

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR THELIDJI- LAGHOUAT
FACULTE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT GÉNIE DES PROCÉDÉS

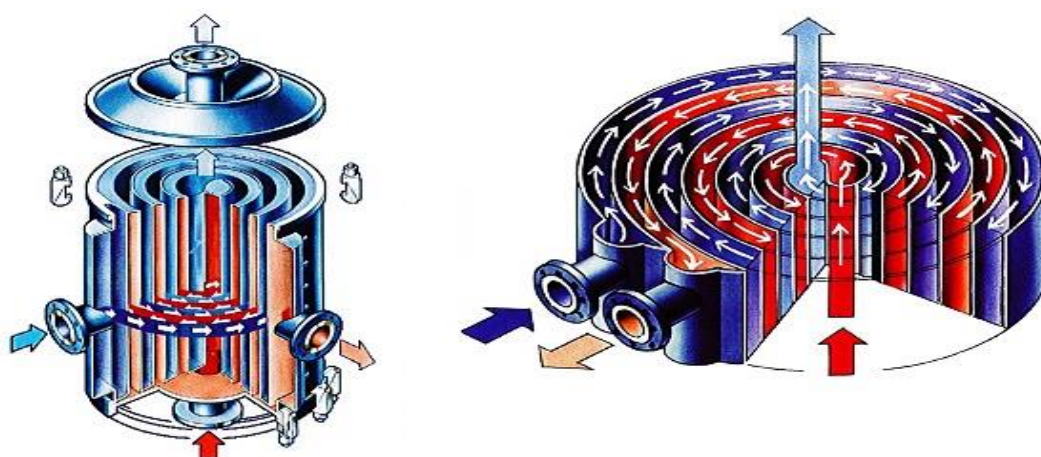


Transfert thermique II

Polycopié de Cours + Exercices Résolus

Destiné aux étudiants en 1^{ère} Année Master

Génie Chimique & Génie Pharmaceutique & Génie D'environnement



Réalisé par :

DR. HARRAT MOHAMED

2020-2021

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AMAR THELIDJI- LAGHOUAT
FACULTE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT GÉNIE DES PROCÉDÉS



Transfert thermique II

Polycopié de Cours & Exercices Résolus

Destiné aux étudiants en 1^{ère} Année Master

Génie Chimique & Génie Pharmaceutique & Génie D'environnement

Réalisé par :

DR. HARRAT MOHAMED

2020-2021

Table des matières

GÉNÉRALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

I.1. Définitions	2
I.1.1. Champ de température	2
I.1.2. Flux de chaleur	2
I.1.3. Bilan d'énergie	3
I.1.4. Expression des flux d'énergie	3
I.1.4.1. Conduction	3
I.1.4.2. Convection	4
I.1.4.3. Rayonnement	4
I.1.4.4. Flux de chaleur lié à un débit massique	4
I.1.4.5. Stockage d'énergie	4
I.1.4.6. Génération d'énergie	5
I.2. Transfert de chaleur par conduction en régime permanent	5
I.2.1. L'équation de la chaleur	5
I.2.2. Transfert unidirectionnel	7
I.2.2.1. Mur simple	7
I.2.2.2. Mur multicouches	8
I.2.2.3. Mur composite	8
I.2.2.4. Cylindre creux long (tube)	9
I.2.2.5. Cylindres creux multicouches	10
I.2.3. Transfert multidirectionnel	11
I.2.3.1. Méthode du coefficient de forme	11
I.3. Exercices résolus	13

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN RÉGIME VARIABLE

II.1. Milieu à température uniforme	18
II.2. Milieu semi-infini	20
II.2.1. Température constante imposée en surface	20
II.2.2. Flux imposé	22
II.2.3. Coefficient de transfert imposé	23
II.3. Exercices résolus	26

LES AILETTES

III.1. L'équation de la barre	30
III.2. Flux extrait par une ailette	31
III.2.1. Ailette rectangulaire longue de section constante	32
III.2.2. Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité	33
III.2.3. Ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité	34
III.3. Efficacité d'une ailette	34
III.3.1. Ailette rectangulaire longue	35
III.3.2. Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité	35
III.3.3. Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité	35
III.4. Choix des ailettes	35
III.5. Exercices résolus	36

DESCRIPTION DES APPAREILS D'ÉCHANGE DE CHALEUR

IV.1. Différents modes de circulation dans un échangeur	41
IV.1.1. Échangeur à courants parallèles	41
IV.1.2. Échangeur à courants croisés	42
IV.2. Différents types d'échanges	43
IV.2.1. Échange sans changement de phase	43
IV.2.2. Échange avec changement de phase	43
IV.3. Classification des échangeurs	43
IV.3.1. Suivant le processus de transfert thermique	43
IV.3.2. Suivant le type de transmission de chaleur	44
IV.3.3. Suivant le circuit des fluides	44
IV.3.4. Suivant la compacité de la surface d'échange	44
IV.3.5. Suivant le type de construction	45
IV.4. Technologies usuelles des échangeurs	45
IV.4.1. Échangeur à double enveloppe	45
IV.4.2. Échangeur à tubes et calandre	46
IV.4.3. Échangeur à plaques et joints	46
IV.4.4. Échangeur spirale	47
IV.4.5. Échangeur à lamellaires	48
IV.4.6. Batterie à ailettes	48
IV.4.7. Échangeur à multipasse	49

CALCUL DES ÉCHANGEURS

V.1. Évaluation des performances thermique d'un échangeur, en régime permanent	51
V.1.1. Distribution des températures dans un échangeur à courants parallèles	51
V.1.1.1. Échangeurs co-courant	51
V.1.1.2. Échangeurs à contre-courant	54
V.2. Puissance d'un échangeur à courants parallèles	57
V.3. Flux thermique maximum dans un échangeur	58
V.4. Efficacité thermique d'un échangeur	59
V.5. Nombre d'unités de transfert (NUT)	61
V.6. Étude de la fonction $E = f(R, NUT)$	61
V.6.1. Échangeur co-courant	61
V.6.2. Échangeur à contre-courant	62
V.7. Exercices résolus	64

ANNEXE

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

GÉNÉRALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre.

La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

I.1. Définitions

I.1.1. Champ de température :

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé **champ de température**.

Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

I.1.2. Flux de chaleur :

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$$

Ou sous forme vectorielle :

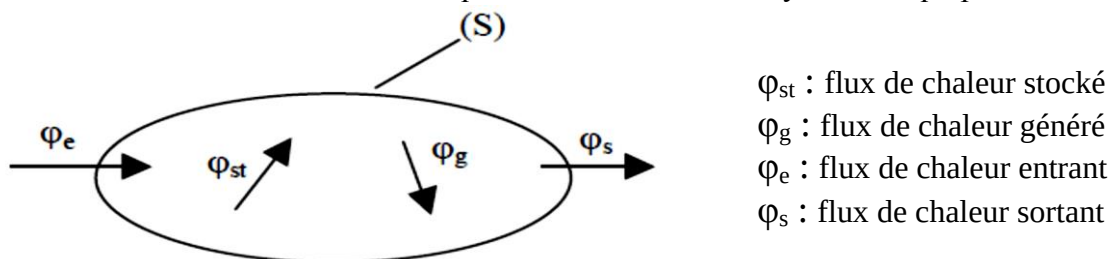
$$\vec{\Phi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt}$$

I.1.3. Bilan d'énergie :

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :



On applique alors le 1er principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \dots \dots \dots (1)$$

I.1.4. Expression des flux d'énergie :

I.1.4.1. Conduction :

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de **Fourier** : le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température :

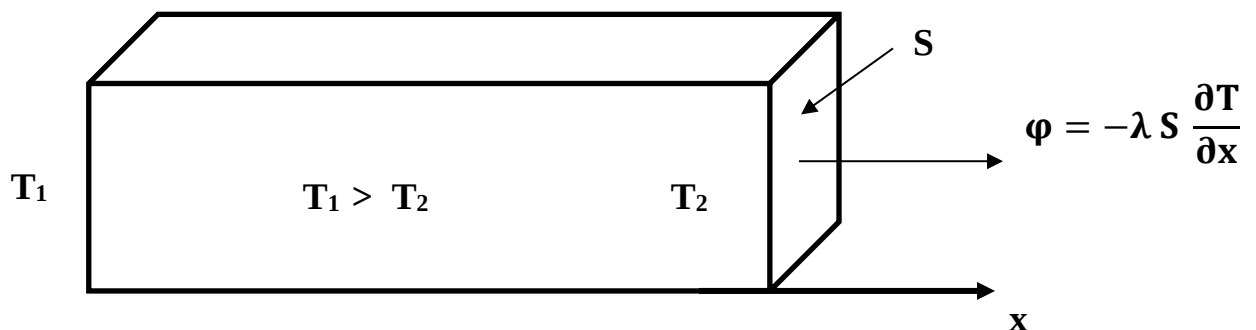
$$\vec{\varphi} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

Le flux thermique transmis par conduction dans la direction Ox peut donc être écrit sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

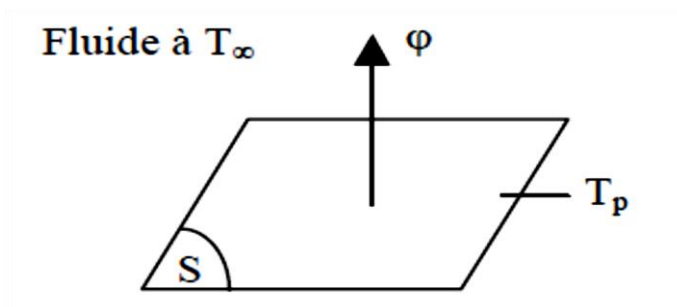
Avec :

φ	: Flux de chaleur transmis par conduction	(W)
λ	: Conductivité thermique du milieu	(W m ⁻¹ °C ⁻¹)
x	: Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
S	: Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m ²)



I.1.4.2. Convection :

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :



$$\varphi = h S (T_p - T_\infty)$$

Avec :

φ	: Flux de chaleur transmis par convection	(W)
h	: Coefficient de transfert de chaleur par convection	(W m ⁻² °C ⁻¹)
T_p	: Température de surface du solide	(°C)
T_∞	: Température du fluide loin de la surface du solide	(°C)
S	: Aire de la surface de contact solide/fluide	(m ²)

Remarque :

La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

I.1.4.3. Rayonnement :

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation :

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4)$$

Avec :

φ	: Flux de chaleur transmis par convection	(W)
σ	: Constante de Stefan	(5,67.10 ⁻⁸ W m ⁻² K ⁻⁴)
ε_p	: Facteur d'émission de la surface	
T_p	: Température de surface du solide	(K)
T_∞	: Température du fluide loin de la surface du solide	(K)
S	: Aire de la surface de contact solide/fluide	(m ²)

I.1.4.4. Flux de chaleur lié à un débit massique :

Lorsqu'un débit massique $\dot{m}$ de matière entre dans le système à la température T_1 et en ressort à la température T_2 , on doit considérer dans le bilan (1) un flux de chaleur entrant correspondant :

$$\varphi = \dot{m} C (T_1 - T_2)$$

Avec :

φ_e	: Flux de chaleur entrant dans le système	(W)
$\dot{m}$	: Débit massique	(kg.s ⁻¹)
C	: Chaleur spécifique	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
T_1	: Températures d'entrée	(K)
T_2	: Températures de sortie	(K)

I.1.4.5. Stockage d'énergie :

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\varphi_{st} = mC \frac{dT}{dt} = \rho VC \frac{dT}{dt}$$

Avec :

ϕ_{st}	: Flux de chaleur stocké	(W)
$\dot{m}$	: Masse volumique	(kg.m ⁻³)
V	: Volume	m ³
C	: Chaleur spécifique	(J.kg ⁻¹ .K ⁻¹)
T	: Température	(K)
t	: Temps	(s)

Le produit ρVC est appelé la **capacité thermique** du corps.

I.1.4.6. Génération d'énergie :

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\phi_g = \dot{q}V$$

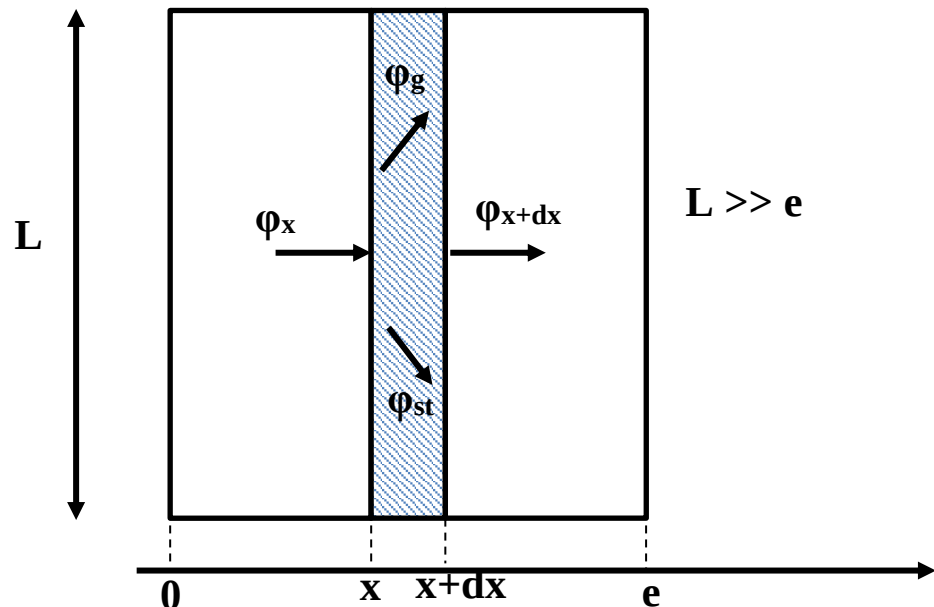
Avec :

ϕ_g	: Flux de chaleur générée	(W)
$\dot{q}$	: Densité volumique d'énergie générée	(W.m ⁻³)
V	: Volume	m ³

I.2. Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

I.2.1. L'équation de la chaleur :

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :



Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction Ox . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\phi_x + \phi_g = \phi_{x+dx} + \phi_{st}$$

Avec :

$$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \quad \text{et} \quad \varphi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx \quad \text{et} \quad \varphi_{st} = \rho C S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx , nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho C S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho C S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons **l'équation de la chaleur** dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y S \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z S \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T ; $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial x}$

Les hypothèses a) + b) + c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons **l'équation de Poisson** :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho C}$ est appelé la **diffusivité thermique** ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation

d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons **l'équation de Laplace** :

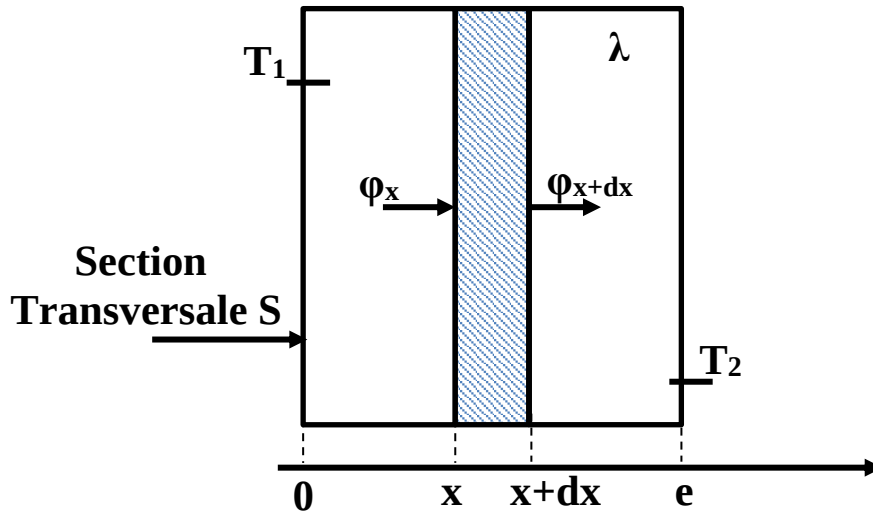
$$\nabla^2 T = 0$$

I.2.2. Transfert unidirectionnel :

I.2.2.1. Mur simple :

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie.

On considère un mur d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :



En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$, il vient :

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$$

D'où : $\frac{dT}{dx} = A$ et $T(x) = Ax + B$

Avec les conditions aux limites : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=e) = T_2$

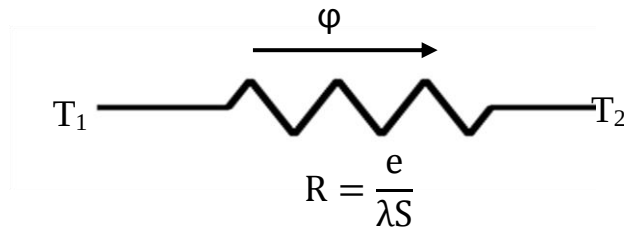
Donc : $T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{e} X$

Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation : $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dx}$, d'où :

$$\Phi = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{e}$$

Cette relation peut également se mettre sous la forme : $\Phi = (T_1 - T_2) / (e / \lambda S)$, cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $e / \lambda S$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur

(e), de conductivité thermique (λ) et de surface latérale (S). On se ramène donc au schéma équivalent suivant :



I.2.2.2. Mur multicouches :

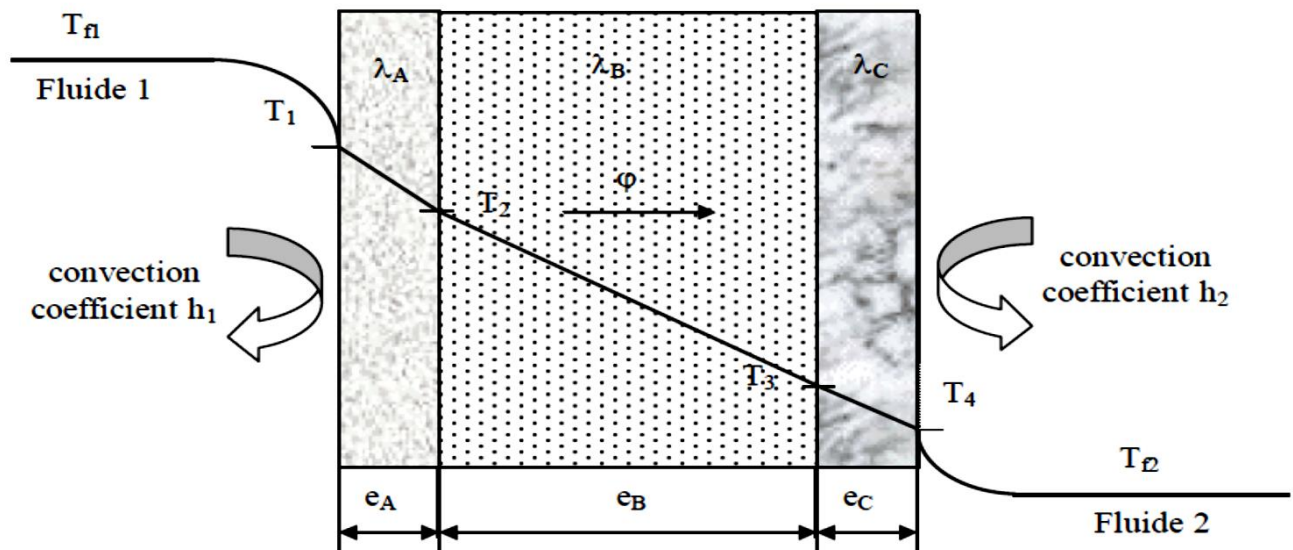
C'est le cas des murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S .

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\phi = h_1 S (T_{f1} - T_1) = \frac{\lambda_A (T_1 - T_2)}{e_A} = \frac{\lambda_B (T_2 - T_3)}{e_B} = \frac{\lambda_C (T_3 - T_4)}{e_C} = h_2 S (T_4 - T_{f2})$$

D'où :

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}}$$



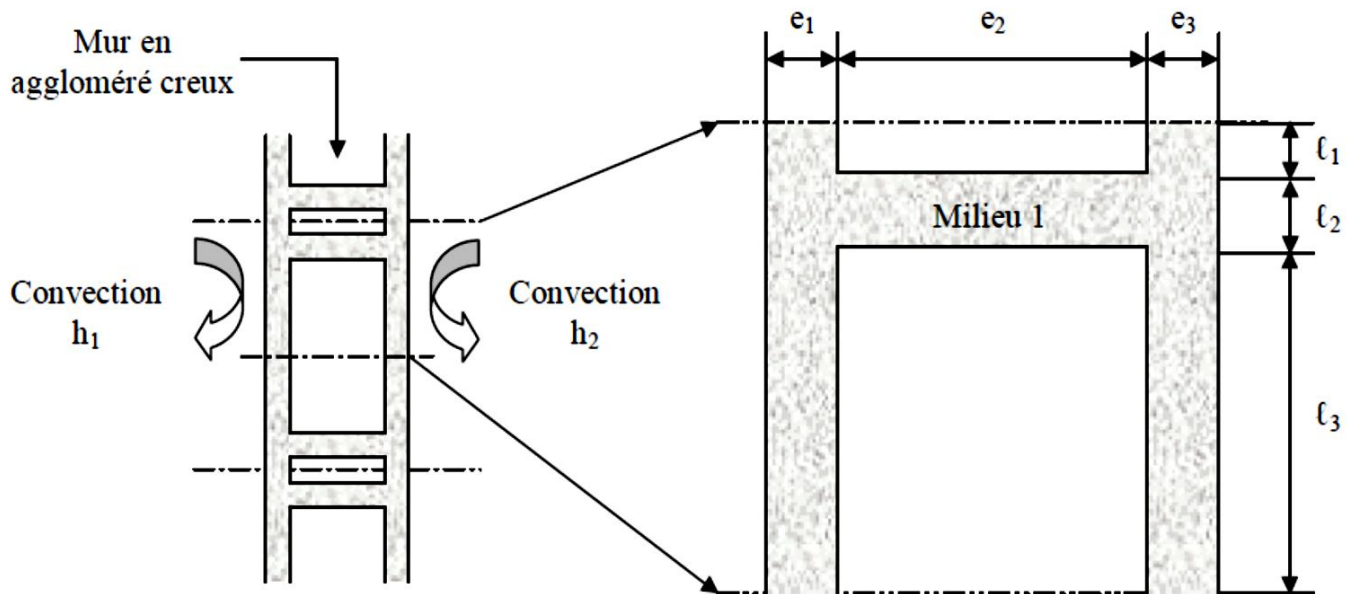
I.2.2.3. Mur composite :

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux.

