الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTÉ DES SCIENCE

قسم الرياضيات

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÈMOIRE

pour obtenir le diplôme de

MASTER MATHÉMATIQUE

Option : ANALYSE FONCTIONNELLE ET APPLICATIONS

Présenté par

BENTIRECHE NOURA

THÈME

SUR LES OPÉRATEURS SOUS-LINEAIRES p-SOMMANTS

SOUTENU PUBLIQUEMENT DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

Président :	BOUGOUTAIA Amar	MCA	Université de Laghouat
Encadrant :	ABDESSELAM Nawel	MCB	Université de Laghouat
Examinateur :	BEY Khedidja	MAB	Université de Laghouat

Année Universitaire : 2023-2024

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu qui nous guident pour terminer ce travail humble. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire, Dr. Nawel Abdesselam. Je souhaite également exprimer ma sincère reconnaissance envers les membres du jury, Dr BOUGOUTAIA AMAR et Dr BEY KHEDIDJA, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leurs précieuses remarques et suggestions qui ont contribué à améliorer la qualité de ma recherche. Mes remerciements vont ensuite à mes chers amis, Leur amitié et leur soutien moral ont été une source de motivation et de réconfort tout au long de ce parcours. J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à ma famille qui m'a soutenue de manière inconditionnelle. En particulier, je suis profondément reconnaissante envers ma mère BEN TIRECHE ZOHRA, mon père BENTIRECHE MAKHLOUF, mes frères DJALAL et YACINE ma chère sœur MLALAK IKRAM. Enfin, je tiens à adresser un grand merci à toutes les personnes travaillant au département de mathématiques.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

- — Aux joyaux de ma vie, "mes parents", qui sont la source de ma réussite, je souhaite qu'ils trouvent à travers ce mémoire le faible témoignage de leurs efforts et sacrifices.
- — À mes frères,
- — À ma sœur,
- — À toute la famille,
- — À mes chers amis,
- — Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

Enfin, je dédie ce mémoire à mes collègues et à tous ceux qui me sont chers..

ملخّص

في هذه الدراسة، قمنا بتعريف المؤثرات p ـ الجمعية $(1 \leq p < +)$ ودراسة خصائصها الأساسية، و مفهومي الهيمنة والتحليل لبيّتسش. كتطبيّقات لتلك المؤثرات، نقدّم علاقتهم مع مؤثرات هلبرت سشميدت، والمؤثرات p ـ الجمعية تحت الخطية ومع المؤثر تحت الخطي الموجب p ـ النووي لكوهين.

الكلمات المفتاحية : مؤثرات p ـ الجمعية، الهيمنة والتحليل لبيّتسش.، مؤثرات هلبرت ـ سشميدت، مؤثر تحت الخطي الموجب p النووي لكوهين.

Résumé

Dans cette étude, nous définissons les opérateurs p-sommants $(1 \leq p < +)$ et étudions leurs propriétés de base, ainsi, les deux concepts de domination et de factorisation de Pietsch. Comme applications de ces opérateurs nous présentons leurs lien avec les opérateurs de Hilbert-Schmidt, les opérateurs sous-Linéaires p-sommants et avec les opérateurs sous lineaires positifs p-nucleaires de Cohen.

Mots clés : opérateurs de p-sommants, théorèmes de composition, domination et factorisation, opérateurs de Hilbert-Schmidt, opérateurs de p-sommants sous-linéaires, opérateurs sous-linéaires positifs p-nucléaires de Cohen.

Abstract

In this study, we define the p-sum operators $(1 \leq p < +)$ and study their basic properties, thus, the two concepts of domination and Pietsch factorization. As applications of these operators we present their link with the Hilbert-Schmidt operators, the sublinear p-sum operators and with the p-nuclear positive sublinear Cohen operators.

Keywords : p-summing operators, Theorems of Composition, Domination and Factorization, Hilbert-Schmidt operators, sublinear p-sum operators, p-nuclear positive sublinear Cohen operators.

Table des matières

Table des Notations

E, F, G	Espaces de Banach.
Ω	Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires bornés .
E^*	Dual topologique de l'espace E.
$L(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires de E dans F.
$SL(E, F)$	Espace des opérateurs sous linéaires de E dans F.
$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$	Boule unité de E.
$B_{E^*} = \{x^* \in E^*; \|x^*\| \leq 1\}$	Boule unité de E^*.
$\langle x, x^* \rangle$	Crochet de dualité entre E et $E*$.
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues sur le compact K.
$\mathcal{V}(E, F)$	Espace des opérateurs complètement continus.
$\mathcal{K}(E, F)$	Espace des opérateurs compacts.
$H_1, H_2, \ldots$	Espaces de Hilbert.
$HS(H_1, H_2)$	Espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
$T_{\|.\|}$	Topologie engendrée par la norme $\|.\|$
$(X, \|.\|_X)$	Espace normé.
$K_p(L, E)$	Espace des opérateurs p-concaves.
$\pi_p^+(E, F)$	Espace sous-linéaire positivement p-sommants.
$D_p(X, Y)$	Espace sous-linéaire et fortement p-sommable de X dans Y

Introduction

Les application linéaires et sous-linéaires ont été l'objet mathématique très étudiées au cours ces dernièires années et surtout dans le domaine de l'interpolation et des factorisations sous toutes les formes. Très récemment ; plusieurs auteurs ont été donné un dévelopement importent à cette notion. Dans ce travail, on s'intéresser aux opérateurs linéaires et sous-linéaires T et les opérateurs linéaire inférieurs ou égaux à T. On essayera d'introduire, de donner quelques résultats classiques ou universels du linéaires au sous linéaires.

Les fondements de la théorie des opérateurs p–sommants reposent sur les travaux entrepris par Alexandre Grothendieck dans les années 1950. En 1967 Albrecht Pietsch a clairement isolé cette classe d'opérateurs et a établi un nombre important de leurs propriétés fondamentales. L'autre part pour en savoir plus, nous constaterons le livre de J.Lindenstrauss et L. Tzafriri [9]) suivies par l'étude d'une classe d'applications bien particulières que sont les applications sous-linéaires (pour de plus amples connaissances sur ces applications, où elles sont bien détaillées) et sa relation avec la classe des opérateurs linéaires en premier lieu par Pietsch [10] a été étudié et détaillée dans son livres, aux opérateurs sous-linéaires.

Ce mémoire est organisé comme suit : Dans le premier chapitre on a commencé par les définitions nécessaire de quelques espaces et les inégalités utilisabe à travers ce travail ; sans oublier la topologie faible et faible * et la définition des opérateurs linéaires.
Dans le deuxième chapitre, on a donné la défininition des opérateurs p-sommants linéaire et sous linéaire. p-sommants leurs propriétés fondamentales et le théorème important de Pietsch sur la factorisation. Dans le dernier chapitre, on donne quelques applications sur les opérateurs linéaires sommants et les opérateurs sous-linéaires d'un espace de Banach réticulé dans un espace de Banach. Notamment, on a exploité les principaux liens entre eux et quelques classes d'opérateurs, ainsi que les opérateurs complètement continus, on a présenté quelques applications des auteurs commençant par le travail M.T. BELAIB, L. MEZRAG. Les auteurs ont été généralisé la notion d'opérateurs p-sommants introduite par Pietsch [10] aux opérateurs sous-linéaires et donner son célèbre théorème de factorisation avec quelques propriétés fondamentales.

D'autre part, on a présenté le travial de Belacel [3]. L'auteur a été initié le concept d'opérateurs sous-linéaires positifs p-nucléaires de Cohen et donnez un analogue au « théorème de domination de Pietsch » et étudier quelques propriétés concernant cette notion. et examinez certaines propriétés liées à cette idée. Enfin, On temine par une conclusion et en donnant quelques remarques et question ouvertes proposé dans le travail des auteurs Belaib [3].

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est donner quelques rappels utilisable à travers ce travail. Dans les deux premières sections de ce chapitre, on définit les espaces vectoriels, les espaces topologiques, les espaces métriques, les espaces normés ainsi que les espaces de Banach qui vont jouer un rôle fondamental dans toute la suite sans oublier les espaces de Hilbert. Un autre outil puissant dont nous aurons besoin est la topologie faible et faible-$*$ qui sera l'objet de la quatrième section, enfin la dernière section va exposer des théorèmes de base de l'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs linéaires et sous linéaires.

1.1 Espaces vectoriels, topologique et métriques

On va donner la définition de les espaces, vectoriels, topologiques et métriques .

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble quelconque, on définit sur E une première loi entre ses éléments, dite loi interne*

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

qui vérifie :

1. $\forall x, y \in E, \quad (x + y) \in E \quad$, *(stabilité)*
2. $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x \quad$, *(commutativité)*
3. $\forall x, y, z \in E, \quad x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z \quad$, *(associativité)*
4. $\exists e \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + e = e + x = x \quad$, *(élément neutre)*
5. $\forall x \in E, \quad \exists x' \in E, \quad x + x' = x' + x = e \quad$. *(élément symétrique)*

La seconde loi sur E est définie entre ses éléments et des nombres d'un corps $\mathbb{K}$, dite loi externe

$$* : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$

et qui vérifie :

1. $\forall x \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad (\alpha * x) \in E, \quad$ *(stabilité)*
2. $\forall x \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha * (\beta * x) = (\alpha * \beta) * x, \quad$ *(associativité)*
3. $\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$, *(distributivité de $*$ sur $+$).*
4. $\forall x \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$, *(distributivité de $+$ sur $*$)*
5. $\exists 1_K \in E, \forall x \in E, \quad 1_K * x = x$ *(élément unité)*

Le triplet $(E, +, *)$ s'appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, les éléments de E s'appellent des vecteurs et on appelle scalaires ceux de $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.2 *Un sous-ensemble F d'un espace vectoriel $(E,+,*)$ s'appelle sous-espace vectoriel et on le note $(F,+,*)$, s'il vérifie :*

1. $F \neq \emptyset$;
2. $\forall x, y \in F\ (x+y) \in F$ *(stable pour $+$)* ;
3. $\forall x \in F, \forall \alpha \in K\ \alpha * x \in F$ *(stable pour $*$)* ;

Exemple 1.1.1
1. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *la droite numérique munie de l'addition et de la multiplication habituelle présente un espace vectoriel.*
2. *Soit E un espace vectoriel, et soit l'ensemble*
$$\{f : E \longrightarrow K\}$$
On définit l'addition et la multiplication sur cet ensemble par :
$$\forall x \in E, (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$
L'ensemble de toutes ces applications forme un espace vectoriel, on le note par $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$.

On passe a la définition de l'espace topologique,

Définition 1.1.3 *Soit E un ensemble quelconque, on définit sur E une topologie, τ qui est une famille de sous-ensembles de E qui satisfont les conditions suivantes :*

1. $\emptyset, E \in \tau$;
2. $\forall O_1, O_2, \ldots, O_n \in \tau$ *on a :*
$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau \quad (\textit{Intersection finie});$$
3. $\forall O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots \in \tau$ *on a :*
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \in \tau \quad (\textit{Réunion infinie ou finie}).$$

On appelle le couple (E,τ) espace topologique, les éléments de τ sont appelés des ouverts.

Exemple 1.1.2
1. *Soit $E = \{a,b,c,d\}$, on considère la topologie*
$$\tau = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$$
(E,τ) *est un espace topologique.*
2. *La droite réelle $\mathbb{R}$ munie de la topologie de tous les intervalles ouverts constitue un espace topologique.*

Parmi les espaces topologiques particuliers, on distingue les espaces métriques et les espaces normés.

