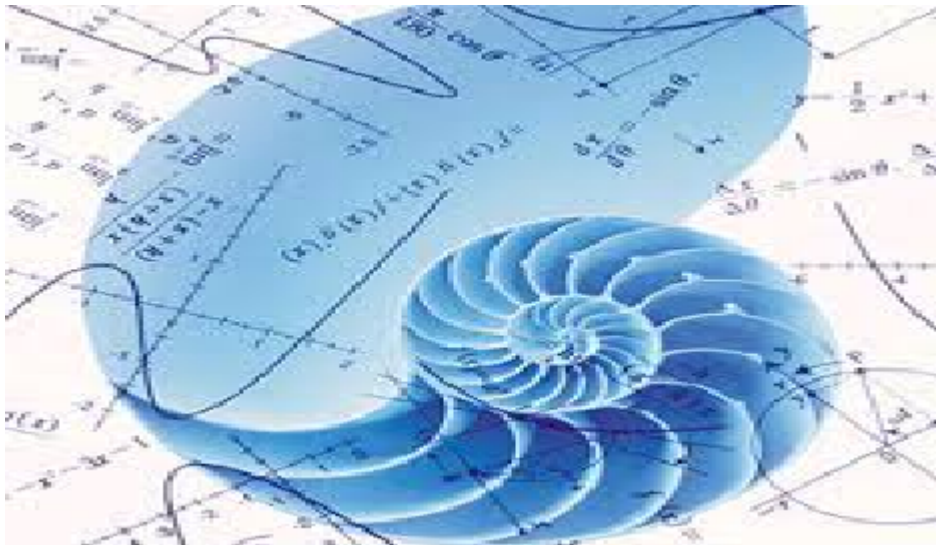


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ AMAR TELDJI, Laghouat



Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques

Cours Et Exercices Corrigés D'analyse Numérique I.



Présentée Par :
Madame ABDESSELAM NAWEL.
U. L. 2021 /2022.

Table des matières

1	Notions d'erreurs.	5
1.1	Introduction	5
1.2	Erreurs absolue et relative	6
1.2.1	Erreur absolue	6
1.3	Erreur relative	7
1.3.1	Majoration des erreurs absolue et relative	7
1.4	Chiffres significatifs	11
1.5	Arrondissement et représentation des nombres.	12
1.6	Exercices.	14
1.7	Corrigés des exercices.	14
2	Interpolation polynomiale.	18
2.1	Position du problème d'interpolation	19
2.2	Existence du polynôme d'interpolation	19
2.3	Erreur d'interpolation	21
2.4	Interpolation de Lagrange	23
2.5	Interpolation de Newton	26
2.5.1	Relation entre différence divisées et les dérivées.	28
2.5.2	Erreur d'interpolation de Newton.	29
2.5.3	Interpolation de Newton dans le cas équidistant	29
2.5.3.1	Différences finies progressives	29
2.5.4	Différences finies régressives.	31
2.5.5	Estimation de l'erreur	31
2.6	Conclusion	32
2.7	Exercices	33

2.8	Corrigés des exercices.	36
3	Dérivation et intégration numérique	42
3.1	Introduction	42
3.2	Dérivation numérique	42
3.2.1	Utilisation de la formule de Taylor.	42
3.2.2	Utilisation des formules d'interpolation.	44
3.3	Erreur.	46
3.3.1	Dérivée premier ordre.	46
3.3.2	Dérivée second d'ordre	47
3.4	Intégration numérique	48
3.4.1	Méthodes des rectangles	48
3.4.2	Méthode des Trapèzes	49
3.4.3	Méthode de Simpson.	49
3.4.4	Erreurs de quadrature	50
3.5	Exercices	53
3.6	Corrigés des exercices.	56
4	Résolution d'équations algébriques.	61
4.1	Introduction	61
4.2	Méthode de Dichotomie (ou bisection).	62
4.3	Algorithme de dichotomie(ou bisection)	62
4.4	Étude de convergence	63
4.5	Méthode de Newton-Raphson	64
4.6	Étude de convergence	65
4.7	Méthode de point fixe	67
4.8	Conclusion.	71
4.9	Exercices	72
4.10	Corrigés des exercices.	76

Introduction

Ce document notes de cours d'analyse numérique avec exercices corrigés recouvre le programme d'analyse numérique I de la deuxième année universitaire L.M.D.

Le lecteur trouvera une partie cours et à la fin de chaque chapitre une partie des exercices corrigés. Il est destiné principalement aux étudiants de la deuxième année L.M.D.

L'analyse numérique est la conception et l'étude d'algorithmes pour obtenir des solutions à des ensembles d'équations issus de modèles issus de la physique, de la biologie, de la finance ...

L'objectif de l'analyse numérique est de concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques (en général issus et de la modélisation de problèmes réels), a titre d'exemples : commande optimale, structure (pneus, carrosserie, ...), biologie mathématique : propagation d'épidémie ..., modèle mathématique en médecine : cardiologie, cancer ..., et bien d'autres applications. En pratique, l'analyse numérique se propose d'étudier les propriétés mathématiques des algorithmes et leur mise en oeuvre (programmation).

Ce polycopie se décompose en quatre chapitres :

Le premier chapitre : Notions d'erreurs.

Le deuxième chapitre : Interpolation polynomiale.

Le troisième chapitre : Dérivation et intégration numérique.

Le dernier chapitre : Résolution d'équations algébriques.

Chapitre 1

Notions d'erreurs.

1.1 Introduction

En général, la résolution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeu. Ces phénomènes sont en général compliqués et multiples. Pour les représenter, on est amené à négliger certains paramètres et à simplifier d'autres. Même avec ces simplifications, les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes analytiques connues. Par exemple, on ne sait pas trouver analytiquement, la solution des équations $x^5 + 3x^4 + 7x + 8 = 0$, $x = e^{-x}$, $\sin x + e^x = 0$, ...etc.

C'est ici que l'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser différents algorithmes de résolution.

Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son degré de précision dépendent des choix que l'on fait. Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à contenir les effets des erreurs ainsi introduites, qui proviennent de trois sources principales :

- Les erreurs de modélisation.
- Les erreurs de représentation sur ordinateur.
- Les erreurs de troncature.

Ce chapitre traite principalement des erreurs numériques. La première source d'erreurs

dans les calculs faits par un ordinateur provient d'abord des erreurs d'arrondi sur les données, puis des opérations effectuées sur les données. Il devrait donc permettre au lecteur de mieux gérer les erreurs au sein des processus numériques afin d'être en mesure de mieux interpréter les résultats. L'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser plusieurs techniques de résolution qui résultent en différents algorithmes.

Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son ordre de précision dépendent des choix que l'on fait. Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à étudier et évaluer les erreurs pour les réduire.

1.2 Erreurs absolue et relative

Les quantités 10 , $\sqrt{2}$, e et $\frac{1}{3}$ sont exactes.

Mais : $\sqrt{2} = 1.414$, $e = 1.71$ et $\frac{1}{3} = 0.333$ sont des quantités approximatives.

Puisqu'il y a toujours un écart entre la valeur exacte et la valeur approchée donc il y a une erreur.

1.2.1 Erreur absolue

Définition 1 Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur absolue de x^* (sur x), est définie par :

$$E_a(x) = |x - x^*|$$

Exemple 1.1.

On suppose que la valeur exacte est $x = 17.001$ et que les valeurs mesurées sont :

$$x_1^* = 16.01, x_2^* = 18.01 \text{ et } x_3^* = 17.$$

Alors, on a

$$E_{a1}(x) = |x - x_1^*| = 0.991$$

$$E_{a2}(x) = |x - x_2^*| = 1.009$$

$$E_{a3}(x) = |x - x_3^*| = 0.001$$

Comme l'erreur absolue $E_{a_3}(x)$ est la plus petite alors $x_3^* = 17$ est la valeur la plus proche de x .

Ainsi la valeur approchée x^* est plus précise lorsque l'erreur absolue de x^* est plus petite.

1.3 Erreur relative

Définition 2 Soit x une quantité à calculer et x^* la valeur calculée (la valeur approchée de x). L'erreur relative est définie par :

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|}.$$

Généralement, on donne l'erreur relative sous la forme de pourcentage tel qu'on multiplie $E_r(x)$ par 100 %.

Exemple 1.2.

On reprend l'exemple précédent $x^* = 17$ valeur approchée de x , alors

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} = \frac{0,001}{|17001|} = \frac{10^{-3}}{17001 \times 10^{-3}} = \frac{1}{17001}.$$

Alors $E_r(x) \approx 6 \times 10^{-3} \%$.

1.3.1 Majoration des erreurs absolue et relative

En pratique, il est difficile d'évaluer les erreurs absolue et relative, car on ne connaît généralement pas la valeur exacte de x et l'on n'a que x^* . Pour les apprécier on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 3 On définit un majorant de l'erreur absolue Δx d'une valeur approchée x^* par :

$$E_a(x) = |x - x^*| \leq \Delta x \Leftrightarrow x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x.$$

tel que Δx est un nombre réel positif.

Définition 4 On définit un majorant de l'erreur relative δx d'une valeur approchée x^* par :

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{|x|} \leq \delta x$$

tel que δx est un nombre réel positif.

