) .

$$P\left(B\text{أو}A\right) = P(A) + P(B) - P(A\text{و}B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (07) : ليكن لدينا حادثين، الجدث الأول يمثل الحصول على عدد فردي والحدث الثاني يمثل الحصول على عدد أولي عند رمي حجرة النرد.

المطلوب:

1) هل الحادثين متنافيين؟.
2) ما هو احتمال الحصول على عدد فردي أو أولي عند رمي حجرة النرد ؟.

الحل:

$$\Omega = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$$

نفترض أن الحدث A يمثل ظهور عدد فردي :

$$A = \{1 , 3 , 5\}$$

نفترض أن الحدث B يمثل ظهور عدد اولي:

$$B = \{2 , 3 , 5\}$$

يمكن القول ان الحدثين A و B هو ما حدثين غير متنافيين لأنه يمكن أن يكون العدد فرديا و أوليا في نفس الوقت أي :

$$A \cap B = \{3 , 5\}$$

و عليه :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال (08):

إذا كان احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم هو 0.4 ، و احتمال أن يكون عاصفا هو 0.6 واحتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم و عاصفا في نفس الوقت هو 0.2. ، فما هو احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم أو عاصفا؟.

الحل : نفترض أن الحدث:

الحادث A ⟵ يمثل الجو ملبدا.

الحادث B ⟵ يمثل الجو عاصفا.

الحادث (AوB) ⟵ يمثل الجوة ملبدا بالغيوم و عاصفا.

ومنه:

$$P(A) = 0.4 \quad , \quad P(B) = 0.6 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.2$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 0.4 + 0.6 - 0.2$$
$$P(A \cup B) = 0.8$$

2- ضرب الاحتمالات :

2-1- في حالة الحوادث المستقلة :

إذا كان لدينا A و B حادثين مستقلين فإن احتمال حدوثهما معا هو:

$$P\left(A و B\right) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

و بصورة عامة، لو كان لدينا (n) من الحوادث المستقلة بعضها عن بعض وهي: (A_1 , A_2 , ... , A_n)
فإن احتمال حدوثها معا هو :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \ldots . \times P(A_n)$$

مثال (09) :

1) عند رمي زهرة النرد مرتين، ما هو احتمال الحصول على الرقم 3 في الرمية الأولى والرقم 3 في الرمية الثانية؟.
2) عند رمي زهرة النرد مرتين، ما هو احتمال الحصول على الرقم 5 في الرمية الأولى والرقم 3 في الرمية الثانية؟.
3) عند رمي قطعة نقود مرتين، ما هو احتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة النقد الأولى وصورة عند رمي قطعة النقد الثانية؟.

<u>الحل:</u>

نفترض أن الحدث A يمثل الرمية الأولى لكل حالات المثال.

نفترض أن الحدث B يمثل الرمية الثانية لكل حالات المثال

إذا:

1) عند رمي زهرة النرد مرتين، فإن احتمال الحصول على الرقم 3 في الرمية الأولى والرقم 3 في الرمية الثانية هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A \cap B) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

2) عند رمي زهرة النرد مرتين، فإن احتمال الحصول على الرقم 5 في الرمية الأولى والرقم 3 في الرمية الثانية هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A \cap B) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

3) عند رمي قطعة نقود مرتين، فإن احتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة النقد الأولى وصورة عند رمي قطعة النقد الثانية هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A\cap B)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

مثال (10) : إذا كان نجاح أحمد الامتحان الإحصائي هو $\frac{1}{4}$ واحتمال نجاح علي هو $\frac{1}{2}$ في نفس الامتحان و احتمال نجاحهما معا هو $\frac{1}{6}$.

المطلوب : أثبت هل أن نجاح أحمد مستقلا عن نجاح علي أم لا؟.

الحل :

- نفترض أن الحادث A يمثل نجاح أحمد، حيث أن: $P(A)=\frac{1}{4}$
- نفترض أن الحادث B يمثل نجاح علي، حيث أن: $P(B)=\frac{1}{2}$
- نفترض أن الحادث $A\cap$ يمثل نجاح الاثنين معا، حيث أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

و حتى يكون الحادثين A ، B مستقلين فلا بد أن يكون :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

إذا لدينا:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

ولدينا:

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

ومنه نلاحظ مما سبق أن:

$$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

إذا الحادثين A ، B غير مستقلين.

2-2- في حالة الحوادث غير المستقلة :

في هذه الحالة لدينا :

$$P(A\cap B)\neq P(A)\times P({}^{B}/_{A})$$

و تقرأ :احتمال وقوع حادثين غير مستقلين A و B يساوي احتمال وقوع الحادث A مضروبا في احتمال وقوع الحادث B علم أن الحادث A قد تحقق.

و منه نستنتج الاحتمال الشرطي الذي يرمز له في هذه الحالة بـ: P(B/A) ، ومن المعادلة السابقة نستنتج أن:

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ويقرأ احتمال وقوع الحادث B علما أن الحادثة A قد تحقق.

ملاحظة :إذا كان الحادثين B و A مستقلين فإن الاحتمال الشرطي يصبح يساوي:

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = P(B)$$

مع: $P(A) > 0$

ويقرأ: احتمال وقوع الحادث (B) علما أن الحادث (A) قد تحقق.

ملاحظة: إذا كان الحادثين (A) و(B) مستقلين فإن الاحتمال الشرطي يصبح يساوي:

$$P(B/A) = P(B)$$

مثال (11): إذا كان احتمال نجاح أحمد في الامتحان النهائي هو$(\frac{1}{2})$، واحتمال نجاح أحمد وعلي هو $(\frac{1}{3})$.

المطلوب: جد احتمال نجاح علي إذا علم بأن أحمد قد نجح؟.

الحل:

- نفترض أن الحادث (A) يمثل نجاح أحمد $\Leftarrow P(A) = \frac{1}{2}$
- نفترض أن الحادث $(A \cap)$ تمثل نجاح أحمد وعلي$\Leftarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

إذا: ايجاد إحتمال نجاح علي إذا علم بأن أحمد قد نجح يكون كما يلي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = (0.67)$$

ملاحظة: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

مثال(12): عند رمي زهرة النرد فإذا ظهر عدد زوجي أحسب إحتمال أن يكون أولي؟.