En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur

$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

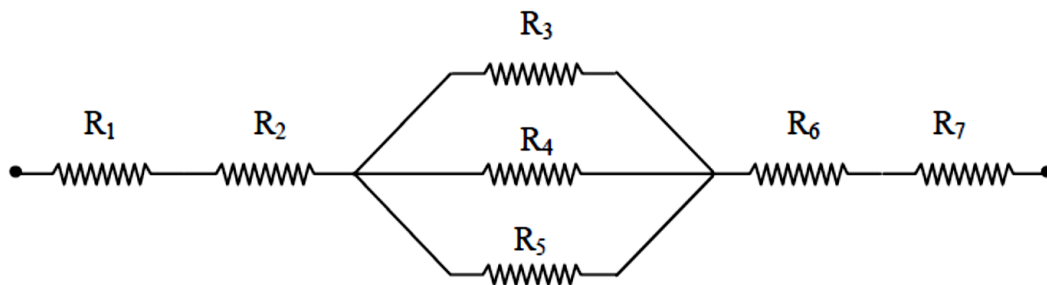


Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \ell L} \quad ; \quad R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \ell L} \quad ; \quad R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_1 L}$$

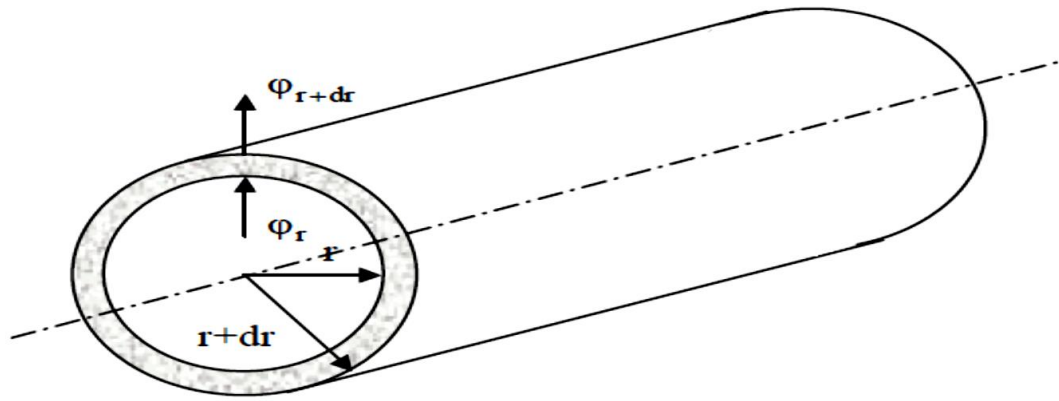
$$R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \ell_2 L} \quad ; \quad R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_3 L} \quad ; \quad R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \ell L} \quad ; \quad R_7 = \frac{1}{h_2 \ell L}$$

Ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent suivant :



I.2.2.4. Cylindre creux long (tube) :

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ , de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , de longueur L , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 . On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.



Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et $r + dr$:

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx}$$

Avec :

$$\varphi_r = -\lambda 2\pi r L \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_r \quad \text{et} \quad \varphi_{r+dr} = -\lambda 2\pi (r + dr) L \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r+dr}$$

Soit :

$$-\lambda 2\pi r L \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_r = -\lambda 2\pi (r + dr) L \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r+dr}$$

Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

D'où :

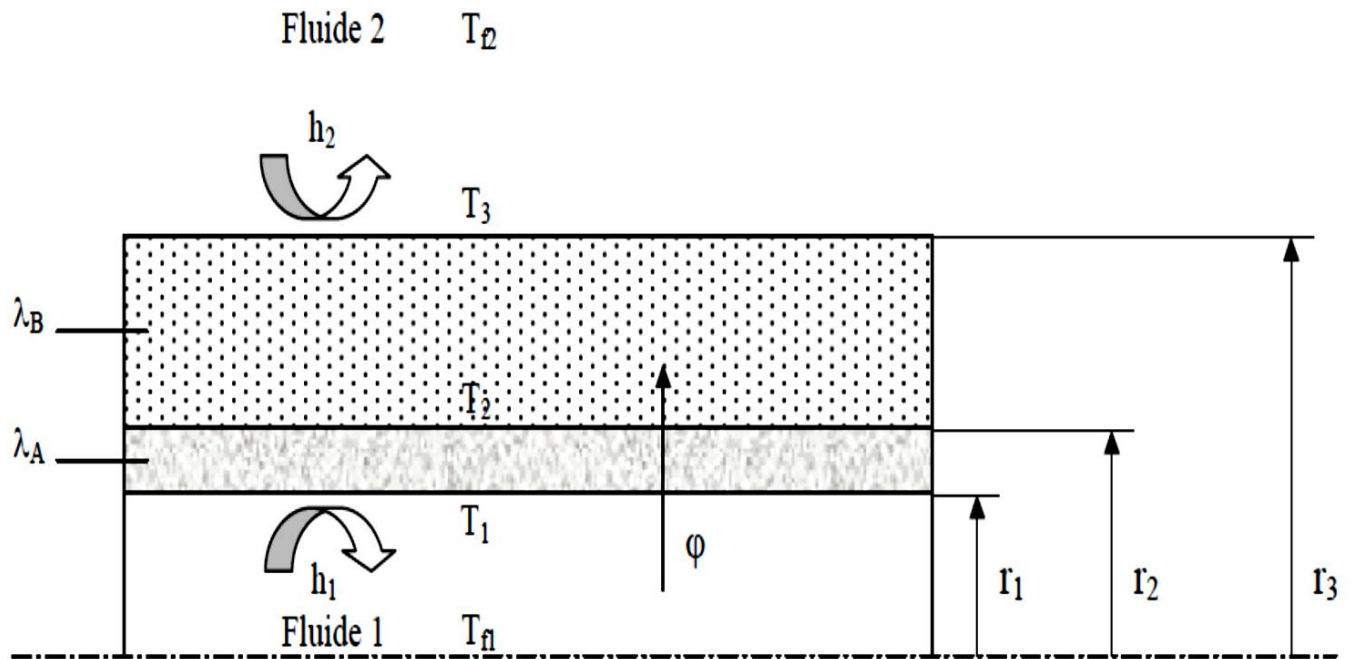
$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Et par application de la relation $\varphi = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$, on obtient :

$$\varphi = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

I.2.2.5. Cylindres creux multicouches :

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes



En régime permanent, le flux de chaleur ϕ se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\phi = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi \lambda_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \lambda_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_1 L (T_3 - T_{f2})$$

D'où :

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi \lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi \lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_1 L}}$$

I.2.3. Transfert multidirectionnel :

Dans le cas où la diffusion de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, deux méthodes de résolution peuvent être appliquées :

1. Méthode du coefficient de forme
2. Méthodes numériques

On traitera dans ce qui suit la première méthode

I.2.3.1. Méthode du coefficient de forme :

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\phi = \lambda F (T_1 - T_2)$$

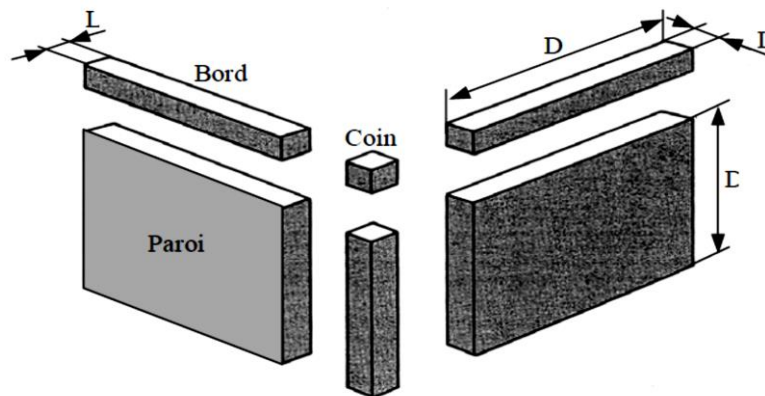
Avec :

λ	: Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2	$(\text{Wm}^{-1}\text{°C}^{-1})$
T_1	: Température de la surface S_1	(°C)
T_2	: Température de la surface S_2	(°C)
F	: Coefficient de forme	(m)

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 . Les valeurs de F pour les configurations les plus courantes sont présentées en annexe I.1.

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée,...)

Méthode : on découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux selon la représentation :



Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante), les coefficients de forme des différents éléments ont pour valeur :

$$F_{\text{paroi } i} = S_i / L_i$$

$$F_{\text{bord } i} = 0,54 D_i$$

$$F_{\text{coin } i} = 0,15 L_i$$

Avec :

S_i : Aire de la paroi i
 D_i : Longueur de la paroi ou du bord i
 L_i : Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{\text{paroi}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{\text{bord}_i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{\text{coin}_i} \Delta T_i$$

Avec :

λ_i	: Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche) de la paroi i	$(\text{Wm}^{-1}\text{°C}^{-1})$
ΔT_i	: Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i	(°C)

I.3. Exercices résolus

Exercice N°1 :

La paroi d'un four est constituée de trois matériaux isolants en série :

- a) Une couche intérieure de 18 cm d'épaisseur est en briques réfractaires ($\lambda_1 = 1,175 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$)
- b) Une couche de *briques isolantes* de 15 cm d'épaisseur ($\lambda_2 = 0,259 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$)
- c) Une épaisseur suffisante de briques ($\lambda_3 = 0,693 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$)

1) Quelle épaisseur de briques doit-on utiliser pour réduire la perte de chaleur à 721 W/m^2 lorsque les surfaces extérieures et intérieures sont respectivement à 38°C et 820°C ?

2) Lors de la construction on maintient un espace libre de 0,32 cm, ($\lambda'_2 = 0,0317 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$) entre les *briques isolantes* et les briques. Quelle épaisseur de briques est alors nécessaire ?

3) La température ambiante étant de 25°C , calculer le coefficient de transfert convectif h_c à l'extérieur de la paroi.

Solution :

Conduction en régime permanent : φ est constant

$$\varphi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

On intègre pour chaque épaisseur, chaque valeur de λ constante

$$\int_0^{e_i} \varphi dx = \int_{T_i}^{T_{i+1}} -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\varphi e_i = \lambda S (T_i - T_{i+1})$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{\lambda_3 S}} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S}} = \frac{T_1 - T_4}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{\varphi}{S} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}}$$

On a : $1 \text{ Kcal/h} = 1.163 \text{ W}$

1. Epaisseur de briques :

$$e_3 = \lambda_3 \left(\frac{T_1 - T_4}{\varphi} - \frac{e_1}{\lambda_1} - \frac{e_2}{\lambda_2} \right) = 0.596 \left(\frac{820 - 38}{620} - \frac{0.18}{1.01} - \frac{0.15}{0.223} \right) = 24.5 \text{ cm}$$

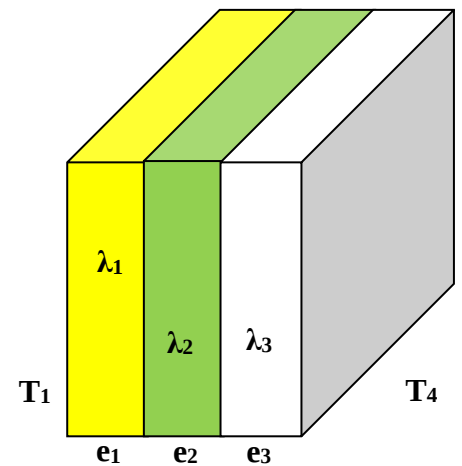
2. Couche supplémentaire : $e'_2 = 0.32 \text{ cm}$

Cela revient à rajouter une résistance thermique : $\varphi = \frac{\varphi}{S} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e'_2}{\lambda'_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}}$

Donc :

$$e'_3 = \lambda_3 \left(\frac{T_1 - T_4}{\varphi} - \frac{e_1}{\lambda_1} - \frac{e_2}{\lambda_2} - \frac{e'_2}{\lambda'_2} \right) = 0.596 \left(\frac{820 - 38}{620} - \frac{0.18}{1.01} - \frac{0.15}{0.223} - \frac{0.0032}{0.0273} \right) = 17.5 \text{ cm}$$

On remarque un gain de 7 cm de briques pour 3,2 mm d'air. D'où l'intérêt des briques creuses.



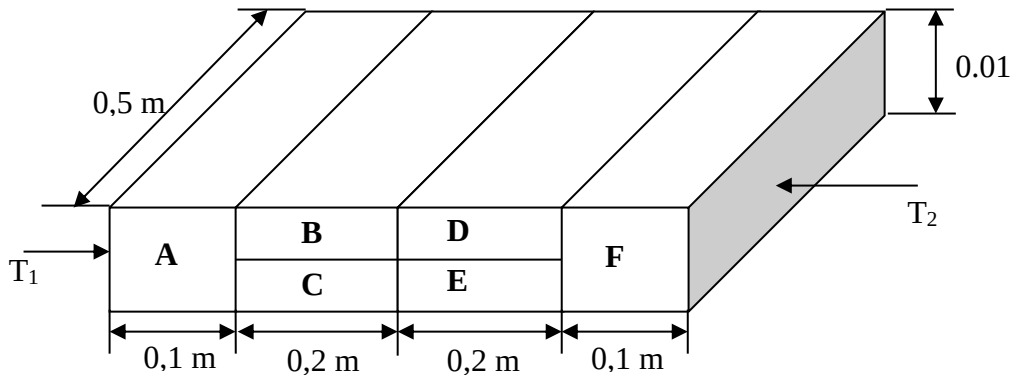
3. Convection :

$$\varphi = h_c S(T_4 - T_a) \quad T_a: \text{température de l'air} = 25^\circ\text{C}$$

$$\varphi = h_c S(T_4 - T_a) \Rightarrow \phi = \frac{\varphi}{S} = h_c (T_4 - T_a) \Rightarrow h_c = \frac{\phi}{T_4 - T_a} = \frac{620}{38 - 25}$$

$$h_c = 47.69 \frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^2.^\circ\text{C}} = 55.47 \frac{\text{W}}{\text{m}^2.^\circ\text{C}}$$

Exercice N°2 :



Soit le mur composé illustré ci-dessus. En assumant une conduction unidimensionnelle et connaissant les températures aux parois T_1 et T_2 ainsi que les conductibilités thermiques de ses différentes sections.

Calculez le flux de chaleur à travers le mur.

Données :

$$T_1 = 1850^\circ\text{C} ; \lambda_A = 180 \text{ W/m K} ; \lambda_C = 90 \text{ W/m K} ; \lambda_E = 120 \text{ W/m K}$$

$$T_2 = 25^\circ\text{C} ; \lambda_B = 45 \text{ W/m K} ; \lambda_D = 60 \text{ W/m K} ; \lambda_F = 165 \text{ W/m K}$$

Solution :

Le flux de chaleur à travers le mur s'exprime :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_T}$$

tel que :

$$R_T = R_A + R_{eq} + R_F$$

Et :

$$R_{eq} = R_{BC} + R_{DE} = \frac{R_B * R_C}{R_C + R_B} + \frac{R_D * R_E}{R_E + R_D}$$

Avec :

$$R_A = \frac{L_A}{\lambda_A S_A} = \frac{0.1}{180 * 0.01 * 0.5} = 0.111 \text{ K/W}$$

$$\left. \begin{aligned} R_C &= \frac{L_C}{\lambda_C S_C} = \frac{0.2}{90 * 0.005 * 0.5} = 0.888 \text{ K/W} \\ R_B &= \frac{L_B}{\lambda_B S_B} = \frac{0.2}{120 * 0.005 * 0.5} = 1.777 \text{ K/W} \end{aligned} \right\} R_{CB} = \frac{1.777 * 0.888}{1.777 + 0.888} = 0.59211 \text{ K/W}$$

$$\left. \begin{aligned} R_E &= \frac{L_E}{\lambda_E S_E} = \frac{0.2}{120 * 0.005 * 0.5} = 0.666 \text{ K/W} \\ R_D &= \frac{L_D}{\lambda_D S_D} = \frac{0.2}{60 * 0.005 * 0.5} = 1.333 \text{ K/W} \end{aligned} \right\} R_{ED} = \frac{1.333 * 0.666}{1.333 + 0.666} = 0.44411 \text{ K/W}$$

$$R_F = \frac{L_F}{\lambda_F S_F} = \frac{0.1}{165 * 0.01 * 0.5} = 0.121 \text{ K/W}$$

$$R_{eq} = 1.03622 \text{ K/W}$$

Alors :

$$R_T = 1.26822 \text{ k/w}$$

Donc :

$$\varphi = \frac{(1850 + 273) - 298}{1.26822} = 1439.0247 \text{ w}$$

Exercice N°3 :

Une cheminée en béton armé ($\lambda_1 = 1,1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) possède un diamètre intérieur $d_1 = 600\text{mm}$ et un diamètre extérieur $d_e = 1000 \text{ mm}$ doit être revêtue de l'intérieur par un matériau réfractaire ($\lambda_2 = 0,5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$). Déterminez :

- 1) L'épaisseur du garnissage.
- 2) La température de la surface extérieure de la cheminée.

Pour que les pertes thermiques ne dépassent pas 2000 W/m et que la température de la surface intérieure de la paroi en béton arme ne dépasse pas 200°C sachant que la température de la surface interne du garnissage est prise égale à 425°C .

Solution :

- 1) Le flux de chaleur à travers le garnissage s'exprime :

$$\varphi = \lambda_2 2\pi L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{d_1}{d}}$$

Le flux par unité de longueur s'exprime donc :

$$\varphi/L = \lambda_2 2\pi \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{d_1}{d}}$$

D'où :

$$d = \frac{d_1}{e^{\left[\frac{(T_1 - T_2) 2\pi\lambda_2}{\varphi/L} \right]}} = \frac{600}{e^{\left[\frac{(425 - 200) 2\pi 0.5}{2000} \right]}} = 421.36 \text{ mm}$$

Alors :

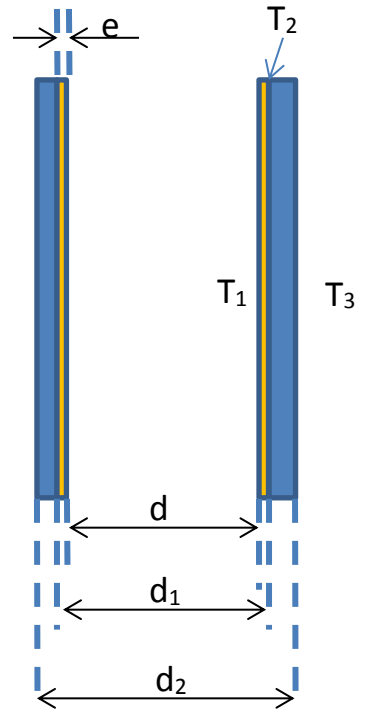
$$e = \frac{d_1 - d}{2} = \frac{600 - 421.36}{2} = 89 \text{ mm}$$

2) On a :

$$\varphi/L = \lambda_1 2\pi \frac{T_2 - T_3}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$$

$$\Rightarrow T_3 = T_2 - \frac{\left(\ln \frac{d_2}{d_1} \right) * \varphi/L}{2 \pi \lambda_1} = 200 - \frac{\left(\ln \frac{1000}{600} \right) * 2000}{2 \pi 1.1}$$

$$T_3 = 52^\circ\text{C}$$



***TRANSFERT DE CHALEUR
PAR CONDUCTION
EN RÉGIME VARIABLE***

On a supposé dans les précédents que la température à l'intérieur du corps ne varie pas avec le temps (régime permanent) mais en réalité, la température à l'intérieur des corps généralement change avec le temps, le régime est dit variable.

Pour simplifier l'étude on suppose que la conduction en régime variable est unidimensionnelle $T(x,t)$ et il faut connaître les conditions aux limites spatiales et temporelles.

On remarque les cas suivants :

II.1. Milieu à température uniforme

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est a priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser.

Soit par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, Dans ce cas la température dépend uniquement du temps (t) et est indépendante de la dimension x , $T = T(t)$ la température peut y être considérée comme uniforme.

On peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et $t + dt$:

$$hS(T - T_0) = -\rho cV \frac{dT}{dt}$$

Soit :

$$\frac{dT}{(T - T_0)} = -\frac{hS}{\rho cV} dt$$

D'où :

$$\frac{T - T_0}{(T_i - T_0)} = \exp\left(-\frac{hS}{\rho cV} t\right)$$

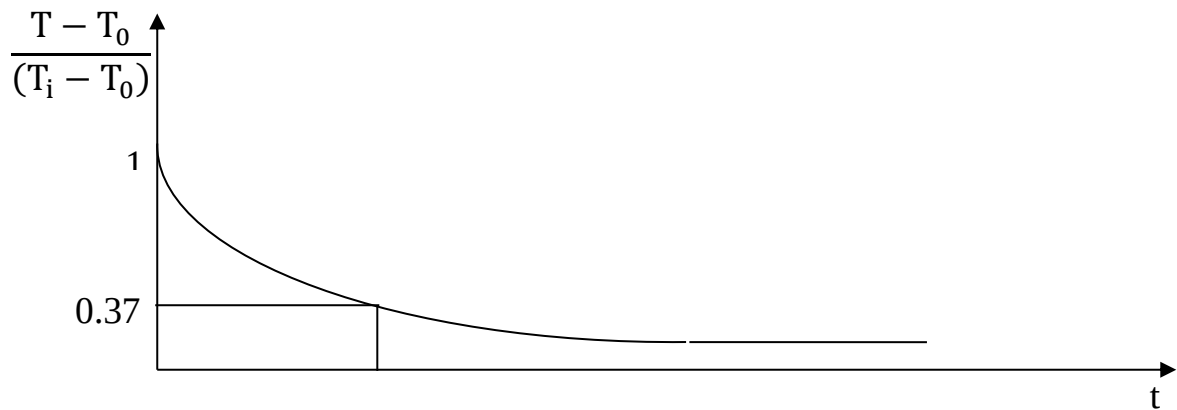
On remarque que le groupement $\frac{\rho cV}{hS}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\tau = \frac{\rho cV}{hS}$$

On a en effet :

$$\frac{T - T_0}{(T_i - T_0)} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Avec :



Evolution de la température d'un milieu à température uniforme

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement important en régime variable :

1) Le nombre de Biot :

$$Bi = \frac{\text{Résistance thermique interne}}{\text{Résistance thermique externe}}$$

$$Bi = \frac{\frac{e}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}} = \frac{he}{\lambda}$$

e : est la dimension caractéristique du milieu, $e = r$ pour une sphère.