Par suite le majorant de l'erreur relative à x^* est défini par

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x^*|}.$$

Dans le cas de quantités mesurées expérimentalement dont on ne connaît que la valeur approximative, on dispose souvent d'une borne supérieure pour l'erreur absolue qui dépend de la précision des instruments de mesure utilisés.

Remarque 1.1

Soit x un nombre tel que $x_1 \leq x \leq x_2$ alors $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$ est une approximation de x avec une majoration de l'erreur absolue $\Delta x = \frac{x_2-x_1}{2}$.

Exemple 1.3.

Une surface est donné par $x = 60 \text{ m}^2 \pm 2\%$. L'erreur relative à la valeur approchée $x^* = 60 \text{ m}^2$ est $\delta x = 0.02$. Alors l'erreur absolue est : $\Delta x = x^* \delta x = 60 \times 0.02 = 1.2 \text{ m}^2$. D'où, la surface exacte est $x \in [x^* - \Delta x, x^* + \Delta x,] = [58.8, 61.2]$.

Proposition 1.1 : (Addition)

Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$.
2. $\delta(x + y) \leq \max(\delta x, \delta y)$.

Preuve.

1. On a

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

et

$$y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y.$$

Alors

$$(x^* + y^*) - (\Delta x + \Delta y) \leq x + y \leq (x^* + y^*) + \Delta x + \Delta y.$$

Ainsi $\Delta x + \Delta y$ est un majorant de l'erreur absolue de $x + y$, donc

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y.$$

2. On a

$$\delta(x + y) = \frac{\Delta(x + y)}{|x^* + y^*|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x^* + y^*|} =$$

$$\frac{\Delta x}{x^*} \frac{x^*}{x^* + y^*} + \frac{\Delta y}{y^*} \frac{y^*}{x^* + y^*} = \delta x \times \lambda_1 + \delta y \times \lambda_2 \text{ ou}$$

$\lambda_1 = \frac{x^*}{x^* + y^*} > 0, \lambda_2 = \frac{y^*}{x^* + y^*} > 0$, et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Alors $\delta(x + y) \leq \max(\delta x, \delta y)\lambda_1 + \max(\delta x, \delta y)\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\max(\delta x, \delta y) = \max(\delta x, \delta y)$. ■

Proposition 1.2 : (Soustraction)

Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$.

2. $\delta(x - y) \leq \frac{x^* + y^*}{x^* - y^*} \max(\delta x, \delta y)$.

Preuve. 1. On a

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

et

$$y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y.$$

Alors

$$(x^* - y^*) - (\Delta x - \Delta y) \leq x - y \leq (x^* - y^*) + \Delta x + \Delta y.$$

Ainsi $\Delta x + \Delta y$, est un majorant de l'erreur absolue de $(x - y)$, et par suite :

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$$

2. On a

$$\begin{aligned} \delta(x - y) &= \frac{\Delta(x - y)}{|x^* - y^*|} \\ &= \frac{\Delta x + \Delta y}{|x^* - y^*|} = \frac{\Delta x}{x^*} \frac{x^*}{x^* - y^*} + \frac{\Delta y}{y^*} \frac{y^*}{x^* - y^*} \\ &= \delta x \times \lambda_1 + \delta y \times \lambda_2 \end{aligned}$$

ou

$$\lambda_1 = \frac{x^*}{x^* - y^*} > 0, \lambda_2 = \frac{y^*}{x^* - y^*} > 0,$$

et

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta(x + y) &\leq \max(\delta x, \delta y)\lambda_1 + \max(\delta x, \delta y)\lambda_2 = \\ &(\lambda_1 + \lambda_2)\max(\delta x, \delta y) = \max(\delta x, \delta y). \end{aligned}$$

Exemple 1.4.

Soient $x^* = 34217$ et $y^* = 34213$ avec $\delta x = 0.1\%$ et $\delta y = 0.01\%$. On a

$$\Delta x = \delta x |x^*| = 0.001 \times 34217 = 34.217$$

$$\Delta y = \delta y |y^*| = 0.0001 \times 34213 = 3.4213.$$

D'où

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y = 37.6383 \approx 38.$$

Alors $x - y = (x - y) \pm \Delta(x - y) = 4 \pm 37.6383$ Et

$$\delta(x - y) = \frac{\Delta(x - y)}{x^* - y^*} = 9.409575 \approx 941\%.$$

■

Proposition 1.3 : (Multiplication)

Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta(xy) = x^* \Delta y + y^* \Delta x;$

2. $\delta(xy) = \delta x + \delta y.$

Proposition 1.4 (Division)

Soient x, y deux valeurs positives, x^* et y^* deux valeurs approchées de x et y respectivement. Alors on a

1. $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^* \Delta y + y^* \Delta x}{y^{*2}};$

2. $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta x + \delta y.$

Preuve. On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$.

En supposant que $x^* - \Delta x > 0$ et $y^* - \Delta y > 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y} \\ \Leftrightarrow \frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} \frac{y^* + \Delta y}{y^* + \Delta y} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y} \frac{y^* + \Delta y}{y^* + \Delta y} \\ \Rightarrow \frac{x^* y^* - y^* \Delta x - x^* \Delta y + \Delta x \Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* y^* + y^* \Delta x + x^* \Delta y + \Delta x \Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2} \\ \frac{-y^* \Delta x - x^* \Delta y}{y^{*2}} &\leq \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \leq \frac{y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}}. \end{aligned}$$

D'où, $\frac{y^* \Delta x + x^* \Delta y}{y^{*2}}$ est un majorant de l'erreur absolue de $\frac{x^*}{y^*}$, donc

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^* \Delta y + y^* \Delta x}{y^*}.$$

2) Pour l'erreur relative, on a

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x^*}{y^*}} = \frac{x^* \Delta y + y^* \Delta x}{y^*} \frac{y^*}{x^*} = \delta x + \delta y.$$

■

1.4 Chiffres significatifs

Définition 5 *Un chiffre significatif d'un nombre approché est le seul chiffre qu'on doit garder, c'est à dire tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro, et un zéro qui se trouve entre deux chiffres, ou il constitue un chiffre conservé.*

Exemple 1.5.

Une approximation à 5 décimales de 0.02010 est 0.02010 les zéros soulignés ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les rangs des autres chiffres.

0.02010 Le zéro souligné étant placé entre les chiffres significatifs 2 et 1, zéro est lui même un chiffre significatif. 0.02010 le zéro souligné traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale 10^{-5} , c'est un chiffre significatif.

Définition 6 *Un chiffre significatif d'un nombre approché x^* est dit exact (c s e) si l'erreur absolue de x^* vérifie :*

$$\Delta x \leq 0.5 \times 10^m.$$

avec m est le rang de ce chiffre significatif.

D'où

- Si $\Delta x \leq 0.5 \times 10^n$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif après la virgule est exact.
- Si $\Delta x \leq 0.5 \times 10^{n-1}$, alors le $n^{\text{ème}}$ chiffre significatif avant la virgule est exact.

Propriétés :

1. Si un chiffre significatif est exact, alors tous les chiffres à sa gauche sont exacts.
2. Si un chiffre n'est pas exact, alors tous ceux à sa droite ne le sont pas.

Exemple 1.6

1. On approche $x = \pi$ au $x^* = 3.14$. On a

$$\Delta(x) = 0.001592 \leq 0.5 \times 10^{-2}.$$

Alors, les trois chiffres 3, 1 et 4 sont des chiffres significatifs exacts.

2. Soient $x = 223.864$ et $x^* = 223.887$, alors

$$x = 0.023 \leq 0.5 \times 10^{-1}$$

D'où, les quatre chiffres significatifs 2, 2, 3, 8 sont exacts.

Remarque 1.2

Il y a une relation entre l'erreur relative et les chiffres significatifs, en effet,

1. Si un nombre approximatif possède n chiffres significatifs exacts, alors son erreur relative est $< 5 \times 10^{-n}$ (sauf si le nombre est 1 suivi de $(n - 1)$ zéros).
2. Si l'erreur relative à x^* est $< 5 \times 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n chiffres significatifs exacts.

1.5 Arrondissement et représentation des nombres.

L'arrondissement d'un nombre à n chiffres significatifs se fait par la règle suivante :

1. Si le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est > 5 , on augmente le $n^{\text{ème}}$ chiffre de 1.
2. Si le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est < 5 , les chiffres retenus restent inchangés.
3. Si le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif est 5 alors on a deux cas :
 - Si tous les chiffres, situés après le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif, sont des zéros. On applique la règle du chiffre pair, c'est à dire si le $n^{\text{ème}}$ est impair on lui ajoute 1, par contre s'il est pair alors on le change pas.
 - Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n + 1)^{\text{ème}}$ chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul. On ajoute 1 au $n^{\text{ème}}$ chiffre.

Exemple 1.7.

1. Arrondir $x = 0.254$ à deux (02) chiffres significatifs. Comme $4 < 5$ alors $x^* \approx 0.25$.
2. Arrondir $x = 0.4368$ à trois (03) chiffres significatifs. Comme $8 > 5$ alors $x^* \approx 0.437$.
3. Arrondir $x = 1.534500$ à quatre (04) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le $4^{\text{ème}}$ chiffre étant pair, on a alors $x^* \approx 1.534$.