الحل:

- نفترض أن Ω هي عدد الحالات الممكنة (التي يمكن أن تظهر) عند رمي زهرة النرد، حيث أن:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- ونفترض أن الحدث (A) يمثل ظهور عدد زوجي، حيث أن:

$$A = \{2,4,6\}$$

- ونفترض أن الحدث (B) يمثل ظهور عدد أولي، حيث أن:

$$B = \{2,3,5\}$$

أولا نجد: $(A \cap B), P(A \cap B), P(A)$

ومنه:

$$(A \cap B) = \{2\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

إذا:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

نظريات مهمة في الإحتمالات:

1- إحتمال حدوث الحدث (A) مضافا إليه إحتمال حدوث مكملتها ($\overline{A}$) يساوي الواحد صحيح، أي: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

2- $P(\emptyset) = 0$

3- $P(\Omega) = 1$

4- احتمال حدوث ($\overline{A}$ و $\overline{B}$) يساوي إحتمال حدوث مكملة (AأوB) معا، أي أن: $P(\overline{A} \cup \overline{B}) =$

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

5- إحتمال حدوث ($\overline{A}$ و $\overline{B}$) يساوي احتمال حدوث مكملة (A أو B)، أي أن: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

$$P(\overline{A \cup B})$$

6- إن إحتمال حدوث (A) وعدم حدوث (B) يساوي احتمال حدوث (AأوB) مطروحا منه احتمال حدوث (Aو B) معا، أي: $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$

ملاحظة: يطلق على (4) و(5) بقانون ديمورجان.

مثال (13):إذا كان لدينا الحادثين (A) و(B)، بحيث أن:

$$P(A) = 0.3$$
$$P(B) = 0.6$$
$$P(A \cup B) = 0.4$$

المطلوب: أوجد ما يلي:

1- $P(A \cap B)$

2- $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

3- $P(\overline{A} \cap B)$

الحل:

$$1) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 + 0.6 - 0.4$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.5$$

$$2) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P(\overline{A \cup B})$$
$$\Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.4$$
$$= 0.6$$

$$3) - P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.6 - 0.5$$
$$= 0.1$$

الاحتمال الكلي :

ليكن لدينا (n) من الحوادث المتنافية وهي $[B_1, B_2, \dots \dots \dots, B_n]$، ضمن فضاء العينة. وبالتالي يعرف الإحتمال الكلي بأنه لا يتحقق الحادث (A) في المجموعة الشاملة (Ω) إلا بتحقق الحوادث المتنافية السابقة التي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية (Ω)، وتحقق الشروط الثلاثة:

$$1) - P(B_i) \geq 0$$

$$2) - \ B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$3) - \ B_1 \cup B_2 \cup \dots \dots \cup B_n = \Omega$$

ويعبر عليه بالقانون التالي:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \,.\, P(A/B_i)$$

مثال(14): لدينا ثلاثة آلات للإنتاج هي $\{, II, I\}$ تنتج $[25\%, 40\%, 35\%]$ على الترتيب من الإنتاج المصنع الكلي. علما أن نسبة الإنتاج المعيب من إنتاج كل آلة هي $[8\%, 3\%, 6\%]$ كذلك على الترتيب.

فإذا أختيرت وحدة واحدة من الإنتاج النهائي للمصنع عشوائيا، فما إحتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة؟.

الحل:

نفترض أن (D) هو اختيار الوحدة المعيبة، وعليه $P(D) =?$

نفترض أن الحوادث M_3, M_2, M_1 التالية تمثل ما يلي:

$$M_1 = \left\{ \text{سحب وحدة من الانتاج الآلة} I \right\} \Rightarrow P(M_1) = 0.35$$

$$M_2 = \left\{ \text{سحب وحدة من الانتاج الآلة} II \right\} \Rightarrow P(M_2) = 0.40$$

$$M_3 = \left\{ \text{سحب وحدة من الانتاج الآلة } III \right\} \Rightarrow P(M_3) = 0.25$$

$$D = \left\{ \text{سحب الوحدة المعيبة} \right\} \Rightarrow P(D) =?$$

وعليه فإن مجموع هذه الاحتمالات الثلاثة، تكون:

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1$$

ولدينا كذلك:

احتمال سحب وحدة معيبة من إنتاج الآلة I هو: $P(D/M_1) = 0.06$

احتمال سحب وحدة معيبة من إنتاج الآلة II هو: $P(D/M_2) = 0.03$

احتمال سحب وحدة معيبة من إنتاج الآلة III هو: $P(D/M_3) = 0.08$

إذا وباستخدام نظرية الاحتمال الكلي، نجد:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(M_i).P(D/M_i)$$

$$\Rightarrow P(D) = P(M_1).P(D/M_1) + P(M_2).P(D\,/\,M_2) + P(M_3).P(D\,/\,M_3)$$

وبتطبيق العددي نجد:

$$P(D) = (0.35X0.06) + (0.40X0.03) + (0.25X0.08)$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.021 + 0.012 + 0.020$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.053$$

مثال(15): يقوم مهندسان (أحمد وعلي) بإنجاز تصاميم مشروع بناء سكني بنسبة 60% ، 40% على الترتيب، واحتمال وجود خطأ في تصاميم المهندسان كان 1% ، 2% كذلك على الترتيب.

فإذا سحبت أحد التصاميم المنجزة عشوائيا، فما هو احتمال أن يكون هذا التصميم فيه خطأ؟.

الحل:

نفترض أن:

A: تمثل تصاميم المهندس أحمد.

B: تمثل تصاميم المهندس علي.

وبالتالي:

$P(A) = 0.60$ تمثل احتمال سحب تصاميم المهندس أحمد.

$P(B) = 0.40$ تمثل احتمال سحب تصاميم المهندس علي.

وعليه مجموع هذه الاحتمالات هو:

$$\mathrm{P(A) + P(B) = 1}$$

D: تمثل التصاميم التي فيها خطأ معين، حيث $\mathrm{P(D)} = ?$

$\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{D}}/_{\mathrm{A}}\right) = 0.01$. تمثل احتمال سحب تصميم فيه خطأ، ولكن من تصاميم المهندس أحمد.

$\mathrm{P}\left({}^{\mathrm{D}}/_{\mathrm{B}}\right) = 0.02$. تمثل احتمال سحب تصميم فيه خطأ، ولكن من تصاميم المهندس علي.

وبتطبيق نظرية الاحتمال الكلي، نجد:

$$P(D) = P(A).P\left({}^{D}/_{A}\right) + P(B).P({}^{D}/_{B})$$

$$\Rightarrow P(D) = (0.60)(0.01) + (0.40)(0.02)$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.006 + 0.008$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.014$$

نظرية بيز:

إذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية هي $[A_1, A_2, \dots \dots, A_n]$ ضمن فضاء عينة، بحيث:

$$1) - \ A_i \cap A_j \neq 0$$

$$2) - P(A_i) \geq 0$$

$$3) - \ A_1 \cup A_2 \cup \dots \dots . \cup A_n = S = \Omega$$

وإذا كانت الحادثة (B) معرفة على نفس فضاء العينة (S)، وأن جميع الاحتمالات الشرطية معلومة $P\left({}^{B}/_{A_j}\right)$ مع $j = 1,2, \ldots, n$.