Définition 1.1.4 *On appelle métrique ou distance toute fonction d'un espace $E \times E$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et on la note ρ :*
$$\rho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
qui vérifie pour tous $x, y, z \in E$:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*Symétrie*) ;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*Inégalité triangulaire*).

Le couple (E, ρ) s'appelle espace métrique.

Exemple 1.1.3 1. $(\mathbb{R}, \rho)$, *avec* $\rho(x, y) = |x - y|$, *est un espace métrique.*

2. *Dans l'espace* $\mathbb{R}^2$, *on introduit la métrique ou la distance entre* $x = (x_1, x_2)$ *et* $y = (y_1, y_2)$ *par :*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Définition 1.1.5 *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E.*

1.2 Espaces normés et espaces de Hilbert

Dans la section suivant on va donner des notion trés important consernent l'espaces normés et l'éspaces de Hilbert.

Définition 1.2.1 *Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle norme sur E et on la note $\|\cdot\|$ toute application*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie pour tous $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\alpha.x\| = |\alpha|.\|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle espace vectoriel normé.

Exemple 1.2.1 1. *Tout espace normé est un espace métrique, où la norme est définie par :*

$$\|x - y\| = \rho(x, y).$$

2. *Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on peut définir sur l'espace réel $\mathbb{R}^n$ les normes suivantes :*
   (a) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$,
   (b) $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$,
   (c) $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq K \leq n} |x_k|$.

   Soit E un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de E et on le note par E^* l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de toutes les formes linéaires continues définient sur E. E^* est un espace normé, et on définit la norme de $u \in E^*$ par l'une des formules équivalentes suivantes :

(a) $\|u\| = \sup_{x\in E-\{0\}} \left(\frac{|u(x)|}{\|x\|}\right)$,

(b) $\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |u(x)|$

(c) $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)|$

(d) $\|u\| = \inf\{K > 0, |u(x)| \leq K\|x\|\}$

On introduit par la suite un sous-ensemble particulier et important des espaces vectoriels normés, c'est les espaces de Banach.

On comense par la définition de suite de cauchy

Définition 1.2.2 *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace normé E est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall i, j > N_0 \quad \|x_i - x_j\|_E \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.3 *Un espace vectoriel normé E est dit espace de Banach, s' il est complet. C'est-à-dire si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ de E est convergente dans E.*

Exemple 1.2.2
1. *La droite réelle constitue un espace de Banach.*
2. *Soit E un espace normé. Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi. En particulier, E^* l'espace dual de E est un espace de Banach.*

Définition 1.2.4 *Dans la suite on va introduit la notion d'espace réflexif.*
Soit E^{**} le bidual de E, c'est-à-dire l'espace des fonctions linéaires continues sur E^*, et soit l'injection canonique suivante :

$$J_E : E \longrightarrow E^{**}$$

qui à tout $x \in E$ associe $J_E(x)$ telle que

$$\langle J_E(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle, \, \forall x^* \in E^*.$$

Cette application est une isométrie, c'est-à-dire

$$\|J_E(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E, \, \forall x \in E$$

On dit que l'espace de Banach E est réflexif si

$$J_E(E) = E^{**} \text{ (}J_E \text{ est bijective).}$$

Soit $1 \leq p < +\infty$ un nombre réel, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ formés des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty, \tag{1.1}$$

muni de la norme

$$E|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|(x_n)\|_p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

est un espace de Banach qu'on le désigne par $l_p(\mathbb{R}^n)$ ou tout simplement l_p.

Le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ formé des suites bornées muni de la norme

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| \tag{1.3}$$

est un espace de Banach noté $l_\infty(\mathbb{R}^n)$ ou tout simplement l_∞.
On notera $c_0(\mathbb{R}^n)$ ou c_0 le sous-espace fermé de l_∞ des suites qui convergent vers zéro.

Soit K un espace topologique compact. On désigne par $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in K}|f(t)|.$$

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, f une fonction Σ-mesurable. On définit suivant les valeurs du réel p les normes suivantes :

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\} & \text{pour } p = +\infty \end{cases} \tag{1.4}$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Banach $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ représente l'espace de toutes les classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions Σ-mesurables telles que $\|f\|_p < +\infty$, Σ est la tribu de Lebesgue et μ la mesure de Lebesgue.

Définition 1.2.5 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire, symétrique et définie positive. C'est-à-dire*

$$< \cdot, \cdot >: E\times E \to \mathbb{R}$$

telle qu'en plus est linéaire par rapport aux deux variables, elle est :

$$\begin{array}{rlll} \forall x, y \in E & < x, y > & = < y, x > & \textit{symétrique} \\ \forall x \in E & < x, x > & \geq 0 & \\ \forall x \in E & < x, x > & \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 & \textit{définie positive} \end{array}$$

On dit que le couple $(E, < \cdot, \cdot >)$ est un espace préhilbertien si E est un espace vectoriel et $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire. Si l'espace E est de dimension finie, on appelle $(E, < \cdot, \cdot >)$ espace Euclidien. De même, si à la place du corps $\mathbb{R}$ on prend $\mathbb{C}$, on aboutit à des espaces préhilbertiens complexes.

La proposition suivante fait le lien entre les espaces préhilbertiens et les espaces normés.

Proposition 1.2.1 *Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien ; alors l'expression*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} \tag{1.5}$$

définit une norme sur E. On dira que $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

Définition 1.2.6 *On appelle espace Hilbertien ou espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.*

Exemple 1.2.3 *1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien défini par :*

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

on a

$$< x, y >= x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

2. Parmi les espaces l_p définis plus haut, seulement l'espace l_2 est de Hilbert, et on a

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2 \tag{1.7}$$

on a :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{1.8}$$

3. L'espace $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ défini plus haut, constitué par les fonctions à carré intégrable muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in L_2(\mu) \quad < f, g >= \int_\Omega f(x) g(x) d\mu(x) \tag{1.9}$$

est l'un des plus importants exemples d'espaces de Hilbert, la norme associée est

$$\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_\Omega f^2(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

1.3 Formules et inégalités

Dans cette section, on va donner quelques inégalités utilisable à travers ce travail

L'inégalité de Hölder Soient

$$a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a :

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{1.11}$$

où les nombres $p > 1$ et $p^* > 1$ sont liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

ou encore, pour toute fonction $f \in L_p(\mu), g \in L_{p^*}(\mu)$ on a :

$$\int_\Omega |f(t) g(t)| d\mu(t) \leq \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(t)|^{p^*} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{1.12}$$

L'inégalité de Minkowski Soient

$$a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.13}$$

ou encore, pour toute fonction $f, g \in L_p(\mu)$ et $p > 1$ on a :

$$\left(\int_\Omega |f(t) + g(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.14}$$

1.4 Topologie faible et faible-*

Soit (x_n) une suite de points d'un espace vectoriel normé E. Soit $f \in E^*$, il se peut arriver que $(f(x_n))$ converge cependant que (x_n) ne converge pas, d'où les deux définitions suivantes.
On définit sur l'espace de Banach E, en plus de la topologie forte (associée à la norme), la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ notée w qui est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires sur E.
Soit $(x_n)_n$ une suite de E, et $x \in E$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x si et seulement si

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x^*, x_n\rangle, \quad \forall x^* \in E^*. \tag{1.15}$$

Le même, on définit sur l'espace de Banach E^* la topologie faible-* ; pour chaque $x \in E$ on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : E^* &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ f &\longrightarrow \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

La topologie faible-* notée $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$.
Soit $(x_n^*)_n$ une suite de E^*, et $x^* \in E^*$. On dit que $(x_n^*)_n$ converge *-faiblement vers x^* si et seulement si

$$\langle x^*, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n^*, x\rangle, \quad \forall x \in E. \tag{1.16}$$

Exemple 1.4.1 *1. On définit l'espace des suites faiblement p-sommables. On dit qu'une suite est faiblement p-sommable si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^p < +\infty, \quad \forall x^* \in E^*. \tag{1.17}$$

L'espace des suites faiblement p-sommables noté par

$$l_p, w(E)$$

est un espace de Banach, où la norme est définie par

$$\|(x_n)\|_{p,w} = \sup_{x^*\in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.5) \tag{1.18}$$

Dans le cas $p = \infty$

$$l_{\infty,w}(E) = l_\infty(E) \quad \text{où} \quad \|(x_n)\|_{l_{\infty,w}} = \|(x_n)\|_\infty. \quad (1.6)$$

1.5 Opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés.

Définition 1.5.1 *L'application*

$$u : E \longrightarrow F, \qquad x \longrightarrow y = u(x)$$

s'appelle opérateur linéaire (ou plus simplement un opérateur) si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2). \tag{1.19}$$

D_u désigne le domaine de définition de l'opérateur u.

Par la suite, on va s'occuper aux opérateurs dits bornés.

Définition 1.5.2 *Un opérateur u est borné s'il existe un réel $M > 0$ tel que :*

$$\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.5.3 *Un opérateur u est continu en $x_0 \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|u(x) - u(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

Théorème 1.5.1 *L'opérateur u est continu si et seulement si il est borné.*

Définition 1.5.4 *Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire borné, on appelle opérateur adjoint de u et on le note par u^* l'application :*

$$u^* : F^* \to E^*$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \forall y^* \in F^* : \quad \langle u(x), y^* \rangle = \langle x, u^*(y^*) \rangle.$$

Théorème 1.5.2 *Si u est un opérateur borné, alors u^* l'est aussi et on a :*

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}. \tag{1.20}$$

1.6 Théorèmes fondamentaux

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.6.1 *Soit $x, y \in E$, on appelle segment joignant les deux points x, y l'ensemble de tous les éléments de la forme*

$$\alpha x + \beta y\,; \quad \alpha, \beta \geq 0\,; \quad \alpha + \beta = 1.$$

Définition 1.6.2 *Un ensemble $M \subset E$ est dit convexe, si*
$\forall x, y \in M$; le segment joignant ces deux points est inclu dans M.