4. Arrondir $x = 1.5347500$ à cinq (05) chiffres significatifs. Tous les chiffres rejetés sont des zéros. Le 5^{ème} chiffre étant impair, on a alors $x^* \approx 1.5348$.

5. Arrondir $x = 23.6050420$ à quatre (04) chiffres significatifs. Parmi les chiffres rejetés s'il existe au moins un qui soit non nul. Donc, $x^* \approx 23.61$.

Remarque 1.3

On remarque d'après la règle d'arrondissement que si un nombre x est arrondi à x^* alors

$$\Delta x = |x - x^*| \leq 0.5 \times 10^{m-1}$$

où m est le rang du dernier chiffre significatif retenu.

Exemple 1.8.

1. L'arrondissement de $x = 0.254$ à deux (02) chiffres significatifs est $x^* \approx 0.25$. Alors

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.004 \leq 0.5 \times 10^{-3}.$$

2. L'arrondissement $x = 1.5347500$ à cinq (05) chiffres significatifs est $x^* \approx 1.5348$. Alors

$$\Delta x = |x - x^*| = 0.00005 \leq 0.5 \times 10^{-5}.$$

1.6 Exercices.

Exercice 01 :

1) Arrondir les chiffres suivants à l'entier le plus proche de :

$$627.21; 27.61; 124.8; 56.14; 887.13.$$

2) Donner un arrondi au centième près de :

$$124.8; 56.14; 78.984; 7.106.$$

3) Donner un arrondi au centième près du nombre A tel que :

$$A = \frac{831 - 532}{84}.$$

Exercice 02 :

Soit $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ avec $d = 3.7 \pm 0.05\text{cm}$ et $\pi = 3.14$.

Calculer ΔV et δV .

Exercice 03 :

Soit $\mu = \frac{\sin(\frac{A+B}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$. avec $A = 1.052 \pm 0.003$ et $B = 0.611 \pm 0.006$.

Donner une valeur approchée de la quantité μ .

Exercice 04 :

Soient $x > 0, y > 0$ et x, y leurs approximations respectives.

1) Démontrer que :

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^* \Delta y + y^* \Delta x}{y^*}$$

où Δ désigne majoration de l'erreur absolue.

2) En déduire que $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta x + \delta y$.

Exercice 05 :

1) Donner le nombre de c.s.e des nombres 0.0006814269 et 6.17924, s'ils ont une erreur relative inférieur à 10^{-4} .

2) Si tous les chiffres significatifs de 3724.14 sont exacts. Quelle est son erreur relative.

1.7 Corrigés des exercices.

Solution exercice 01 :

1) L'arrondissement à l'entier le plus proche de :

$$627.21 \approx 627,$$

$$27.61 \approx 28,$$

$$124.8 \approx 125,$$

$$56.14 \approx 56,$$

$$887.13 \approx 887,$$

2) Donnons l'arrondi au centième (0.01 près) :

$$124.8 \approx 124.8,$$

$$56.14 \approx 56.14,$$

$$78.984 \approx 78.98,$$

$$7.106 \approx 7.11,$$

3) Donnons un arrondi au centième près du nombre A tel que :

$$A = \frac{(831 - 532)}{84}.$$

On a :

$$A = \frac{(831 - 532)}{84} = 3.55952381 \approx 3.56.$$

Solution exercice 02 :

On a $\Delta d = 0.05$ et $\Delta \pi = |3.14159 - 3.14| = 0.0016$. Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left| \frac{\delta V}{\delta \pi} \right| \Delta \pi + \left| \frac{\delta V}{\delta d} \right| \Delta d \\ &= \frac{1}{6} d^3 \Delta \pi + \frac{1}{6} 3\pi d^2 \Delta d \\ &= \frac{1}{6} (3.7)^3 (0.0016) + \frac{1}{6} (3.14) (3.7)^2 0.05 \\ &= 1.08817247 \text{ cm}^3 \approx 1.088 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $V = 26.51 \text{ cm}^3$ et on sait que

$$\Delta V = \frac{\delta V}{V}$$

donc $\delta V = 0.041$.

Solution exercice 03 :

On a

$$\Delta \mu = \left| \frac{\delta \mu}{\delta A} \right| \Delta A + \left| \frac{\delta \mu}{\delta B} \right| \Delta B.$$

On a $A = 0.003$ et $B = 0.006$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mu}{\delta A} &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{A}{2})\cos(\frac{A+B}{2}) - \cos(\frac{A}{2})\sin(\frac{A+B}{2})}{(\sin(\frac{A}{2}))^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{A}{2} - \frac{A+B}{2})}{(\sin(\frac{A}{2}))^2} \\ &= -\frac{\sin(\frac{B}{2})}{(\sin(\frac{A}{2}))^2}.\end{aligned}$$

et

$$\frac{\delta\mu}{\delta B} = -\frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{2\sin(\frac{A}{2})}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Delta\mu &= -\frac{\sin(\frac{B}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^2}\Delta A + \frac{\cos(\frac{A+B}{2})}{2\sin(\frac{A}{2})}\Delta B. \\ \Delta\mu &= 5.8156 \times 10^{-3} \pm 0.006.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mu = \mu^* \pm \Delta\mu = 1.472 \pm 0.006.$$

Solution exercice 04 :

On a $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$ et $y^* - \Delta y \leq y \leq y^* + \Delta y$. En supposant que $x^* - \Delta x > 0$ et $y^* - \Delta y > 0$, donc

$$\begin{aligned}\frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y} \\ \Leftrightarrow \frac{x^* - \Delta x}{y^* + \Delta y} \frac{y^* + \Delta y}{y^* + \Delta y} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^* + \Delta x}{y^* - \Delta y} \frac{y^* + \Delta y}{y^* + \Delta y} \\ \Rightarrow \frac{x^*y^* - y^*\Delta x - x^*\Delta y + \Delta x\Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^*y^* + y^*\Delta x + x^*\Delta y + \Delta x\Delta y}{y^{*2} - \Delta y^2}\end{aligned}$$

Si on néglige l'erreur du second ordre Δy^2 et $\Delta x\Delta y$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{x^*y^* - y^*\Delta x - x^*\Delta y}{y^{*2}} &\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^*y^* + y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}} \\ \frac{-y^*\Delta x - x^*\Delta y}{y^{*2}} &\leq \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} \leq \frac{y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}.\end{aligned}$$

D'où, $\frac{y^*\Delta x + x^*\Delta y}{y^{*2}}$ est un majorant de l'erreur absolue de $\frac{x^*}{y^*}$, donc

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{y^*}.$$

2) Pour l'erreur relative, on a

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x^*}{y^*}} = \frac{x^*\Delta y + y^*\Delta x}{y^*} \frac{y^*}{x^*} = \delta x + \delta y.$$

Solution exercice 05

1) Si l'erreur relative à x^* est $< 0.5 \times 10^{-n}$ alors x^* possède au moins n chiffres significatifs exacts.

0.0006814269 possède 7 chiffres significatifs et $\delta(x) \leq 10^{-4} = 0.1 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow x$ possède au moins 3 chiffres significatifs exacts.

$\delta(x) = \frac{\Delta x}{|x^*|} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \Delta x \leq x^* 0.5 \times 10^{-3} = 0.000340713 \times 10^{-3} \leq 0.340713 \times 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$ alors x possède 6 chiffres significatifs exacts.

De la même astuce on trouve 3 chiffres significatifs exacts pour 6.17924.

2) Si tous les chiffres significatifs de 3724.14 sont exacts alors $\delta(x) \leq 0.5 \times 10^{-6}$.

Chapitre 2

Interpolation polynomiale.

L'interpolation polynomiale est d'une grande importance dans l'analyse numérique : dérivation et intégration, résolution des équations différentielles,...

Ce chapitre ainsi que le chapitre suivant qui porte sur l'intégration numérique sont très étroitement reliés puisqu'ils tendent à répondre à même problème. Ce problème est le suivant : à partir d'une fonction $f(x)$ connue seulement en $(n + 1)$ points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, peut-on construire une approximation de $f(x)$?

Les x_i sont appelés abscisses ou noeuds d'interpolation tandis que les couples $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$ sont les points de collocation ou points d'interpolation et peuvent provenir de données expérimentale ou d'une table. En d'autres termes, si l'on ne connaît que les points de collocation $(x_i, f(x_i))$ d'une fonction, peut-on obtenir une bonne approximation de $f(x)$ pour une valeur différente des x_i ?

Il s'agit d'un problème d'interpolation, dont la solution est relativement simple. Il suffit de construire un polynôme de degré suffisamment élevé dont la courbe passe par les points de collocation.

On parle alors du polynôme de collocation ou polynôme d'interpolation. Pour obtenir une approximation des dérivées ou de l'intégrale, il suffit de dériver ou d'intégrer le polynôme de collocation.

2.1 Position du problème d'interpolation

Soient $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n, (n + 1)$ couples de valeurs réelles. Des telles valeurs peuvent être le résultat de mesures effectuées expérimentalement. Le but du problème d'interpolation est de déterminer une fonction F -appartenant à une certaine classe- qui passe par les points (x_i, y_i) donnés, c'est à dire $F(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$. Les points (x_i, y_i) sont appelés les points d'interpolation.