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque **Bi < 0,1**.

2) Le nombre de Fourier :

$$F_0 = \frac{at}{e^2}$$

Avec :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable.

Définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{(T_i - T_0)} = \exp(-Bi F_0)$$

La connaissance du produit des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère.

II.2. Milieu semi-infini

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face (vrai tout le temps que la température de l'autre face n'a pas varié).

II.2.1. Température constante imposée en surface :

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i . On impose brutalement la température T_0 sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet :

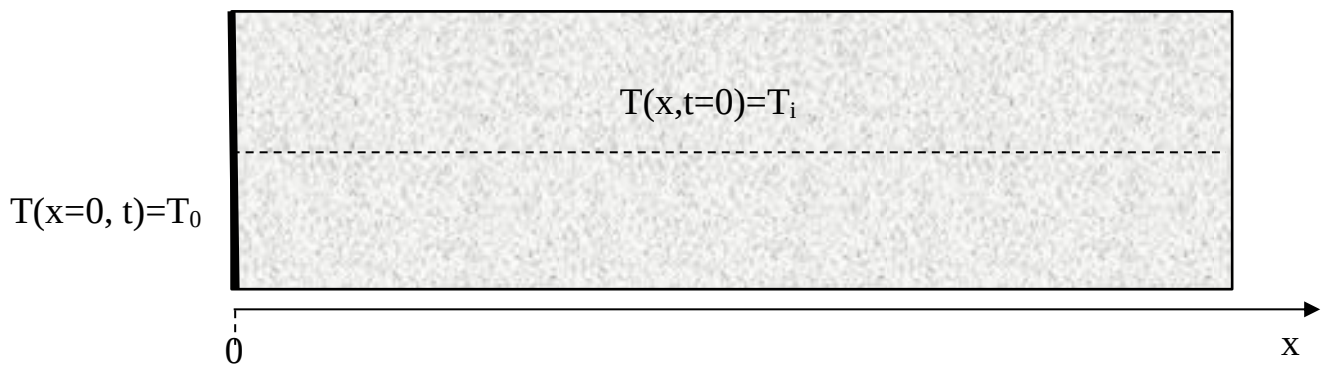


Schéma du milieu semi-infini avec température de surface imposée

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \dots \dots \dots (2) \\ T(0, t) = T_0 \dots \dots \dots (3) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_i \dots \dots (4) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\bar{T} = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$$

D'où :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{1}{T_0 - T_i} \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 \dots\dots\dots (2) \\ \bar{T}(0, t) = 1 \dots\dots\dots (3) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x, t) = 0 \dots\dots (4) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $\bar{T}(x, t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$\theta(x, p) = L\{\bar{T}(t)\} = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \bar{T}(x, t) dt$$

La transformée de Laplace de l'équation (1) conduit à :

$$\int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} dt - \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \exp(-pt) \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} dt = 0$$

Une intégration par partie permet d'obtenir :

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} \exp(-pt) \bar{T}(x, t) dt - \frac{1}{a} \left\{ [\exp(-pt) \bar{T}(x, t)]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \exp(-pt) \bar{T}(x, t) dt = 0 \right\}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\theta - \bar{T}(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x, 0) = 0$$

Cette équation est donc de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad q^2 = \frac{p}{a}$$

Dont la solution est recherchée sous la forme :

$$\theta(x, p) = Ae^{-qx} + Be^{+qx}$$

1- Pour $x \rightarrow \infty$:

$$\theta(\infty, p) = Ae^{-q\infty} + Be^{+q\infty} = 0$$

Donc : $B=0$

Nous en déduisons que : $\theta(x, p) = Ae^{-qx}$

2- La transformée de Laplace de l'équation (3) conduit à :

$$\theta(0, p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$A = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \theta(x, p) = \frac{e^{-qx}}{p}$$

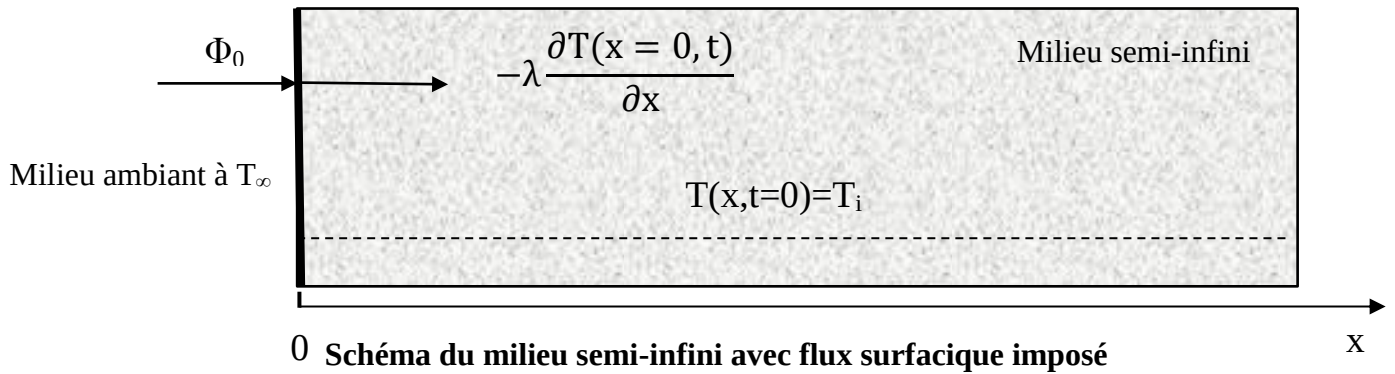
L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe II.1 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T - T_i}{T_0 - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

erfc : fonction d'erreur complémentaire (Annexe II.2)

II.2.2. Flux imposé :

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini, cette condition limite est appelée condition de Neumann.



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \dots \dots \dots (2) \\ T(\infty, t) = T_i \dots \dots \dots (3) \\ -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \Phi_0 \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

Cette dernière condition traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la surface du milieu semi infini.

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

D'où :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 \dots\dots\dots (2) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 \dots\dots\dots (3) \\ -\lambda \frac{\partial \bar{T}(0, t)}{\partial x} = \Phi_0 \dots\dots (4) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (1) conduit à :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\theta - \bar{T}(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x, 0) = 0$$

Dont la solution est recherchée sous la forme :

$$\theta(x, p) = Ae^{-qx} + Be^{+qx}$$

1- Pour $x \rightarrow \infty$:

$$\theta(\infty, p) = Ae^{-q\infty} + Be^{+q\infty} = 0$$

Donc : $B=0$

Nous en déduisons que : $\theta(x, p) = Ae^{-qx}$

2- La transformée de Laplace de l'équation (4) conduit à :

$$\frac{\Phi_0}{p} = -\lambda \frac{d\theta}{dx} (x = 0)$$

D'où : $A = \frac{\Phi_0}{\lambda pq} \quad \text{et} \quad \theta(x, p) = \frac{\Phi_0}{\lambda} \frac{e^{-qx}}{pq}$

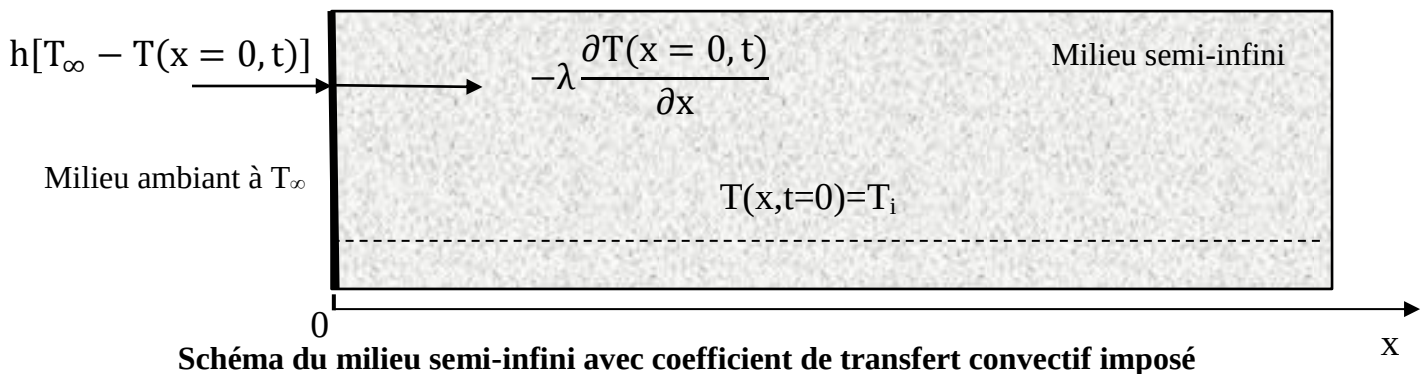
L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe II.1 conduit au résultat suivant :

$$\bar{T}(x, t) = T(x, t) - T_i = \frac{2\Phi_0}{\lambda} \sqrt{at} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

Avec : $\operatorname{ierfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - x[1 - \operatorname{erf}(x)]$

II.2.3. Coefficient de transfert imposé :

On considère le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection **h** entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton :



L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \dots \dots \dots (2) \\ T(\infty, t) = T_i \dots \dots \dots (3) \\ -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h[T_\infty - T(x = 0, t)] \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T} = T - T_i$

D'où :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 \dots \dots \dots (2) \\ \bar{T}(\infty, t) = 0 \dots \dots \dots (3) \\ \lambda \frac{\partial \bar{T}(0, t)}{\partial x} = h[\bar{T}(x = 0, t) - (T_\infty - T_i)] \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (1) conduit à :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\theta - \bar{T}(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x, 0) = 0$$

Dont la solution est recherchée sous la forme :

$$\theta(x, p) = Ae^{-qx} + Be^{+qx}$$

1- Pour $x \rightarrow \infty$:

$$\theta(\infty, p) = Ae^{-q\infty} + Be^{+q\infty} = 0$$

Donc : $B=0$

Nous en déduisons que : $\theta(x, p) = Ae^{-qx}$

2- La transformée de Laplace de l'équation (4) conduit à :

$$\lambda \frac{d\theta}{dx}(0, p) = h\theta(0, p) + \frac{h(T_i - T_\infty)}{p}$$

Soit :

$$-\lambda A q = hA + \frac{h(T_i - T_\infty)}{p}$$

D'où :

$$A = \frac{\frac{h}{\lambda}(T_\infty - T_i)}{p\left(\frac{h}{\lambda} + q\right)}$$

Et :

$$\theta(x, p) = \ell(T_\infty - T_i) \frac{e^{-qx}}{p(\ell + q)} \quad \text{où } \ell = \frac{h}{\lambda}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe II.1 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{\lambda} + \frac{ah^2t}{\lambda^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{h\sqrt{at}}{\lambda}\right)$$

Pour un calcul approché, on trouvera en annexe II.3 un abaque représentant graphiquement cette formule.

II.3. Exercices résolus

Exercice N°1 :

Une sphère métallique ($C_p = 0,46 \text{ kJ/kg.K}$, $\lambda = 35 \text{ W/m.K}$) de 5 cm de diamètre, initialement à la température de 550°C est immergée brutalement dans une ambiance maintenue à une température constante de 80°C . Le coefficient de transfert externe est égal à $10 \text{ W/m}^2.\text{K}$.

Calculer le temps au bout duquel le centre de la sphère atteint la température de 100°C . $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Solution :

1- On calcule le Biot :

$$Bi = \frac{h_c R_s}{\lambda} = \frac{10 * 2,5 * 10^{-2}}{35}$$

$$Bi = 7,1428 * 10^{-3} \quad Bi < 0,1$$

Donc en travail dans un milieu à température uniforme

Alors :

$$-h_c S_s (T - T_f) = m_s C_p \frac{dT}{dt}$$

$$-\int_0^t \frac{h_c S_s}{m_s C_p} dt = \int_{T_0}^T \frac{1}{T - T_f} dT \Rightarrow \ln\left(\frac{T_i - T_f}{T - T_f}\right) = \frac{h_c S_s}{m_s C_p} t$$

$$t = \frac{m_s C_p}{S_s h_c} \ln\left(\frac{T_i - T_f}{T - T_f}\right)$$

Avec :

$$\frac{m_s}{S_s} = \frac{\left(\frac{4}{3} \pi \rho R_s^3\right)}{4 \pi R_s^2} = \frac{\rho R_s}{3}$$

Donc :

$$t = \frac{\rho R_s C_p}{3 h_c} \ln\left(\frac{T_i - T_f}{T - T_f}\right) = \frac{7800 * 0,025 * 460}{3 * 10} \ln\left(\frac{550 - 80}{100 - 80}\right) = 9439 \text{ s}$$

Exercice N°2 :

Une plaque d'aluminium ($0,5 \times 30 \text{ cm}$), à une température de 500°C , doit être refroidie à 90°C dans un bain d'eau. Les coefficients de transfert de chaleur sont :

$$T = 500 - 260^\circ\text{C} \quad h = 510 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

$$T = 260 - 90^\circ\text{C} \quad h = 2550 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

Les propriétés de Al : $\lambda = 237 \text{ W/m.K}$, $C_p = 900 \text{ J/}^\circ\text{C kg}$; $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$

a) Calculer le taux de refroidissement au moment où la température est de 315°C et de 150°C .

b) Calculer le temps nécessaire à un refroidissement jusqu'à 120°C .

(Remarque : on néglige les surfaces des 4 bords)

Solution :

On calcule le Biot :

$$Bi = \frac{h * l}{\lambda} = \frac{510 * 0.025}{237} = 0.0054 < 0.1 \quad \text{avec } l = \frac{e}{2}$$

Le milieu est un milieu à température uniforme donc :

$$\rho V C_P \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_f) \dots \dots \dots (1)$$
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{\rho V C_P} (T - T_f)$$

Alors :

a)

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{315} = -\frac{510 * (315 - 90) * 2}{0.005 * 2702 * 900} = -18.8 \text{ °C/s}$$
$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{150} = -\frac{2550 * (150 - 90) * 2}{0.005 * 2702 * 900} = -25.1 \text{ °C/s}$$

b) on intègre l'équation (1) on trouve

$$\frac{T - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{hSt}{\rho V C_P}} = e^{-\frac{2ht}{e\rho C_P}} \quad \text{avec } \frac{s}{V} = \frac{1}{l}$$
$$t = -\frac{e\rho C_P}{2h} \ln \frac{T - T_f}{T_i - T_f}$$

1^{ère} étape :

$$t_1 = -\frac{2702 * 900 * 0.005}{510 * 2} \ln\left(\frac{260 - 90}{500 - 90}\right) = 10.5 \text{ s}$$

2^{ème} étape :

$$t_2 = -\frac{2702 * 900 * 0.005}{2550 * 2} \ln\left(\frac{120 - 90}{260 - 90}\right) = 4.15 \text{ s}$$

Donc :

$$t_{\text{tot}} = t_1 + t_2 = 14.65 \text{ s}$$

Exercice N°3 :

Un solide semi-infini subit sur la face ($x=0$) une élévation de température proportionnelle au temps ($T=k t$). La température initiale est 0°C .

Déterminer le profil de température par la méthode de la transformée de Laplace. Quelle est la température à 10cm à l'intérieur après un temps de 2 mn ?

On donne: $k = 0,5^\circ\text{C/s}$ $a = 0,4 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Solution :

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \dots \dots \dots (1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_0 = 0 \dots \dots \dots (2) \\ T(0, t) = k t \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (1) conduit à :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\theta - T(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad T(x, 0) = 0$$

Cette équation est donc de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad q^2 = \frac{p}{a}$$

Dont la solution est recherchée sous la forme :

$$\theta(x, p) = Ae^{-qx} + Be^{+qx}$$

1- Pour $x \rightarrow \infty$:

$$\theta(\infty, p) = Ae^{-q\infty} + Be^{+q\infty} = 0$$

Donc : $B=0$

Nous en déduisons que :

$$\theta(x, p) = Ae^{-qx}$$

2- La transformée de Laplace de l'équation (3) conduit à :

$$\theta(0, p) = \frac{k}{p^2}$$

D'où :

$$A = \frac{k}{p^2} \quad \text{et} \quad \theta(x, p) = \frac{k}{p^2} e^{-qx}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse conduit au résultat suivant :

$$T(x, t) = k \left[\left(t + \frac{x^2}{2a} \right) * \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) - x \sqrt{\frac{t}{a\pi}} \exp \left[- \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right)^2 \right] \right]$$

Donc :

$$T(10 \text{ cm}, 2 \text{ min}) = 8,6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

LES AILETTES

L'évacuation de la chaleur par le transfert conducto-convectif à partir des corps solides peut être potentiellement amélioré par extension des surfaces d'échange. La procédure d'extension de ces surfaces à une large application industrielle (ailettes attachées aux équipements de transfert de chaleur, afin d'augmenter le taux de chauffage ou de refroidissement).

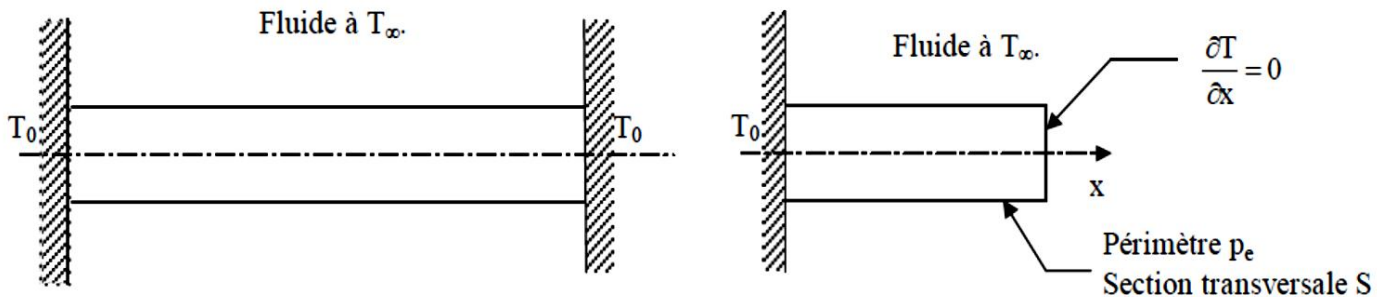
Le flux de chaleur évacué d'un système par transfert conducto-convectif, dépend du type de fluide utilisé (eau ou air) et du type de convection considérée (forcée ou libre). Pour augmenter ce flux, on doit augmenter artificiellement la surface d'échange entre le système et ce fluide.

III.1. L'équation de la barre

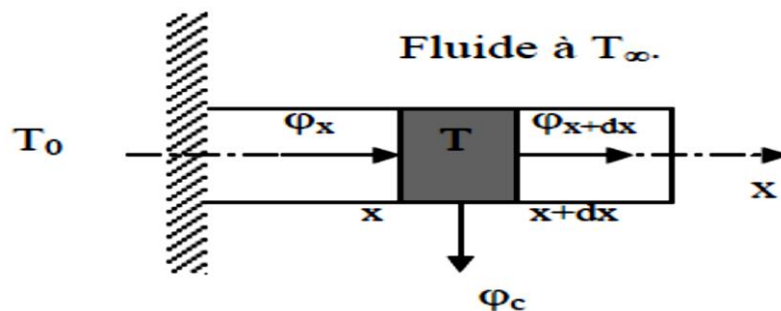
Le problème de la barre encastrée schématise le problème pratique important du refroidissement d'un solide par des ailettes.

Considérons une barre de section constante (épaisseur e et largeur ℓ) encastrée entre 2 surfaces à température T_0 et baignant dans un fluide à température T_∞ .

La symétrie du problème montre l'existence d'un extremum de la température au milieu de la barre ce qui permet de simplifier la géométrie et de ne considérer qu'une demi-barre avec condition de flux nul à l'extrémité située en contact avec le milieu à T_∞ .



La barre est supposée de section suffisamment faible pour qu'il n'y ait pas de variation de température dans une même section droite à une distance x de l'encastrement dans la paroi à T_0 .



Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué par la portion de barre comprise entre les abscisses x et $x + dx$ (nous retenons l'hypothèse du régime permanent et nous négligeons le rayonnement) :

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_c$$

Avec :

$$\begin{aligned}\varphi_x & : \text{Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse } x & \varphi_x &= -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \\ \varphi_{x+dx} & : \text{Flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse } x + dx & \varphi_{x+dx} &= -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} \\ \varphi_c & : \text{Flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre } x \text{ et } x+dx & \varphi_c &= h P_e dx (T(x) - T_\infty)\end{aligned}$$

Soit :

$$\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x = h P_e dx (T(x) - T_\infty)$$

Si λ et S sont indépendants de l'abscisse x , nous obtenons :

$$\lambda S \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} = h P_e (T(x) - T_\infty)$$

Donc $T(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante appelée **équation de la barre** :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h P_e}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

III.2. Flux extrait par une ailette

Une ailette est un milieu bon conducteur de la chaleur dont une dimension est grande devant les autres, exemple : barre d'épaisseur e et de longueur L , avec $e \ll L$. Elles sont utilisées à chaque fois que des densités de flux élevées sont à transmettre dans un encombrement réduit : refroidissement de composants électroniques, refroidissement d'un moteur par air,...

On a établi l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ d'une ailette encastrée dans un mur à la température T_0 et baignant dans un fluide à la température T_∞ :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h P_e}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0$$

En posant :

$$\omega^2 = \frac{h P_e}{\lambda S} \quad \text{et} \quad \theta = T - T_\infty$$

On obtient :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$$

Si la section S est constante, c'est une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \quad \text{ou} \quad \theta = A_1 \text{ch}(\omega x) + B_1 \text{sh}(\omega x)$$

III.2.1. Ailette rectangulaire longue de section constante :

Dans le cas de l'ailette longue, on émet l'hypothèse que : $T(x=L) = T_\infty$, où L est la longueur de l'ailette.