Définition 1.6.3 *Soit $A \subset E$, on appelle enveloppe convexe de l'ensemble A le plus petit convexe contenant A, et le note par conv(A).*

Théorème 1.6.1 ***(Théorème de Hahn-Banach forme analytique)****.Soit*

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

une application qui vérifie :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x); \quad \forall x \in E \quad et \quad \forall \lambda > 0,$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y); \quad \forall x, y \in E.$$

Soit d'autre part, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

$$g(x) \leq p(x)\,; \quad \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, c'est-à-dire

$$g(x) = f(x)\,; \quad \forall x \in G.$$

et telle que

$$f(x) \leq p(x)\,; \quad \forall x \in E.$$

Remarque 1.6.1 *Conçernant le dual topologique d'un espace normé, on peut introduire la norme moyennant le produit de dualité entre E et E^* de la manière suivante :*

$$\|x^*\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |\langle x, x^* \rangle|. \tag{1.21}$$

Corollaire 1.6.1 *Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme*

$$||g||_{G^*} = \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle|.$$

Alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g telle que :

$$||f||_{E^*} = ||g||_{G^*} \tag{1.22}$$

Posons $p(x) = ||g||_{G^*}||x||$. On a :

1. $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} p(x+y) = ||g||_{G^*}||x+y|| &\leq ||g||_{G^*}(||x|| + ||y||) \\ &\leq p(x) + p(y) \end{aligned}$$

2. $\forall \lambda > 0$

$$\begin{aligned} p(\lambda x) = ||g||_{G^*}||\lambda x|| &\leq ||g||_{G^*}\lambda||x|| \\ &\leq \lambda p(x) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} ||g||_{G^*} &= \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle| \\ &= \sup_{x \in B_G} |g(x)| \\ &= \sup_{x \in G \setminus \{0\}} \frac{|g(x)|}{||x||} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{|g(x)|}{||x||} \leq ||g||_{G^*}$$

ce qui veut dire

$$|g(x)| \leq ||g||_{G^*}||x||, \quad \forall x \in G \setminus \{0\}.$$

En appliquant le théorème (1.7.1), on constate qu'il existe une forme linéaire f qui prolonge g, telle que

$$|f(x)| \leq ||g||_{G^*}||x||, \quad \forall x \in E$$

Donc

$$B|f||_{E^*} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} \leq ||g||_{G^*}, \tag{1.9}$$

Montrons l'autre sens de l'inégalité (1.22). On a.

$$||f||_{G^*} \leq ||f||_{E^*} \qquad \textit{car } G \subset E.$$

Mais, et en vertu du prolongement, on a :

$$||f||_{G^*} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in G - \{0\}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} = \|g\|_{G^*}$$

donc

$$\|g\|_{G^*} \leq \|f\|_{E^*}$$

et d'après les formules (1.9) et (1.10), il résulte que

$$\|g\|_{G^*} = \|f\|_{E^*}$$

Corollaire 1.6.2 *Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E^*$ tel que*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \textit{et} \quad \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

Soit $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. Il est clair que $G \subset E$; l'application g est continue pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ car :

$$|g(tx_0) - g(t_0x_0)| = |t\|x_0\|^2 - t_0\|x_0\|^2| = |(t-t_0)\|x_0\|^2| \leq \varepsilon$$

Il suffit de choisir

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}.$$

D'autre part,

$$\frac{|g(tx_0)|}{\|tx_0\|} = \frac{|t|\|x_0\|^2}{|t|\|x_0\|} = \|x_0\| = \|g\|_{G^*} \tag{1.23}$$

donc, et d'après le corollaire (1.7.1), il existe $f_0 \in E^*$ tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

(pour la dernière égalité, on pose $t = 1$).

Corollaire 1.6.3 *Pour tout $x \in E$, on a :*

$$\|x\| = \sup_{f\in B_{E^*}} |\langle f, x\rangle| = \max_{f\in B_{E^*}} |\langle f, x\rangle| \tag{1.24}$$

(le sup *est atteint)*

On suppose que $x \neq 0$, donc pour toute $f \in B_{E^*}$ on a d'une part :

$$|\langle f, x\rangle| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\| \tag{1.25}$$

c'est-à-dire

$$\sup_{f\in B_{E^*}} |\langle f, x\rangle| \leq \|x\| \tag{1.26}$$

et d'autre part, d'après le corollaire (1.7.2), il existe une application $f_0 \in E^*$ telle que

$$\|f_0\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \langle f_0, x\rangle = \|x\|^2.$$

Si on pose $f_1 = \|x\|^{-1}f_0$, on remarque que $\|f_1\| = 1$ et $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$.

Définition 1.6.4 *Soit E un espace normé, on appelle hyperplan d'équation*

$$[f = \alpha]$$

l'ensemble

$$H = \{x \in E \qquad f(x) = \alpha\} \tag{1.27}$$

avec f est une forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 1.6.5 *Soit $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens*

1. *large si*
$$f(x) \leq \alpha\,; \quad \forall x \in A\,; \quad et\ f(x) \geq \alpha\,; \quad \forall x \in B,$$
2. *strict si*
$$\exists \varepsilon > 0, \quad f(x) \leq \alpha - \varepsilon\,; \quad \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon\,; \quad \forall x \in B.$$

Théorème 1.6.2 ***(Théorème de H-B première forme géométrique).*** *Soit E un espace normé et A, $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. Supposons que A est* ***ouvert****, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*
Notons qu'un hyperplan est fermé si et seulement si sa fonction f est continue.

1.7 Opérateurs Sous-Linéaires

Dans cette section on va rappeler les définitions des espaces de Banach réticulés (pour en savoir plus, le livre de J. Lindenstrauss et L. Tzafriri [9]) suivies par l'étude d'une classe d'applications bien particulières qui sont les applications sous-linéaires (pour de plus amples connaissances sur ces applications, consulter [6] où elles sont bien détaillées) et sa relation avec la classe des opérateurs linéaires.

Définition 1.7.1 *Soit X un espace de Banach réel partiellement ordonné. X est réticulé (resp. complètement réticulé) si :*

1. $\forall x, y \in X, \sup\{x, y\} \in X$ *et* $\inf\{x, y\} \in X$ *(resp.* $\forall A (\neq \emptyset)$*, A majoré* $\Rightarrow \sup A \in X$*)*
2. $\forall x \in X, \quad \||x|\| = \|x\|\ (|x| = sup\{x, -x\})$
3. $\forall x, y \in X, \quad |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$.

Définition 1.7.2 *Soit T une application d'un espace de Banach X dans un espace de Banach réticulé Y. T est sous-linéaire si :*

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in X, \quad T(\lambda x) = \lambda T(x)$.
2. $\forall x, y \in X, \quad T(x + y) \leq T(x) + T(y)$.

On note par :
$$L(X, Y) = \{\text{applications linéaires} u : X \to Y\}.$$
et on dira si X est réticulé que u est positive si :
$$u(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0$$
$$SL(X, Y) = \{\text{applications sous linéaires} T : X \to Y\}.$$
et on le munit de l'ordre induit par Y : $\qquad T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_1\big(x\big) \leq T_2\big(x\big), \quad \forall x \in X$
et : $\qquad \nabla T = \{u \in L(X, Y) \colon u \leq T (i.e. \forall x \in X, u(x) \leq T(x))\}$.
Comme conséquence immédiate :
$$\begin{aligned} u \leq T &\Leftrightarrow u(x) \leq T(x), \quad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow u(-x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow -u(x) \leq T(-x), \quad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow u(x) \leq -T(-x), \quad \forall x \in X \end{aligned} \tag{1.28}$$

Maintenant, on va donner la remarque suivante :

Remarque 1.7.1 *Soit T un opérateur sous-linéaires de X Banach dans Y Banach réticulé. T est borné (continu) $\Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall x \in X,\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$.*

Dans ce cas on pose :
$\|T\| = \sup_{\|x\|_{B_{X^*}}=1} \|T(x)\|$ *(X^* est l'espace de Banach dual de X.)*
qui est une norme sur $SB(X,Y) = \{T : X \to Y$ sous-linéaires bornées$\}$; $B(X,Y) = \{u : X \to Y$ linéaires bornées$\}$.

Remarque 1.7.2 i) $\forall T \in SL(X,Y)$ et $\forall u \in L(Y,Z)$ (positive) $\Rightarrow u \circ T \in SL(X,Z)$.

ii) $\forall u \in L(X,Y)$ et $\forall T \in SL(Y,Z) \Rightarrow T \circ u \in SL(X,Z)$.

iii) $T \in SL(X,Y)$ $(\notin L(X,Y)) \Rightarrow \exists x \in X : -T(-x) < T(x)$.

iv) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$.

Nous utiliserons la généralisation suivante bien connue du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 1.7.1 *(extension du théorème de Hahn-Banach aux applications sous-linéaires).*

Soit X un espace vectoriel, Y complètement réticulé, $T \in SL(X,Y)$ et X_0 un espace vectoriel de X. Soit $u \in L(X_0,Y)$ telle que $u \leq T$. Alors, u se prolonge en un opérateur linéaire $\tilde{u} \in L(X,Y)$ tel que $\tilde{u} \leq T$.

Corollaire 1.7.1 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire. Alors, pour tout x dans X, il existe $u_x \in \nabla T$ tel que $T(x) = u_x(x)$ i.e ($T(x) = \sup_{u \in \nabla T} u(x)$) .*

Preuve 1 On pose :

$$u_x : \mathbf{R}x \to Y$$
$$\lambda x \to u_x(\lambda x) = \lambda T(x). \tag{1.29}$$

u_x est linéaire sur $X_0 = \mathbf{R}x$ et $u_x(\lambda x) = \lambda T(x) \leq T(\lambda x)$,(d'après la remarque 1.4.iv). Donc, il se prolonge en un opérateur noté encore $u_x \in \nabla T$ et $T(x) = u_x(x)$. Le théorème suivant, qui sera utile pour le paragraphe 3, est le résultat essentiel de cette partie. L'intérêt est qu'il établit un lien direct entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous-linéaires.

Théorème 1.7.2 *Soit X, Y deux espaces de Banach dont Y complètement réticulé et $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Alors,*

i) $T = \sup_{u \in \nabla T} \|u\|$.

ii) $\forall x \in X, \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| = \sup\{T(x), T(-x)\}$, $\forall u \in \nabla T$.

Preuve 2 i) Soit $x \in X$ et $u \in \nabla T$. On a :

$$|u(x)| \leq \sup\{(T(x), T(-x)\}$$

ce qui donne $|u(x)| \leq T(x)$ ou bien $|u(x)| \leq |T(-x)|$. Donc, dans les deux cas on aura : $\|u(x) \leq \|T\|\|x\|$.
D'où : $\|u\| \leq \|T\|$, et par conséquent, $\sup_{u \in \nabla T} \leq \|T\|$.

On a :

$$\forall x \in X, \exists u_x \in \nabla T \text{ tel que } T(x) = u_x(x). \tag{1.30}$$

D'où :

$$\|T(x)\| = \|u_x(x)\| \leq \|u_x\|\|x\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u\|\|x\|), \tag{1.31}$$

et donc :

$$\|T\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u\|. \tag{1.32}$$

ii) Soit $x \in X$. On a d'une part :

$$\|T(x)\| = \|u_x(x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \tag{1.33}$$

$$et: \quad \|T(-x)\|u_(- x)(-x)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \tag{1.34}$$

d'où : $\quad \sup\{\|T(x)\|, \|T(-x)\|\} \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\|\}$

Et d'autre part, on a :

$$|u(x)| \leq \sup\{T(x), T(-x)\} \tag{1.35}$$

Ce qui implique :

$$\|u(x)\| \leq \|\sup\{T(x), T(-x)\} \leq \|\sup\{T(x), T(-x)\|\}\| \tag{1.36}$$

Donc :

$$\sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \sup\|T(x)\|, \|T(-x)\| \tag{1.37}$$

D'où en combinant les deux inégalités :

$$\sup_{u \in \nabla T} \|u(x)\| = \sup\{\|T(x)\|, \|T(-x)\|\} \tag{1.38}$$

Corollaire 1.7.2 *Soit $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire.*
Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *T continu,*
2. *$\forall u \in \nabla T$, u est continu.*

Chapitre 2

Les Opérateurs p-Sommants

En 1955 - 1956, le mathématicien Grothendieck [1] a travaillé sur les opérateurs 1-sommants dans son ouvrage intitulé *Applications semi-intégrales à droite.*
En 1966, Pietsch [2] a fondé la théorie des opérateurs p-sommants ($1 \leq p < \infty$). Ensuite, par les deux mathématiciens Pelczynski [3] et Lindenstrauss [4], parmi d'autres, la théorie a gagné une attention particulière dans la théorie des espaces de Banach et l'analyse fonctionnelle, [1, 8, 9, 10]

L'idée principale de ce chapitre est d'illustrer le concept d'opérateur p-sommant. Pour cette raison, dans la première section, on a défini les opérateurs en question, leurs classes et les principaux théorèmes relatifs.
Par la suite, dans la deuxième section, le Théorème de Factorisation dû à Pietsch va nous permettre d'étudier les opérateurs p-sommants d'un autre point de vue, et il sera utile dans le chapitre qui suit.
On désigne par la suite par E et F deux espaces de Banach.