Exemple 2.1.

En physique, on mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à différents temps t_i . On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement la plus proche possible des points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction en des points non mesurés. Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les polynômes. Il est donc important de savoir approximer une fonction arbitraire par des polynômes. L'interpolation polynomiale consiste à chercher la fonction F sous forme d'un polynôme. C'est à ce cas qu'on va s'intéresser dans ce chapitre.

Existe-t-il un polynôme P tel que $P(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$?

2.2 Existence du polynôme d'interpolation

Théorème 1 Soit $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$, avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, il existe un polynôme et un seul $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$P_n(x_i) = y_i; i = 0, 1, \dots, n.$$

Preuve. Soit $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ tel que :

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Alors on a $(n + 1)$ équations et $n + 1$ inconnus comme suit :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \dots\dots\dots, \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

C'est un système linéaire par rapport à $a_i, i = 0, \dots, n$, on peut l'écrire sous forme matricielle :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de ce système s'appelle la matrice de Vandermonde¹. Le déterminant de la matrice V est non nul si les x_i sont distincts deux à deux. Donc, on obtient l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation.

En effet, on note $\det V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. On a le déterminant $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ est un polynôme de degré n en x dont les racines sont x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Ceci implique que

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = A \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

avec A est une constante à déterminer. On développe

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdot & \cdot & \cdot & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Suivant la dernière ligne et la dernière colonne, on obtient que le coefficient de x_n est $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Alors d'après la relation précédente, la constante A coefficient de x_n est égale à $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Par conséquent, on obtient la formule :

$$\begin{aligned} V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) \\ &= V(x_0, x_1, \dots, x_{n-2})(x_{n-1} - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\det V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{j>i}^n (x_j - x_i).$$

1. Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris 1735 - 1796

■

Remarque 2.1

On peut vérifier cette formule par récurrence.

On voit bien que

$$\det V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \neq 0 \text{ si } x_i \neq x_j, i \neq j.$$

Définition 7 L'unique polynôme de degré n passant par les points $(x_i, f(x_i))$

pour $i = 0, \dots, n$, est appelé l'interpolant de $f(x)$ de degré inférieur ou égal à n aux abscisses (noeuds) x_0, x_1, \dots, x_n .

Exemple 2.2.

Trouver l'interpolation linéaire de la fonction f tel que :

$$f(0.1) = 0.1003 = y_0, f(0.4) = 0.4228 = y_1.$$

On cherche le polynôme $P(x) = a_0 + a_1x$ utilisant la matrice de Vandermonde. On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.1003 \\ 0.4228 \end{pmatrix}. \\ &= \frac{1}{0.3} \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1003 \\ 0.4228 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0072 \\ 1.075 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, $P(x) = -0.0072 + 1.075x$.

Remarque 2.2

Le polynôme d'interpolation par la matrice de Vandermonde n'est pas facile à calculer.

On doit envisager d'autres stratégies pour le calculer directement.

2.3 Erreur d'interpolation

Lemme Soit f une fonction k fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

On suppose qu'il existe $(k + 1)$ points : $c_0 < c_1 < \dots < c_k$ de $[a, b]$ tel que $f(c_i) = 0$: Alors

$$\exists \xi \in]c_0, c_k[/ f^{(k)}(\xi) = 0.$$

Preuve. Le lemme se démontre par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, en utilisant le théorème de Rolle².

$c_0 < c_1 < \dots < c_k = f(c_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, k$. Maintenant, supposons que le lemme est

vrai pour $k - 1$, alors $\exists \xi_0 \in]c_0, c_1[$ tel que $f^{(k-1)}(\xi_0) = 0$,

$\exists \xi_1 \in]c_1, c_2[$ tel que $f^{(k-1)}(\xi_1) = 0$,

.

.

.

$\exists \xi_{k-1} \in]c_{k-1}, c_k[$ tel que $f^{(k-1)}(\xi_{k-1}) = 0$,

Alors d'après le théorème de Rolle $\exists \xi \in [c_0, c_k]$ tel que $f^{(k)}(\xi) = 0$. ■

Théorème 2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $(n + 1)$ fois dérivable sur $[a, b]$ si $P_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égale à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n; x_i \in [a, b].$$

Alors

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b] / E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

avec

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Preuve. On remarque que si $x = x_i$ alors $E(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$, pour $i = 0, \dots, n$.

Maintenant, si $x \neq x_i$, on pose

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

et

$$\Phi(t) = f(t) - P_n(t) - \lambda(x) \prod_{i=0}^n (t - x_i)$$

$\Phi(t)$ est une fonction de classe C^{n+1} et s'annule en $n + 2$ points x_0, x_1, \dots, x_n, x .

D'où d'après le lemme précédent

$$\exists \xi \in [a, b] / \Phi(t)^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

D'autre part, le polynôme $\prod_{i=0}^n (t - x_i)$ est de degré $n + 1$ avec le coefficient de t^{n+1} égale = 1 donc sa dérivé $n + 1$ fois égale à $(n + 1)!$. Donc

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(x)(n + 1)!$$

2. Michel Rolle est un mathématicien français, né à Ambert 1652-1719.

Alors,

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \lambda(x)(n+1)! = 0 \Rightarrow \lambda(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

D'où le résultat. ■ **Corollaire**

$$\forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| \leq \left| \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \right| \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Ou encore

$$\forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| \leq \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Preuve. On a f est de classe C^{n+1} alors $f^{(n+1)}$ continue sur $[a, b]$ donc est aussi pour $|f^{(n+1)}|$ donc $|f^{(n+1)}|$ est bornée. Ainsi le résultat. ■

2.4 Interpolation de Lagrange

L'interpolation de Lagrange³ est une façon simple de construire un polynôme de collocation, sans passer par la résolution du système linéaire.

Définition 8 On appelle polynôme de Lagrange associés aux x_0, x_1, \dots, x_n deux à deux distincts les $(n+1)$ polynômes $L_k(x)$ définie par :

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Proposition Les polynômes de Lagrange $L_k(x), k = 0, 1, \dots, n$ possèdent les propriétés suivante :

1. Pour tout $i \geq 0, L_i$ est un polynôme de degré n .

2.

$$L_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j; \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Les polynômes de Lagrange associés à x_0, x_1, \dots, x_n constituent une base de P_n , où P_n est un ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Preuve.

1) La première proposition est évidente.

3. Joseph-Louis Lagrange, français né en Italie, 1736-1813.

2) On a $L_k(x) = \prod_{j=0, k \neq j}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$, alors
 $i = k$, on obtient

$$L_k(x_i) = \prod_{j=0, k \neq j}^n \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)} = 1.$$

Pour $i \neq k$, on a

$$L_k(x_i) = \prod_{j=0, k \neq j}^n \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)} = 0.$$

3) On a L_0, L_1, \dots, L_n est constitué de $(n+1)$ polynômes et $\dim P_n = n+1$.

Donc pour démontrer que L_0, L_1, \dots, L_n est une base de P_n il suffit de montrer que L_0, L_1, \dots, L_n est une famille libre. Supposons que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x) = 0$.

Alors, d'après **2**. on a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_0) = \lambda_0 L_0(x_0) + \lambda_1 L_1(x_0) + \dots + \lambda_n L_n(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0.$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_1) = \lambda_0 L_0(x_1) + \lambda_1 L_1(x_1) + \dots + \lambda_n L_n(x_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Et par suite

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_n) = \lambda_0 L_0(x_n) + \lambda_1 L_1(x_n) + \dots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0.$$

$$\text{D'où, } \forall k = 0, \dots, n \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_0 L_0(x_k) + \lambda_1 L_1(x_k) + \dots + \lambda_n L_k(x_k) = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0.$$

Par conséquent L_0, L_1, \dots, L_n est une base de P_n .

D'après cette proposition on en déduit le théorème suivant :

Théorème 3 Soit (x_0, x_1, \dots, x_n) , $(n+1)$ points distincts et une fonction f dont les valeurs en ces points $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$. Alors il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

Preuve. D'après la proposition précédente on a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

Ainsi

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n L_k(x_i) f(x_k) = f(x_i).$$

Comme le polynôme d'interpolation est unique alors on a bien que

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

■

Remarques

I-En pratique, on utilise l'interpolation polynômiale avec des polynômes de degré n assez grand ou l'interpolation polynômiale par morceaux.

II-Si les valeurs $f(x_i) = y_i$ sont des valeurs expérimentales. L'interpolation polynomiale est une technique peu appropriée pour de telles situations. Les polynômes de degré élevé sont sensibles à la perturbation des données.

III- La méthode de Lagrange adapte mal au changement du nombre de points (x_i, y_i) . On ne peut utiliser les coefficients de Lagrange si on passe de n à $(n + 1)$ points.

Exemple 2.3

Pour $n = 1$

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$
$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Donc

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

C'est l'équation de la droite qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

Pour $n = 2$ on a : x_0, x_1 et x_2

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Ainsi

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x).$$

$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

C'est l'équation de parabole qui passe par les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Exemple 2.4.

Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f donnée par le tableau suivant :

x	0	1	3	4
$f(x)$	-1	1	3	5

On a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

Alors

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 L_k(x) f(x_k).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4).$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{12}x(x-3)(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-4).$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = -\frac{1}{12}x(x-1)(x-3).$$

$$f(x) \cong P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x).$$

Calcul à compléter.

2.5 Interpolation de Newton

On suppose qu'on a $(x_i, f(x_i), i = 0, \dots, n$. Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de la fonction de degré n tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$,

Définition 9 La forme de Newton⁴ du polynôme d'interpolation est :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

On remarque que les polynômes $N_0(x), \dots, N_n(x)$ forment une base tels que :

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = x - x_0$$

$$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

.

.

4. Sir Isaac Newton, anglais, 1643-1727

$$N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Définition 10 Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. On définit les différences divisées de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n par les relations de récurrences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f[x_i] = f(x_i), \\ f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \text{ premières différences divisées de } f \\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}, \text{ deuxième différences divisées de } f \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+p}]}{x_i - x_{i+p}}, p^{\text{ème}} \text{ différences divisées de } f. \end{array} \right.$$

D'après cette définition on a $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$.

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

·
·
·

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n].$$

On a le théorème suivant :

Théorème 4 Le polynôme d'interpolation de Newton passant par $(x_i, f(x_i))_{i=0, \dots, n}$ peut s'écrire :

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Ce polynôme d'interpolation est appelé **forme de Newton du polynôme d'interpolation par les différences divisées**.

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme suivant.

Lemme

Si $P_n(x)$ est un polynôme de degré n , sa différence divisée d'ordre $(n+1)$ est identiquement

nulle, c'est à dire $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = 0$ pour tout système de $(n + 1)$ nombres distincts x_0, x_1, \dots, x_n .

Preuve. du lemme précédent. Soit $P_n(x)$ un polynôme de degré n et $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ sa différence divisée, on a

$$f[x_0, x] = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0}$$
 est un polynôme de degré $n - 1$.

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_1, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_0},$$
 est un polynôme de degré $n - 2$.

Par récurrence, on aura

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x] = \text{constante}$$
 est un polynôme de degré 0.

Ainsi $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = 0$. ■ **Exemple 2.5**

Calculons le polynôme d'interpolation de la fonction qui est définie comme suit

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	0	1	0

On construit le tableau des différences divisées de f :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0		
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}$
π	0	$-\frac{\pi}{2}$	

On a alors

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= \frac{2}{\pi}x - \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\right]x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi^2 + 8}{2\pi^2}x^2 - \frac{16 + \pi^2}{4\pi^2}x \end{aligned}$$

Remarque La forme de Newton par les différences divisées de la fonction f est la forme la plus utilisée pour calculer le polynôme d'interpolation, parce qu'elle nécessite le moins de calculs pour obtenir numériquement ses coefficients.

2.5.1 Relation entre différence divisées et les dérivées.

Théorème 5 Soit f une fonction de classe $C^n([a, b])$ et x_0, x_1, \dots, x_n des nombres distincts dans $[a, b]$, alors

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Preuve. Soit $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Puisque $f(x_i) = P_n(x_i)$ $i = 0, \dots, n$, la fonction g possède $(n + 1)$ zéro (au moins).

D'après théorème de Rolle généralisé alors

$$\exists \xi \in [a, b] / g^{(n)}(\xi) = 0.$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!f[x_0, x_1, \dots, x_n] \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = n!f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

D'où le résultat. ■

2.5.2 Erreur d'interpolation de Newton.

Soit $\bar{x} \in [a, b]$, $\bar{x} \neq x, i = 0, \dots, n$.

Soit $P_{n+1}(x)$ le polynôme d'interpolation associé aux points $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n)), ((\bar{x}, f(\bar{x})))$.

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Si $\bar{x} = x$

$$f(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}](\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n)$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}](\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n)$$

D'après le théorème précédent

$$\exists \xi \in [a, b] / f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \text{ Alors}$$

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i). \text{ Ainsi}$$

$$\forall x \in [a, b] : E(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

2.5.3 Interpolation de Newton dans le cas équidistant

Il arrive souvent que la fonction à interpoler soit donnée en des points équidistants x_i avec le pas h qui est appelé le pas d'interpolation où $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$.

2.5.3.1 Différences finies progressives

Définition 11 Soient y_0, y_1, \dots, y_n des nombres réels. On définit la différence finie progressive d'ordre 1 par :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \text{ pour } i = 0, \dots, n - 1,$$

La différence finie progressive d'ordre 2 :

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \text{ pour } i = 0, \dots, n-2,$$

Et en générale, la différence finie progressive d'ordre k est :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \text{ pour } i = 0, \dots, n-k,$$

Convention $\Delta^0 y_i = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$.

Remarque On peut définir les différences finies progressives qui vont jusqu'à l'ordre n seulement pour $(n+1)$ points.

Dans le théorème suivant, on va donner la relation entre différences finies progressives et différences divisées.

Théorème Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ aux points x_i , $i = 0, \dots, n$ tels que $x_i = x_{i-1} + h$, alors

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!h^k} \text{ pour } 0 \leq i \leq i+k \leq n.$$

Preuve. On le démontre par récurrence.

Pour $k = 1$, on a

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta f(x_i)}{h}$$

donc la relation est vraie pour $k = 1$.

Maintenant, supposons que la relation est vraie à l'ordre k .

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+k+1}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} \\ &= \frac{\Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i)}{k!h^{k+1}} \\ &= \frac{\Delta^{k+1} f(x_i)}{(k+1)!h^{k+1}} \end{aligned}$$

On va passer à la forme de Newton par les différences finies progressives.

Théorème 6 Soient x_0, x_1, \dots, x_n points équidistants. Le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points x_i , $i = 0, \dots, n$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

On peut simplifier cette formule en écrivant :

$$x = x_0 + sh, s \in [0, n] \Rightarrow \frac{x - x_0}{h} = s.$$

Alors

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) &= \frac{\Delta^n f(x_0)}{k!} \frac{sh}{h} \frac{(s-1)h}{h} \dots \frac{s-k+1}{h} \\ &= \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!h^k} s(s-1)\dots(s-k+1). \end{aligned}$$

Donc

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{s}{1!} \Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \dots + \frac{s(s-1)\dots(sn+1)}{n!} \Delta^n f(x_0).$$

On sait que $C_s^k = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$ donc en utilisant cette notion, on obtient

$$P_n(x) = f(x_0) + C_s^1 \Delta f(x_0) + C_s^2 \Delta^2 f(x_0) + \dots + C_s^n \Delta^n f(x_0).$$

2.5.4 Différences finies régressives.

Définition 12 Soient y_0, y_1, \dots, y_n des nombres réels. On définit la différence finie régressives d'ordre 1 par :

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, \text{ pour } i = 1, \dots, n,$$

La différence finie progressive d'ordre 2 :

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}, \text{ pour } i = 2, \dots, n,$$

Et en générale, la différence finie progressive d'ordre k est :

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}, \text{ pour } i = k, k+1, \dots, n,$$

Convention $\nabla^0 y_i = y_i$, pour $i = 0, \dots, n$.

2.5.5 Estimation de l'erreur

L'erreur est donnée par

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b] / |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x \in [x_0, x_n]} f^{(n+1)}(x)$. Ou bien

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |h^{n+1} s(s-1)\dots(s-n)|$$

avec $s = \frac{x-x_0}{h}$.

2.6 Conclusion

En fait, les méthodes d'interpolation polynomiale présentées dans ce cours (Lagrange, Newton) sont assez peu utilisées dans la pratique. D'abord, il est difficile d'interpoler avec des polynômes de degré très élevé : on voit alors apparaître un phénomène d'effets de bord dit phénomène de Runge⁵. Runge a montré en 1901 que quand le nombre de points d'interpolation croît indéfiniment, le polynôme d'interpolation ne converge pas toujours vers la fonction interpolée en tous points. La divergence s'observe aux bords de l'intervalle (la convergence n'est pas uniforme). On peut avoir une convergence uniforme, en choisissant judicieusement les points d'interpolation (racines d'un certain polynôme de Tchebychev⁶). Néanmoins, ces méthodes d'interpolation ont un intérêt pour construire des formules de quadrature pour l'intégration numérique et des schémas pour résoudre des équations différentielles. L'interpolation en utilisant des polynômes de degré élevé introduit aussi une grande sensibilité aux erreurs. On préfère alors faire de l'interpolation par morceaux : c'est à dire découper l'intervalle sur lequel on veut interpoler en petits intervalles et interpoler sur chacun des ces petits intervalles avec des polynômes de degré moindre. c'est la méthode des splines, la méthode d'interpolation la plus utilisée en pratique.

5. Carle David Tolmé Runge, allemand, 1856-1927

6. Pafnuty Lvovich Chebyshev, russe, 1821-1894

2.7 Exercices

Exercice 01 :

Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f donnée par les tableaux suivants :

x	-1	0	2	3	5
$f(x)$	0	1	0	-1	0

x	-2	-1	0	2	2	3
$g(x)$	-3	-2	-2	0	1	2

Exercice 02

Soit la fonction

$$f(x) = \ln(x).$$

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole f par les deux points d'appui d'abscisses : 0.5, 0.7.