Les conditions aux limites s'écrivent alors : $x = 0 : \theta(0) = T_0 - T_\infty$ (a)

$x = L : \theta(L) = 0$ (b)

$$(b) \Rightarrow A = 0$$

$$(a) \Rightarrow B = T_0 - T_\infty$$

D'où :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\omega x} \dots \dots \dots (2)$$

Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peut être calculé par intégration du flux de convection locale :

$$\varphi_P = \int_0^\infty h P_e (T(x) - T_\infty) dx$$

Ou plus facilement en remarquant que dans le cas du régime permanent, c'est le même que celui transmis par conduction à la base de l'ailette soit : $\varphi_P = \varphi_{x(x=0)}$

$$\varphi_x = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\lambda S (T_0 - T_\infty) (-\omega) e^{-\omega x}$$

Avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{h P_e}{\lambda S}}$$

Donc :

$$\varphi_P = \sqrt{h P_e \lambda S} (T_0 - T_\infty) \dots \dots \dots (3)$$

III.2.2. Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité :

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \text{ (conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases}$$

Pour : $x=0$

$$\begin{aligned} \theta(0) &= A_1 \text{ch}(\omega 0) + B_1 \text{sh}(\omega 0) = T_0 - T_\infty \\ \Rightarrow \theta(0) &= A_1 = T_0 - T_\infty \end{aligned}$$

Pour : $x=L$

On a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = A_1 \omega \text{sh}(\omega x) + B_1 \omega \text{ch}(\omega x)$$

Alors :

$$\begin{aligned} -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} &= -\lambda S \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \\ A_1 \omega \text{sh}(\omega L) + B_1 \omega \text{ch}(\omega L) &= 0 \\ \Rightarrow B_1 &= -\frac{\text{sh}(\omega L)}{\text{ch}(\omega L)} (T_0 - T_\infty) = -\text{th}(\omega L) (T_0 - T_\infty) \end{aligned}$$

Donc la solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \text{ch}(\omega x) - \text{th}(\omega L) \text{sh}(\omega x) = \frac{\text{ch}[\omega(L-x)]}{\text{ch}(\omega L)} \dots \dots \dots (4)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_P = \omega \lambda S \text{th}(\omega L) (T_0 - T_\infty) \dots \dots \dots (5)$$

Remarque :

Si l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ ,

$$\omega \approx \sqrt{\frac{h e}{\lambda}}$$

III.2.3. Ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité :

La solution générale obtenue est identique au cas précédent, ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = h S [T(x=L) - T_\infty] \text{ (conservation du flux de chaleur en } x=L) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\text{ch}[\omega(L-x)] + \frac{h}{\lambda \omega} \text{sh}[\omega(L-x)]}{\text{ch}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega} \text{sh}(\omega L)} \dots \dots \dots (6)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_P = \omega \lambda S (T_0 - T_\infty) \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{1 + \frac{h}{\lambda \omega} \text{th}(\omega L)} \dots \dots \dots (7)$$

Remarque :

Dans le cas où l'épaisseur e de l'ailette est faible devant sa largeur ℓ (ce qui est en général vérifié) :

$\frac{h}{\lambda \omega} = \sqrt{\frac{he}{\lambda}}$. Les ailettes étant en général réalisées en matériau bon conducteur (λ élevé) et ayant une

épaisseur e faible, l'hypothèse $\sqrt{\frac{he}{\lambda}} \ll 1$ est le plus souvent vérifiée, les équations (6) et (7) se ramènent alors aux expressions plus simples des équations (4) et (5) qui sont celles utilisées dans la pratique (Annexe III.1).

III.3. Efficacité d'une ailette

Elle définit les performances d'une ailette en comparant le flux dissipé à celui qui serait dissipé dans une ailette de mêmes dimensions mais dont la température serait uniforme et égale à celle de la base (conductivité thermique $\lambda \rightarrow \infty$, pas de résistance thermique de conduction donc pas de chute de température dans l'ailette).

Le flux échangé par cette ailette idéale serait :

$\varphi_{\max} = h P_e L (T_0 - T_\infty)$: Pour une ailette rectangulaire de périmètre P_e et de longueur L .

L'efficacité de l'ailette s'écrit donc :

$$\eta = \frac{\varphi_P}{\varphi_{\max}}$$

Nous en déduisons les relations suivantes :

III.3.1. Ailette rectangulaire longue ($L \rightarrow \infty$) :

$$\eta = \frac{1}{\omega L}$$

III.3.2. Ailette rectangulaire isolée à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\text{th}(\omega L)}{\omega L}$$

III.3.3. Ailette rectangulaire avec transfert de chaleur à l'extrémité :

$$\eta = \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{\omega L + \frac{hL}{\lambda} \text{th}(\omega L)}$$

Avec : $\omega = \sqrt{\frac{h P_e}{\lambda S}}$

Remarque :

Dans le cas de géométries plus complexes (ailettes à section variable, ailettes aiguilles...), il existe des formules ou des abaques (Annexe) permettant de déterminer l'efficacité des ailettes et ensuite le flux de chaleur ϕ_p extrait par l'ailette grâce à la relation :

$$\phi_p = \eta \phi_{\max}.$$

III.4. Choix des ailettes

Les ailettes sont utilisées lorsqu'il faut extraire une densité de flux importante dans un encombrement réduit, exemples : radiateur d'automobile, carter de moteur refroidi par air, évaporateur de climatiseur, ...

D'une façon générale, l'usage des ailettes est :

- Peu utile pour les liquides car h est grand
- Utile dans le cas des gaz car h est faible.

Des ailettes étroites et rapprochées sont meilleures que des ailettes plus grandes et espacées mais on est limité par les pertes de charges (elles augmentent si l'on diminue trop l'écartement des ailettes). L'ailette est d'autant plus performante que sa conductivité thermique λ est élevée. Le choix des ailettes est alors un compromis entre le coût, l'encombrement, les pertes de charge et le transfert de chaleur.

III.5. Exercices résolus

Exercice N°1 :

Considérons une ailette droite de section circulaire, de diamètre 2 cm et de longueur 10cm exposée à un écoulement convectif avec $h=28 \text{ [W/m}^2 \text{ K]}$. Il est demandé de comparer la distribution de la température dans cette ailette, ainsi que l'écoulement de la chaleur et les efficacités pour trois matériaux différents :

1. L'aluminium avec ($\lambda=200 \text{ W/m.K}$).
2. l'acier inoxydable avec ($\lambda=16 \text{ W/m.K}$).
3. Le verre avec ($\lambda=1,2 \text{ W/m.K}$).

Solution :

On a dans le cas d'une ailette rectangulaire de section constante avec transfert de chaleur à l'extrémité, la distribution de la température est calculée grâce à l'équation suivante :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\text{ch}[\omega(L - x)] + \frac{h}{\lambda \omega} \text{sh}[\omega(L - x)]}{\text{ch}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega} \text{sh}(\omega L)}$$

On a :

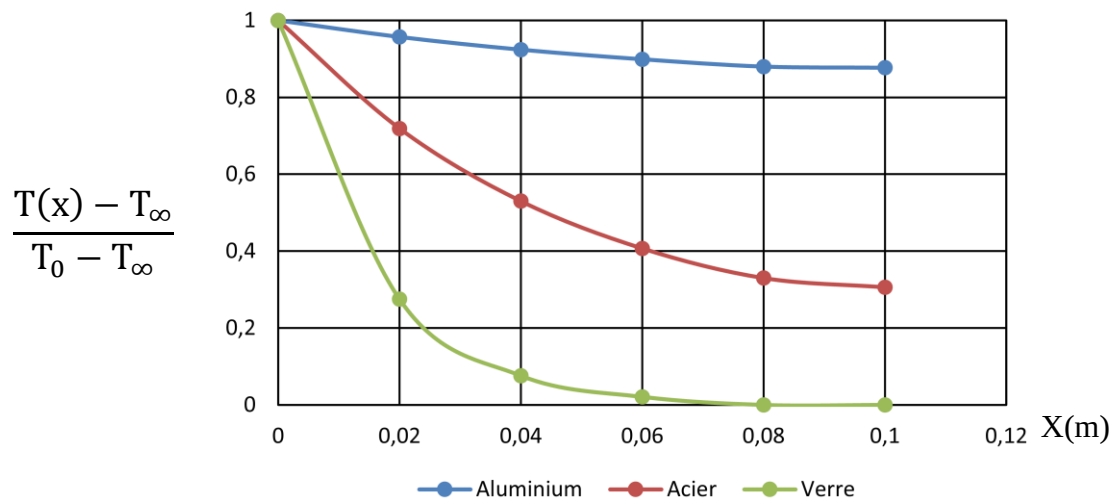
$$\omega = \sqrt{\frac{h P_e}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{25 * \pi * 0,02}{\lambda * \pi * (0,01)^2}} = \sqrt{\frac{5000}{\lambda}} \text{ et } \frac{h}{\lambda \omega} = \frac{25}{\lambda \omega}$$

D'où :

	λ	ω	ωL	$\frac{h}{\lambda \omega}$
Aluminium	200	5,00	0,500	0,025
Acier	16	17,68	1,768	0,088
Verre	1,2	64,55	6,455	0,323

Et la distribution de la température ($T(x) - T_{\infty}/T_0 - T_{\infty}$) peut donc être calculée.

$X(m)$		0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$	Aluminium	1,00	0,957	0,924	0,899	0,88	0,877
	Acier	1,00	0,719	0,530	0,407	0,33	0,306
	Verre	1,00	0,275	0,076	0,021	0,00	0,00



Pour la comparaison, on considèrera que le flux dissipé par l'ailette en aluminium est égal à l'unité, 100%

Expression du flux dissipé est calculé par l'expression :

$$\varphi_P = \omega \lambda S (T_0 - T_\infty) \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{1 + \frac{h}{\lambda \omega} \text{th}(\omega L)}$$

Expression de l'efficacité :

$$\eta = \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{\omega L + \frac{hL}{\lambda} \text{th}(\omega L)}$$

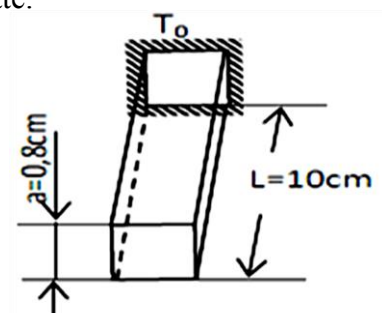
Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Flux (φ_P) %	Efficacité (η)
Aluminium	100	1
Acier	55,9	0,54
Verre	16,1	0,15

Exercice N°2 :

Une ailette en acier de conductivité thermique ($k=18\text{W/m}^\circ\text{C}$), de section carrée ($8\text{mm}\times 8\text{mm}$) et de longueur ($L=10\text{ cm}$) est exposée à un environnement de température $T_\infty=45^\circ\text{C}$ et de coefficient d'échange par convection $h=43\text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. Sa base est maintenue à une température de 256°C .

Calculer l'efficacité et le flux de chaleur perdu par cette ailette.



Solution :

Le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_P = \omega \lambda S (T_0 - T_\infty) \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{1 + \frac{h}{\lambda \omega} \text{th}(\omega L)}$$

Avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{h P_e}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{43 * (4 * 0,008)}{18 * (2 * 0,008)}} = 34,56 \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{h}{\lambda \omega} = \frac{43}{18 * 34,56} = 0,069123$$

Alors :

$$\varphi_P = 34,56 * 18 * 0,000064 (256 - 45) \frac{\text{th}(34,56 * 0,1) + 0,069123}{1 + 0,069123 * \text{th}(34,56 * 0,1)}$$

$$\varphi_P = 8,386 \text{ w}$$

Expression de l'efficacité :

$$\eta = \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{\omega L + \frac{hL}{\lambda} \text{th}(\omega L)} = \frac{\text{th}(34,56 * 0,1) + 0,069123}{34,56 * 0,1 + 0,069123 * \text{th}(34,56 * 0,1)}$$

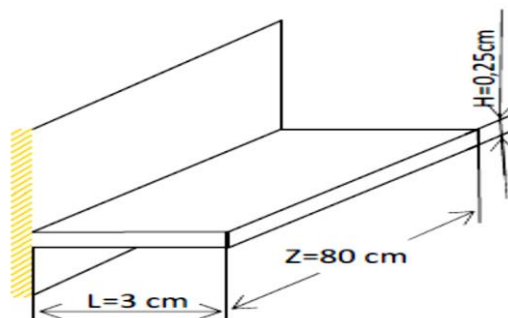
$$\eta = 0,32$$

Exercice N°3 :

Une ailette de section rectangulaire avec 3 cm de longueur, 80 cm de largeur et 0,25 cm de hauteur. Vous avez le choix de deux matériaux avec les propriétés suivantes :

	Aluminium (Al)	Magnésium (Mg)
Conductivité thermique λ [W/m.°C]	200	154
Densité ρ [kg/m ³]	2710	1750

Comparer le flux de chaleur, l'efficacité et le poids des deux ailettes avec cette configuration pour $h=45$ [W/m².°C] et une différence de température $\Delta T=T_0-T_\infty=90^\circ\text{C}$, entre la base de chaque ailette et le milieu ambiant.



Solution :

Le flux total dissipé est :

$$\varphi_P = \omega \lambda S (T_0 - T_\infty) \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{1 + \frac{h}{\lambda \omega} \text{th}(\omega L)}$$

Expression de l'efficacité est :

$$\eta = \frac{\text{th}(\omega L) + \frac{h}{\lambda \omega}}{\omega L + \frac{hL}{\lambda} \text{th}(\omega L)}$$

On a :

$$P_e = 2 * (Z+H) = 2 * (0,8+0,0025) = 1,605 \text{ m}$$

$$S = Z * H = 0,8\text{m} * 0,0025 = 0,002 \text{ m}^2$$

$$P = \rho * V = \rho * S * L$$

$$\omega = \sqrt{\frac{h P_e}{\lambda S}}$$

Les résultats de calcul sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

	Aluminium (Al)	Magnésium (Mg)
P [Kg]	0,1626	0,105
φ_P [W]	191,930	188,875
η	0,9750	0,9593

On remarque que le poids de l'ailette en (Al) est supérieur de (54.85%) à celui de (Mg) et puisque, le flux et l'efficacité de la première (Al) sont légèrement supérieurs à cette dernière (Mg), l'utilisation d'une ailette en (Mg) est recommandée malgré que le prix de revient de l'aluminium soit moins chère devant celui du magnésium.

***DESCRIPTION DES
APPAREILS
D'ÉCHANGE DE CHALEUR***

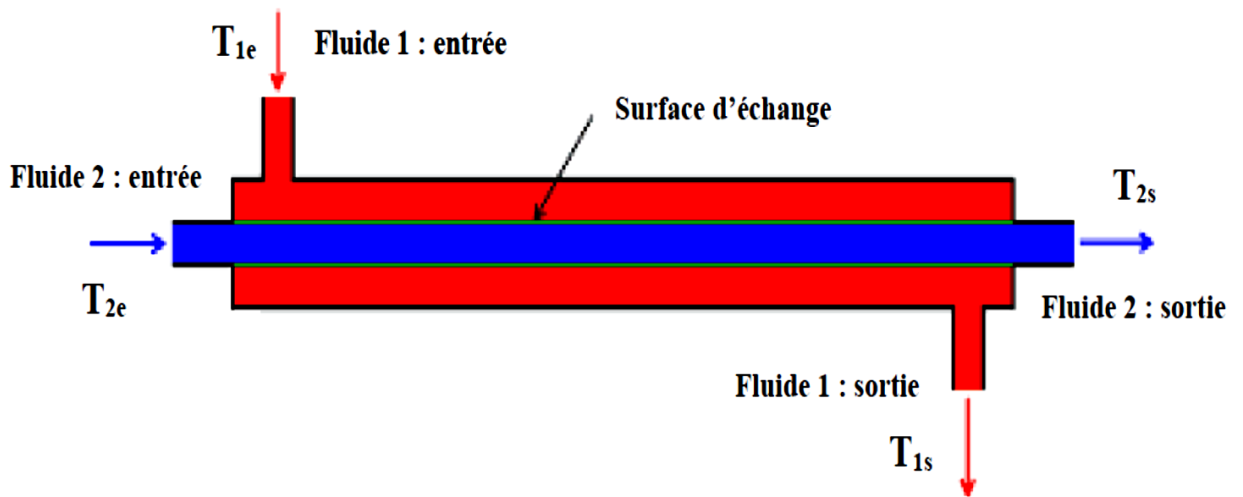
Un échangeur de chaleur est un dispositif permettant de transférer de la chaleur d'une source à un puits de chaleur. Cet échange peut se faire par l'intermédiaire d'une paroi solide sans mélange des fluides ou par mélange entre les deux fluides (cas idéal). Souvent dans les industries, on ne peut pas se permettre de mélanger les deux fluides.

IV.1. Différents modes de circulation dans un échangeur

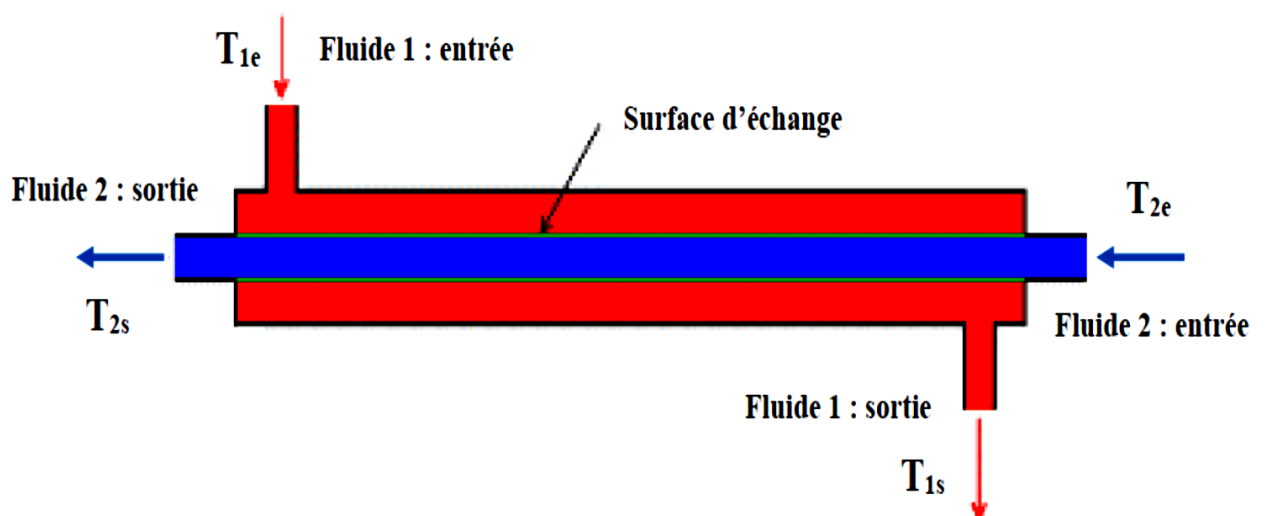
Ce classement est réalisé à partir de la géométrie de l'échangeur et du sens relatif des écoulements des deux fluides. Dans ce qui suit, on représente uniquement les circulations des fluides les plus souvent rencontrées.

IV.1.1. Échangeur à courants parallèles :

Dans cette configuration, les deux fluides s'écoulent dans la même direction. Cette circulation est dite parallèle de même sens ou anti-méthodique (co-courant).

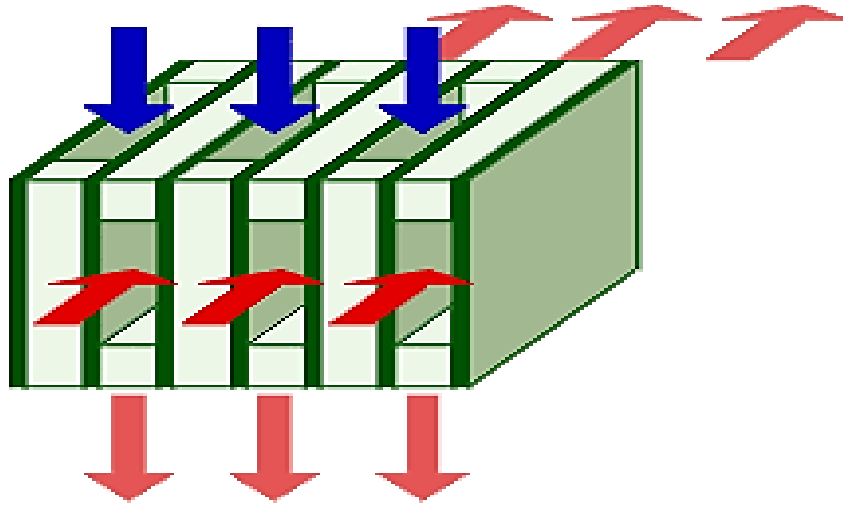


Si la circulation a lieu dans le sens contraire, les écoulements sont dits à contre-courant ou méthodique,



IV.1.2. Échangeur à courants croisés :

Dans ce type d'échangeurs les deux fluides s'écoulent perpendiculairement l'un à l'autre. On remarque, ainsi que le sens d'écoulement est sans importance.



Dans la plupart des cas, l'un des fluides traverse l'écoulement de l'autre fluide plusieurs fois, et l'échangeur est appelé à multiple passe. On distingue deux modes de circulation :

A - Circulation à courants croisés méthodique :

L'un des fluides entre par l'extrémité de l'appareil d'où sort le deuxième fluide.

B - Circulation à courants croisés anti-méthodique :

Les deux fluides entrent par la même extrémité du dispositif.

Remarques :

- 1- Un échangeur est rarement constitué d'un seul tube, en général, on a une multitude d'éléments (un ensemble de tubes ou de plaques, etc.).
- 2- En absence de la paroi séparatrice, il y a mélange direct entre les deux fluides (échangeur mélangeur). Dans ce cas, les deux fluides sont de la même nature ou non miscibles.
- 3- La majorité des échangeurs de chaleur utilisés sont à surface d'échange.

IV.2. Différents types d'échanges

Les échangeurs de chaleur sont diphasiques ou monophasiques :

IV.2.1. Échange sans changement de phase :

Les échangeurs de chaleur sans changement de phase correspondent aux échangeurs dans lesquels l'un des fluides se refroidit pour réchauffer le deuxième fluide sans qu'il y ait changement de phase. Les températures des fluides sont donc variables, tout le long de l'échangeur.