2.1 Définition et propriétés

Définition 2.1.1 *Supposons que $1 \leq p < \infty$ et $u \in \mathrm{L}(E, F)$. On dit que l'opérateur u est **absolument p-sommant** s'il existe une constante $C > 0$, et pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ de E, on a :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^* \rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

L'ensemble de tous ces opérateurs est noté par $\pi_p(E, F)$ et on note par $\pi_p(u)$ la borne inférieure des constantes C vérifiant (2.1).

1. Alexandre Grothendieck né le 28 mars 1928 à Berlin a passé la majorité de sa vie en France. Refondateur de la géométrie algébrique, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XXe siècle.
2. Albrecht Pietsch, mathématicien allemand, a joué un rôle fondamental dans le développement de la théorie des opérateurs p-sommants ($1 \leqslant p < \infty$).
Il a travaillé sur une classe d'opérateurs qui porte son nom (les opérateurs idéaux au sens de Pietsch) et son ouvrage est nommé "operator ideals".
3. Aleksander Pelczynski (1932 - 2012) est un mathématicien polonais. Pelczynski a étudié les mathématiques de 1950 à 1956 à l'université de Varsovie et en 1958 a soutenu sa thèse "Isomorphic properties of Banach spaces connected with weak unconditional convergence of series" sous la direction de Stanislaw Mazur.
4. Joram Lindenstrauss né le 28 Octobre 1936 à Tel Aviv. Il a obtenu son Doctorat en 1962 à l'université de Jerusalem.

Remarque 2.1.1 *1. En vertu des formules (1.2) et (1.5), la formule (2.1) peut encore s'écrire :*

$$\| (u(x_k))_{k=1}^n \|_p \leq C \|(x_k)_{k=1}^n\|_{p,w}$$

Donc on peut tirer que les opérateurs p-sommants transforment des suites faiblement p-sommantes vers des suites fortement p-sommantes.

2. Dans le cas $p = \infty$, la formule (2.2) s'écrit :

$$\|(u(x_k))_{k=1}^n\|_\infty \leq C\|(x_k)_{k=1}^n\|_{\infty,w}.$$

et en vertu de (1.6) on aura :

$$\sup_{1\leq k\leq n} \|u(x_k)\| \leq C \sup_{1\leq k\leq n} \|x_k\|. \tag{2.2}$$

On conclut que si $p = \infty$, l'ensemble $\pi_\infty(E, F)$ sera identique à $\mathcal{L}(E, F)$.
Énonçons maintenant une proposition importante qui fait la liaison entre l'espace $\pi_p(E, F)$ et l'espace $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 2.1.1 *Soit*

$$u : E \longrightarrow F \quad \text{un opérateur linéaire.}$$

Si u est p-sommant, alors u est continu.
Démonstration. Il suffit de prendre le cas $n = 1$ dans (2.1). Soient

$$u \in \pi_p(E, F) \quad \text{et} \quad x \in E.$$

Donc

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \sup_{x^*\in B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle| \tag{2.3}$$

En vertu du Corollaire (1.7.3), on constate que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u)\|x\| \tag{2.4}$$

ce qui exprime la continuité de u sur E. Avec l'inégalité intéressante

$$\|u\| \leq \pi_p(u). \tag{2.5}$$

Proposition 2.1.2 *L'ensemble $\pi_p(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\pi_p(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

1. $\pi_p(E, F)$ est non vide, car pour $u = 0$ (l'opérateur nul) on a :

$$0 \leq C \sup_{x^*\in B_E^*} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p\right)^{1/p}, \quad \forall C > 0. \tag{2.6}$$

2. Soient u et v deux opérateurs p-sommants, où il existe C_1 tel que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{1/p} \leq C_1 \sup_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^p\right)^{1/p} \tag{2.7}$$
et il existe C_2 tel que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|v(x_k)\|^p\right)^{1/p} \leq C_2 \sup_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^p\right)^{1/p} \tag{2.8}$$
Si on applique l'inégalité de Minkowski, on trouve :
$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|(u+v)(x_k)\|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\|v(x_k)\|^p\right)^{1/p}\\ &\leq C\sup_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k,x^*\rangle|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$
par conséquent,
$$u+v\in\pi_p(E,F). \tag{2.9}$$
3. Soient u un opérateur p-sommant et α un réel quelconque, donc il existe C tel que
$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}k(\alpha u)(x_k)^k\right)^{1/p} &= |\alpha|\left(\sum_{k=1}^{n}ku(x_k)^k\right)^{1/p}\\ &\leq |\alpha|C\sup_{x^*\in BE^*}\left(\sum_{k=1}^{n}|hx_k,x^*i|^p\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Par conséquent
$$(\alpha u)\in\pi_p(E,F).$$

Proposition 2.1.3 *π_p est une norme sur l'espace $\pi_p(E,F)$. Démonstration pour tous u et v deux opérateurs p-sommants et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite d'éléments de E, on a :*

1. *$\pi_p(u)\geq 0$ (puisque les constantes C sont positives).*
2. *Si $\pi_p(u)=0$ donc*
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{1/p}=0 \tag{2.11}$$
c'est-à-dire u est nul.
Si l'opérateur nul vérifie (2.1). Alors,
$$0\leq C\sup_{x^*\in B_{E^*}}|\langle x,x^*\rangle| \quad \forall x\in E. \tag{2.12}$$
Il est clair que la borne inférieure des nombres C est 0, donc
$$\pi_p(0)=0.$$

3. *Soit α un réel quelconque, on va montrer que $\pi_p(\alpha u) = |\alpha|\pi_p(u)$.*
   Comme $u \in \pi_p(E,F)$, on a d'après l'inégalité (2.5)

$$\begin{aligned}\pi_p(\alpha u) &= \inf(|\alpha|C)\\ &= |\alpha|\inf C\\ &= |\alpha|\pi_p(u).\end{aligned}$$

4. *Soient u et v deux opérateurs p-sommants, on a d'après l'inégalité (2.4) :*

$$\pi_p(u+v) \leq \pi_p(u) + \pi_p(v). \tag{2.13}$$

Proposition 2.1.4 *$(\pi_p(E,F), \pi_p)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Montrons que si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy de $\pi_p(E,F)$,
alors elle converge dans le même espace.
On a :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists j_0, \quad \forall i > j \geq j_0, \quad \pi_p(u_j - u_i) \leq \varepsilon.$$

Donc, pour toute suite définie $(x_k)_{k=1}^n$ d'éléments de E, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|(u_j)(x_k) - (u_i)(x_k)\|^p\right) \leq \varepsilon^p \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p\right). \tag{2.14}$$

Si $i \longrightarrow +\infty$;

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|(u_j)(x_k) - u(x_k)\|^p\right) \leq \varepsilon^p \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p\right). \ (2.6) \tag{2.15}$$

Et puisque $\pi_p(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$, on trouve $u_j \longrightarrow u$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, et d'après l'inégalité (2.6)

$$u_j \to u \quad \text{dans} \quad \pi_p(E,F).$$

Théorème 2.1.1 ***(Théorème d'Inclusion).*** *Si $1 \leq p < q < \infty$, alors*

$$\pi_p(E,F) \subseteq \pi_q(E,F).$$

En plus

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

Soient

$$(x_k)_{k=1}^n \subset E \quad \text{et} \quad \lambda_k = \|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}} - 1.$$

Donc

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^p = \lambda_k^p \|u(x_k)\|^p = \|u(x_k)\|^q.$$

Par suite,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\|u(\lambda_k x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.16}$$

(2.7)

Si $u \in \pi_p(E,F)$, on aura

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(\lambda_k x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u)\mathrm{sup}_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^p|\langle x_k, x^*\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.17}$$

Moyennant la formule (2.7), on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u)\sup_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^p|\langle x_k, x^*\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.18}$$

Soit d'autre part $\alpha = \dfrac{q}{q-p}$ et $\beta = \dfrac{q}{p}$. Comme

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{q-p}{q}+\frac{p}{q} = 1,$$

on peut appliquer l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{q}{p}} &\leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^p)^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}\frac{1}{p}}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k, x^*\rangle|^{p\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}\frac{1}{p}}\\ &\leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^{n}(\|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1})^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}\sup_{x^*\in B_{E^*}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\langle x_k, x^*\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \pi_p(u)\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|(x_k)\|_{q,w}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

En multipliant les deux membres par

$$\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u)\|(x_k)\|_{q,w}. \qquad (2.8)$$

Donc

$$u \in \pi_q(E,F)$$

et d'après (2.8), on a

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

Théorème 2.1.2 ***(Théorème de Composition)*** *Soit $1 \leq p < \infty$.*

1. *Si* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* $v \in \pi_p(F,G)$*. Alors,*
$$v \circ u \in \pi_p(E,G) \text{ et } \pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(v)\|u\|.$$
2. *Si* $u \in \pi_p(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F,G)$*. Alors,*
$$v \circ u \in \pi_p(E,G) \text{ et } \pi_p(v \circ u) \leq \|v\|\pi_p(u).$$

Démonstration. 1. Supposons que

$$v \in \pi_p(F,G) \text{ et } u \in L(E,F) \text{ et } (x_k)_{k=1}^n \subset E.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n \|(v \circ u)(x_k)\|^p\right)^{1/p} &\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle u(x_k), y^*\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, u^*(y^*)\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \pi_p(v)\|u^*\| \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, \frac{u^*(y^*)}{\|u^*\|}\rangle|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \pi_p(v)\|u^*\| \sup_{y^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{K=1}^n |\langle x_K, x^*\rangle|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

(La formule (1.7)
Donc $v \circ u \in \pi_p(E,G)$ en plus

$$\pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(v)\|u\|.$$

2.Supposons que $u \in \pi_p(E,F)$ et puisque $v \in \mathcal{L}(E,F)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\sum_{k=1}^n \|(v \circ u)(x_k)\|^p)^{1/p} &\leq \|v\|(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p)^{1/p} \\
&\leq \|v\|\pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p)^{1/p}.
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède,on tire que :

$$v \circ u \in \pi_p(E,G) \qquad \pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(u)\|v\|.$$

En vertu du Théorème de Composition, on peut constater les deux propriétés importantes suivantes .

Soient E, E_0, F, F_0 des espaces de Banach.