Quelle est l'ordre de cette interpolation.

2. Calculer $f(0.6)$. Comparer le résultat obtenu avec la valeur exacte de $\ln(0.6)$.

3. Peut-on utiliser ce polynôme pour calculer $f(2)$? Pourquoi ?

4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole f par 3 points d'appui d'abscisses 0.4, 0.5, 0.7.

Quelle est l'ordre de cette interpolation ?

5. Calculer $f(0.6)$. Comparer le résultat obtenu à la valeur exacte $\ln(0.6)$ puis au résultat obtenu par l'interpolation précédente.

Exercice 03

Avec quelle précision peut-on calculer la valeur $\sqrt{115}$ à l'aide de l'interpolation de Lagrange qui repose sur les points d'appui d'abscisses : 100, 121, 144.

Exercice 04 :

On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Le virage est décrit par une courbe de la forme $y = f(x)$ qui satisfait :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

De plus, pour assurer une transition en douceur, la pente de la courbe doit satisfaire :

$$f'(0) = 0 \text{ et } f'(1) = 0, 3.$$

On représente la courbe à l'aide d'un polynôme dans l'intervalle $[0, 1]$.

1. Quel est le degré minimal que ce polynôme devra avoir pour remplir toutes les conditions ?
2. Calculer ce polynôme.

Exercice 05 :

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

2. Donner l'expression analytique de l'erreur.
3. Obtenir une approximation de $f(1, 5)$.

Exercice 06 :

Soit L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}$$

aux $n + 1$ points distincts x_0, \dots, x_n de l'intervalle $[-1, 1]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction f .
2. Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $n + 1$ points x_0, \dots, x_n sont équidistants, nous avons alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x) - L_n(x)\|_{\infty} = 0.$$

3. Dans la pratique nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Écrire l'approximation de Lagrange de degré 1, L_n de f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i = 0, \dots, n$.

Exercice 07 :

Soit la fonction

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Calculer le polynôme d'interpolation passant par les points d'appui d'abscisses $-2, -1, 0, 1, 2$.

Exercice 08 :

Le polynôme P interpole la fonction f suivante aux points d'abscisses 1, 2, 4 tel que :

$$f(x) = \frac{4}{x}, P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7.$$

- a) Vérifier que P interpole bien f aux points d'abscisses 1, 2, 4.
- b) Calculer l'erreur $e(x) = f(x) - P(x)$.
- c) Quand cette erreur prend elle sa valeur maximale pour x dans $[1, 4]$.
- d) Que faire pour réduire cette erreur.

Exercice 09 :

On interpole $f(x) = \ln(x)$ par un polynôme aux noeuds $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ et $x_4 = 5$.

- 1. Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton.
- 2. Estimer la valeur de $f(6.32)$ avec le polynôme trouvé en (1.) et calculer l'erreur absolue. Comparer cette valeur avec l'approximation fournie par la formule

$$E_n(x) \approx f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

en prenant comme noeud supplémentaire $x = 5.5$.

- 3. Combien de noeuds à intervalle régulier de 0.5 faudrait-il ajouter, en partant de $x_5 = 5.5$, afin que l'erreur absolue de l'estime de $f(6.32)$ obtenu en (2.) diminue d'un facteur 100.
- 4. Sur l'intervalle $[3, 4]$, le graphe du polynôme trouvé en (1.) est-il au dessus de celui de $f(x)$, en dessous, ou se croisent-ils?

Exercice 10 :

- 1. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n (n + 1)$ points réels distincts et F, G deux fonctions définies en ces points.

On considère P et Q les polynômes d'interpolations de F et G (respectivement) aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

- a. Montrer que $P + Q$ est le polynôme d'interpolation de $F + G$ aux points x_0, x_1, \dots, x_n .
- b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que PQ soit le polynôme d'interpolation de FG aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

- 2. Soit la fonction f donnée par la table suivante :

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$f(x_i)$	1	3	8	16

- a. Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton de f aux points $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$.
- b. En déduire le polynôme d'interpolation de la fonction g définie par $g(x) = xf(x) + x^2$ aux points $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$.

2.8 Corrigés des exercices.

Solution exercice 01 :

On a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k).$$

Alors

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 L_k(x) f(x_k).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)(-1-5)} = -\frac{1}{72}x(x-2)(x-3)(x-5).$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(0+1)(0-2)(0-3)(0-5)} = -\frac{1}{30}(x+1)(x-2)(x-3)(x-5)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-3)(x-5)}{(2+1)(2-0)(2-3)(2-5)} = -\frac{1}{18}x(x+1)(x-3)(x-5).$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)(x-5)}{(3+1)(3-0)(3-2)(3-5)} = -\frac{1}{48}x(x+1)(x-2)(x-5).$$

$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x-0)(x-2)(x-3)}{(5+1)(5-0)(5-2)(5-3)} = -\frac{1}{180}x(x+1)(x-2)(x-3).$$

$$f(x) \cong P_4(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x).$$

Calcul à compléter.

On a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) g(x_k).$$

Alors

$$P_5(x) = \sum_{k=0}^5 L_k(x) g(x_k).$$

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)(-2-2)(-2-3)} = -\frac{1}{120}x(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = \frac{1}{24}x(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{12}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)(x-3)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{12}x(x+2)(x+1)(x-2)(x-3).$$

$$L_4(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{24}x(x+2)(x+1)(x-1)(x-3).$$

$$L_5(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(3+2)(3+1)(3-0)(3-1)(3-2)} = -\frac{1}{120}x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2).$$

$$g(x) \cong P_5(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x) + f(x_5)L_5(x).$$

Calcul à compléter.

Solution exercice 02 :

Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ est d'ordre n et il s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x).$$

avec

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

1- $f(x) = \ln(x)$; on cherche le polynôme d'interpolation de f avec deux points d'appui :

$$(x_0, f(x_0)) = (0.5, -0.693); (x_1, f(x_1)) = (0.7, -0.357)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(x - 0.7)}{(0.5 - 0.7)} = -5x + \frac{7}{2}.$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 0.5)}{(0.7 - 0.5)} = 5x - \frac{5}{2}.$$

$$f(x) \cong P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x).$$

$$= -0.693L_0(x) - 0.357L_1(x).$$

$$f(x) \cong P_1(x) = 1.68x - 1.5325.$$

$n + 1 = 2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$ Cette interpolation est d'ordre 1 elle est dite linéaire.

2- $\ln(0.6)$ *approché* = $f(0.6) \cong P_1(0.6) = 1.68 \times 0.6 - 1.5325 = -0.5245$

$\ln(0.6)$ *exacte* = -0.5108

$E = 0.0137.$

3- On ne peut pas utiliser ce polynôme pour calculer $f(2)$ car le contexte de l'interpolation exige que l'approximation de f dans tout point d'abscisse x par un polynôme est valide si et seulement si $x \in [x_0, x_n]$ et dans ce cas $2 \notin [0.5, 0.7]$ (dans le cas où $x < x_0$ ou $x > x_n$ c'est une extrapolation).

4- On cherche le polynôme d'interpolation de f avec 3 points d'appui :

$$(x_0, f(x_0)) = (0.4, -0.916); (x_1, f(x_1)) = (0.5, -0.693); (x_2, f(x_2)) = (0.7, -0.357)$$

cette interpolation est dite quadratique.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0.5)(x - 0.7)}{(0.4 - 0.5)(0.4 - 0.7)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.7)}{(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.7)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)}{(0.7 - 0.4)(0.7 - 0.5)}$$

Alors, on a

$$L_0(x) = \frac{100}{3}x^2 - \frac{120}{3}x + \frac{35}{3}.$$

$$L_1(x) = -\frac{100}{2}x^2 + \frac{110}{32}x - \frac{28}{32}.$$

$$L_2(x) = \frac{50}{3}x^2 - 15x - \frac{10}{3}.$$

$$f(x) \cong P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x).$$

$$= -0.999L_0(x) - 0.666L_1(x) - 0.333L_2(x).$$

$$f(x) \cong P_2(x) = -11.8x^2 + 3.865x - 2.17$$

5- $Ln(0.6)_{\text{approché}} = f(0.6) \cong P_2(0.6) = -11.8 \times (0.6)^2 + 3.865 \times (0.6) - 2.17 = -0.50368$

$Ln(0.6)_{\text{exacte}} = -0.5108$

$E = 0.00714.$

6- Plus le nombre de points d'appui augmente est plus l'interpolation est meilleure.

Solution exercice 03 :

On veut calculer $\sqrt{115}$ par interpolation et le comparer avec sa valeur exacte : l'écart entre la valeur approchée et la valeur exacte représente la précision de l'interpolation.

$f(x) = \sqrt{x}$ points d'appui $(x_0, f(x_0)) = (100, 10); (x_1, f(x_1)) = (121, 11); (x_2, f(x_2)) = (144, 12); n + 1 = 3 \Rightarrow$ interpolation d'ordre 2 (quadratique).