Parmi ces échangeurs on cite les échangeurs : liquide-liquide, gaz-liquide et gaz-gaz.

IV.2.2. Échange avec changement de phase :

Les échanges avec changement de phase sont caractérisés par trois cas différents :

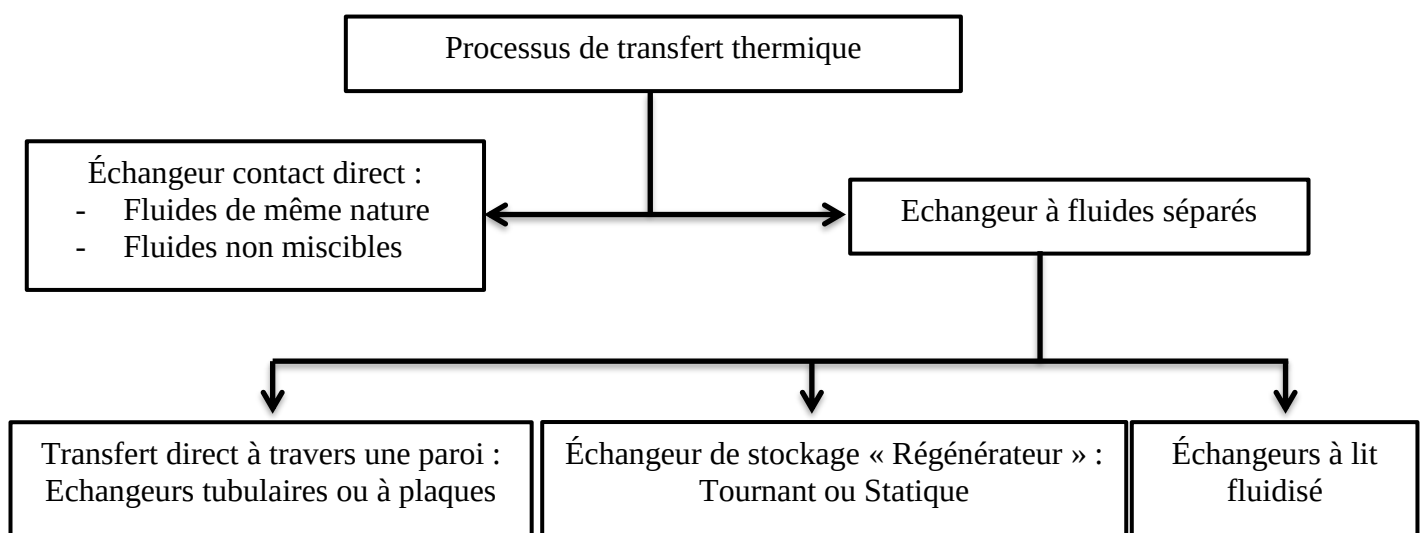
- 1- L'un des fluides se condense alors que l'autre se vaporise. Ces échangeurs sont rencontrés dans les machines frigorifiques installées en cascade. Ces sont les évaporateurs-condenseurs.
- 2- Le fluide secondaire se vaporise en recevant de la chaleur du fluide primaire, lequel ne subit pas de changement d'état. Ils sont appelés évaporateurs.
- 3- Le fluide primaire se condense en cédant sa chaleur latente au fluide secondaire plus froid, lequel ne subit pas de transformation d'état. A titre d'exemple, ce cas est rencontré dans les condenseurs des machines frigorifiques.

IV.3. Classification des échangeurs

Les échangeurs de chaleur peuvent être classés de multiples façons, on ne cite que les groupes qui nous paraissent importants :

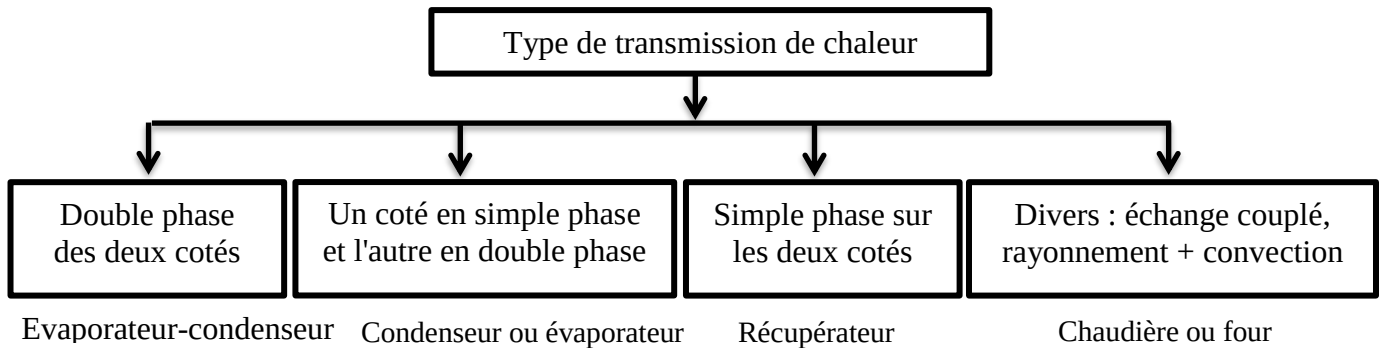
IV.3.1. Suivant le processus de transfert thermique :

On rencontre les appareils suivants :



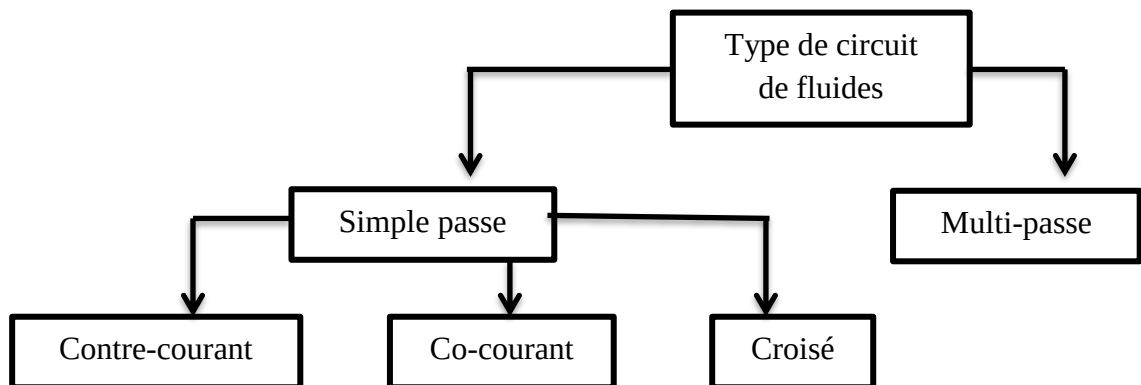
IV.3.2. Suivant le type de transmission de chaleur :

On retrouve les appareils suivants :



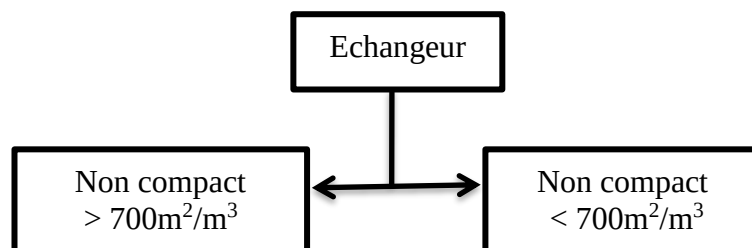
IV.3.3. Suivant le circuit des fluides :

Il existe suivant ce classement les dispositifs suivants :



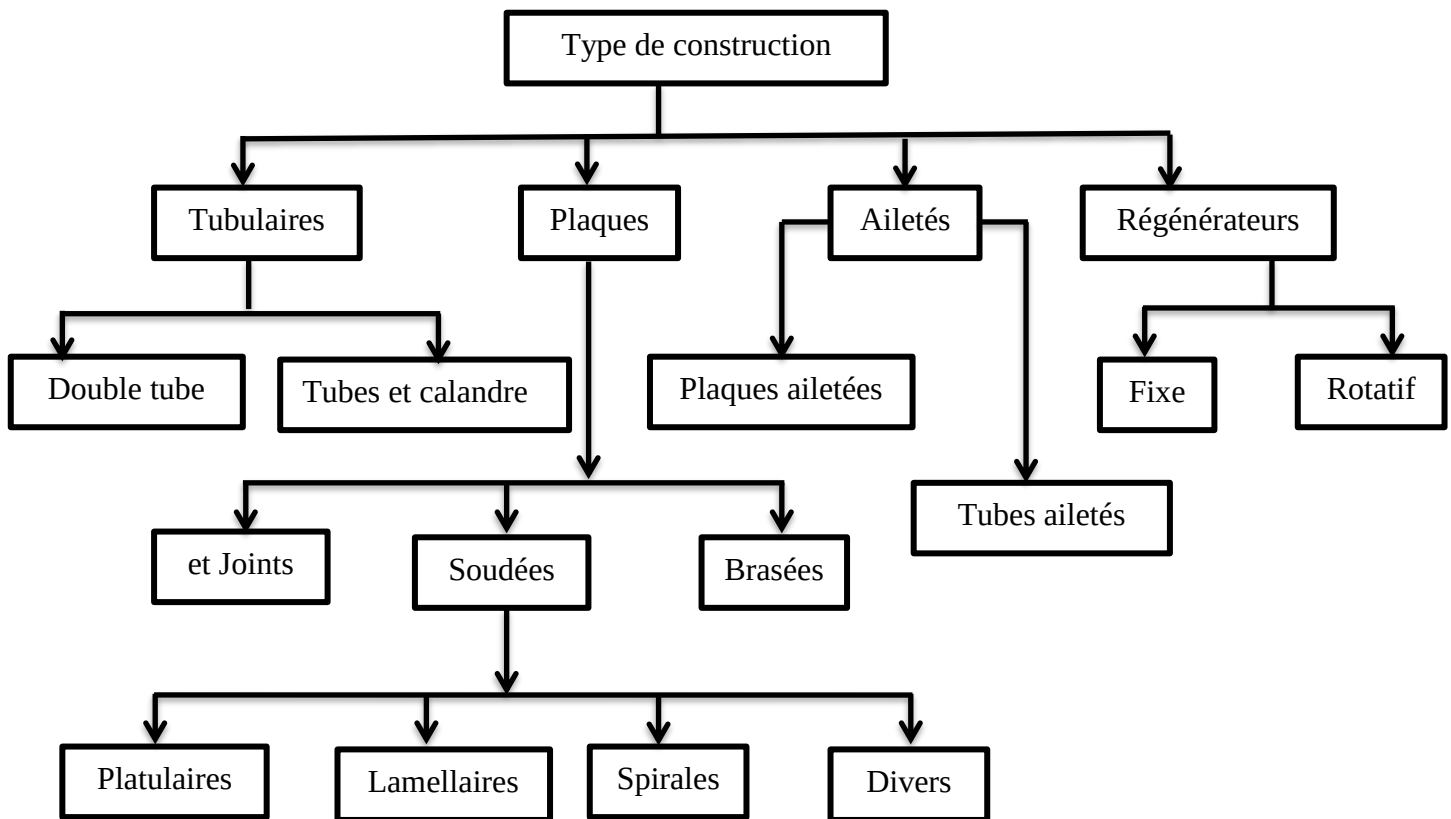
IV.3.4. Suivant la compacité de la surface d'échange :

La compacité d'un échangeur est caractérisée par le rapport de la surface d'échange au volume occupé. On rencontre deux groupes d'échangeurs :



IV.3.5. Suivant le type de construction :

On retrouve quatre grandes familles d'échangeurs

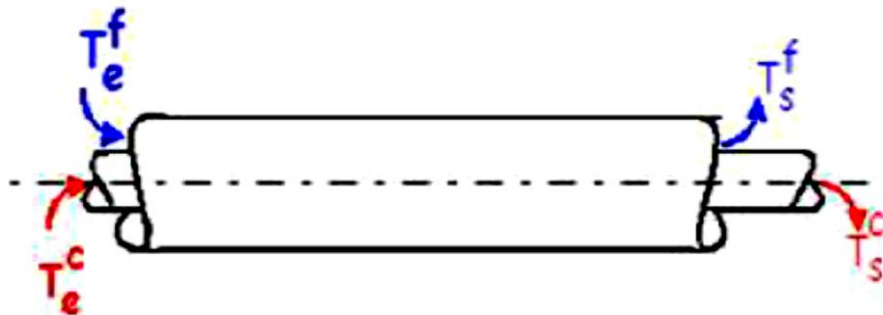


IV.4. Technologies usuelles des échangeurs

Dans ce cours, on cite uniquement les échangeurs de chaleur les plus utilisés (connus):

IV.4.1. Échangeur a double enveloppe :

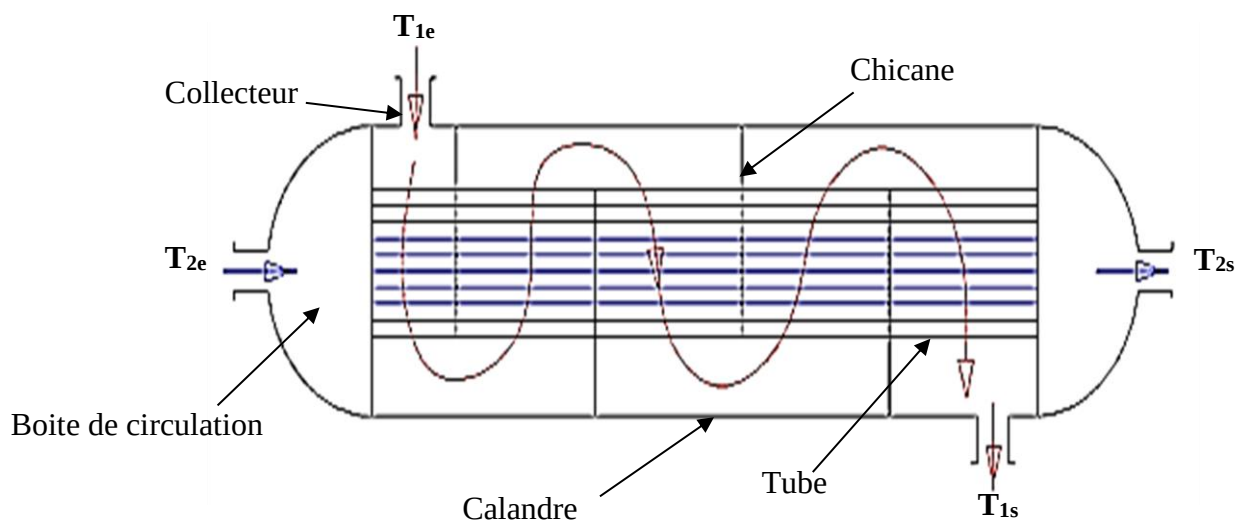
L'échangeur à double enveloppe ou à deux tubes coaxiaux est le plus simple des échangeurs. Le premier fluide s'écoule dans le tube intérieur tandis que l'autre s'écoule dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes. Cet échangeur est à simple passe.



IV.4.2. Échangeur a tubes et calandre :

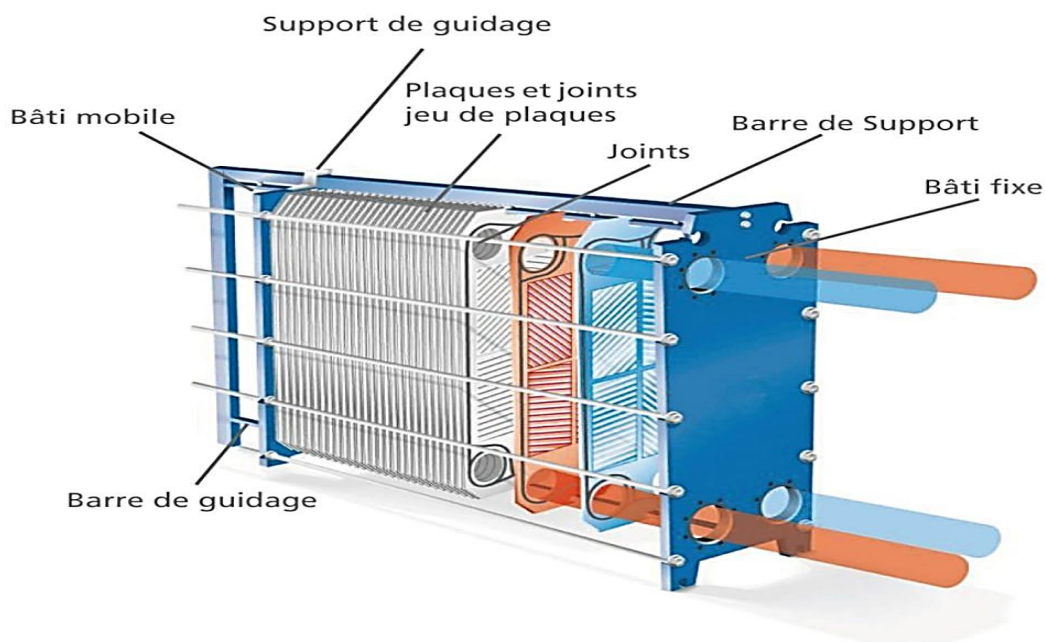
Cet échangeur est à multipasse, il peut être assimilé à une superposition de plusieurs échangeurs à double tube. Les échangeurs à tubes et calandre sont construits de façon différente, selon l'état des fluides présents.

A l'intérieur des tubes le premier fluide peut circuler en plusieurs passes. Le second fluide du côté de la calandre peut circuler à multipasse du fait de la présence des chicanes. Cela permet d'irriguer mieux tous les tubes. Les chicanes peuvent être des plaques trouées de formes : segments, disques, orifices circulaires, troncs circulaires, etc.

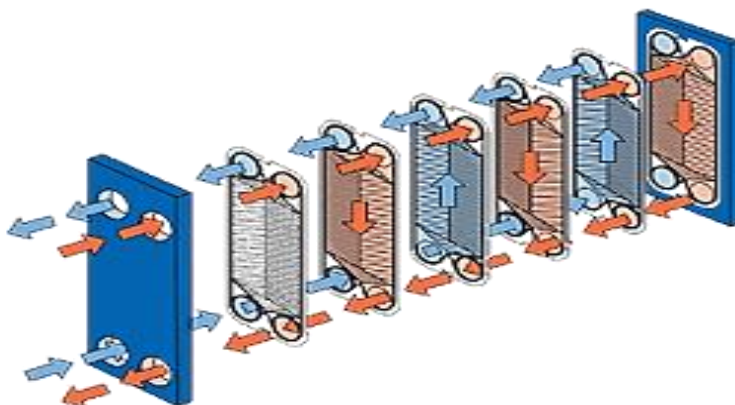


IV.4.3. Échangeur a plaques et joints

L'échangeur à plaque et joints est composé d'un empilement de plaques métalliques séparées par des joints et serrées les unes contre les autres par des tirants (c'est à dire vis et écrous).



Le fluide primaire circule dans les canaux impairs et l'autre fluide dans les canaux pairs. Le type de circulation doit être de préférence à contre-courant.

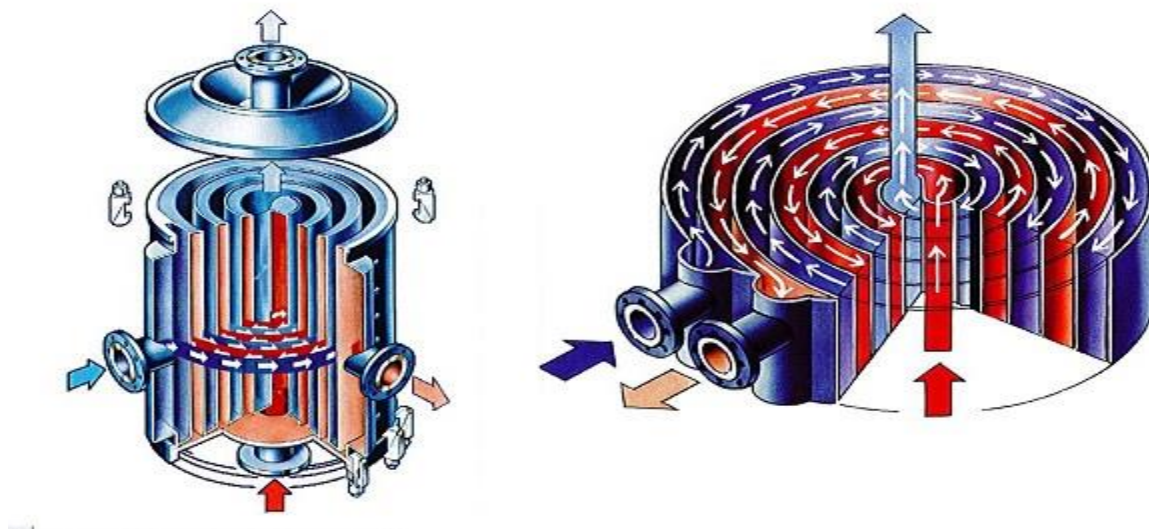


Les plaques peuvent être lisses ou corruguées (ondulées ou à cannelures en chevrons) afin d'intensifier l'échange de chaleur par l'augmentation de la turbulence et de la surface d'échange. Ce dernier type de plaques assure une très bonne tenue mécanique de l'ensemble de l'échangeur.

La pression d'utilisation des échangeurs à plaques et joints est inférieure à 20 bars. La température usuelle maximale ne doit pas dépasser 250°C, cela est due à la tenue des joints.