فمن أجل أي حدث (B) حيث $P(B) > 0$، يكون لدينا:

$$P\left({}^{A_j}/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}/_{A_j}\right).P(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P\left({}^{B}/_{A_j}\right).P(A_j)}$$

مثال(16): بالرجوع للمثال السابق رقم (14).

والمطلوب : ما هو احتمال أن تكون الوحدة المعيبة من انتاج الآلة II؟.

الحل:

$$P\left({}^{M_2}/_{D}\right) = \frac{P\left({}^{D}/_{M_2}\right).P(M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P\left({}^{D}/_{M_1}\right).P(M_1) + P\left({}^{D}/_{M_2}\right).P(M_2) + P\left({}^{D}/_{M_3}\right).P(M_3)}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{M_2}/_{D}\right) = \frac{(0.40)(0.03)}{(0.35)(0.06) + (0.40)(0.03) + (0.25)(0.08)}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{M_2}/_{D}\right) = \frac{0.012}{0.053}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{M_2}/_{D}\right) = 0.23$$

مثال (17): بالرجوع إلى المثال السابق رقم (15).

والمطلوب: ما هو إحتمال أن يكون تصميم الذي فيه خطأ من تصميم المهندس أحمد؟.

الحل:

$$P\left(A/_{D}\right) = \frac{P\left(D/_{A}\right).P(A)}{\sum_{I=1}^{2} P\left(D/_{B}\right).P(A) + P\left(D/_{B}\right).P(B)}$$

$$\Rightarrow P\left(A/_{D}\right) = \frac{0.006}{0.014}$$

$$P\left(A/_{D}\right) = 0.43$$

مثال (18):

صندوقان يحتوي الأول على 5 كرات حمراء و4 خضراء، ويحتوي الثاني على 7 كرات حمراء و 3 خضراء.

إخترنا أحد الصناديق عشوائيا، وسحبنا منه كرة بطريقة عشوائية كذلك.

المطلوب: جد ما يأتي:

1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء؟.
2- إذا تم سحب كرة وتبين بأنها خضراء، فما هو احتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الأول؟.

الحل:

نفترض أن :

A:تمثل الكريات الموجودة في الصندوق الأول.

B:تمثل الكريات الموجوذة في الصندوق الثاني.

ومنه:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

G:تمثل الكرة المسحوبة بأنها خضراء، $P(G) = ?$

$P\left({}^{G}/_{A}\right) = \frac{4}{9}$ تمثل احتمال سحب كرة خضراء ولكن من صندوق الأول.

$P\left({}^{G}/_{B}\right) = \frac{3}{10}$ تمثل احتمال سحب كرة خضراء ولكن من صندوق الثاني.

إذا:

1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة خضراء نستخدم قانون الاحتمال الكلي، أي أن:

$$P(G) = P(A).P\left({}^{G}/_{A}\right) + P(B).P({}^{G}/_{B})$$

$$\Rightarrow P(G) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right) + (\frac{1}{2})(\frac{3}{10})$$

$$\Rightarrow P(G) = 0.22 + 0.15$$

$$\Rightarrow P(G) = 0.37$$

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الأول إذا علمت بأنها خضراء، نقوم بتطبيق نظرية بييز، حيث نجد:

$$P\left({}^{A}/_{G}\right) = \frac{P(A).P({}^{G}/_{A})}{\sum_{I+1}^{2} P(A).P\left({}^{G}/_{A}\right) + P(B).P({}^{G}/_{B})}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{A}/_{G}\right) = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{4}{9})}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right) + (\frac{1}{2})(\frac{3}{10})}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{A}/_{G}\right) = \frac{0.22}{0.37}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{A}/_{G}\right) = 0.59$$

تمارين محلولة حول الفصل الثالث:

التمرين الأول:

قمنا بتجربة تتمثل في رمي قطعة نقوج مرتين متتاليتين، وقمنا بتسجيل النتيجة.

المطلوب:

1) حدد فضاء (فراغ) العيني.
2) حدد كل من الحوادث التالية:

- A: الحصول على وجه H مرة واحدة.
- B: الحصول على وجهT في الرمية الثانية.
- C: الحصول على وجه H مرة واحدة على الأقل.
- D: الحصول على وجه H مرة واحدة على الأكثر.
- E: الحصول على وجه H مرة واحدة على الأقل وعلى وجه Tمرتين.

الحل:

1) تحديد فضاء العيني:

$$\Omega = \{(H\ ,H)\ ,(H,T)\ ,(T\ ,H)\ ,(T\ ,T)\}$$

2) تحديد الحوادث:

$$A = \{(H\ ,T)\ ,(T\ ,H)\}$$
$$B\ = \{(H\ ,T)\ ,(T\ ,T)\}$$
$$C\ = \{(H\ ,T)\ ,(T\ ,H)\ ,(H\ ,H)\}$$
$$D\ = \{(H\ ,T)\ ,(T\ ,H)\ ,(T\ ,T)\}$$
$$E\ = \phi$$

التمرين الثاني:

نقوم بتجربة إلقاء زهرة النرد مرتين.

المطلوب:

1) حدد فضاء (فراغ) العيني.

2) حدد الحوادث التالية:

A: الحصول على المجموع يساوي 7.

B: الفرق بين العددين الناتجين يساوي بالقيمة المطلقة 1.

C: الحصول على المجموع يساوي 9 على الأقل.

D: الحصول على 1 في الرمية الأولى.

E: الحصول على جداء العددين الناتجين يساوي 6 على الأكثر.

3) عبر بالكلمات عن كل من الحوادث الممثلة بالمجموعات الجزئية التالية:

$$G = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$
$$H = \{(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (2,2), (1,3)\}$$
$$I = \{(5,1), (1,5), (6,2), (2,6), \}$$
$$J = \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)\}$$
$$K = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

الحل:

1) تحديد فضاء (فراغ) العيني:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.., (6,6)\}$$

2) تحديد الحوادث:

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$
$$B = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$
$$C = \{(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$
$$D = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$
$$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (5,1), (6,1)\}$$
$$F = \phi$$

3) التعبير بالكلمات عن الحوادث الممثلة بالمجموعات الجزئية:

G: الحصول على العدد نفسه في الرميتين.

H: الحصول على مجموع يساوي 4 على الأكثر.

I: الفرق بين العددين الناتجين يساوي بالقيمة المطلقة 4.

J: الحصول على رقم 4 في الرمية الثانية.

K: الحصول غبى عددين زوجيين.

التمرين الثالث:

ما هو احتمال الحصول على الجداء يساوي 10 عند رمي زهرة النرد مرتين.

الحل:

A: يمثل حادث الحصول على الجداء يساوي 10 عند رمي زهرة النرد مرتين.