On nous demande pas de déterminer le polynôme mais plutôt calcul directe de $\sqrt{115}$ par application numérique dans les différents L_i et par la suite la valeur final de $\sqrt{115}$

$$L_0(115) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(115 - 121)(115 - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)} = 0.18831$$

$$L_1(115) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(115 - 100)(115 - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)} = 0.90062$$

$$L_2(115) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(115 - 100)(115 - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)} = -8.8933 \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{115} = f(115) \cong P^2(115) = 10 \times L_0(115) + 11 \times L_1(115) + 12 \times L_2(115)$$

$$\sqrt{115} = f(115) \cong P^2(115) = 10 \times 0.18831 + 11 \times 0.90062 + 12 \times -8.8933 \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{115}_{\text{approchée}} = 10.72276$$

$$\sqrt{115}_{\text{exacte}} = 10.72381$$

On peut obtenir une Précision = 1.0499×10^{-3} avec une interpolation quadratique basée sur les 3 points d'appui :

$$(x_0, f(x_0)) = (100, 10); (x_1, f(x_1)) = (121, 11); (x_2, f(x_2)) = (144, 12).$$

Solution exercice 04 :

1. On a 4 conditions. On peut donc interpoler y avec un polynôme de degré 3.

2. On a $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ et $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$.

Alors on obtient :

$$p(0) = a_0 = 0.$$

$$p'(0) = a_1 = 0.$$

$$p(1) = a_2 + a_3 - 1 = 1 - a_3.$$

$$p'(1) = 2a_2 + 3a_3 = 2(1 - a_3) + 3a_3 = 0.3 \Rightarrow a_3 = -1.7$$

D'où

$$p(x) = -1.7x^3 + 2.7x^2.$$

Solution exercice 05 :

1. Le polynôme de Lagrange de degré 3 s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 L_k(x) f(x_k).$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 3)(x - 5)}{(0 - 2)(0 - 3)(0 - 5)} \\ &= \frac{1}{30}(x - 2)(x - 3)(x - 5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ &= \frac{(x - 0)(x - 3)(x - 5)}{(2 - 0)(2 - 3)(2 - 5)} \\ &= \frac{1}{6}x(x - 3)(x - 5). \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(2-0)(3-2)(3-5)} \\
&= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5). \\
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\
&= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} \\
&= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

D' où le polynôme de Lagrange est

$$\begin{aligned}
f(x) &\cong P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x). \\
&= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
E = |f(x) - P_3(x)| &= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!} \prod_{i=0}^3 |x - x_i| \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!} |x(x-2)(x-3)(x-5)|.
\end{aligned}$$

Avec $\xi_x \in [a, b]$.

3. D'après le polynôme de Lagrange obtenue au question 1 on en déduit :

$$f(1.5) \approx P_3(1.5) = \frac{149}{80}.$$

Solution exercice 06 :

1. Nous calculons les dérivées successives de la fonction f , alors on a

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-\alpha)^2}, f'(x) = \frac{2}{(x-\alpha)^3}.$$

et plus généralement

$$f(n+1) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x-\alpha)^{n+2}}.$$

2. Nous appliquons le résultat du cours, il existe un $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|.$$

Ainsi, si $\alpha > 3$ nous avons pour $\xi \in [-1, 1]$.

$$2 < |\xi - \alpha| = \alpha - \xi < 4,$$

et

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2|\xi - \alpha|^{n+1}};$$

et donc

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{2} \prod_{i=0}^n \left| \frac{x - x_i}{x - \alpha} \right|.$$

or pour tout $x \in [-1, 1]$ et $i = 0, \dots, n$ nous avons $|x - x_i| \leq 2$ et donc

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{2} \prod_{i=0}^n \left| \frac{x - x_i}{x - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha - \xi} \right)^{n+1}.$$

Donc puisque $\frac{1}{2} < \frac{2}{\alpha - \xi} < 1$,

$$\lim_n \|f(x) - L_n(x)\|_{+\infty} \leq \frac{1}{2} \lim_n \left(\frac{2}{\alpha - \xi} \right)^{n+1} = 0.$$

3. Nous considérons que $\alpha \notin [-1, 1]$, ainsi la fonction f est bien définie sur $[-1, 1]$. Sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ nous avons

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{x_i - \alpha} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \left(\frac{1}{x_i - \alpha} - \frac{1}{x_i - \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{x_i - \alpha} - (x - x_i) \end{aligned}$$

Chapitre 3

Dérivation et intégration numérique

3.1 Introduction

Nous avons vu antérieurement comment approcher une fonction $f(x)$ connue aux points x_0, x_1, \dots, x_n dans un intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_i) = y_i; i = 0, 1, \dots, n$ par un polynôme d'interpolation $P_n(x)$. Nous allons faire pratiquement le même procédé pour la dérivation et l'intégration par exemple si nous connaissons les positions d'un mobile à des instants répétés et nous voulons connaître sa vitesse, ou inversement en connaissant la vitesse en des points et nous voulons connaître la distance parcourue en faisant l'intégration. Donc il s'agit de construire une approximation numérique de la dérivée (première, seconde,...) ou l'intégrale de la fonction f .

3.2 Dérivation numérique

Il existe deux approches pour construire de telles approximations, l'une utilise les développements en série de Taylor et l'autre utilise les formules d'interpolation.

3.2.1 Utilisation de la formule de Taylor.

Dérivée première

Considérons une fonction dérivable sur un intervalle. Pour connaître une approximation de $f'(x)$; le procédé le plus simple consiste à

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

D'après la formule de Taylor¹ on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi); \xi \in]x, x+h[.$$

D'où

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h^2}{2}f''(\xi); \xi \in]x, x+h[.$$

Ainsi

$$f'_d(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

est la formule de dérivée à droite d'ordre 1 avec une erreur est en $o(h)$. Par la même manière on définit la dérivée à gauche d'ordre 1 comme suit :

$$f'_g(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h};$$

D'autre part, on a aussi

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f'' + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(\eta_1); \eta_1 \in]x, x+h[.$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f'' - \frac{h^3}{3}f^{(3)}(\eta_2); \eta_2 \in]x-h, x[.$$

d'où

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!}[f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)]; \eta_1 \in]x, x+h[; \eta_2 \in]x-h, x[.$$

Ainsi

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{2.3!}[f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)]; \eta_1 \in]x, x+h[; \eta_2 \in]x-h, x[.$$

On sait qu'en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]x-h, x+h[$ tel que

$$f^{(3)}(\eta_1) + f^{(3)}(\eta_2)2 = f^{(3)}(\xi).$$

Il s'en suit

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \xi \in]x-h, x+h[.$$

D'où la formule dérivée centrée d'ordre 2 est définie par :

$$f'_c(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

1. Brook Taylor est un mathématicien anglais, né à Edmonton 1685- 1731.

avec une erreur en $o(h^2)$.

Dérivée seconde.

On a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4}f^{(4)}(x)$, $\eta_1 \in]x, x+h[$.

et $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4}f^{(4)}(x)$, $\eta_2 \in]x-h, x[$.

Donc

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{4!}[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)],$$

pour $\eta_1 \in]x, x+h[$, $\eta_2 \in]x-h, x[$. Ainsi

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{h^4}{4!}[f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2)].$$

avec $\eta_1 \in]x, x+h[$; $\eta_2 \in]x-h, x[$. Il s'ensuit

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{2.3!}f^{(4)}(\xi), \xi \in]x-h, x+h[.$$

C'est une formule centrée d'ordre 2.

On peut établir la formule centrée d'ordre 4.

$$f''(x) = \frac{-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)}{12h^2} + \frac{h^4}{90}f^{(6)}(\xi),$$

avec $\xi \in]x-h, x+h[$.

3.2.2 Utilisation des formules d'interpolation.

Dérivée première D'après le chapitre précédent, la formule d'interpolation sous la forme de Newton s'écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots \\ (x-x_{n-1}) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \xi \in]x_0, x_n[.$$

On pose $w_n(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i)$. En dérivant

$$f'(x) = f[x_0, x_1]w'_0(x) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n]w'_{n-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x) \\ + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x), \xi \in]x_0, x_n[.$$

$$f'(x) = \prod_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i]w'_{i-1}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}w'_n(x); \xi \in]x_0, x_n[.$$

Pour $n = 1$, on a

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}[x-x_0 + x-x_1] + \frac{f^{(3)}(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1); \xi \in]x_0, x_1[.$$

avec $h = x_1 - x_0$: Si $x = x_0$, on obtient

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}h; \xi \in]x_0, x_1[.$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 1.

Si on utilise la formule de Newton régressive, on obtient

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}h; \xi \in]x_0, x_1[.$$

C'est la dérivée à gauche d'ordre 1.

Maintenant, on choisit $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ et en prenant $x - x_0 = h$, on aura la formule centrée d'ordre 2.

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi); \xi \in]x_0, x_1[.$$

Pour $n = 2$, si en prenant $x = x_0, x_1 = x + h, x_2 = x + 2h$.

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi); \xi \in]x; x + 2[.$$

C'est la dérivée à droite d'ordre 2.

Et la formule de la dérivée à gauche d'ordre 2 est

$$f'(x) = \frac{f(x + 2h) + 4f(x + h) - 3f(x)}{2h} + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi); \xi \in]x; x + 2[.$$

Si $x = x_0, x_1 = x - h, x_2 = x + h$ alors on a la formule centrée d'ordre 2

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi); \xi \in]x - h, x + h[.$$

Dérivée seconde.