Proposition 2.1.5 ***(Propriété d'idéal)****. Si*

$$u \in \mathcal{L}(E,F) \qquad et \qquad w \in \mathcal{L}(E_0,F_0)$$

Alors

$$v \in \pi_p(E,F) \Longrightarrow uvw \in \pi_p(E_0,F_0).$$

Proposition 2.1.6 ***(Propriété d'injectivité)*** *Si F est un sous-espace de F_0 et soit l'isométrie*

$$i : F \longrightarrow F_0.$$

Alors,

$$u \in \pi_p(E,F) \Leftrightarrow iu \in \pi_p(E,F_0).$$

De plus,

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u).$$

Démonstration.- Le premier sens est immédiatement tiré d'après la composition et on a :

$$\pi_p(iu) \leq \pi_p(u). \qquad (2.9)$$

- Soit $iu \in \pi_p(E,F_0)$, donc pour toute suite $(x_k)_{k=1}^n \subset E$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(iu)(x_k)\|^p\right)^{1/p} \leq \pi_p(iu) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p\right)^{1/p}. \qquad (2.21)$$

Mais, comme

$$(\textstyle\sum_{k=1}^n \|(iu)(x_k)\|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p)^{1/p},$$

Donc

$$(\textstyle\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p)^{1/p} \leq \pi_p(iu) \sup\limits_{x^* \in B_{E^*}} (\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^*\rangle|^p)^{1/p},$$

c'est-à-dire

$$u \in \pi_p(E,F).$$

De plus, on a :

$$\pi_p(u) \leq \pi_p(iu). \qquad (2.10)$$

En vertu de (2.10) et (2.9), on trouve

$$\pi_p(iu) = \pi_p(u).$$

2.2 Exemples

Illustrons les opérateurs p-sommants par des exemples. Soient K un compact et la fonctionnelle δ_k définit, pour tout $k \in K$, par :

$$\begin{aligned} \delta_k : C(K) &\longrightarrow K, \\ f &\longrightarrow \langle \delta_k, f\rangle = f(k) \end{aligned}$$

On remarque que $\delta_k \in C(K)^*$. Soit μ une mesure de probabilité sur K et $1 \leq p < \infty$.

1. L'opérateur suivant constitue un exemple de base pour les opérateurs p-sommants. Soit, pour toute fonction $\varphi \in L_p(K,\mu)$, l'opérateur de multiplication suivant :

$$\begin{aligned} M_\phi : C(K) &\longrightarrow L_p(K,\mu), \\ f &\longrightarrow M_\varphi(f) = f\varphi \end{aligned}$$

Cet opérateur est p-sommant, avec

$$\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p.$$

En effet, soit $(f_k)_{n=1}^n \in C(K)$, on a

$$\begin{aligned} \|\big(M_\varphi(f_k)\big)_{k=1}^n\|_p &= \left(\sum_{k=1}^n \|M_\varphi(f_k)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\varphi\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\sum_{k=1}^n \int_K |\varphi(t)|^p |f_k(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big(\int_K \sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_K \sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k\rangle|^p |\varphi(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{t\in K}\Big(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_K |\varphi(t)|^p d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi\|_p \sup_{\delta_t \in C(K)^*} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \delta_t, f_k\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\varphi\|_p \|(f_k)_{k=1}^n\|_{p,w}. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur en question est p-sommant, et on a

$$\pi_p(M\varphi) \leq \|\varphi\|_p.$$

mais, d'après l'inégalité (2.3), on a :

$$\varpi_p(M\varphi) \geq \|M\varphi\|_p \geq \|\varphi\|_p.$$

Par conséquent

$$\pi_p(M\varphi) = \|\varphi\|_p.$$

2. [9, p. 270] Comme cas particulier, l'opérateur

$$\begin{aligned} J_p : C(K) &\longrightarrow L_p(K,\mu) \\ f &\longrightarrow J_p(f) = f \end{aligned}$$

est p-sommant et de plus

$$\pi_p(J_p) = 1.$$

En effet, il suffit de prendre $\varphi = 1$ dans l'exemple précédent.

3. L'opérateur d'inclusion suivant

$$\begin{aligned} i_p : L_\infty(K,\mu) &\longrightarrow L_p(K,\mu) \\ f &\longrightarrow i_p(f) = f \end{aligned}$$

est p-sommant et on a :

$$\pi_p(i_p) = 1.$$

En effet, en utilisant le fait que $L_\infty(\mu)$ peut être regardé comme étant $C(K)$, voir [1, p. 13].

2.3 Théorèmes de Domination et Factorisation de Pietsch

Le théorème suivant caractérise les opérateurs p-sommants dus à Pietsch.
On rappelle qu'une mesure de probabilité sur un espace compact K est une mesure positive de Radon $\mu \in C(K)^*$ telle que $\mu(K) = 1$.

Théorème 2.3.1 ***(Théorème de Domination de Pietsch)***. *Soient*

$$1 \le p < \infty \qquad et \qquad u \in L(E,F).$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est absolument p-sommant.

2. Il existe une mesure de probabilité μ sur B_{E^*} et une constante $C > 0$ telles que :

$$\|(ux)\| \le C \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^p d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} ; \qquad \forall x \in E.$$

$1 \Rightarrow 2)$ Soient

$$u \in \pi_p(E,F) \text{ et } \pi_p(u) = 1.$$

On considère les deux sous-ensembles suivants de $C(B_{E^*})$ (l'espace des fonctions faible-$*$ continues sur B_{E^*}) :

$$S_1 = \{f \in C(B_{E^*});\ \sup_{x^* \in B_{E^*}} f(x^*) < 1\}\,;$$

et

$$S_2 = \text{conv}\{f \in C(B_{E^*}); \quad f(x^*) = |\langle x, x^* \rangle|^p, \qquad \|u(x)\| = 1\}.$$

Montrons que S_1 est convexe. Soient

$$f_1, f_2 \in S_1 \qquad \text{et} \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\sup_{x^*\in B_{E^*}} \{\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2\}(x^*) &\leq \alpha \sup_{x^*\in B_{E^*}} f_1(x^*) + (1-\alpha) \sup_{x^*\in B_{E^*}} f_2(x^*)\\ &< \alpha + 1 - \alpha\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc, S_1 est convexe, de plus il est ouvert.
Soit, d'autre part $f \in S_2$, donc il existe une suite $(x_k)_{k=1}^n \in E$ et des scalaires positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ avec

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \text{ et } \|u(x_k)\| = 1\,; \qquad \text{pour tout} \qquad k = 1, ..., n$$

tels que

$$f(x^*) = \textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_k |\langle x_k, x^*\rangle|^p \qquad \text{(en vertu de la convexité).}$$

donc

$$\begin{aligned}\sup_{x^*\in B_{E^*}} f(x^*) &= \sup_{x^*\in B_{E^*}} \sum_{k=1}^n \lambda_k |\langle x_k, x^*\rangle|^p\\ &= \sup_{x^*\in B_{E^*}} \sum_{k=1}^n |\langle \lambda_k^{\frac{1}{p}} x_k, x^*\rangle|^p\\ &\leq 1. \sum_{k=1}^n \langle u(\lambda_k^{\frac{1}{p}} x_n)\rangle^p\\ \big(\, d'aprs\ la\ formule\ (2.1)\big) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \, \|u(x_n)\|^p\\ &= 1.\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction f n'appartient pas à S_1, ce qui fait que les deux sous-ensembles S_1 et S_2 sont disjoints. Par l'application du Théorème de Hahn-Banach (1.7.2), il vient qu'il existe $\lambda > 0$ et une mesure de Radon μ surB_{E^*}telles que :

$$\int_{B_{E^*}} f(x^*) d\mu(x^*) \leq \lambda; \quad \forall f \in S_1 \quad et \quad \int_{B_{E^*}} f(x^*) d\mu(x^*) \geq \lambda; \quad \forall f \in S_2.$$

Comme d'une part, S_1 contient toutes les fonctions négatives, la mesure μ doit être positive, ce qui nous permet d'assurer qu'elle est une mesure de probabilité.
D'autre part, S_1 contient la boule unité ouverte de $C(BE^*)$, donc...

$$\int_{B_{E^*}} f(x^*) d\mu(x^*) \leq \sup_{x^*\in B_{E^*}} f(x^*) < 1 \quad \forall f \in S_1.$$

par conséquence $\lambda \geq 1$.
D'après ce qui précède, on peut dire que si $x \in E$ et $\|u(x)\| = 1$.

$$\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^p d\mu(x^*) \geq 1 = \|u(x)\|^p.$$

ce qui entraîne (2.11).
$2 \Rightarrow 1)$ Soit $(x_k)_{k=1}^n \subset E,$ donc

$$\|u(x_k)\| \leq C\left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}}; \quad \forall k = 1, ..., n.$$

Ce qui entraîne

$$\|u(x_k)\|^p \leq C^p\left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\right); \quad \forall k = 1, ..., n.$$

Par sommation des membres de la suite, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p \leq C^p \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\right).$$

et puisque la somme est finie

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p \quad & \leq C^p \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\right) \\
& \leq C^p \int_{B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\right) \\
& \leq C^p \sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p \int_{B_{E^*}} d\mu(x^*) \\
& \leq C^p \sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p \mu(B_{E^*}) \\
& \leq C^p \sup_{x^* \in E^*} \sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p.
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad & \leq C \left(\sup_{x^* \in E^*} sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
& = C \sup_{x^* \in E^*} \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x_k, x^*\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

ce qui implique que u est p-sommant.

Lemme 2.3.1 *Soient* (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré, tel que*

$$\mu(\Omega) < \infty \qquad et \qquad 1 < p < q < \infty.$$

1. Si $f \in L_q(\mu)$*. Alors,*

$$f \in L_p(\mu) \qquad et \qquad ||f||_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} ||f||_q. \tag{2.12}$$

2. Si $f \in L_\infty(\mu)$*. Alors,*

$$f \in L_p(\mu) \qquad et \qquad ||f||_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty.$$

Démonstration. [9, p. 54]
Soit $r = \frac{q}{q-p}$ et puisque

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1.$$

1. Par l'application de l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned}
||f||_p &= \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega 1 \cdot |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega (1)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f|^{\frac{q}{p} . P} d\mu \right)^{\frac{p}{q} q . \frac{1}{p}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{rp}} \left(\int_\Omega |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} ||f||_q.
\end{aligned}$$

2. Si on pose $q = \infty$, il découle

$$||f||_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty.$$

D'où le résultat.

Remarque 2.3.1 *Par la suite on va donner une deuxième démonstration du Théorème d'Inclusion en basant sur le Théorème de Pietsch et le lemme précédent.*
Soient $u \in \pi_p(E, F)$ et $1 \leq p < q < \infty$ donc

$$||u(x)|| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^q d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^q d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent $u \in \pi_p(E, F)$, et de plus

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$$

Citons quelques conséquences du Théorème de Domination de Pietsch.

Théorème 2.3.2 ***(Théorème de Factorisation)***. *Soient l'injection isométrique*

$$i : E \longrightarrow C(B_{E^*})$$

$$x \longrightarrow i(x) = \langle x, x^* \rangle$$

et l'application identique

$$j_p : C(B_{E^*}) \longrightarrow L_p(B_{E^*}, \mu)$$

avec μ une mesure de probabilité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$u \in \pi_p(E, F)$.*

2. Il existe une mesure de probabilité sur B_{E^*} et une application bornée

$$\overline{(j_p \circ i)(E)} = G \longrightarrow F$$

telle que

$$w \circ j_p \circ i = u.$$

Dans ce cas, w est choisie telle que $\|w\| = \pi_p(u)$.

Le diagramme de cette factorisation est illustré par la figure (2.1).