ومنه:

$$P(A) = \frac{2}{36} = 0.05$$

التمرين الرابع:

ما احتمال الحصول على كرة حمراء وثلاثة كرات بيضاء عند اختيار 4 كرات من صندوق فيه 5 كرات حمراء و7 كرات بيضاء؟.

الحل:

احتمال الحصول على كرة حمراء وثلاثة كرات بيضاء عند اختيار 4 كرات من صندوق فيه 5 كرات حمراء و7 كرات بيضاء، هو:

$$\frac{C_5^1 \times C_7^3}{C_{12}^4} = \frac{5 \times 35}{495} = \frac{175}{495} = 0.35$$

التمرين الخامس:

أطلق صيادان كل منهما طلقة نحو الهدف، إذا كان احتمال إصابة الأول للهدف هو 0.67 واحتمال إصابة الثاني للهدف هو0.75 ، فما احتمال:

1) أن يصيب الاثنين الهدف معا.
2) أن يصيب الهدف احداهما على الأقل.
3) أن لا يصيب أي منهما الهدف.

الحل:

A: تمثل حادث اصابة الصياد الأول للهدف.

B: تمثل حادث اصابة الصياد الثاني للهدف.

ومنه:

1) احتمال أن يصيب الاثنين الهدف معا:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.67 \times 0.75 = 0.5$$

2) احتمال أن يصيب الهدف احداهما على الأقل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 0.67 + 0.75 - 0.5 = 0.916$$

3) احتمال أن لا يصيب أي منهما الهدف:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.916 = 0.084$$

كما يمكن حل السؤال الثالث بطريقة ثانية:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - 0.67) \times (1 - 0.75) = 0.084$$

التمرين السادس:

عينة مكونة من 20 طالب و 30 معلم شاركوا في الاجابة عن أهمية الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت اجاباتهم كما يلي:

الاجابة	نعم	لا	غير متأكد	المجموع
طلاب	14	4	2	20
معلمون	24	3	3	30

المطلوب: فإذا اخترنا أحد أفراد العينة عشوائيا فما احتمال أن يكون معلما علما بأن اجابته كانت نعم.

الحل:

$P(B)$: تمثل احتمال الاجابة بنعم.

$P(A \cap B)$: تمثل احتمال أن الفرد الذي تم اختياره المعلم والاجابة بنعم.

$P(A/B)$: تمثل احتمال أن يكون الفرد الذي تم اختياره المعلم علما بأن اجابته كانت نعم.

حيث أن:

$$P(B) = \frac{38}{50} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{24}{50}$$

ومن قانون الاحتمال الشرطي نجد:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{24}{50}}{\frac{38}{50}} = \frac{24}{38} = 0.63$$

التمرين السابع:

الجدول التالي يصنف 400 شخص حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم كالتالي:

	يدخن	لا يدخن	المجموع
ضغط مرتفع	40	10	50
ضغط متوسط	70	130	200
ضغط منخفض	55	95	150
المجموع	165	235	400

فإذا تم اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي، حيث:

A: تمثل حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع.

B: تمثل حادثة اختيار شخص مدخن.

المطلوب: أوجد احتمال أن الشخص المختار:

1) ضغط دمه مرتفع.
2) مدخن.
3) ضغط دمه مرتفع ويدخن.
4) ضغط دمه مرتفع علما أنه يدخن.
5) يدخن علما أن ضغط دمه مرتفع.

الحل:

1) احتمال أن ضغط دمه مرتفع، هو:

$$P(A) = \frac{50}{400} = 0.125$$

2) احتمال أنه مدخن، هو:

$$P(B) = \frac{165}{400} = 0.4125$$

3) احتمال أن ضغط دمه مرتفع ومدخن، هو:

$$P(A \cap B) = \frac{40}{400} = 0.1$$

4) احتمال أن ضغط دمه مرتفع علما أنه مدخن، هو:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4125} = 0.2424$$

5) احتمال أنه مدخن علما أن ضغط دمه مرتفع، هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.125} = 0.8$$

التمرين الثامن:

اذا علمت أن احتمال نجاح علي في امتحان هو 0.7 و احتمال سفره للخارج إذا نجح هو 0.6، فما هو احتمال نجاحه وسفره، حيث أن:

A: تمثل حادثة نجاح علي في الامتحان.

B: تمثل حادثة سفر علي للخارج.

$(A \cap B)$: تمثل حادثة نجاح علي في الامتحان وسفره للخارج.

الحل:

لدينا:

$$P(A) = 0.7 \qquad , \qquad P(A \cap B) = ? \qquad , P(B/A) = 0.6$$

ومنه:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow 0.6 = \frac{P(A \cap B)}{0.7}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

<u>التمرين التاسع:</u>

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة بثلاثة آلات، حيث تنتج الأولى 20% من إجمالي انتاج السلعة، وتنتج الثانية 35% من إجمالي انتاج السلعة، فإذا علمت أن نسبة الانتاج المعيب في الآلات الثلاثة هو 2%، 2.5%، 3% على الترتيب، فإذا اختيرت وحدة واحدة من الإنتاج النهائي للمصنع عشوائيا.

المطلوب:

1) فما احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة؟.
2) ما احتمال أن تكون الوحدة المعيبة من انتاج الآلة الأولى؟.
3) ما احتمال أن تكون الوحدة المعيبة من انتاج الآلة الثانية؟.
4) ما احتمال أن تكون الوحدة المعيبة من انتاج الآلة الثالثة؟.

الحل:

1) احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة، هو:

نفترض أن (D) هو اختيار الوحدة المعيبة، وعليه $P(D)\ =?$

نفترض أن الحوادث M_3, M_2, M_1 التالية تمثل ما يلي:

$$M_1\ = \left\{I\text{سحب وحدة من الانتاج الآلة}\right\} \Rightarrow P(M_1)\ = 0.20$$

$$M_2\ = \left\{II\text{سحب وحدة من الانتاج الآلة}\right\} \Rightarrow P(M_2)\ = 0.35$$

$$M_3\ = \left\{III\ \text{سحب وحدة من الانتاج الآلة}\right\} \Rightarrow P(M_3)\ = 0.45$$

$$D\ = \left\{\text{سحب الوحدة المعيبة}\right\} \Rightarrow P(D)\ =?$$

وعليه فإن مجموع هذه الاحتمالات الثلاثة، تكون:

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1$$

ولدينا كذلك:

احتمال سحب وحدة معيبة من إنتاج الآلة الأولى هو: $P(D/M_1)\ = 0.02$

احتمال سحب وحدة معيبة من إنتاج الآلة الثانية هو: $P(D/M_2)\ = 0.025$

احتمال سحب وحدة معيبة من إنتاج الآلة الثالثة هو: $P(D/M_3)\ = 0.03$

إذا وباستخدام نظرية الاحتمال الكلي، نجد:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(M_i).P(D/M_i)$$

$$\Rightarrow P(D) = P(M_1).P(D/M_1) + P(M_2).P(D\ /\ M_2) + P(M_3).P(D\ /\ M_3)$$