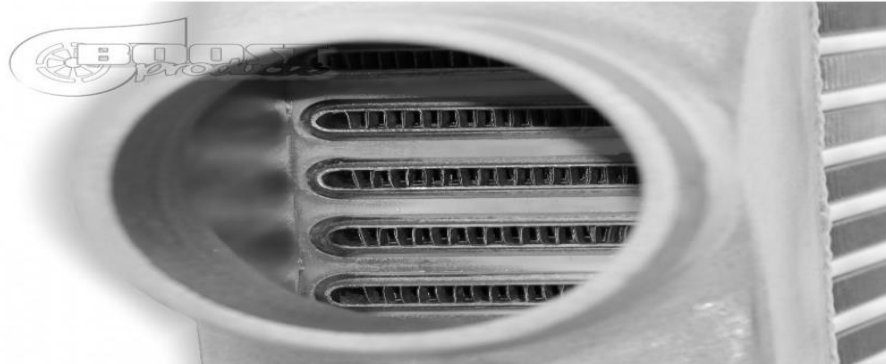
IV.4.4. Échangeur spirale :

C'est un échangeur à plaques soudées, constitué de deux tôles enroulées parallèlement. D'une part, l'un des fluides circule de la périphérie vers le centre de l'appareil et du centre de l'appareil à l'autre périphérie (la sortie). D'autre part, le deuxième fluide qui est souvent le fluide primaire circule directement et perpendiculairement à travers l'échangeur



IV.4.5. Échangeur a lamellaires :

Un échangeur à lamelles est à plaques soudées. Les plaques sont formées par des tôles embouties et soudées deux par deux, formant des lamelles à l'intérieur desquelles circule l'un des fluides. Le tout est inséré dans une calandre dans laquelle circule le deuxième fluide



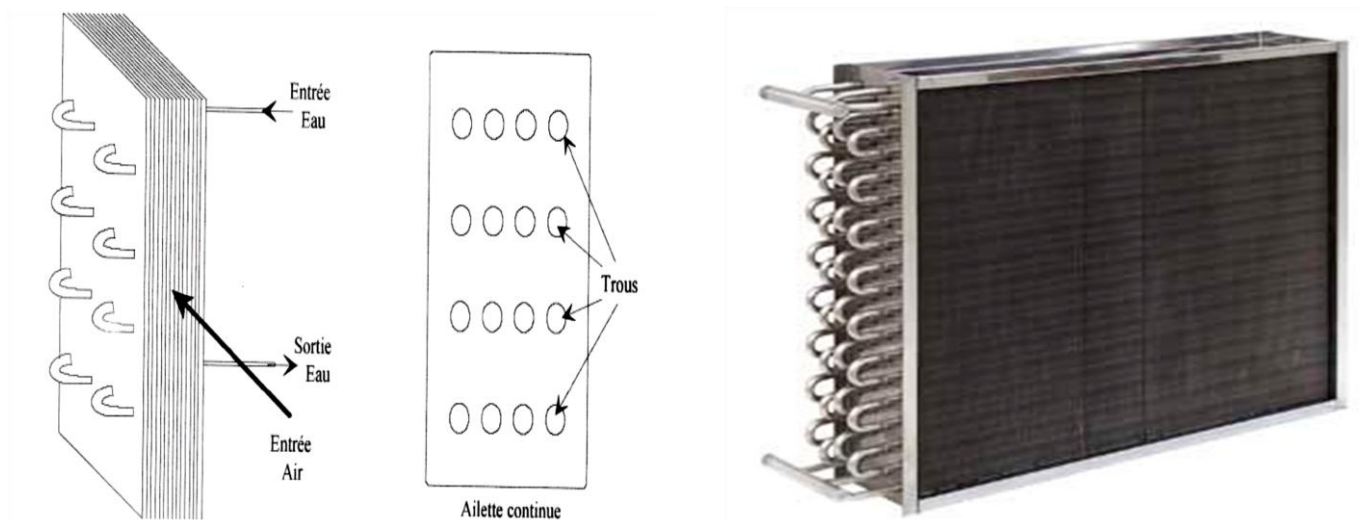
IV.4.6. Batterie à ailettes :

L'échangeur à ailettes continues est appelé batterie à ailettes, et utilisé dans le cas d'un échangeur liquide-gaz, tels que : radiateur de voiture, condenseur d'un climatiseur de fenêtre, etc.

La faible valeur du coefficient convectif du gaz, qui est souvent de l'air, est soignée par la pose des ailettes continues de diverses formes sur la surface d'échange primaire couplé en général par l'utilisation d'un ventilateur.

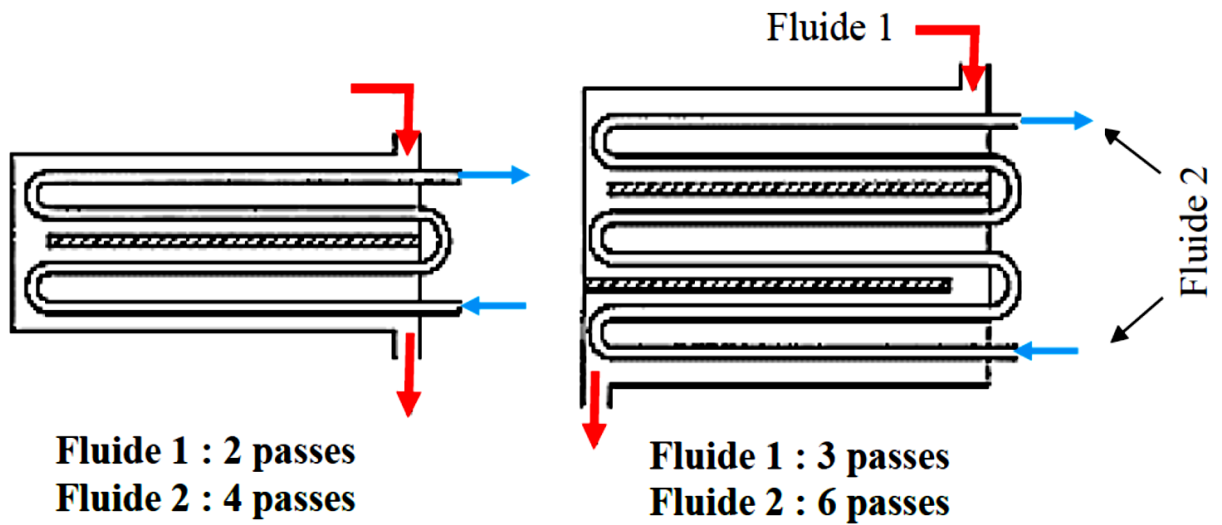
L'ailette est une plaque mince construite dans un métal très bon conducteur (Cuivre, Aluminium, etc.). Elle contient plusieurs trous circulaires par lesquelles passent tous les tubes de la batterie

Un faisceau de tubes contient plusieurs dizaines d'ailettes



IV.4.7. Échangeur a multipasse :

La passe représente un pas de circulation du fluide circulant en aller-retour parallèle dans l'échangeur. L'échangeur à multipasse est utilisé pour augmenter la compacité de l'échangeur.



Dans cette partie, seuls les échangeurs classiques ont été cités. Ces échangeurs sont réalisés en acier ou en cuivre et quand le problème de corrosion intervient l'acier inoxydable (ou le verre) est utilisé. Les échangeurs actuels sont réalisés en alliages légers pour les échangeurs gaz-gaz, de même on remarque l'introduction des échangeurs à paroi mince en plastique pour les récupérateurs gaz-gaz, etc.

Pour le récupérateur gaz-gaz en matière plastique le fluide primaire entre à 20°C et l'air neuf quant à lui entre à -10°C environ.

***CALCUL
DES
ÉCHANGEURS***

Dans l'étude d'un échangeur on cherche à obtenir une puissance d'échange donnée, avec la plus faible surface d'échange et le moins des pertes de charge possible. L'étude complète d'un échangeur fait donc appel à différentes disciplines (thermique, mécanique des fluides, technologie, etc...)

V.1. Évaluation des performances thermique d'un échangeur, en régime permanent

V.1.1. Distribution des températures dans un échangeur à courants parallèles :

Les échangeurs à courants parallèles sont des appareils géométriquement simples où le champ de température peut être considéré comme unidimensionnel. Bien que leur usage soit relativement limité. On rencontre parmi les échangeurs à courants parallèles : des échangeurs à plaques, des échangeurs bitubes (constitués de deux tubes concentriques) et des échangeurs à faisceau de tubes et calandre. Dans tous les cas, le profil de la paroi qui sépare les fluides est rectiligne dans le sens des écoulements.

V.1.1.1. Échangeurs co-courant :

La figure.1 représente une coupe schématisée d'un échangeur co-courant

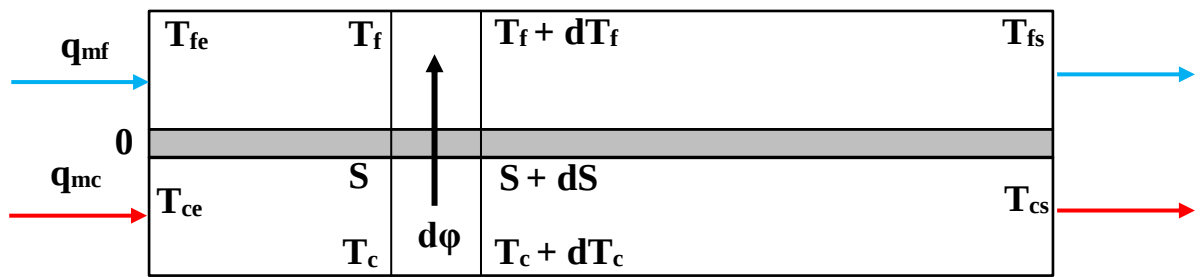


Figure.1 : Schéma d'un échangeur co-courant

Considérons une tranche de l'échangeur correspondant à une surface d'échange dS . Dans cette tranche, le fluide chaud passe de la température T_c à la température $T_c + dT_c$ et le fluide froid de T_f à $T_f + dT_f$. Le flux $d\phi$ transféré à travers dS est :

$$d\phi = k(T_c - T_f)dS \dots\dots(1)$$

D'autre part, $d\phi$ est aussi la variation d'enthalpie de chaque écoulement (au signe près) entre S et $S + dS$, soit :

- Pour le fluide chaud ($dT_c < 0$) :

$$d\phi = -q_{mc} C_{pc} dT_c \dots\dots(2)$$

- Pour le fluide froid ($dT_f > 0$) :

$$d\phi = q_{mf} C_{pf} dT_f \dots\dots(3)$$

Il est commode d'introduire ici la notion de « débit thermique unitaire q_t » (ou débit de capacité calorifique) :

$$q_t = q_m C_p \dots\dots(4)$$

Les équations (2) et (3) s'écrivent donc maintenant :

$$d\phi = -q_{tc} dT_c = q_{tf} dT_f \dots\dots(5)$$

On remarque que la plus forte variation de température sera subie par le fluide qui a le plus petit débit thermique unitaire. On dit que ce fluide « commande le transfert ».

➤ Des équations (1) et (5) on tire :

$$\frac{dT_c}{T_c - T_f} = -\frac{k}{q_{tc}} dS \dots \dots (6)$$

$$\frac{dT_f}{T_c - T_f} = \frac{k}{q_{tf}} dS \dots \dots (7)$$

➤ Et en soustrayant l'équation (7) de (6) :

$$\frac{d(T_c - T_f)}{T_c - T_f} = -\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}\right) k dS \dots \dots (8)$$

Adoptons l'hypothèse : $k = \text{cst}$ dans l'échangeur. Alors l'équation (8) s'intègre immédiatement :

$$\ln(T_c - T_f) = -\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}\right) k S + \text{cte}$$

Pour $S = 0$:

$$T_c - T_f = T_{ce} - T_{fe} \Rightarrow \ln(T_{ce} - T_{fe}) = \text{cte}$$

Alors :

$$\frac{T_c - T_f}{T_{ce} - T_{fe}} = \exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}\right) k S\right] \dots \dots (9)$$

En particulier, à la sortie de l'échangeur, on a $T_c - T_f = T_{cs} - T_{fs}$, et $S = S_T$ surface totale d'échange, de sorte que :

$$\frac{T_{cs} - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}\right) k S_T\right] \dots \dots (10)$$

Examinons maintenant séparément les évolutions de T_c et T_f . Des équation (6) et (9) on tire d'abord, en multipliant membre à membre :

$$\frac{dT_c}{T_{ce} - T_{fe}} = \left\{-\frac{k}{q_{tc}} \exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}\right) k S\right]\right\} dS \dots \dots (11)$$

Soit :

$$\frac{T_c}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{q_{tf}}{q_{tc} + q_{tf}} \exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}\right) k S\right] + \text{cte}$$

Pour $S = 0$, on a $T_c = T_{ce}$ d'où :

$$\text{cte} = \frac{T_{ce}}{T_{ce} - T_{fe}} - \frac{q_{tf}}{q_{tc} + q_{tf}}$$

Donc :

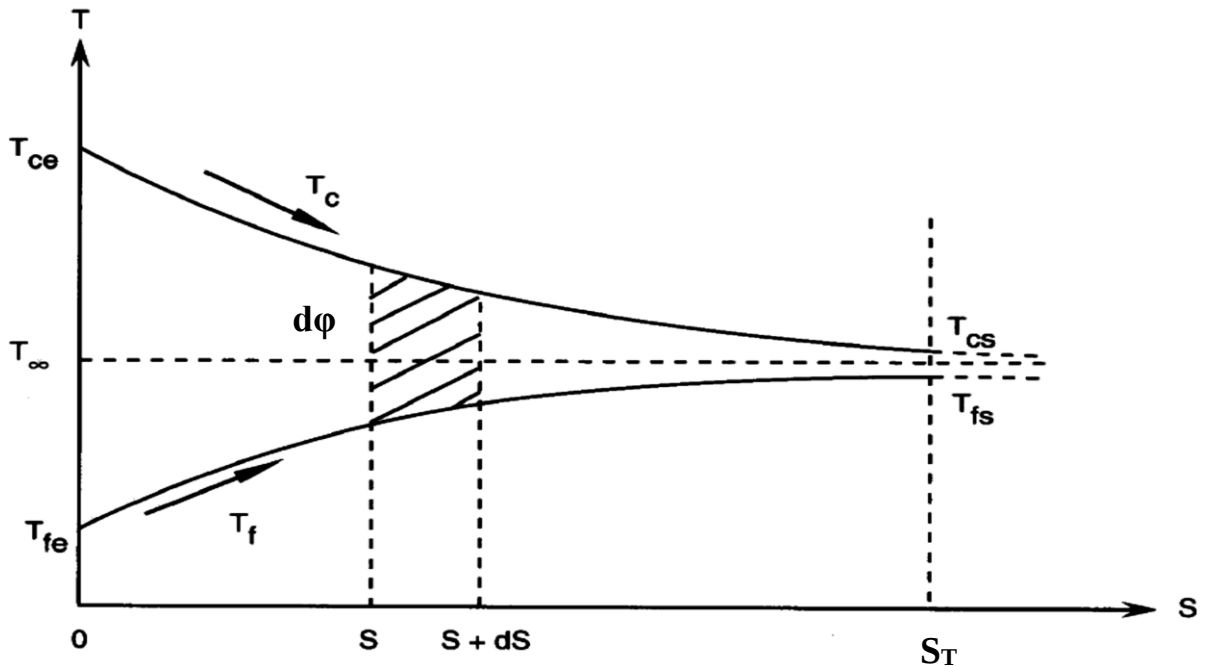
$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fe}} = -\frac{q_{tf}}{q_{tc} + q_{tf}} \left[1 - \exp \left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] \right] \dots \dots \dots (12)$$

La température du fluide chaud est donc une exponentielle décroissante de S.

On obtient de même, en partant des équations (7) et (9) :

$$\frac{T_f - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} \left[1 - \exp \left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] \right] \dots \dots \dots (13)$$

L'évolution de T_c et T_f est représentée sur la figure ci-dessous :



Si $S \rightarrow \infty$, d'après l'équation (9) les températures T_c et T_f tendent vers une même limite T_∞ qui a pour valeur :

$$T_\infty = T_{fe} + \frac{q_{tc}}{q_{tc} + q_{tf}} (T_{ce} - T_{fe})$$

Soit :

$$T_\infty = \frac{q_{tc} T_{ce} + q_{tf} T_{fe}}{q_{tc} + q_{tf}} \dots \dots \dots (14)$$

V.1.1.2. Échangeurs à contre-courant :

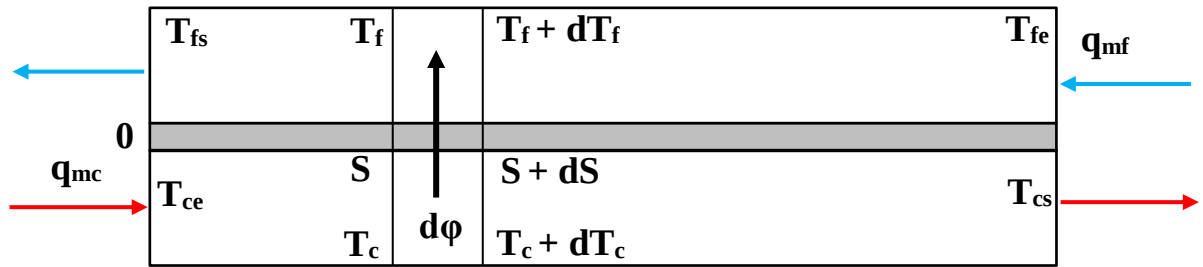


Figure.3 : Échangeur à contre-courant

L'entrée du fluide chaud est maintenant contiguë à la sortie du fluide froid et vice-versa.

Nous supposons toujours que la surface extérieure de l'appareil est parfaitement isolée, et nous choisissons comme sens des abscisses S le sens d'écoulement du fluide chaud :

Pour une variation $dS > 0$ de S on a donc toujours $dT_c < 0$ (T_c décroît dans cette direction) mais également $dT_f < 0$ puisqu'on se dirige vers l'entrée du fluide froid.

L'équation (5) est donc remplacée par :

$$d\phi = -q_{tc} dT_c = -q_{tf} dT_f \dots\dots(15)$$

Avec bien l'équation 1 :

$$d\phi = k(T_c - T_f)dS$$

On obtient :

$$\frac{T_c - T_f}{T_{ce} - T_{fs}} = \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] \dots\dots(16)$$

$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{q_{tf}}{q_{tf} - q_{tc}} \left[\exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] - 1 \right] \dots\dots(17)$$

$$\frac{T_f - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left[\exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] - 1 \right] \dots\dots(18)$$

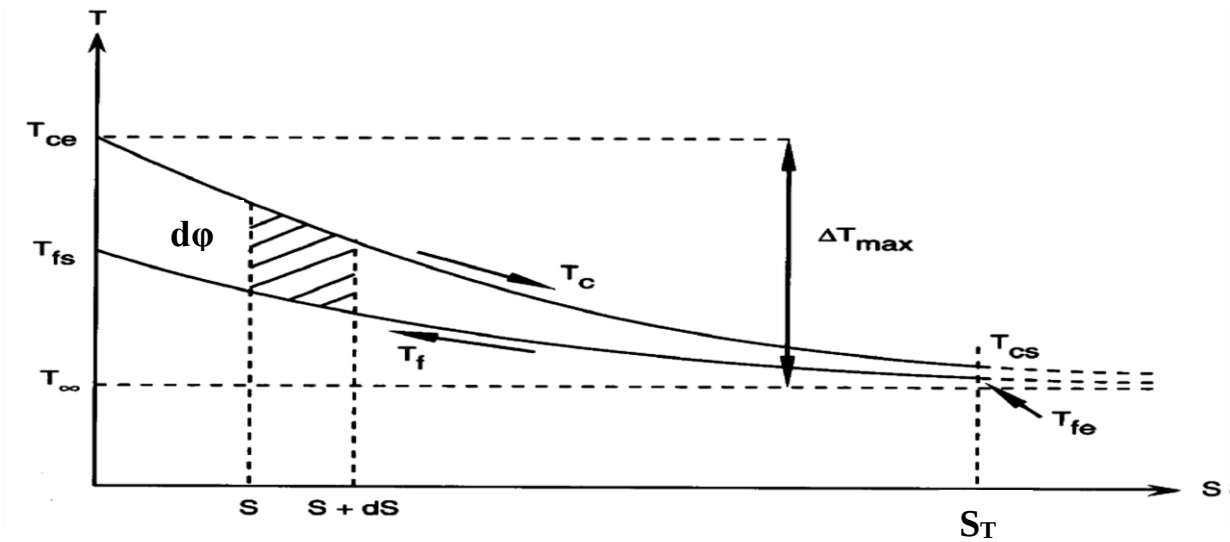
Les conditions aux limites sont :

- Pour $S = 0$: $T_c = T_{ce}$; $T_f = T_{fs}$
- Pour $S = S_T$: $T_c = T_{cs}$; $T_f = T_{fe}$

Contrairement au cas de l'échangeur co-courant, il y a ici trois situations possibles selon que l'on a :

❖ Cas- où $q_{tc} < q_{tf}$

Plaçons-nous d'abord dans le cas où c'est le fluide chaud qui a le plus petit débit thermique unitaire : c'est donc lui qui « commande le transfert ».



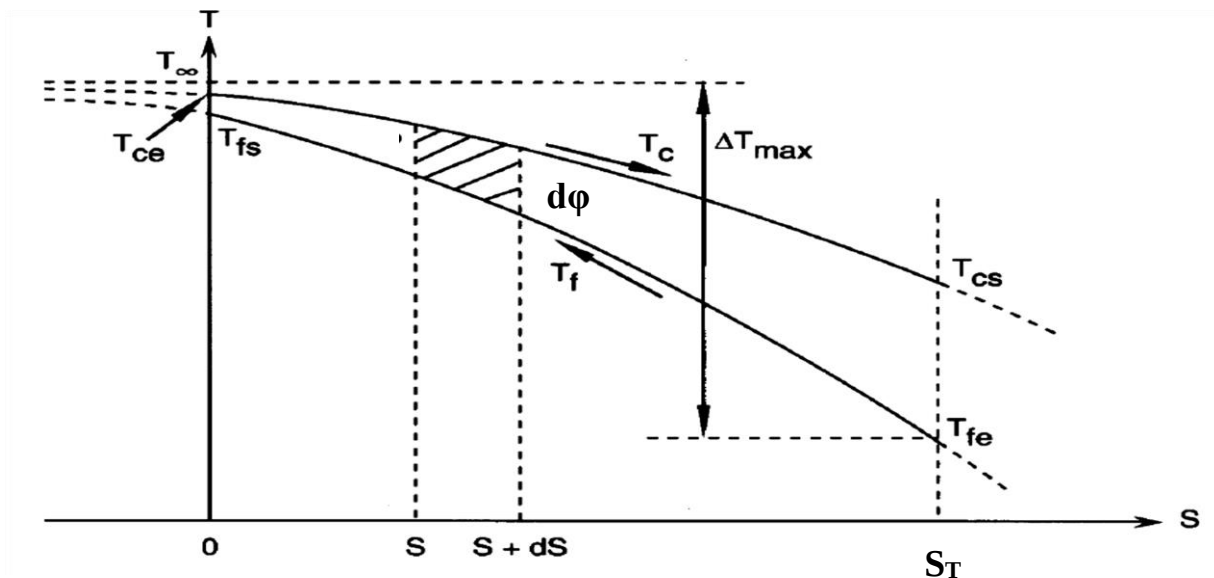
Lorsque $S \rightarrow \infty$, T_c et T_f tendent vers une valeur asymptotique commune désignée par T_∞ :

$$T_\infty = \frac{q_{tf}T_{fs} - q_{tc}T_{ce}}{q_{tf} - q_{tc}} < T_{fe} \text{ et } T_{cs} \dots \dots \dots (19)$$

Si l'échangeur est infiniment long, la température de sortie du fluide chaud est égale à la température d'entrée du fluide froid.