Démonstration.[7,p. 279]

$1 \Rightarrow 2$) Soit $u \in \pi_p(E,F)$, on doit démontrer l'existence de l'application w définie ci-dessus.

$$\text{Soit } x, y \in E, \quad \text{tel que} \quad j_p \circ i(x) = j_p \circ i(y) = f \in (j_p \circ i(E))$$

donc

$$\begin{aligned}
\|u(x) - u(y)\| &= \|u(x-y)\| \\
\text{(Théorème de Pietsch (2.4.1))} &\leq \pi_p(u)\Big(\int_{B_{E^*}} |\langle x-y, x^*\rangle|^p d\mu(x^*)\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(u)\Big(\int_{B_{E^*}} |j_p \circ i(x-y)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p(u)\|j_p \circ i(x) - j_p \circ i(y)\|_p \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Alors, on peut définir l'application w de $\overline{j_p \circ i(E)}$ dans F par :

$$w(f) = u(x)$$

et on a

$$u = w \circ j_p \circ i \quad \text{et} \quad \|w(f)\|_F \leq \pi_p(u)\|f\|_p. \qquad (2.13)$$

Il vient de la dernière inégalité que l'application w est bornée.

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\quad T \quad} & F \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle w} \\
i(E) & \xrightarrow{\quad j_p \quad} & G \\
\cap & & \cap \\
C(B_{E*}) & \xrightarrow{j_p} & L_p(B_{E^*}, \mu)
\end{array}$$

FIGURE 2.1 – Diagramme de factorisation d'un opérateur p-sommant

$2 \Rightarrow 1$) On suppose qu'il existe une mesure μ de probabilité sur B_{E^*} et une application w telle que

$$u = w \circ j_p \circ i.$$

Mais, comme on a démontré que

$$j_p \in \pi_p(C(B_{E^*}), L_p(B_{E^*}, \mu)) \quad \text{et} \quad \pi_p(j_p) = 1,$$

il vient de la propriété d'idéal des opérateurs p-sommants que

$$u \in \pi_p(E,F) \quad \text{et} \quad \pi_p(u) \leq \|w\|. \quad (2.14)$$

D'après les inégalités (2.13) et (2.14), il découle que

$$\|w\| = \pi_p(u).$$

Remarque 2.3.2 *À l'aide du diagramme illustré par la figure (2.2), on peut décomposer un opérateur p-sommant autrement :*

$$i_F \circ u = ub \circ i_p \circ v.$$

avec

$$l_\infty^{B_{F^*}} = \{f : B_{F^*} \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \textit{tel que} \qquad \sup_{x^* \in B_{F^*}} f(x^*)| < \infty\},$$

et

$$v = j_\infty \circ i \quad \textit{et} \quad \|v\| = 1 \quad \textit{et} \quad \pi_p(u) = \|ub\|. \quad (2.15)$$

Le Théorème de Composition.(2.2.2) Fait la composition des opérateurs p - sommants et les opérateurs bornés. La Proposition suivante établit la composition des opérateurs p - sommants et q - sommants.

Proposition 2.3.1 *Soient* $1 \leq p, q < \infty$ *et* $u \in \pi_p(E,F)$ *et* $v \in \pi_q(F,G)$ *et*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

1. *Si* $s \geq 1$. *Alors,*

$$v \circ u \in \pi_s(E,G) \qquad \textit{et} \qquad \pi_s(v \circ u) \leq \pi_q(v)\pi_p(u).$$

2. *Si* $s \leq 1$. *Alors,*

$$v \circ u \in \pi_1(E,G) \quad \textit{et} \quad \pi_1(v \circ u) \leq \pi_q(v)\pi_p(u).$$

Démonstration.] 14 p. 101-102]

1. Si $s \geq 1$.
   Comme $u \in \pi_p(E,F)$, donc il existe d'après le Théorème de Factorisation (2.4.2), une application bornée w sur $G = \overline{(j_p \circ i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu)$,

telle que

$$u = w \circ j_p \circ i.$$

Soit $y^* \in F^*$, donc

$$y^* \circ w : \overline{(j_p \circ i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

cette application est continue. Moyennant le Corollaire (1.7.1) du Théorème de Hahn-Banach, on constate qu'on peut prolonger cette application sur tout l'espace $L_p(B_{E^*}, \mu)$ par une application continue g et telle que :

$$\|g\|_p^* = \|y^* \circ w\|_p^* \leq \pi_p(u)\|y^*\|. \qquad (2.16)$$

Remarquons d'une part que

$$g \in L_{p^*}(B_{E^*}, \mu),$$

et d'autre part

$$w^* : F^* \longrightarrow \subset L_{p^*}(B_{E^*}, \mu),$$

$$y^* \longrightarrow w^*(y^*) = g.$$

On peut conclure que

$$\begin{aligned} \langle u(x), y* \rangle &= \langle (w \circ j_p \circ i)(x), y^* \rangle \\ &= \langle (j_p \circ i)(x), w^*(y^*) \rangle \\ &= \int_B \langle x, x* \rangle \, g(x) d\mu(x^*) \qquad \forall x \in E \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Remarquons que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1 \qquad (2.23)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{p^*}{s^*} + \frac{p^*}{q} &= \frac{\frac{p^*}{p-1}}{\frac{p-1}{r-1}} + \frac{\frac{p}{p-1}}{q} \\ &= \frac{p(s-1)}{s(p-1)} + \frac{p}{q(p-1)} \\ &= \frac{p^*}{s(p-1)} - \frac{p}{s(p-1)} + \frac{p}{s(p-1)} - \frac{1}{p-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

En se basant sur l'inégalité de Hölder, l'inégalité (2.17) implique :

$$
\begin{aligned}
|\langle u(x), y^*\rangle| &\leq \int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{\frac{s}{p}} \, |\langle x, x^*\rangle|^{\frac{s}{q}} \, |g(x^*)| \, d\mu(x^*) \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{s} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{s}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{\frac{sp^*}{q}} \, |g(x^*)|^{p^*} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{s} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{\frac{sp^*}{q}} \, |g(x^*)|^{\frac{|p^*|^2}{q}} \, |g(x^*)|^{\frac{|p^*|^2}{s^*}} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{s} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^*\rangle|^{s} \, |g(x^*)|^{p^*} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{q}} \times \\
&\times \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} \, d\mu(x^*)\right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Chapitre 3

Applications

3.1 Lien avec Les opérateurs de Hilbert-Schmidt

[3] La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt présente une des plus importantes classes d'opérateurs. Faisons par la suite le lien qui la relie avec les opérateurs p-sommants. On désigne par H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $1 \leq p < \infty$.

Pour commencer citons quelques préliminaires sur ces opérateurs.

Définition 3.1.1 (13, p. 67) *On appelle opérateur de Hilbert-Schmidt tout opérateur $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ qui vérifie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(e_n)\|^2 < \infty$$

où $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ est une base ortho normée de H_1.
La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt est notée $HS(H_1, H_2)$.

Remarque 3.1.1 (16,p.67) *La définition précédente ne dépend pas du choix de la base de H_1. En effet, soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une autre base orthonormée de H_1, donc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(f_n)\|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle u(f_n), e_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|u^*(e_m)\|^2,$$

et on a, en vertu de la formule (1.7)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|u^*(e_m)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|u(e_m)\|^2,$$

ce qui entraîne le résultat.
Le théorème suivant caractérise les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Théorème 3.1.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un opérateur de Hilbert-Schmidt.*
2. *Il existe un système orthonormé complet $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ de H_1, tel qu'on a*

$$||u||_{HS} < \infty.$$

3. *Pour tout système orthonormé complet$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de H_1, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^2 = \|u\|_{HS}^2 < \infty.$$

4. *Pour tous systèmes orthonormés complets* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *de* H_1, *et* $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ *de* H_2, *on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle u(e_n), f_m\rangle|^2 = \|u\|_{HS}^2 < \infty.$$

5. u^* *est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et on a*

$$\|u^*\|_{HS} = \|u\|_{HS}.$$

Exposons quelques propriétés intéressantes des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

1. .[8, p. 84] La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt forme un espace de Hilbert, où le produit scalaire est donné par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle u(e_n), v(e_n)\rangle.$$

et la norme associée est

$$\|u\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|u(e_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

2. La classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt vérifie la propriété d'idéal.
En effet,
Soient $u \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$ et $v \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ et $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans H_1.
On a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|v \circ u(e_n)\|^2 \leq \|v\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\|u(e_n)\|^2 = \|v\|^2\|u\|_{HS}^2 < \infty.$$

donc, $v \circ u \in \mathrm{HS}(H_1, H_3)$ et de plus

$$\|v \circ u\|_{HS} \leq \|v\|\|u\|_{HS}$$

.

Soient $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $v \in HS(H_2, H_3)$ et (n) une base orthonormée dans H_1. Pour montrer que $v \circ u \in HS(H_1, H_3)$, il suffit d'après l'assertion 5 du théorème (3.3.1), de montrer que

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^* \in HS(H_3, H_1).$$

On a, d'après la formule (3.6)

$$v^* \in HS(H_3, H_2)$$

et, on sait que

$$u^* \in L(H_2, H_1)$$

donc, et d'après ce qui précède, on tire que

$$u^* \circ v^* \in HS(H_3, H_1)$$

ce qui fait le résultat. De plus, on a

$$\|v \circ u\|_{HS} \leq \|u\|\|v\|_{HS}.$$

Lemme 3.1.1 *Soient* (e_n) *une base orthonormée de* H_1 *et* $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$*. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in HS(H_1, H_2)$.
2. $\sum_{i \in J(fini)} \|u(e_i)\|^2 \leq \infty$.

Le théorème important suivant établit le lien entre les opérateurs p-sommants et les opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Théorème 3.1.2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$*. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur* u *est de Hilbert-Schmidt.*
2. *L'opérateur* u *est* 2*-sommant.*

Dans ce cas, on a :

$$\pi_2(u) = \|u\|_{HS}.$$

Démonstration.[1,p, 35]
$(1 \Rightarrow 2)$ Soient $u \in HS(H_1, H_2)$, $(e_n)_n = 1^\infty$ un système orthonormé de H_1 et $(x_n) \in \ell_2, w(H_1)$. On définit l'opérateur v par :

$$v : \ell^2 \longrightarrow H_1$$

Tell que

$$v\left(\sum_n \alpha_n e_n\right) = \sum_n \alpha_n x_n \qquad \text{pour}(\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$$

, c'est-à-dire

$$v(e_n) = x_n \quad \forall n \geq 1.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \| v \| &= \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} \sup_{x^* \in B_{H_1}} \left| \left\langle x^*, \sum_n \alpha_n x_n \right\rangle \right| \\ &= \sup_{x^* \in B_{H_1}} \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} \left| \left\langle x^*, \sum_n \alpha_n x_n \right\rangle \right| \\ &= \sup_{x^* \in B_{H_1}} \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} \left| \sum_n \alpha_n \langle x^*, x_n \rangle \right| \\ &= \sup_{x^* \in B_{H_1}} \sup_{\|(\alpha_n)\|_2 \leq 1} \left(\sum_n \alpha_n \langle x^*, x_n \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \left(\sum_n \| u(x_n) \|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_n \| u \circ v(e_n) \|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \| u \circ v \|_{HS} \\ \text{d'après la propriété d'idéal } &\leq \| u \|_{HS} \| v \| \\ &= \| u \|_{HS} \sup_{x^* \in B_{H_1}} \left(\sum_n |\langle x^*, x_n \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ce qui signifie que $u \in \pi_2(H_1, H_2)$ et on a

$$\pi_2(u) \leq \|u\|_{HS}.$$

$(2 \Rightarrow 1)$ Soient $u \in \pi_2(H_1, H_2)$ et (e_n) un système orthonormé de $H1$. On a pour J fini :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\in J} \| u(e_n) \|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \pi_2(u) \sup_{x^*\in B_{H_1}} \left(\sum_{n\in J} |\langle e_n, x^*\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \pi_2(u) \| (e_n)_{n\in J} \|_{2,w} \\ &= \pi_2(u)\end{aligned} \tag{3.3}$$

donc $u \in HS(H_1, H_2)$, on a :

$$\|u\|_{HS} \leq \pi_2(u).$$

Il résulte de que

$$\pi_2(u) = \|u\|_{HS}.$$

3.2 Opérateurs sous-Linéaires p-sommant

[5] Dans ce chapitre, on va présenté le travaile M.T.Bl,les auteur ont été généraliser la notion d'opérateurs p-sommants introduite par Pietsch aux opérateurs sous-linéaires et donner son célèbre théorème de factorisation avec quelques propriétés fondamentales.