وبتطبيق العددي نجد:

$$P(D) = (0.2X0.02) + (0.35X0.025) + (0.45X0.03)$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.004 + 0.00875 + 0.0135$$

$$\Rightarrow P(D) = 0.02625$$

2) احتمال أن تكون الوحدة المعيبة من انتاج الآلة الأولى، هو:

$$P\left({M_1}/{D}\right) = \frac{P\left({D}/{M_1}\right).P(M_1)}{\sum_{i=1}^{3} P\left({D}/{M_1}\right).P(M_1) + P\left({D}/{M_2}\right).P(M_2) + P\left({D}/{M_3}\right).P(M_3)}$$

$$\Rightarrow P\left({M_1}/{D}\right) = \frac{(0.2)(0.02)}{(0.2)(0.02) + (0.35)(0.025) + (0.45)(0.03)}$$

$$\Rightarrow P\left({M_1}/{D}\right) = \frac{0.004}{0.02625}$$

$$\Rightarrow P\left({M_1}/{D}\right) = 0.125$$

$$P\left({M_2}/{D}\right) = \frac{P\left({D}/{M_2}\right).P(M_2)}{\sum_{i=1}^{3} P\left({D}/{M_1}\right).P(M_1) + P\left({D}/{M_2}\right).P(M_2) + P\left({D}/{M_3}\right).P(M_3)}$$

$$\Rightarrow P\left({M_2}/{D}\right) = \frac{(0.2)(0.02)}{(0.2)(0.02) + (0.35)(0.025) + (0.45)(0.03)}$$

$$\Rightarrow P\left({M_2}/{D}\right) = \frac{0.00875}{0.02625}$$

$$\Rightarrow P\left({M_2}/{D}\right) = 0.333$$

$$P\left({M_3}/{D}\right) = \frac{P\left({D}/{M_3}\right).P(M_3)}{\sum_{i=1}^{3} P\left({D}/{M_1}\right).P(M_1) + P\left({D}/{M_2}\right).P(M_2) + P\left({D}/{M_3}\right).P(M_3)}$$

$$\Rightarrow P\left({M_3}/{D}\right) = \frac{(0.45)(0.03)}{(0.2)(0.02) + (0.35)(0.025) + (0.45)(0.03)}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{M_3}/_{D}\right) = \frac{0.0135}{0.02625}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{M_3}/_{D}\right) = 0.514$$

التمرين العاشر:

يخطط صديقك لقضاء عطلة الأسبوع في احدى المناطق السياحية أ أو ب أو ج، ويأخذ قراره بالاختيار كما يلي: يرمي زهرة النرد فإذا حصل على عدد زوجي يزور المنطقة أ، وإذا حصل على عدد فردي يرمي قطعة نقود، ويزور المنطقة ب إذا حصل على صورة والمنطقة ج إذا حصل على الكتابة، ونعلم أن احتمال هطول المطر في كل من المناطق الثلاثة هو، على الترتيب 0.3 ، 0.4 ، 0.2 ، عندما عاد صديقك وجدت الوحل على سيارته، فما هو احتمال أنه زار المنطقة أ؟.

الحل:

نفترض أن الحوادث A_3, A_2, A_1 التالية تمثل ما يلي:

$$A_1 = \left\{\text{حادث زيارة المنطقة أ}\right\} \Rightarrow P(A_1) = 0.5$$

$$A_2 = \left\{\text{حادث زيارة المنطقة ب}\right\} \Rightarrow P(A_2) = 0.25$$

$$A_3 = \left\{\text{حادث زيارة المنطقة ج}\right\} \Rightarrow P(A_3) = 0.25$$

نفترض أن الحادث D يمثل الزيارة لإحدى المناطق.

$$P\left({}^{A_1}/_{D}\right) = \frac{P\left({}^{D}/_{A_1}\right).P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P\left({}^{D}/_{A_1}\right).P(A_1) + P\left({}^{D}/_{A_2}\right).P(A_2) + P\left({}^{D}/_{A_3}\right).P(A_3)}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{A_1}/_{D}\right) = \frac{(0.50)(0.3)}{(0.50)(0.3) + (0.25)(0.4) + (0.25)(0.2)}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{A_1}/_{D}\right) = \frac{0.15}{0.3}$$

$$\Rightarrow P\left({}^{A_1}/_{D}\right) = 0.5$$

الفصل الرابع:

المتغيرات العشوائية

المتغيرات العشوائية:

تعريف المتغير العشوائي: هو عبارة عن قيمة عددية لكل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية، ويرمز له بالرمز (X)، وهو نوعان:

- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع).
- المتغير العشوائي المتصل (المستمر).

1- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)

1-1- تعريف المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له منتهيا أو غير منتهيا، كما يكون قابل للعد، أي:

$$X: X_1 , X_2 , X_3 , \cdots , X_i , \cdots , X_n$$

$$X: X_1 , X_2 , X_3 , \cdots$$

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات، نذكر ما يلي:

- عدد المكالمات الهاتفية في المنازل أو الادارات.....خلال شهر معين.
- عدد الحوادث المرور في مدينة معينة خلال شهر معين مثلا.
- الأرقام التي تظهر على زهرة النرد.
- عدد الوحدات المعيبة في الانتاج لشهر معين.
- عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعة نقود لعدة مرات.

2-1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

إن لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل له قيمة إحتمالية مرافقة، بحيث القيمة (X_i) لها احتمال مرافق هو:

$$[P(X = X_i)]$$

وعليه، فإن:

$$P(X) = P(X = X_1) , P(X = X_2) , \cdots , P(X = X_i) , \cdots , P(X = X_n)$$

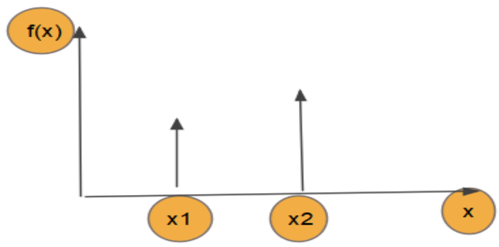
وتسمى الاحتمالات أعلاه بدالة التوزيع الاحتمالي، وتدعى أحيانا بدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل، ولتبسيط ذلك يمكن وضع جدول خاص بالتوزيع الاحتمالي:

X_n	$\cdots$	X_i	$\cdots$	X_2	X_1	قيم (X)
$P(X = X_n)$	$\cdots$	$P(X = X_i)$	$\cdots$	$P(X = X_2)$	$P(X = X_1)$	$P(X)$

1-3- خصائص دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

$$\begin{cases} 1 \rightarrow 0 < P(X = X_i) < 1 \\ 2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(X = X_i) = 1 \end{cases}$$

1-4- الشكل البياني لدالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):



مثال (01):

في تجربة عشوائية قمنا برمي قطعة نقود متجانسة مرتين متتاليتين.