❖ Cas- où **$q_{tf} < q_{tc}$**

C'est ici le fluide froid qui « commande le transfert » puisqu'il a le plus petit débit thermique unitaire.



Considérons un instant S comme une variable définie sur $] - \infty , + \infty [$. Lorsque $S \rightarrow - \infty$, T_c et T_f tendent vers une limite commune T_∞ :

$$T_\infty = \frac{q_{tf}T_{fs} - q_{tc}T_{ce}}{q_{tf} - q_{tc}} > T_{fs} \text{ et } T_{ce}$$

Expression identique à (19). En outre, $T_c - T_f \rightarrow 0$.

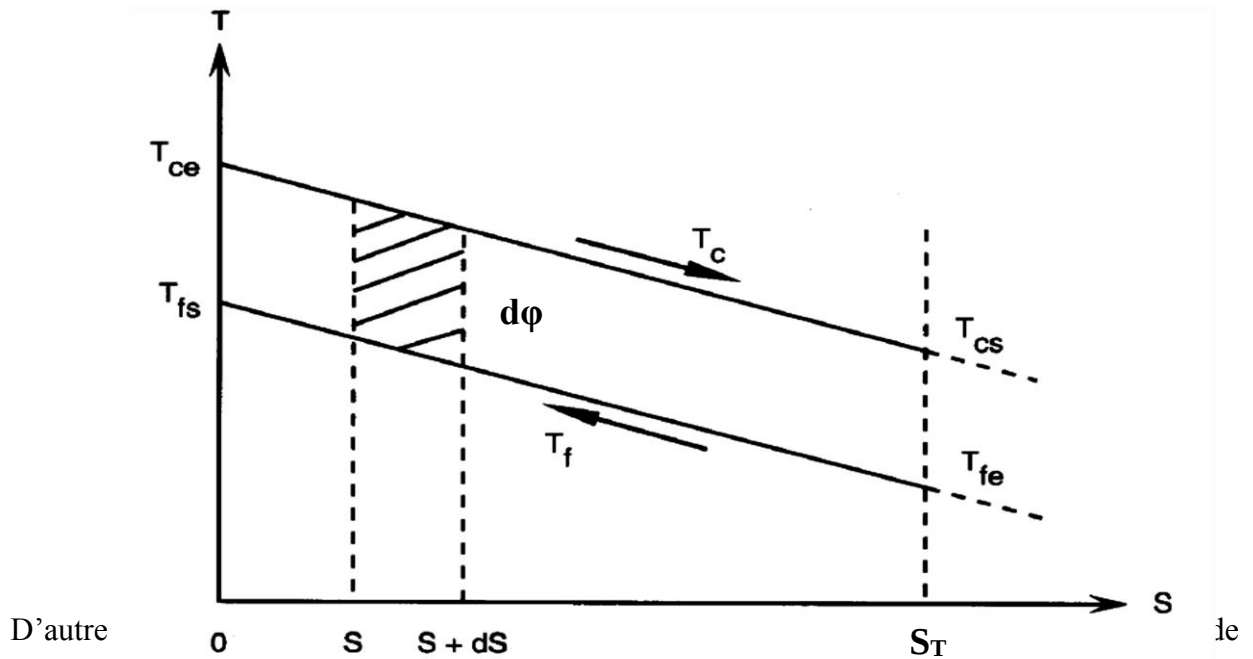
Concrètement, cela signifie que l'écart de température entre les fluides est minimal du côté de l'entrée du fluide chaud, et que cet écart est d'autant plus petit que la surface d'échange S est plus grande.

Pour un échangeur infiniment long, la température de sortie du fluide froid est égale à la température d'entrée du fluide chaud.

❖ Cas- où $q_{tf} = q_{tc}$

Les deux fluides ont le même débit thermique unitaire. On voit d'abord immédiatement que, d'après l'équation (16) :

$$T_c - T_f = \text{cte} = T_{ce} - T_{fs} \dots\dots\dots(20)$$



l'exponentielle au premier ordre donne :

$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} \approx \frac{q_{tf}}{q_{tf} - q_{tc}} \left(-\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) kS = -\frac{kS}{q_{tc}} \dots\dots\dots(21)$$

Et de même pour l'équation (18).

$$\frac{T_f - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} \approx \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left(-\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) kS = -\frac{kS}{q_{tf}} \dots\dots\dots(22)$$

A la limite, lorsque $q_{tf} = q_{tc} = q_t$, on a :

$$\frac{T_c - T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{T_f - T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} = -\frac{kS}{q_t} \dots\dots\dots(23)$$

Les températures T_c et T_f sont des fonctions linéaires de S , représentées par deux droites parallèles.

Remarque : Dans les trois cas examinés il est possible d'avoir $T_{fs} > T_{cs}$, ce qui est une disposition favorable, irréalisable dans un échangeur co-courant.

V.2. Puissance d'un échangeur à courants parallèles

Quel que soit le modèle d'échangeur considéré, le flux transféré localement à travers un élément dS de la surface d'échange est toujours :

$$d\phi = k(T_c - T_f)dS$$

Si l'échangeur est à courants parallèles, appelons « a » l'extrémité pour laquelle $S = 0$ et « b » l'extrémité où $S = S_T$ (figure suivante), ce qui permet de traiter simultanément les configuration co-courant et contre-courant. On notera :

- Pour $S = 0$: $T_c - T_f = \Delta T_a$
- Pour $S = S_T$: $T_c - T_f = \Delta T_b$

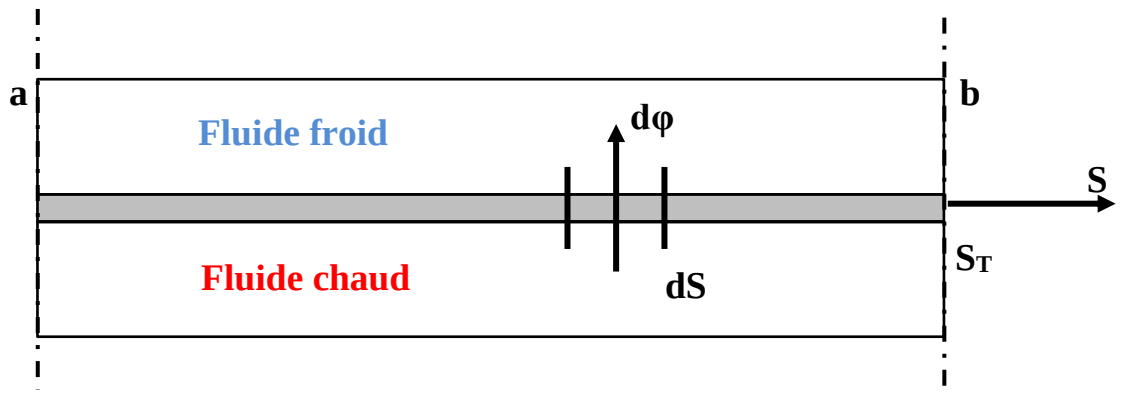


Figure.7 : Schéma général d'un échangeur à courants parallèles

D'après les équations (9) et (16), on peut écrire dans tous les cas (avec + en co-courant et – en contre-courant) :

$$\frac{T_c - T_f}{\Delta T_a} = \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] \dots \dots (24)$$

Et par conséquent :

$$d\phi = k \Delta T_a \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] dS \dots \dots (25)$$

S'appuie sur l'hypothèse $k = \text{cte}$ dans l'échangeur. Alors, l'équation (25) s'intègre facilement pour donner la puissance globale de l'appareil :

$$\phi = k \Delta T_a \int_0^{S_T} \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S \right] dS$$

$$\phi = \Delta T_a \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S_T \right]}{\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}}} \dots \dots (26)$$

A l'extrémité « b », où $S = S_T$ et $T_c - T_f = \Delta T_b$, on a d'après l'équation (24) :

$$\frac{\Delta T_b}{\Delta T_a} = \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S_T \right] \dots \dots (27)$$

D'où :

$$\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} = - \frac{1}{k S_T} \ln \frac{\Delta T_b}{\Delta T_a} \dots \dots (28)$$

Reportons (27) et (28) dans (26) ; cela donne :

$$\varphi = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\frac{1}{k S_T} \ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}} \dots \dots (29)$$

On écrit habituellement :

$$\varphi = k S_T \Delta T_{LM} \dots \dots (30)$$

Et l'on appelle « **différence de température logarithmique moyenne** » (en abrégé **DTLM**) l'expression :

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}} \dots \dots (31)$$

Remarque :

En pratique, cette moyenne logarithmique diffère souvent assez peu de la moyenne arithmétique $[\Delta T_M = (\Delta T_a + \Delta T_b) / 2]$. Par exemple, avec $\Delta T_b / \Delta T_a < 2$, l'écart entre les deux moyennes est inférieur à 4%.

V.3. Flux thermique maximum dans un échangeur

Supposons qu'il ne se produise aucune perte de chaleur externe : la puissance thermique échangée φ peut être calculée indifféremment en faisant un bilan enthalpique global sur l'un ou l'autre des fluides :

$$\varphi = q_{tc} (T_{ce} - T_{cs}) = q_{tf} (T_{fs} - T_{fe}) \dots \dots (32)$$

Jusqu'à quelle valeur ΔT_{max} peut aller cet écart de température ?

Avec l'échangeur co-courant (fig.2), l'écart maximum des températures dans l'appareil est :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{fe}$$

On voit sur la figure que cette variation ne peut être subie par aucun des deux fluides.

Dans le cas de l'échangeur à contre-courant avec $q_{tc} < q_{tf}$, la figure.4 montre que :

$$\Delta T_{max} = T_{ce} - T_{\infty}$$

et que ce $\Delta T_{\max}$ peut être atteint par le fluide chaud si la surface est infiniment grande.

Comme $T_{\infty} \rightarrow T_{fe}$ si $S_T \rightarrow \infty$, on a donc :

$$\Delta T_{\max} = T_{ce} - T_{fe}$$

Enfin, avec un échangeur à contre-courant où $q_{tf} < q_{tc}$, on constate sur la figure.5 que l'écart maximum a pour valeur :

$$\Delta T_{\max} = T_{\infty} - T_{fe}$$

Et qu'il peut cette fois être atteint par le fluide froid si la surface d'échange tend vers l'infini. La encore, puisque $T_{\infty} \rightarrow T_{ce}$ quand $S_T \rightarrow \infty$, on a :

$$\Delta T_{\max} = T_{ce} - T_{fe}$$

Dans les deux derniers exemples, le $\Delta T_{\max}$ est donc accessible au fluide qui possède le plus petit débit thermique unitaire, soit $q_{t\min}$, pourvu que la surface d'échange soit très grande. Le flux maximum transférable est donc :

$$\varphi_{\max} = q_{t\min} \Delta T_{\max} = q_{t\min} (T_{ce} - T_{fe}) \dots \dots (33)$$

Dans tous les autres cas, quel que soit le modèle d'échangeur, on voit aisément qu'aucun des fluides ne peut subir une variation de température supérieure à $T_{ce} - T_{fe}$, car alors il faudrait que le fluide froid sorte à une température supérieure à T_{ce} , ou que le fluide chaud sorte à une température inférieure à T_{fe} . Ceci est physiquement impossible, car ce serait une violation du second principe de la thermodynamique. **L'équation (33) a donc une valeur générale.**

V.4. Efficacité thermique d'un échangeur

Pour caractériser les performances thermiques d'un échangeur, la démarche la plus naturelle paraît être de comparer sa puissance thermique φ avec le flux maximum $\varphi_{\max}$ précédemment défini. On appelle « **efficacité thermique** » E de l'échangeur le rapport $\varphi / \varphi_{\max}$, qui est évidemment sans dimension :

$$E = \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} \quad 0 \leq E \leq 1$$

D'où :

$$E = \frac{q_{tc} (T_{ce} - T_{cs})}{q_{t\min} (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{q_{tf} (T_{fs} - T_{fe})}{q_{t\min} (T_{ce} - T_{fe})} \dots \dots (34)$$

La définition de E ne prend en compte que trois des quatre températures concernées. En d'autres termes, trois quelconques des températures d'entrée-sortie suffisent à caractériser E . Par ailleurs,

l'efficacité maximale $E_{\max} = 1$ est atteinte si l'échangeur est à contre-courant, infiniment long et sans pertes.

Introduisons deux nouvelles grandeurs sans dimension :

1- Efficacité relative côté fluide chaud

$$E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} \dots\dots\dots(35)$$

2- Efficacité relative côté fluide froid

$$E_f = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} \dots\dots\dots(36)$$

Il existe une relation simple entre E_c et E_f .

Soit R le rapport des débits thermiques unitaires, que l'on appelle encore **facteur de déséquilibre** :

$$R = \frac{q_{t\min}}{q_{t\max}} \dots\dots\dots(37)$$

L'ensemble des cas possibles se subdivise en deux :

$$\text{➤ } q_{t\min} = q_{tc}$$

Alors, d'après les équations (34) à (36), on a :

$$E = E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{R} E_f \dots\dots\dots(38)$$

$$R = \frac{E_f}{E_c} = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{cs}}$$

$$\text{➤ } q_{t\min} = q_{tf}$$

$$E = E_f = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{1}{R} E_c \dots\dots\dots(39)$$

$$R = \frac{E_f}{E_c} = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}}$$

Cette efficacité thermique E va servir en particulier à exprimer le flux thermique φ dans l'échangeur :

$$\varphi = E \varphi_{\max}$$

D'où :

$$\varphi = E q_{t\min} (T_{ce} - T_{fe}) \dots\dots\dots(40)$$

Formule qui présente l'avantage de ne faire intervenir que les températures d'entrée des fluides.

V.5. Nombre d'unités de transfert (NUT)

En calculant les écarts de températures d'entrée-sortie dans les échangeurs à courants parallèles, nous avons vu apparaître les rapports kS_T / q_{tc} et kS_T / q_{tf} , qu'ils sont sans dimension.

Ces nombres, représentatifs du pouvoir d'échange de l'appareil, sont appelés « **nombres d'unités de transfert** » et notés NUT_c côté fluide chaud ou NUT_f côté fluide froid :

$$NUT_c = \frac{kS_T}{q_{tc}} \quad ; \quad NUT_f = \frac{kS_T}{q_{tf}} \quad \dots \dots \dots (41)$$

Le nombre d'unités de transfert relatif au fluide qui possède le plus petit débit thermique unitaire q_{tmin} est habituellement désigné par NUT (sans indice) :

$$NUT = \frac{kS_T}{q_{tmin}} \quad \dots \dots \dots (42)$$

V.6. Étude de la fonction $E = f(R, NUT)$

V.6.1. Échangeur co-courant :

Partons de l'expression générale (26) de la puissance dans un échangeur à courants parallèles :

$$\varphi = \Delta T_a \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}} \right) k S_T \right]}{\frac{1}{q_{tc}} \pm \frac{1}{q_{tf}}}$$

Avec pour l'efficacité E , d'après l'équation (40) :

$$E = \frac{\varphi}{q_{tmin} (T_{ce} - T_{fe})}$$

Lorsque l'échangeur est co-courant, la relation donnant φ s'écrit avec :

* $\Delta T_a = T_{ce} - T_{fe}$ (à la section d'abscisse $S = 0$)

* le signe + dans les termes contenant l'alternative $\pm$

D'où l'expression de l'efficacité :

$$E = \frac{1}{q_{tmin}} \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}} \right) k S_T \right]}{\frac{1}{q_{tc}} + \frac{1}{q_{tf}}}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$E = \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{q_{tmin}}{q_{tc}} + \frac{q_{tmin}}{q_{tf}} \right) \frac{k S_T}{q_{tmin}} \right]}{\frac{q_{tmin}}{q_{tc}} + \frac{q_{tmin}}{q_{tf}}} \quad \dots \dots \dots (43)$$

Sachant d'après que :

$$R = \frac{q_{t_{\min}}}{q_{t_{\max}}} \quad NUT = \frac{kS_T}{q_{t_{\min}}}$$

On a dans tous les cas :

$$\frac{q_{t_{\min}}}{q_{tc}} + \frac{q_{t_{\min}}}{q_{tf}} = 1 + R \dots \dots \dots (44)$$

Et par conséquent :

$$E = \frac{1 - \exp[-(1 + R) NUT]}{1 + R} \dots \dots \dots (45)$$

V.6.2. Échangeur à contre-courant :

Le point de départ est le même que dans le cas précédent ; c'est la relation (26), mais avec :

* $\Delta T_a = T_{ce} - T_{fs}$ (dans la section d'abscisse $S = 0$)

* le signe – dans les termes contenant $\pm$

D'où, compte tenu de (40) :

$$E = \frac{T_{ce} - T_{fs}}{q_{t_{\min}}(T_{ce} - T_{fe})} \frac{1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}}\right) k S_T\right]}{\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}}} \dots \dots \dots (46)$$

Calculons d'abord $(T_{ce} - T_{fs}) / (T_{ce} - T_{fe})$, ou plus commodément son inverse. De (16) on tire en faisant $S = 0$ (soit $T_c = T_{ce}$, $T_f = T_{fs}$) :

$$\frac{T_{ce}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} + 1 \dots \dots \dots (47)$$

Et de (18) on tire de même, en faisant $S = S_T$:

$$\frac{T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} = \frac{T_{fs}}{T_{ce} - T_{fs}} + \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left[\exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}}\right) k S_T\right] - 1 \right] \dots \dots \dots (48)$$

En groupant (47) et (48) :

$$\begin{aligned} \frac{T_{ce} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} &= 1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf} - q_{tc}} \left[\exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}}\right) k S_T\right] - 1 \right] \\ \frac{T_{ce} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fs}} &= \frac{1}{q_{tf} - q_{tc}} \left[q_{tf} - q_{tc} \exp\left[-\left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}}\right) k S_T\right] \right] \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

Reportons alors dans l'expression (49) de E et simplifions par $q_{tf} - q_{tc}$; il vient :

$$E = \frac{q_{tc} q_{tf}}{q_{tmin}} \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k S_T \right]}{q_{tf} - q_{tc} \exp \left[- \left(\frac{1}{q_{tc}} - \frac{1}{q_{tf}} \right) k S_T \right]} \dots \dots (50)$$

Il y a maintenant deux cas, suivant que l'on a $q_{tf} < q_{tc}$ ou $q_{tf} > q_{tc}$.

1- Le cas où le fluide chaud commande le transfert ($q_{tmin} = q_{tc}$ soit $q_{tc} < q_{tf}$) :

$$E = \frac{1 - \exp \left[- \left(1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \right) \frac{k S_T}{q_{tc}} \right]}{1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \exp \left[- \left(1 - \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \right) \frac{k S_T}{q_{tc}} \right]} \dots \dots \dots (51)$$

Et, puisque :

$$R = \frac{q_{tmin}}{q_{tmax}} = \frac{q_{tc}}{q_{tf}} \quad \quad \quad NUT = \frac{k S_T}{q_{tmin}} = \frac{k S_T}{q_{tc}}$$

L'équation (51) devient :

$$E = \frac{1 - \exp[-(1 - R) NUT]}{1 - R \exp[-(1 - R) NUT]} \dots \dots \dots (52)$$

2- Le cas où le fluide froid commande le transfert ($q_{tmin} = q_{tf}$ soit $q_{tf} < q_{tc}$) :

On écrit (50) sous la forme :

$$E = \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - 1 \right) \frac{k S_T}{q_{tf}} \right]}{\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - \exp \left[- \left(\frac{q_{tf}}{q_{tc}} - 1 \right) \frac{k S_T}{q_{tf}} \right]} \dots \dots \dots (50)$$

On a maintenant :

$$R = \frac{q_{tf}}{q_{tc}} \quad \quad \quad NUT = \frac{k S_T}{q_{tf}}$$

C'est-à-dire :

$$E = \frac{1 - \exp[-(R - 1) NUT]}{R - \exp[-(R - 1) NUT]}$$

Et puisque $\exp[-(R - 1) NUT] = 1/\exp[-(1 - R) NUT]$, on retrouve l'expression (52).

Quel que soit le fluide qui commande le transfert, l'efficacité d'un échangeur à contre-courant est donc donnée par l'équation (52) :

$$E = \frac{1 - \exp[-(1 - R) NUT]}{1 - R \exp[-(1 - R) NUT]} \dots \dots \dots (52)$$

V.7. Exercices résolus

Exercice N°1 :

Pour refroidir un débit de 9,4 kg/h d'air de 616 °C à 178 °C, on le fait passer dans le tube central d'un échangeur bitube à contre-courant de 1,5 m de long, de 2 cm de diamètre et de faible épaisseur.

- Calculer la puissance calorifique à évacuer.

Le fluide de refroidissement est de l'eau, qui pénètre dans la section annulaire à la température de 16°C avec un débit de 0,6 l/mn.

- Calculer la température de cette eau à la sortie de l'échangeur.
- Déterminer l'efficacité de cet échangeur, puis son NUT.
- En déduire le coefficient d'échange global.