Proposition 3.2.1 *Soit X, Y, Z trois espaces de Banach dont Y réticulé, C une constante positive et $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire borné. Soit $v : X \to Z$ un opérateur linéaire borné injectif tel que $T(x) \leq Cv(x)$. Alors, il existe $T : v(x)Y \tilde{\to}$ sous-linéaire tel que :*

$$T = \tilde{T}Ov \quad et \quad \|\tilde{T}\| \leq C.$$

Preuve 3 *On pose : $\tilde{T}(z) = T(v^{-1}(z))$. Cette application est bien définie car le noyau de v est inclus dans celui de T (d'après l'hypothèse $v(x) = 0 \Rightarrow T(x) = 0$). $\tilde{T}$ est sous-linéaire. En effet, soient z_1, z_2 dans $v(X)$; x_1, x_2 dans X tels que $v(x_1) = z_1, v(x_2) = z_2 et \lambda \geq 0$*

$$\begin{aligned}\tilde{T}(z_1 + z_2) &= T(\nu^{-1}(z_1 + z_2)), \\ &= T(x_1 + x_2), \\ &\leq T(x_1) + T(x_2), \\ &\leq T(\nu^{-1}(z_1)) + T(\nu^{-1}(z_2)) \\ &\leq T(z_1) + T(z_2)\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\lambda z_1) &= \tilde{T}(\lambda\nu(x_1)), \\ &= T\nu^{-1}(\lambda\nu(x_1)), \\ &= \lambda T(x_1), \\ &= \lambda T(\nu^{-1}(z_1)) \\ &= \lambda\tilde{T}(z_1)\end{aligned} \tag{3.5}$$

$\|\tilde{T}\| \leq C$ évident.

Définition 3.2.1 *Soit X, Y deux Banach dont Y réticulé et $T \in SB(X,Y)$. On dira que T est p-sommant pour $0 < p < \infty$ si :*

$$\begin{cases} \exists C > 0, \textit{tel que} \forall n \in N, \forall \{x_1, ..., x_n\} \subset X \\ \\ (\sum_1^n \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_1^n |< x_i, \xi >|^p)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

On note par $\pi_p(X,Y) = \{T : X \to Y$ sous-linéaires p-sommants$\}$ et $\pi_p(T) = \inf\{C$, vérifiant la définition 2.2$\}$.

Remarque 3.2.1 *i) Si $p \geq 1$, $\pi_p(.)$ est une norme sur $\pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(X,Y)$ muni de cette norme est espace de Banach.*

ii) Soit $T \in \pi_p(X,Y)$, $v : E \to X$ linéaire continu et $w : Y \to F$ linéaire continu positif (E et F deux Banach quelconques dont F réticulé). Alors :
wTv est p-sommant e $\pi_p(wTv) \leq \|w\| \pi_p(T) \|v\|$

La factorisation proprement dite. L'inégalité de Pietsch implique d'après la proposition 2.1 qu'il existe $T \in BS(S,Y)_p$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\ S & \xrightarrow{j/S} & S_p \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{j} & L_p(K,\lambda) \end{array}$$

avec : $Tj/Si\tilde{T} = \pi_p$. Où : $K(B, \sigma(X^*, X))$

Ensemble des fonctions continues $C(K)$:

$$C(K) = \{\text{des fonctions continues } K\}$$

$$\{x_i : X \to S, i\} \quad x = \varphi \text{ qui est une isométrie injective.}$$

$S = \{\varphi_x, x \in X$ avec $\varphi_x(\xi) = \langle x, \xi \rangle\}$ qui est un sous-espace fermé de $C(K)$.
$j : C(K) \to L(K,\lambda)_p$ est l'injection naturelle, et $\pi_p(j) = 1$ (j/S est j restreint à S).

$$S_p = \overline{j(S)}^{L_p(K,\lambda)}.$$

Comme conséquence on a :

$$\pi_p(X,Y) \subseteq (X,Y)_p \quad \text{et} \quad \forall T \in \pi_p(X,Y), \pi_q(T) \leq \pi_p(T) \quad \text{où} \quad 0 < p < q < \infty.$$

Corollaire 3.2.1 *Si T est 2-sommant alors T se factorise par $L_\infty(K,\lambda)$ et $L_2(K,\lambda)$.*

Preuve 4 Reprenons le diagramme de la remarque 2.5 pour $p = 2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & Y \\
S \arrow[r, "j/S"] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & S_p \arrow[u, "\tilde{T}"'] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] \\
L_\infty(K,\lambda) \arrow[r, "j"] & L_p(K,\lambda)
\end{tikzcd}$$

p est la projection de $L_2(K, \lambda)$ dans S_2 de norme ≤ 1.
Le théorème suivant est l'analogue du théorème de Nachbin dans le cas linéaire.

Théorème 3.2.1 *Soit un sous-espace d'un Banach X, $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré $T : X_0 \to L_\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et un opérateur sous-linéaire continu. Alors il existe $\tilde{T} : X \to L_\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ sous-linéaire continu prolongeant T,$(i.e.\tilde{T}|X_0 = T) et \|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.*

Preuve 5 *Soit $u \in \nabla T$. D'après le théorème de Nachbin il existe $\tilde{u} : X \to L_\infty(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$ et $\tilde{u}|X_0 = u$.*
Posons :

$$\tilde{T} = \sup\{\tilde{u} : \|\tilde{u}\| \leq \|u\|.\tilde{u}|X_0, u et u \in \nabla T\}.$$

Alors $\tilde{T}$ est sous-linéaire continu. En effet, pour tout x dans X :

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{T}(x)\right| &= \sup_{u\in\nabla T} \|\tilde{u}(x)\| \\
&\leq \sup_{u\in\nabla T} \|\tilde{u}\|\|x\| \\
&\leq \sup_{u\in\nabla T} \|u\|\|x\| \\
&\leq \|T\| \, \|x\|
\end{aligned}$$

$\forall x \in X_0, \tilde{T}(x) = \sup_{u\in\nabla T} \tilde{u}(x) = \sup_{u\in\nabla T} \tilde{u}(x) = T(x).$

Proposition 3.2.2 *Soit X_0 un sous espace d'un Banach X et $T \in \pi_2(X_0, Y)$.*
Alors il existe une extension sous-linéaire de T, soit $\tilde{T} : X \to Y$, 2-sommant et $\pi_2(\tilde{T}) \leq \pi_2(T)$.

Preuve 6 *D'après le corollaire 2.6, T se factorise par $L_\infty(K, \lambda)$ et $L_2(K\lambda)$ et par le*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrd, bend left, "\tilde{T}"] \arrow[rdd, bend right, "\tilde{i}"'] \arrow[rd, phantom, "\supset"] & & \\
& X_0 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "i"'] & Y \\
& L_\infty(K,\lambda) \arrow[r, "j"] & L_2(K,\lambda) \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.1 – Extension sous-linéaire de T

théorème 3.2.1, i se prolonge en $\tilde{i} : X \to L_\infty(K, \lambda)$ avec $\|\tilde{i}\| \leq 1$ et $\|B\| \leq \pi_2(T)$.

On pose $\tilde{T} = Bj\tilde{i}$. Alors on aura $\pi_2(\tilde{T}) \leq \|B\|\pi_2(j)\|\tilde{i}\| \leq \pi_2(T)$.

RESULTAT PRINCIPAL

Dans ce paragraphe, on étudie le problème relationnel entre les opérateurs sous-linéaires p-sommant de X espace de Banach dans Y espace de Banach complètement réticulé et les opérateurs linéaires inférieurs ou égaux à T. C'est une tentation logique de généralisation du corollaire 1.8 pour $p \neq \infty$. Ce qui fait le résultat principal de ce papier.

Proposition 3.2.3 *Soit X, Y deux espaces de Banach dont Y complètement réticulé et $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire continu.*
Si $T \in \pi_p$, alors : $u \in \nabla T$, $u \in\in \pi_p(X, Y)$.

Preuve 7 Puisque T est p-sommant, donc d'après le théorème 2.4 il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}), \sigma(X^*, X))$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad \|u(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B^*_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

D'après le théorème 1.7 on a pour tout x dans X et tout u dans ∇T :

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq sup\{\|T(x)\|, \|T(-x)\|\} \\ &\leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{Y^*}} | < x, \xi > \Big|^p d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

D'où : $\quad u \in \nabla T, \quad u \in \pi_p(X, Y).$

Le résultat essentiel de ce travail est d'établir la réciproque de la proposition 3.1. Malheureusement nous n'y sommes pas arrivés dans le cas général même pour des espaces bien particuliers (voir par exemple la question 2).

Mais sous certaines conditions, on arrive à montrer la réciproque, ce que nous allons voir dans le théorème 3.2 qui constitue le résultat essentiel de ce papier.

Théorème 3.2.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach dont Y complètement réticulé et $T : X \to Y$ un opérateur sous-linéaire continu. Supposons qu'il existe $C > 0$ et un filtre d'opérateurs $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq \nabla T$ tels que :*

$$\forall i \in I, \pi_p(u_i) \leq C \quad et$$

$$\forall x \in X, \|u(x)_i\| \underset{i}{\longrightarrow} \|T(x)\|$$

.

$$Alors : \quad T \in \pi_p(X, Y) \quad et \quad \pi_p(T) \leq C.$$

Preuve 8 Puisque u_i est p-sommant, donc il existe une probabilité λ_i sur B_{X^*} telle que .

$$\forall x \in X, \quad \|T(x)\| \leq C \left(\int_{B^*_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.7}$$

Comme on a pour tout x dans X : $\|u_i(x)\| \underset{i}{\longrightarrow} \|T(x)\|$

donc :

$$\forall x \in X, \quad \|T(x)\| \leq \lim_i C \left(\int_{B^*_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.8}$$

La boule unitéB_{X^*} est faiblement compacte donc λ_i converge faiblement vers une probabilité λ sur B_{X^*} et par conséquent :

$$\forall x \in X, \quad \|T(x)\| \leq C \left(\int_{B^*_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle|^p \, d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.9}$$

Ce qui entraîne : $\pi_p(T) \leq C.$

$$\| \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \| = \begin{cases} \left(\sum |\alpha_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si} \quad 0 < p \leq \infty \\ \\ \sup |\alpha_n|, & \text{si} \quad p = \infty \end{cases} \tag{3.10}$$

3.3 Opérateurs sous linéaires positifs de Cohen p-nucléaires

[4] Pour conclure cette section, nous rappelons la définition des opérateurs sous linéaires p-sommés positifs, qui a été énoncée pour la première fois dans le cas linéaire par Blasco dans [7].