المطلوب:

1) عرف المتغير العشوائي (X) بأنه عدد مرات ظهور الصورة (F).
2) ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
3) رسم دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
4) أثبت أن دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة الكتلة الاحتمالية.

الحل:

1) يمكن تعريف المتغير العشوائي المفصل (X) على أنه عدد مرات ظهور الصورة (F)، أي أن:

$$(X)S = \left\{ (F) \text{ عدد مرات ظهور صورة} \right\}$$

وعليه فإن قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (Ω)، يكتب كما يلي:

S	PP	PF	FP	FF
X	0	1	1	2

أي أن قيم المتغير المنفصل (X) هي:

$$X = 0\,,1\,,2$$

2) دالة التوزيع الاحتمالي $\mathrm{P}(X = X_i)$:

بالرجوع إلى فضاء العينة (Ω)، يمكن كتابة قيم دالة التوزيع الاحتمالي $\mathrm{P}(X = X_i)$ لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X)، على النحو التالي:

$$\begin{cases} P(X=0) = P(PP) = \dfrac{1}{4} \\ P(X=1) = P(PF), P(FP) = \dfrac{1}{4} \\ P(X=2) = P(FF) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

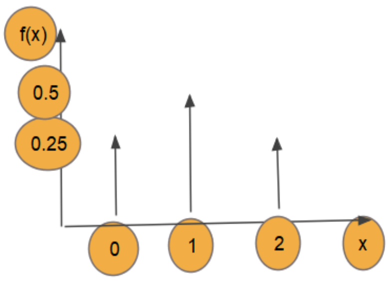
ويمكن تلخيص قيم المتغير العشوائي وقيم دالة التوزيع الاحتمالي المرافقة، كما يلي:

X	0	1	2
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

كما يمكن صياغة دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

$$P(X = X_i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , X_i = 0 , 2 \\ \frac{2}{4} & , X_i = 1 \\ 0 & , \quad sino \end{cases}$$

3) الرسم البياني لدالة التوزيع الاحتمالي $P(X = X_i)$:



4) إثبات ان دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة الكتلة الاحتمالية:

حتى تكون دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة كتلة الاحتمالية لابد من تحقق الشروط التالية:

$$\begin{cases} 1 \to 0 < P(X = X_i) < 1 \\ 2 \to \sum_{i=1}^{n} P(X = X_i) = 1 \end{cases}$$

فعلا نلاحظ أن جميع القيم الاحتمالية $P(X = X_i)$ الواردة في الجدول السابق محصورة بين الصفر والواحد، مما يؤكد تحقق الشرط أو الخاصية الأولى.

ونلاحظ كذلك أن مجموع القيم الاحتمالية يساوي الواحد، أي:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ومنه تحقق الشرط أو الخاصية الثانية.

إذا دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = X_i)$ هي كتلة الاحتمالية.

1-5- القيمة المتوقعة وتباين المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

إذا كان لدينا قيم المتغير العشوائي المنفصل كما يلي:

$$X: X_1 , X_2 , \cdots , X_i , \cdots , X_n$$

وكان لدينا قيم دالة التوزيع الاحتمالي المرافقة لها، هي:

$$P(X) = P(X_1) , P(X_2) , \cdots , P(X_i) , \cdots , P(X_n)$$

فإن:

أولا: التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمتغير العشوائي المنفصل:

إن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل، والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ أو الرمز $\mu(X)$، يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, P(X = X_i)$$

ومنه:

$$E(X) = X_1 . P(X = X_1) + X_2 . P(X = X_2) + \cdots + X_n P(X = X_n)$$

ثانيا: تباين المتغير العشوائي المنفصل:

إن تباين المتغير العشوائي المنفصل، والذي يرمز له بالرمز $(\sigma)_X^2$، يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ومنه:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 . P(X = X_i) - [E(X)]^2$$

ثالثا: الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المنفصل:

إن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المنفصل ، والذي يرمز له بالرمز σ_X، يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

مثال(02):

نعود للمثال السابق والمطلوب ايجاد كل من:

1) التوقع الرياضي.

2) التباين.

3) الانحراف المعياري.

الحل:

1) ايجاد التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, P(X = X_i)$$

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

2) ايجاد التباين:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma_X^2 = \left[0^2.\left(\frac{1}{4}\right) + 1^2.\left(\frac{2}{4}\right) + 2^2.\left(\frac{1}{4}\right)\right] - (1)^2 = 0.5$$

3) ايجاد الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.5} = 0.71$$

2- المتغيرالعشوائي المتصل (المستمر):

2-1- تعريف المتغيرالعشوائي المتصل (المستمر):

وهو المتغير الذي يكون فيه المجال المقابل له غير قابل للعد، أي إن قيم المتغير العشوائي (X) تأخذ الشكل التالي:

$$X \in (a\,, b) \subset R$$

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات، ما يأتي:

- أطوال مجموعة من الطلبة.
- أوزان أو أعمار مجموعة من الطلبة.
- درجة الحرارة لمدينة ما خلال شهر معين.
- الدخل الشهري لمجموعة من العمال.

- قياس ضغط الدم لمجموعة من الأشخاص.

2-2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر):

إن التوزيع الاحتمالي لهذا النوع من المتغيرات لا تمثيله على غرار حالة المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)، بل يعبر عنه بدالة احتمال مستمرة، تدعى بدالة الكثافة الاحتمالية، حيث أن:

$$f(X) = \begin{cases} f(X_i) & , \quad a \leq X_i \leq b \\ 0 & , \quad sino \end{cases}$$

3-2- خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل (المستمر):

$$\begin{cases} 1 \rightarrow f(X_i) \geq 0 \quad [\forall X_i \ , \qquad a \leq X_i \leq b] \\ 2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(X_i) = 1 \end{cases}$$

لاحظة: لإيجاد الاحتمال الواقع ضمن مجال $[a\ , b]$، نقـــوم بحسـاب مساحة تحت المنحنى، والتي تسمــى $P[a \leq X_i \leq b]$، والموضحة بالشكل التالي:

إذن:

$$P(a \leq X_i \leq b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X_i)dx$$

مثال (03):

إذا كان لدينا الدالة $f(X)$ والمعرفة كما يلي:

$$f(X_i) = \begin{cases} 2X & , \quad 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & \text{لقيم } X \text{ الأخرى ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

هل $f(X)$ دالة كثافة احتمالية؟.