On donne :

$$C_{pc} = 1060 \text{ J / kg K} ; C_{pf} = 4180 \text{ J / kg K}.$$

$$NUT = \frac{1}{1 - R} \ln \frac{1 - ER}{1 - E}$$

Solution :

1) Le flux total peut se calculer côté chaud :

$$\varphi = q_{tc}(T_{ce} - T_{cs})$$

D'après les données, le débit thermique unitaire chaud est :

$$q_{tc} = q_{mc}C_{pc} = \frac{9,4}{3600} * 1060 = 2,77 \text{ W/K}$$

Et alors :

$$\varphi = 2,77(616 - 178) = 1213 \text{ W}$$

2) Le calcul du flux total côté froid va maintenant nous donner T_{fs} :

$$\varphi = q_{tf}(T_{fs} - T_{fe})$$

Avec :

$$q_{tf} = q_{vf}\rho_f C_{pf} = \frac{0,6 * 1}{60} * 4180 = 41,80 \text{ W/K}$$

D'où :

$$T_{fs} = T_{fe} + \frac{\varphi}{q_{tf}} = (16 + 273) + \frac{1213}{41,8} = 318,019 \text{ K} = 45,019^\circ\text{C}$$

On constate que :

$$q_{tmin} = q_{tc} = 2,77 \text{ W/K}$$

D'où l'efficacité :

$$E = E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{616 - 178}{616 - 16} = 0,73$$

Pour un échangeur à contre-courant :

$$NUT = \frac{1}{1-R} \ln \frac{1-ER}{1-E}$$

$$R = \frac{q_{tmin}}{q_{tmax}} = \frac{2,77}{41,8} = 0,066$$

Donc :

$$NUT = \frac{1}{1-0,066} \ln \frac{1-(0,73 * 0,066)}{1-0,73} = 1,35$$

3) De la définition du NUT :

$$NUT = \frac{K * S_T}{q_{tmin}} \Rightarrow K = \frac{NUT * q_{tmin}}{S_T}$$

Puisque l'épaisseur du tube central est faible, on ne fait pas la distinction entre surface d'échange côté chaud et côté froid, et on néglige la résistance thermique de la paroi. Donc :

$$S_T = \pi dL = \pi * 2 * 10^{-2} * 1,5 = 0,094 \text{ m}^2$$

Donc :

$$K = \frac{1,35 * 2,77}{0,094} = 39,8 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Exercice N°2 :

Dans la sous-station de chauffage collectif d'un immeuble on désire installer un échangeur à faisceau tubulaire et calandre, destiné à porter de 40 à 60 °C un débit d'eau de 2.104 kg/h ($C_{pf} = 4180 \text{ J / kg K}$). Le fluide primaire qui circule dans les tubes est de l'eau surchauffée arrivant à 180 °C, à raison de 104 kg/h. Les tubes ont un diamètre intérieur $d = 20 \text{ mm}$; la vitesse d'écoulement adoptée est telle que $Re = 104$. Le coefficient d'échange global h est estimé à $450 \text{ W / m}^2\text{K}$.

On admet pour l'eau surchauffée les caractéristiques thermophysiques suivantes :

$$C_{pc} = 4315 \text{ J / kg K} ; \rho = 920 \text{ kg / m}^3 ; \mu = 19.10^{-5} \text{ kg / m.s.}$$

1. Calculer la puissance ϕ échangée et la température de sortie du fluide chaud.
2. L'échangeur est à contre-courant, avec une seule passe sur chaque fluide, les tubes étant montés en parallèle.

Déterminer :

- la surface d'échange ST nécessaire
- la vitesse dans les tubes
- la section totale des tubes

On donne :

$$NUT = \frac{1}{1-R} \ln \frac{1-ER}{1-E}$$

Solution :

1)

a) Le flux total peut se calculer côté froid :

$$\varphi = q_{tf}(T_{fs} - T_{fe})$$

D'après les données, le débit thermique unitaire froid est :

$$q_{tf} = q_{mf}C_{pf}$$

$$q_{tf} = \frac{2 \cdot 10^4}{3600} * 4180 = 23222,22 \text{ W/K}$$

Et alors :

$$\varphi = 23222,22(60 - 40) = 46444,44 \text{ W}$$

b) Le calcul du flux total côté chaud va maintenant nous donner T_{cs} :

$$\varphi = q_{tc}(T_{ce} - T_{cs})$$

Avec :

$$q_{tc} = q_{mc}C_{pc}$$

$$q_{tc} = \frac{10^4}{3600} * 4315 = 11986,11 \text{ W/K}$$

D'où :

$$T_{cs} = T_{ce} - \frac{\varphi}{q_{tc}}$$

$$T_{cs} = (180 + 273) - \frac{46444,44}{11986,11} = 449,125\text{K} = 176,125^\circ\text{C}$$

2) Les calculs précédents montrent que nous avons ici :

$$q_{tmin} = q_{tc} = 11986,11 \text{ W/K}$$

D'où l'efficacité :

$$E = E_c = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}}$$

$$E = \frac{180 - 176,125}{180 - 40} = 0,276$$

Pour un échangeur à contre-courant :

$$NUT = \frac{1}{1 - R} \ln \frac{1 - ER}{1 - E}$$

$$R = \frac{q_{tmin}}{q_{tmax}} = \frac{11986,11}{23222,22} = 0,516$$

Donc :

$$NUT = \frac{1}{1 - 0,516} \ln \frac{1 - (0,276 * 0,516)}{1 - 0,276} = 0,349 \simeq 0,35$$

- De la définition du NUT :

$$NUT = \frac{h * S_T}{q_{tmin}} \Rightarrow S_T = \frac{NUT * q_{tmin}}{h}$$

Donc :

$$S_T = \frac{0,35 * 11986,11}{450} = 9,32m^2$$

- Le nombre de Reynolds est imposé :

$$Re = 10^4 = \frac{\rho * v * d}{\mu}$$

D'où la vitesse V :

$$v = \frac{Re * \mu}{d * \rho} = \frac{10^4 * 19 * 10^{-5}}{20 * 10^{-3} * 920} = 0,103m/s$$

- La vitesse V est la même dans tous les tubes. Si q_v désigne le débit-volume total, la section totale des tubes est donc :

$$S = \frac{q_v}{v} = \frac{q_m}{\rho * v}$$

$$S = \frac{(10^4/3600)}{920 * 0,103} = 2,93.10^{-2}m^2$$

Exercice N°3 :

Un échangeur à contre-courant fonctionne dans les conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} T_{ce}=350^{\circ}C & T_{fe}=120^{\circ}C \\ T_{cs}=200^{\circ}C & T_{fs}=290^{\circ}C \\ q_{tmin}= q_{tf} & \Phi = 415 \text{ kw} \end{array}$$

1. Quelle est la puissance échangée si on fait travailler l'échangeur en mode co-courant, avec les mêmes températures d'entrée et les mêmes débits ? (Utiliser la méthode NUT).
2. Quelles sont les nouvelles températures de sortie ?

On donne :

$$NUT = \frac{1}{1 - R} \ln \frac{1 - ER}{1 - E}$$

$$E = \frac{1 - \exp[-(1 + R)NUT]}{1 + R} \quad \text{co - courant ; } E = \frac{1 - \exp[-(1 - R)NUT]}{1 - R} \quad \text{contre - courant}$$

Solution :

En contre-courant, avec $q_{\min} = q_{\text{tf}}$, on a pour efficacité :

$$E = E_f = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \frac{290 - 120}{350 - 120} 0.74 \text{ qui vaut } 74\%$$

$$R = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{fs} - T_{fe}} = \frac{350 - 200}{290 - 120} = 0.882$$

Donc :

$$NUT = \frac{1}{1 - R} \ln \frac{1 - ER}{1 - E} = 2.45$$

En circulation co-courant, les débits n'étant pas modifiés, les coefficients d'échange ne le sont pas non plus. On garde donc le même NUT (vu que $NUT = kS_T / q_{\min}$).

Par contre, la nouvelle efficacité E' s'écrit :

$$E' = \frac{1 - \exp[-(1 + R)NUT]}{1 + R} = 0.526$$

Puisque les conditions d'entrée sont identiques dans les deux cas, la nouvelle puissance φ' est telle que :

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{E'}{E} \Rightarrow \varphi' = \frac{E'}{E} \varphi = \frac{0.526}{0.74} 415 = 295 \text{ KW}$$

C'est-à-dire 70% de la puissance en contre-courant.

La nouvelle température de sortie froide T'_{fs} s'obtient à partir de la nouvelle efficacité :

$$E' = \frac{T'_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} \Rightarrow T'_{fs} = E'(T_{ce} - T_{fe}) + T_{fe}$$

$$T'_{fs} = 0.526(350 - 120) + 120 = 240 \text{ °C}$$

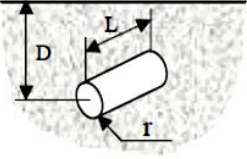
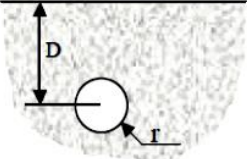
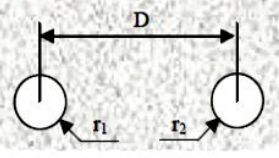
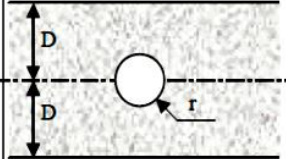
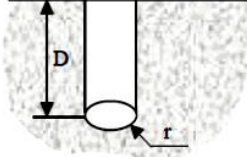
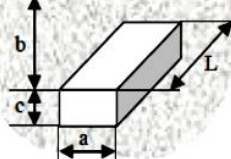
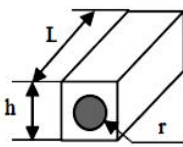
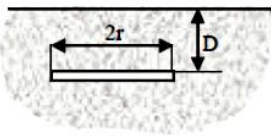
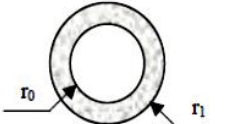
Et la nouvelle température de sortie chaude T'_{cs} à partir de R :

$$R = \frac{T_{ce} - T'_{cs}}{T'_{fs} - T_{fe}} \Rightarrow T'_{cs} = T_{ce} - R(T'_{fs} - T_{fe})$$

$$T'_{cs} = 350 - 0.882(241 - 120) = 243.3 \text{ °C}$$

ANNEXE

Annexe I.1 : Valeur du coefficient de forme de conduction

Système	Schéma	Coefficient de forme	Domaine d'application
Cylindre isotherme de rayon r enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\frac{2 \pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{r}\right)}$	$L \gg r$
Sphère isotherme de rayon r enterrée dans un milieu infini		$4 \pi r$	
Sphère isotherme enterrée dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$\frac{4 \pi r}{1 - \frac{r}{2D}}$	
Conduction entre 2 cylindres isothermes enterrés dans un milieu infini		$\frac{2 \pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2 r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$
Cylindre horizontal au centre dans une plaque infinie		$\frac{2 \pi L}{\ln\left(\frac{4D}{r}\right)}$	
Cylindre isotherme de rayon r placé dans un milieu semi-infini		$\frac{2 \pi L}{\ln\left(\frac{2L}{r}\right)}$	$L \gg 2r$
Parallélépipède rectangle isotherme enterré dans un milieu semi-infini à surface isotherme		$1.685 L \left[\log\left(1 + \frac{b}{a}\right) \right]^{-0.59} \left(\frac{b}{c}\right)^{-0.078}$	
Cylindre au centre d'un parallélépipède de section carrée		$\frac{2 \pi L}{\ln\left(0.54 \frac{h}{r}\right)}$	$L \gg W$
Plaque rectangulaire mince enterrée dans milieu semi-infini à surface isotherme		$4r$ $8r$	$D = 0$ $D \gg 2r$
Sphère creuse		$\frac{4 \pi r_0 r_1}{r_0 - r_1}$	

Annexe II.1 : Transformation de Laplace inverse

$$q = \sqrt{\frac{p}{a}}$$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$	$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t) - \gamma \quad ; \quad \gamma = 0,57721$
1	$\delta(t)$ Dirac	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{p + \beta}$	$e^{-\beta t}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{sh}(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{ch}(\omega t)$
$\frac{b}{p(b + \sqrt{p})}$	$1 - \exp(b^2 t) \text{erfc}(b\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

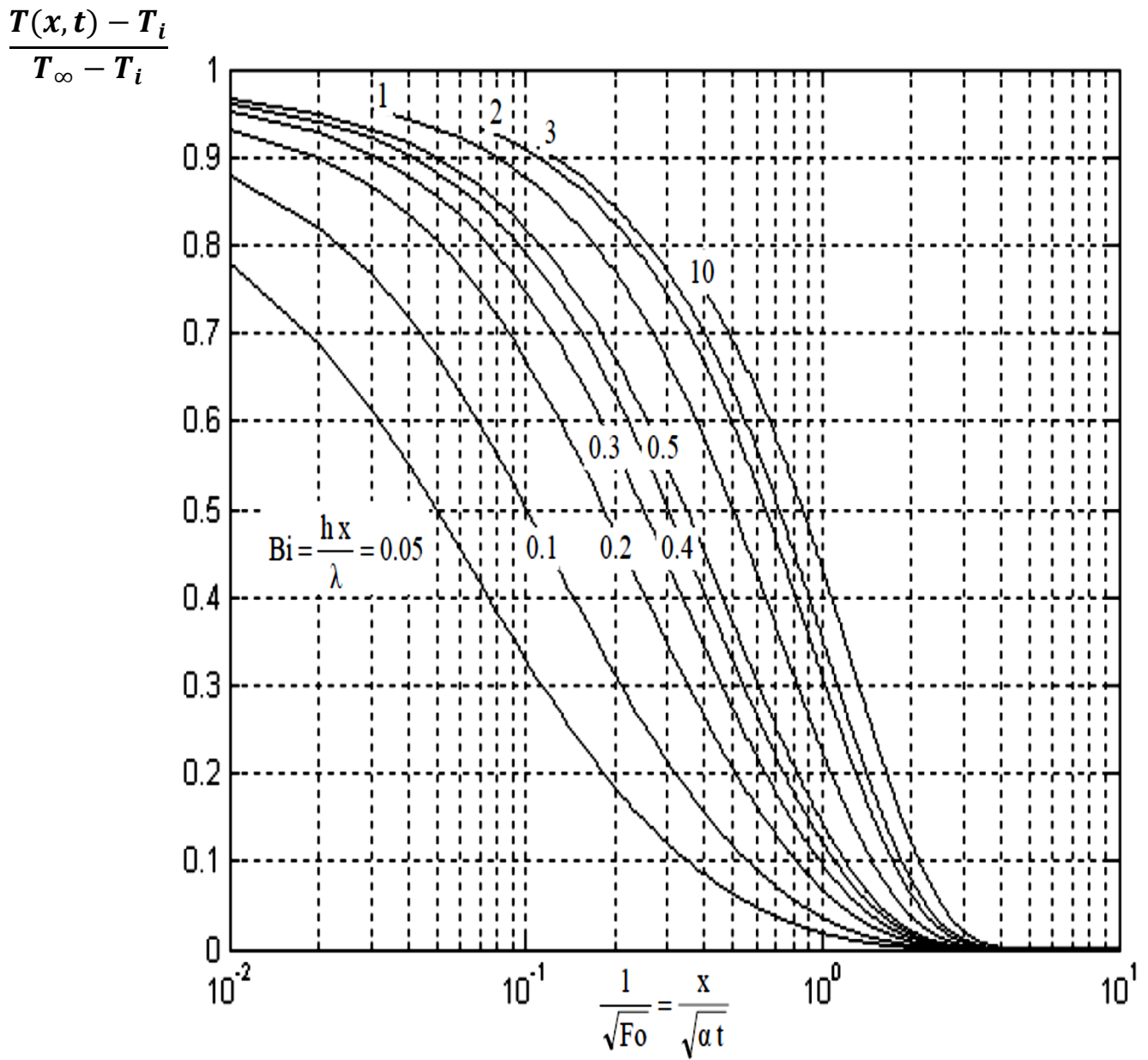
$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
e^{-qx}	$\frac{x}{2\sqrt{\pi \alpha t^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p}$	$\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{pq}$	$2\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p^2}$	$\left(t + \frac{x^2}{2\alpha}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - x \left(\frac{t}{\pi \alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q+h}$	$\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - h \alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$	$\alpha \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$	$\frac{1}{h} \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \frac{1}{h} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{p q (q+h)}$	$\frac{2}{h} \left(\frac{\alpha}{\pi t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{1+h x}{h^2} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{1}{h^2} \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$
$\frac{e^{-qx}}{(q+h)^2}$	$-2 h \left(\frac{\alpha^3 t}{\pi}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha t}\right) + \alpha (1 + h x + 2 h^2 \alpha t) \exp(hx + \alpha t h^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + h\sqrt{\alpha t}\right)$

Annexe II.2 : Valeur de la fonction erf

x	erf x	erfc x	ierf x	x	erf x	erfc x	ierf x
0	0,000000	1,000000	0,564190	1,1	0,880205	0,11980	1,760
0,05	0,056372	0,943628	0,518421	1,2	0,910314	0,08969	2,274
0,1	0,112463	0,887537	0,481106	1,3	0,934008	0,06599	2,972
0,15	0,167996	0,832004	0,452227	1,4	0,952285	0,04772	3,939
0,2	0,222703	0,777297	0,431755	1,5	0,966105	0,03390	5,302
0,25	0,276326	0,723674	0,419658	1,6	0,976378	0,02362	7,260
0,3	0,328627	0,671373	0,415910	1,7	0,983790	0,01621	10,124
0,35	0,379382	0,620618	0,420498	1,8	0,989091	0,01091	14,386
0,4	0,428392	0,571608	0,433440	1,9	0,992790	0,00721	20,842
0,45	0,475482	0,524518	0,454795	2	0,995322	0,00468	30,794
0,5	0,520500	0,479500	0,484684	2,1	0,997021	0,00298	46,409
0,55	0,563323	0,436677	0,523311	2,2	0,998137	0,00186	71,349
0,6	0,603856	0,396144	0,570983	2,3	0,998857	0,00114	111,901
0,65	0,642029	0,357971	0,628143	2,4	0,999311	0,00069	179,043
0,7	0,677801	0,322199	0,695397	2,5	0,999593	0,00041	292,257
0,75	0,711156	0,288844	0,773551	2,6	0,999764	0,00024	486,693
0,8	0,742101	0,257899	0,863656	2,7	0,999866	0,00013	826,860
0,85	0,770668	0,229332	0,967059	2,8	0,999925	0,00008	1433,158
0,9	0,796908	0,203092	1,085464	2,9	0,999959	0,00004	2534,205
0,95	0,820891	0,179109	1,221003	3	0,999978	0,00002	4571,677
1	0,842701	0,157299	1,376328				

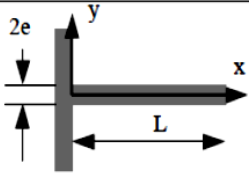
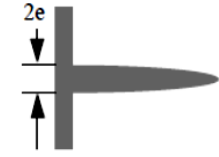
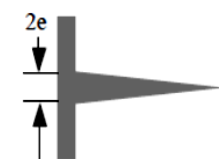
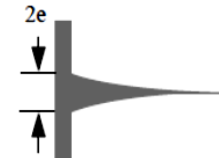
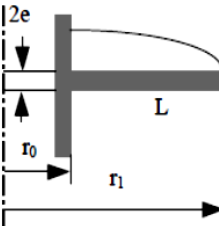
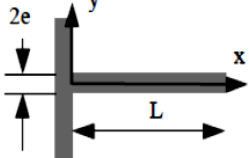
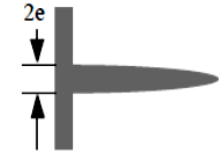
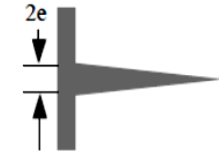
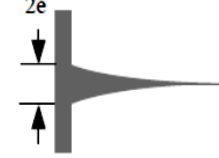
Annexe II.1 : ABAQUE

(Milieu semi-infini avec coefficient de transfert imposé)



Annexe III.1 : Efficacité des ailettes

Hypothèse : Flux nul à l'extrémité de l'ailette, vérifié si $\sqrt{\frac{he}{\lambda}} \ll 1$ (d'après Whitaker, 1983).

Ailette droite	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \text{th}(\omega L) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{h}{\lambda e}}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_{2/3} \left(\frac{4}{3} \omega L \right)}{I_{-1/3} \left(\frac{4}{3} \omega L \right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{1}{\omega L} \frac{I_1(2 \omega L)}{I_0(2 \omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{4(\omega L)^2 + 1} + 1}$
Ailette circulaire	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{2}{\omega L \left(\frac{r_1}{r_0} + 1 \right)} \frac{I_1(\omega r_0) K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1) K_1(\omega r_0)}{I_0(\omega r_0) K_1(\omega r_1) - I_1(\omega r_1) K_0(\omega r_0)}$
Aiguilles (section droite circulaire)	Rectangulaire $y = e$		$\eta = \frac{1}{\sqrt{2} \omega L} \text{th}(\sqrt{2} \omega L)$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\eta = \frac{3}{2 \sqrt{2} \omega L} \frac{I_1 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} \omega L \right)}{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} \omega L \right)}$
	Triangulaire $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)$		$\eta = \frac{\sqrt{2}}{\omega L} \frac{I_2(2 \sqrt{2} \omega L)}{I_1(2 \sqrt{2} \omega L)}$
	Parabolique $y = e \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$		$\eta = \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{9}(\omega L)^2 + 1} + 1}$

RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

A. HADDAD (2001), TRANSFERTS THERMIQUES, Dar -EI- Djazairia

C. BOUGRIOU (2012), CALCUL ET TECHNOLOGIE DES ÉCHANGEURS DE CHALEUR, OPU

H. HOFMANN, PHENOMENES DE TRANSFERT DE CHALEUR ET DE MASSE, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Laboratoire de Technologie des Poudres

H. QUEUILLE, PROBLÈMES CORRIGÉS - Société Française de Thermique

Y. JANNOT (2009), TRANSFERTS THERMIQUES, Ecole des Mines Nancy

Y. JANNOT, A. DEGIOVANNI (2017), THERMAL PROPERTIES MEASUREMENT OF MATERIALS, Séries Editor.

Y. REMOND, R. ITTERBEEK (2020), DYNAMIQUE DES SYSTEMES THERMIQUES - CONDUCTION UNIDIRECTIONNELLE EN REGIME VARIABLE