Définition 3.3.1 *Soit $T : X \longrightarrow F$, F est un opérateur sous linéaire positif. Nous dirons que T est "p-summation" $(1 < p < +\infty)$ (nous écrivons $T \in S\Pi^p(X,F)$), s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_1, \ldots, x_n \in X$, on a*

$$\|(T(x_i))\|_{\ell_p^n(F)} \leq C \, \|(x_i)\|_{\ell_p^{n a \nu}(X)}. \quad (4.2)$$

Nous mettons $\pi_p^+(T) = \inf C$ en vérifiant l'inégalité (4.2).

Nous introduisons l'extension suivante de la classe des opérateurs de Cohen p-nucléaires. Nous donnons le théorème de domination pour une telle catégorie.

Définition 3.3.2 *Soit $1 < p < \infty$. Un opérateur sous-linéaire positif T entre X et F est p-nucléaire s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n$ dans X, $y_1, \ldots, y_n$ dans F^+, nous avons :*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| \leq C \sup_{x^* \in B^+_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i|(x^*))^p \, d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ \times \sup_{y^{**} \in B^+_{F^{**}}} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} \, d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous désignons par $n_p^+(T)$ la plus petite constante C qui a vérifié l'inégalité (I), appelée norme p-nucléaire sur $SN_p^+(X,F)$, l'espace de Banach de tous les opérateurs sublinéaires positifs p-nucléaires. Si $p = 1$, nous obtenons le Banach l'espace de tous les opérateurs sublinéaires positifs à 1 *sommation.*

Définition 3.3.3 ***(Théorème de composition)**. Soit X un espace de Banach, E et F deux réseaux de Banach. Soit $T \in SB^+(X,E)$, u un opérateur positif en $L(E,F)$ et v en $L(Y,X)$.*

1. *Si T est Cohen p-nucléaire, alors uT est opérateur sublinéaire positif p-nucléaire et $n_p^+(uT) \leq \|u\| n_p^+(T)$.*
2. *Si T est Cohen p-nucléaire, alors Tv est p-nucléaire positif opérateur sublinéaire et $n_p^+(Tv) \leq \|v\| n_p^+(T)$.*

Théorème 3.3.1 *Un opérateur sous-linéaire positif entre X, F est p-somme $(1 < p < +\infty)$, si, et seulement si, il existe une constante positive $C > 0$ et une probabilité de Borel μ sur B_X^+ tel que*

$$\| T(x) \| \leq \pi_p^+(T) \left(\int_{B_E^+} (|x|(x^*))^p \, d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}$$

pour chaque $x \in X$.

En outre, dans ce cas $n_p^+(T) = \inf\{C > 0 : \text{pour tous les} \, C \, \text{vérifiant l'inégalité} \, (4.3)\}$.

Preuve 9 Il est similaire au cas linéaire (voir [7]).

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *Soit T un opérateur sous-linéaire positif borné de X à F. Puis les deux propriétés suivantes sont équivalent.*

1. *L'opérateur T est dans $SN_p^+(X, F)$.*
2. *Il y a un certain espace Banach Z, un opérateur sous-linéaire positif de p-somme $u : X$ à*

Preuve 10 1) $\Rightarrow$)

2) On considère l'opérateur $au_0 : x \in X$

, on remarque que $k_{TX} \subseteq C_{\kappa u_0}(x)$, pour tout $x \in X$, Soit Z un sous-espace fermé de $L_p(\mu)$ tel que $Z = \mathrm{au}_0(X)$, et soit $u : X$. Remarquez qu'u est un opérateur sous-linéaire p-summing positif de X dans Z avec $\pi_p^+(u) \leq 1$.
On écrit T écrire vu,$\forall v \in \mathbb{Z}, F)$. Si $y \in F^+$, alors

$$\begin{aligned}
\|v^*(y^*)\| = &\quad \sup\{|\langle u(x), v^*(y^*)\rangle|\} : \|u(x)\|_p \leq 1 \\
= &\quad \sup|\langle T(x), y^*\rangle| : \int_{B_{X^*}^+} |\langle x^*, |x|\rangle|^p \, d\mu(x^*) \leq 1 \\
\leq &\quad C \left(\int_{B_{F^{**}}^+} |\langle y^{**}, y^*\rangle|^{p^*} d\lambda(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Par le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs de sommation p positifs, $v \in \Pi_p^+(F, Z)$ et $\pi_p^+(v) \subset C$. Ceci implique que v est un opérateur positif fortement p-Sommants.
2) =) 1) C'est claire

Le résultat principal de cette section est l'extension suivante du théorème de domination de Pietsch à cette classe d'opérateurs. opérateurs. Pour le prouver, nous utiliserons le théorème 4.5. Dans [6], Achour et al. a utilisé le lemme de Ky Fan pour prouver le théorème de domination. théorème de domination.

Théorème 3.3.3 *Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *$T : X \longrightarrow F$ est un opérateur sous-linéaire de Cohen p-nucléaire positif et $n_p^+(T) \leq C$.*
2. *Il existe une constante $C \geq 0$ et deux mesures de Radon positives, l'une sur $B_{X^*}^+$ et l'autre sur $B_{F^{**}}^+$, de telle sorte que pour tout $x \in E$ et $y \in F^+$, on a*

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\int\limits_{B_{X^*}^+} (|x_i|(x^*))^p \, d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_{F^*}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}},$$

$$np(T) = \inf\{c > 0 \,|\, \textit{pour tout } C \textit{ vérifiant l'inégalité (J)}\}$$

Preuve 11 2) $\Rightarrow$)1) Soit $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $y_1, \ldots, y_n \in F^+$ selon (J), on a

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\int\limits_{B_{X^*}^+} (|x_i|(x^*))^p \, d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_{F^*}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}},$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right| &\leq C \sum_{i=1}^n \left(\int_{B_{X^*}^+} (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}^+} (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{F^{**}}^+} (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}^+} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|(x^*))^p d\mu_1(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^{**} \in B_{F^{**}}^+} \left(\sum_{i=1}^n (y_i^*(y^{**}))^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ceci implique que T est un opérateur sous linéaire positif p-nucléaire.

1. $T \in SN_p^+(E, F)$, alors, d'après ce qui précède, $T = vu$ ou aux deux $S\Pi_p^+(E, Z)$ et $v \in D_p^+(Z, F)$ tels que
$$v \in \pi_p^+(F, Z).$$
par Thm 2.4 et Théorème 4.13, il existe une constante $C > 0$, deux mesures de Radon positives μ_1, μ_2 et μ_3, et deux mesures de Radon positives μ_3 et μ_4.

Mesures de Radon positives μ_1 sur B_E^+ et μ_2 sur B_F^+ dotées de leurs topologies faibles, telles que pour tout $x \in E$ et $y \in F^+$.

$$\begin{aligned}
|\langle T(x), y^* \rangle| &= |\langle v\boldsymbol{u}(x), y^* \rangle| \\
&= |\langle u(x), v^*(y^*) \rangle| \\
&\leq \|u(x)\| \, \|v^*(y^*)\| \\
&\leq C \left(\int\limits_{B_{E^*}} (((|x|, x^*))^p \, d\mu_1(x^*)) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_{F^*}^+} (y^*, y^{**})^{p^*} d\mu_2(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts à utiliser le théorème de Grothendieck-Maurey dans le cas sous linéaire positif.

Théorème 3.3.4 *Soit E, F et G trois treillis de Banach où G est un espace 2-concave. Soit un opérateur sous-linéaire positif 2-régulier.*

Alors vwT est un opérateur sous-linéaire positif de Cohen 2-nucléaire et
$$n+2(vwT)d^{+}2(v)C^{+}2(w)\rho^{2}(T).$$

Preuve 12 L'opérateur wt est sous-linéaire positif à 2 sommations et par le théorème 4.5, l'opérateur VwT est sous-linéaire positif de Cohen 2-nucléaires .

Proposition 3.3.1 *Nous avons :*

$$S\mathcal{N}_{p}^{+}(E,F)\subseteq S\Pi_{p}^{+}(E,F)\,and\,\pi_{p}^{+}(T)\leq n_{p}^{+}(T)\,.$$

Preuve 13 *Soit T un opérateur dans $\mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $x\in E$, on a :*

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| = {} & \sup\nolimits_{y^{*}\in B_{p^{*}}^{*}}|(T(x),y^{*})| \\
\leq {} & \sup\nolimits_{y^{*}\in B_{p^{*}}^{*}} n_{p^{*}}^{+}(T)\left(\int_{g_{p^{*}}^{*}}(|x|(x^{*}))^{p}\,d\mu_{1}(x^{*})\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{g_{p^{*}}^{*}\in B_{p^{*}}^{*}}(y^{*}(y^{*}))^{p^{*}}\,d\mu_{2}(y^{*})\right)^{\frac{1}{p^{*}}} \\
\leq {} & n_{p^{*}}^{+}(T)\left(\int_{g_{p^{*}}^{*}}(|x|(x^{*}))^{p}\,d\mu_{1}(x^{*})\right)^{\frac{1}{p}}\sup\nolimits_{y^{*}\in B_{p^{*}}^{*}}\|y^{*}\| \\
\leq {} & n_{p^{*}}^{+}(T)\left(\int_{g_{p^{*}}^{-}}(|x|(x^{*}))^{p}\,d\mu_{1}(x^{*})\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

T est un opérateur sous-linéaire à somme positive et $\pi^{p}(T)\in\ell^{n^{+}}(T)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a essayé de généraliser quelques travaux déjà faits sur le théorème de factorisation pour les opérateurs sous-linéaires de X, un espace de Banach, dans $L_p(\Omega, \mu)$ par $L_q(\Omega, \mu)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Puis, on a fourni un humble effort pour obtenir une relation entre les opérateurs linéaires et sous-linéaires p-sommants concernant la notion de fortement p-sommant. Dans le présent travail nous avons abordé l'étude des opérateurs p-sammants $(1 \leq p < +)$ et étudier leurs propriétés de base, ainsi, les deux concepts de domination et de factorisation de Pietsch. Comme applications de ces opérateurs nous avons établi leurs lien avec les opérateurs de Hilbert-Schmidt, les opérateurs sous-Linéaires p-sommants et avec les opérateurs sous lineaires positifs de Cohen p-nucleaires .

Bibliographie

[1] D. Achour, A. Belacel. Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators. Positivity DOI 10,1007/s 11117-014-0276-6.

[2] A. Belacel, A. Beflah Sur Les opérateurs p sommants. Mémoire de Master Mathématiques, Laghouat. 2014. (Non cité.)

[3] A.Belacel.On the Cohen p-Nuclear positive Sublinear Operators,Malaya J-Math 4(4)(2016), pp 556-564 .

[4] M.T. Belaib, L. Mezrag. Sur les opérateurs sous-lineaires p Sommants,Sciences et Technologie-N°15,Juin(2001),pp7-11.

[5] J. Bass. Cours De Mathématiques. Tome 3. Topologie, intégration, Distributions, Equations intégrales, Analyse harmonique. Masson, Paris. 1983.

[6] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris. 1983.

[7] D.J.H. Garling. Inequalities : A journey into Linear Analysis. Cambridge, University Press. 2007. (Non cité.)

[8] A. Kolmogorov, S. Fomine. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition Mir-Moscou. deuxième édition, Décembre 1973.

[9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Classical Banach Spaces. Tome 2. Function Spaces. Springer-Verlag. 1979.

[10] A. Pietsch. Operator ideals. North-Holland Publishing Company. 1980.