الحل:

بالعودة إلى خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل فإن لكل قيمة (X) في منطقة التعريف فإن: $f(X) \geq 0$.

لو أخذنا تكامل الدالة في الفترة المحددة، فإن:

$$\int_0^1 f(X_i)dx = \int_0^1 (2X)dx$$

$$= \left[\frac{2X^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

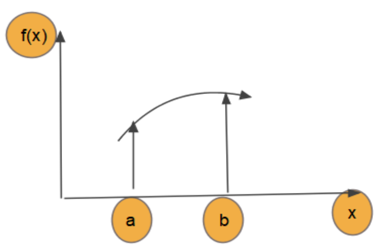
وبالتالي فإن $f(X)$ هي دالة كثافة إحتمالية.

2-4- دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية للمتغير العشوائي المتصل (المستمر):

هي إحتمال بأن (X) أقل من أو يساوي a، أي: $P(X \leq a)$، ويرمز لها بالرمز $F(X)$ بحيث:

$$F(X) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(X)\, dx$$

2-5- التمثيل البياني للمتغير العشوائي المتصل (مستمر)



مثال (04):

إذا كان لدينا الدالة الأتية:

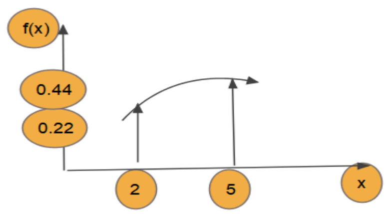
$$f(X_i) = \begin{cases} \frac{2}{27}(1+X) & 2 \le X \le 5 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1) التمثيل البياني.
2) تأكد من أن $f(X_i)$ هي دالة كثافة الاحتمالية.
3) أوجد $P(X \le 3)$.
4) أوجد $P(3 \le X \le 4)$

الحل:

1) التمثيل البياني:



2) حتى تكون $f(X_i)$ دالة كثافة الاحتمالية لابد من تحقق الشروط أو الخصائص التالية:

$$\begin{cases} 1 \to f(X_i) \ge 0 \quad [\forall X_i \ , \qquad a \le X_i \le b] \\ 2 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(X_i)dx = 1 \end{cases}$$

الخاصية الأولى محققة بحيث أن:

$$f(X_i) \ge 0 \quad [\forall X_i \ , 2 \le X_i \le 5]$$

الخاصية الثانية محققة كذلك بحيث أن:

$$\int_2^5 f(X_i)dx = \int_2^5 \left(\frac{2}{27} + \frac{2}{27}X\right) dx = \frac{2}{27}\int_2^5 (1+X)dx$$

$$= \left[\frac{2}{27}X + \frac{X^2}{27}\right]_2^5 = 1$$

وبالتالي دالة $f(X_i)$ السابقة هي دالة الكثافة الاحتمالية.

3) إيجاد $P(X \leq 3)$:

$$P(X \leq 3) = \int_2^3 f(X_i)dx = \int_2^3 \left(\frac{2}{27} + \frac{2}{27}X\right) dx = \frac{2}{27}\int_2^3 (1+X)dx$$

$$= \left[\frac{2}{27}X + \frac{X^2}{27}\right]_2^3 = \frac{7}{27}$$

إيجاد $P(3 \leq X \leq 4)$:

$$P(3 \leq X \leq 4) = \int_3^4 f(X_i)dx = \int_3^4 \left(\frac{2}{27} + \frac{2}{27}X\right) dx = \frac{2}{27}\int_3^4 (1+X)dx$$

$$= \left[\frac{2}{27}X + \frac{X^2}{27}\right]_3^4 = \frac{9}{27}$$

مثال (05):

إذا كان لدينا المتغير العشوائي (X)، كثافة احتماله، هي:

$$f(X) = \frac{1}{2} \qquad , \qquad 0 \leq X \leq 2$$

أوجد، ما يلي:

1) $P(0,5 < X < 1,5)$.
2) $P(X > 0,25)$.
3) $P(X < 0,75)$.
4) $P(X > 3)$.

الحل:

1) $P(0,5 < X < 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} f(X_i)dx = \int_{0,5}^{1,5} \left(\frac{1}{2}\right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2}X\right]_{0,5}^{1,5} = \frac{1}{2} = 0.5$$

2) $P(X > 0.25) = \int_{0,25}^{2} f(X_i)dx = \int_{0,25}^{2} \left(\frac{1}{2}\right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2}X\right]_{0.25}^{2} = \frac{1.75}{2} = 0.875$$

3) $P(X < 0.75) = \int_{0.5}^{0.75} f(X_i)dx = \int_{0.5}^{0.75} \left(\frac{1}{2}\right) dx$

$$= \left[\frac{1}{2}X\right]_{0.5}^{0.75} = \frac{0.25}{2} = 0.125$$

4) $P(X > 3) = \int_{3}^{\infty} f(X_i)dx = \int_{3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) dx = 0$

6-1- القيمة المتوقعة وتباين المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

أولا: التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة) للمتغير العشوائي المتصل:

إن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل، والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ أو الرمز $\mu(X)$، يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X.f(X)dx$$

ثانيا: تباين المتغير العشوائي المتصل:

إن تباين المتغير العشوائي المتصل، والذي يرمز له بالرمز $(\sigma)_X^2$، يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ومنه:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 . f(X)dx - \mu_X^2$$

ثالثا: الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتصل:

إن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المتصل ، والذي يرمز له بالرمز σ_X، يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

مثال (06):

إذا كانت لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(X_i) = \begin{cases} \frac{2}{27}(1+X) & 2 \leq X \leq 5 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

أحسب ما يأتي:

1) التوقع الرياضي.
2) التباين
3) الانحراف المعياري.

الحل:

1) التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_0^1 X.f(X)dx$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^1 X.(3X^2)dx$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^1 (3X^3)\,dx$$

$$\Rightarrow E(X) = \left[\frac{3}{4}X^4\right]_0^1$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

2) التباين:

$$\sigma_X^2 = \int_0^1 X^2 . f(X) dx - \mu_X^2$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \int_0^1 X^2 . (3X^2) dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \int_0^1 (3X^4)\, dx - \left(\frac{9}{16}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \left[\frac{3}{5} X^5\right]_0^1 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

3) الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{3}{80}}$$

تمارين محلولة حول المتغيرات العشوائية:

التمرين الأول:

إذا كان المتغير العشوائي يأخذ قيمة في المجموعة $\Omega = \{1 , 2 , 3\}$، وله الدالة الاحتمالية التالية:

$$f(X) = \frac{X}{6}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

1) التوزيع الاحتمالي.
2) قيمة التوقع الرياضي $E(X)$.
3) قيمة التباين σ_X^2.
4) قيمة الانحراف المعياري σ_X.

الحل:

1) ايجاد التوزيع الاحتمالي:

X_i	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

2) ايجاد قيمة التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} X \,.\, P(X = X_i)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{2}{6}\right) + 3\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{7}{3}$$

3) ايجاد قيمة التباين σ_X^2:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{3} X^2 \,.\, P(X = X_i) - [E(X)]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{2}{6}\right) + 3^2\left(\frac{3}{6}\right)\right] - \left[\frac{7}{3}\right]^2 = \frac{5}{9}$$

4) ايجاد قيمة الانحراف المعياري σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = 0.745$$

<u>التمرين الثاني:</u>

إذا كان لديك دالة الكثافة الاحتمالية الأتية:

$$f(X_i) = \begin{cases} \dfrac{A}{X^2} & , 1 \leq X_i \leq 4 \\ 0 & \text{, عدا ما ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: جد ما يأتي:

1) قيمة الثابت (A).
2) قيمة الاحتمال $P(1 \leq X \leq 3)$.
3) قيمة التوقع $E(X)$.
4) قيمة التباين σ_X^2.
5) قيمة الانحراف المعياري σ_X.

الحل:

1) ايجاد قيمة الثابت (A):

$$\int_{1}^{4} \frac{A}{X^2} dx = 1 \Rightarrow A\left[\frac{X^{-1}}{-1}\right]_1^4 = 1$$

$$\Rightarrow A\left[-\frac{1}{X}\right]_1^4 = 1 \Rightarrow A\left[-\frac{1}{4}+1\right] = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

2) ايجاد قيمة الاحتمال $P(1 \leq X \leq 3)$:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 f(X_i)\, dx = \int_1^3 \frac{4}{3X^2} dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_1^3 \frac{1}{X^2} dx = \frac{4}{3}\int_1^3 X^{-2}\, dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{X}\right]_1^3 = \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{3}+1\right] = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

3) ايجاد قيمة التوقع $E(X)$:

$$E(X) = \int_1^4 X\, f(X)\, dx = \int_1^4 X\, \frac{4}{3X^2} dx = 1.84$$

4) ايجاد قيمة التباين σ_X^2:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_1^4 X^2\, f(X)\, dx - (1.84)^2$$

$$= \int_1^4 X^2\, \frac{4}{3X^2} dx - (1.84)^2 = 0.583$$

5) ايجاد قيمة الانحراف المعياري σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.583} = 0.764$$

<u>التمرين الثالث:</u>

إذا كانت لدينا الدالة التالية:

$$f(X_i) = \begin{cases} \frac{2}{9}X & ,0 \leq X_i \leq 3 \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} , \end{cases}$$

المطلوب:

1) أثبت أنها دالة كثافة احتمالية
2) قيمة الاحتمال $P(2 \leq X \leq \frac{5}{2})$.
3) قيمة التوقع $E(X)$.
4) قيمة التباين σ_X^2.
5) قيمة الانحراف المعياري σ_X.

الحل:

1) اثبات أنها دالة كثافة احتمالية:

حتى تكون $f(X_i)$ دالة كثافة الاحتمالية لابد من تحقق الشروط أو الخصائص التالية:

$$\begin{cases} 1 \rightarrow f(X_i) \geq 0 \quad [\forall X_i \ , \qquad a \leq X_i \leq b] \\ 2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(X_i)dx = 1 \end{cases}$$

الخاصية الأولى محققة بحيث أن:

$$f(X_i) \geq 0 \quad [\forall X_i \ ,0 \leq X_i \leq 3]$$

الخاصية الثانية محققة كذلك بحيث أن:

$$\int_0^3 f(X_i)dx = \int_0^3 \frac{2}{9}X\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 X\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{X^2}{2}\right]_0^3 = 1$$

وبالتالي دالة $f\,(X_i)$ السابقة هي دالة الكثافة الاحتمالية.

6) ايجاد قيمة الاحتمال $P(2 \leq X \leq \frac{5}{2})$:

$$\int_{2}^{\frac{5}{2}} f(X_i)dx = \int_{2}^{\frac{5}{2}} \frac{2}{9} X\, dx = \frac{2}{9}\int_{0}^{\frac{5}{2}} X\, dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{X^2}{2}\right]_2^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{4}$$

2) ايجاد قيمة التوقع $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^3 (X\, f(X))\, dx = \frac{2}{9}\int_0^3 X^2\;\, dx = 2$$

3) ايجاد قيمة التباين σ_X^2:

$$= \int_0^3 (X^2\ \frac{2}{9} X)\ dx - (2)^2 = \frac{2}{9}\int_0^3 (X^3)dx - 4$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{X^4}{4}\right]_0^3 - 4 = \frac{1}{2}$$

4) ايجاد قيمة الانحراف المعياري σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.5} = 0.7$$

المراجع باللغة العربية:

1- أحمد عبد السميع طيبة، مبادئ الاحصاء، دار البداية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2014.

2- إبراهيم محمد البطاينة، مبادئ الاحصاء لطلبة الإدرار والاقتصاد، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الطبعة الأولى، عمان، 2011.

3- عزام صبري، الاحصاء الرياضي، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2010.

4- حسن ياسين طعمة، الاحصاء الاستدلالي، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2012.

5- إبراهيم أبو عقيل، مبادئ في الاحصاء، دار أسامة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2012.

6- محمد محمود سالم صالح، مبادئ التحليل الاحصائي، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2009.

7- عدنان بن ماجد عبدالرحمن بري وأخرون، مبادئ الاحصاء والاحتمالات، النشر والمطابع جامعة ملك سعود، الطبعة الثالثة، 1997.

8- كمال فليفل، فتحي حمدان، الاحصاء، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2011.

9- جلال الصياد، عبد الحميد محمد ربيع، مبادئ الطرق الاحصائية، دار النشر تهامة، جدة، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 1983.

10- سلمان معلا، مبادئ الاحصاء، ، دروس موجهة لطلاب السنة الثانية، كلية الاقتصاد، جامعة حماه، كتب ومطبوعات جامعية، 2017-2018.

11- صلاح العيادي صالحين، مسائل وحلول في الاحصاء والاحتمالات، دار بن الكثير للنشر والتوزيع، طرابلس. ليبيا.

12- مبارك أسبر ديب، مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، دروس موجهة لطلاب السنة الأولى، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، سورية، 2008-2009.

المراجع باللغة لأجنبية:

1- Jacqueline FOURASTIE , Benjamin SAHLER, Probabilité et Statistique, BORDAS , Paris, 2° édition, 1981.

2- Bernard GOLDFARB, Catherine PARDOUX, Introduction à la méthode statistique, Dunod, Paris, 4° édition, 2004.