Par le même principe, pour la dérivée seconde, on choisit en général d'interpoler sur trois (3) points, ce qui donne (dans le cas de points équidistants). On a

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} \prod_{i=0}^2 (x - x_i); \xi \in]x_0, x_2[.$$

Alors

$$f'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_1 - x_0) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}[(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)]; \xi \in]x_0, x_2[.$$

Ainsi

$$f''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2] + f^{(4)}(\xi) \frac{1}{3} [(2x - x_1 - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)] - \frac{f^{(5)}(\xi)}{3!} + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} [2(x - x_2) + (2x - x_1 - x_0) + (2x - x_0 - x_1)].$$

Si $x = x_0, x_1 = x + h, x_2 = x + 2h$ alors la formule de la dérivée seconde d'ordre 2 est donnée par

$$f''(x) = \frac{f(x) + 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} - \frac{2h^2}{3} f^{(4)}(\xi) - \frac{h}{3} f^{(3)}(\xi); \xi \in]x-h, x+h[.$$

3.3 Erreur.

3.3.1 Dérivée premier ordre.

Théorème 7 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2, x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_d = |f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|$$

Preuve. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2, x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.; en utilisant le développement de Taylor :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \xi \in [x_0, x_0 + h],$$

alors

$$|f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}| = \left| \frac{h}{2} f''(\xi) \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|.$$

Alors, on obtient que :

$$|f'(x_0) - f'_d(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|$$

■

Théorème 8 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2, x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$|f'(x_0) - f'_g(x_0)| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [x_0-h, x_0]} |f''(x)|$$

En appliquant la formule de Taylor d'ordre 3, on aura le théorème suivant :

Théorème 9 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^3, x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_c = |f'(x_0) - f'_c(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0-\frac{1}{2}h, x_0+\frac{1}{2}h]} |f^{(3)}(x)|.$$

Preuve. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, d'après le développement de Taylor on a

$$f(x_0 + \frac{h}{2}) = f(x_0) + \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2}f''(x_0) + \frac{h^3}{8.6}f^{(3)}(\xi); \xi \in [x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$$

et

$$f(x_0 - \frac{h}{2}) = f(x_0) - \frac{h}{2}f'(x_0) + \frac{h^2}{4.2}f''(x_0) - \frac{h^3}{8.6}f^{(3)}(\eta); \eta \in [x_0 - \frac{h}{2}, x_0].$$

■ Et on a aussi comme résultat le théorème suivant :

Théorème 10 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $0 < h \leq 1$. Alors

$$E_c = |f'(x_0) - \frac{f(x_0 + \frac{1}{2}) - f(x_0 - \frac{1}{2})}{h}| \leq Ch^2.$$

Donc d'après ce théorème il suffit de prendre $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)|$.

D'où le résultat.

3.3.2 Dérivée second d'ordre

En utilisant le même principe comme pour la première dérivée, il suffit dans ce cas de passer à l'ordre 4 dans la formule de Taylor, on aura

Théorème 11 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Alors

$$E_c = |f''(x_0) - f_c''(x_0)| \leq \frac{h^2}{24} \max_{x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Preuve. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 , $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \frac{h}{2}) - f'(x_0 - \frac{h}{2})}{h}$$

et

$$f'(x_0 + \frac{h}{2}) \approx \frac{f(x_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h}$$

$$f'(x_0 - \frac{h}{2}) \approx \frac{f(x_0 - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}) - f(x_0 - \frac{h}{2} - \frac{h}{2})}{h}$$

D'où

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

D'autre part, on a aussi $\forall f \in C^4$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$, $\forall 0 < h \leq 1$:

$$|f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}| \leq Ch^2.$$

D'où il suffit de prendre $C = \frac{1}{24} \max_{x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]} |f^{(4)}(x)|$.

Ainsi le résultat. ■

3.4 Intégration numérique

Dans cette partie nous essayons de développer quelques méthodes numériques de calcul l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. Le théorème fondamental du calcul intégral est basé sur que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

où F est une primitive de f . Pour appliquer ce résultat, nous disposons de divers outils théoriques dont les plus fondamentaux sont le théorème de changement de variable et le théorème d'intégration par partie. Cependant, il n'est possible de déterminer explicitement une primitive F que pour une classe relativement restreinte de fonctions f et, lorsque cette détermination est à notre disposition, l'expression de F est souvent si compliquée que l'évaluation de $F(b) - F(a)$ nécessite l'emploi d'un processus d'approximation. Dans ce cas, il est tout aussi naturel et généralement moins coûteux de chercher directement une approximation de l'intégrale.

Pour approcher numériquement cette intégrale on décompose l'intervalle $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$, on applique une méthode d'intégration élémentaire en utilisant le polynôme d'interpolation de Newton de f

$$P_i(x) = f[x_{i,0}] + f[x_{i,0}, x_{i,1}](x - x_{i,0}) + \dots + f[x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,l}](x - x_{i,0}) \dots (x - x_{i,l})$$

3.4.1 Méthodes des rectangles

On approche la fonction f par la constante $f(x_{i,0})$ où $x_{i,0} \in [x_i, x_{i+1}]$. Alors on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i,0})dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\zeta_i); \zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]; h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Les choix courants pour ζ_i sont :

Si $\zeta_i = x_i$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_i) \text{ (Formule de rectangle à gauche).}$$

Si $\zeta_i = x_{i+1}$ alors $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(x_{i+1})$ (Formule de rectangle à droite).

Si $\zeta_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ alors $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$; (Formule de rectangle au point milieu.)

3.4.2 Méthode des Trapèzes

On prend $l = 1$, sachant que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, alors on remplace f par le polynôme d'interpolation de Newton aux points x_i, x_{i+1} . On obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_{i,0}) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i))dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})(f(x_{i+1})+f(x_i)) \\ &\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} f(x_i) + \frac{1}{2}(h_1 f(x_0) + h_n f(x_n)) \end{aligned}$$

En cas équidistant c'est-à-dire $h_i = h = x_{i+1} - x_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \\ &\approx \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \end{aligned}$$

Exemple 3.1 On calcule l'intégrale suivante

$$I = \int_1^3 \ln(x)dx.$$

Donner une valeur approchée de l'intégrale I en utilisant la méthode des trapèzes composite avec 4 sous-intervalles. Cela revient à prendre $h = \frac{1}{2}$ et $x_0 = a = 1, x_4 = b = 3, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2$ et $x_3 = \frac{5}{2}$. D'après la méthode des trapèzes, on a

$$I = \frac{h}{2}[f(1) + f(3) + 2(f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(\frac{5}{2}))] \approx 1,821.$$

3.4.3 Méthode de Simpson.

On prend cette fois $l = 2$, telle que l représente le nombre de subdivision de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ donc on interpole la fonction f aux points $x_i, x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}, x_{i+1}$ en utilisant le polynôme de Newton. Soit $h_i = x_{i+1} - x_i$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx &\approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}](x - x_i)(x - x_{i+1})]dx \\ &= h_i f(x_i) + \frac{1}{2}h_i^2 f[x_i, x_{i+1}] + f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})dx, \end{aligned}$$

On écrit $x - x_{i+1} = x - x_i + x_i - x_{i+1}$ on aura

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h_i^3}{6},$$

et

$$h_i^2[f(x_i) + f(x_{i+1})] = h_i(f(x_{i+1}) - f(x_i)),$$

$$h_i^3 f[x_i, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+1}] = 2h_i(f(x_{i+1}) - 2f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_i)).$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{6} [f(x_i) + 4f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})].$$

Dans le cas équidistant cette formule composée devient

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1})]$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Exemple 3.2

On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^6 x^3 dx.$$

Pour $n = 2$ on a $h = 3$, d'où

$$I = \frac{h}{3} [(f(0) + f(6) + 4f(3))] = 324.$$

Pour $n = 4$ on a $h = \frac{3}{2}$, d'où

$$I = \frac{h}{3} [(f(0) + f(6) + 2f(3) + 4(f(\frac{3}{2}) + f(\frac{9}{2})))] = 324$$

D'autre part, la valeur exacte de cette intégrale est

$$I = \int_0^6 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^6 = 324.$$

On remarque que la méthode de Simpson est exacte pour le polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

3.4.4 Erreurs de quadrature

Théorème 12 Soit f une fonction de classe $C^{n+1}([a, b])$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Si les valeurs de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n sont connues, et $\int_a^b P_n(x) dx$ est l'approximation

d'ordre n de $\int_a^b f(x)dx$ où $P_i(x)$ est le polynôme d'interpolation de Newton de la fonction f alors :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_i(x)dx \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx$$

où $M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Appliquons ce théorème aux méthodes usuelles. On obtient.

Erreur de méthode des rectangles

La méthode est d'ordre 0 et exacte seulement pour les constantes.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) dx \right| \leq \frac{h_i^2}{2} M_1.$$

Dans le cas d'un pas constant, on obtient :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(\xi_i) dx \right| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)h.$$

Erreur de la méthode des trapèzes

Pour $n = 1$, on trouve

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) dx \right| = \frac{M_2^2}{12} (b-a)^3.$$

Pour la formule composée de la méthode des trapèzes, on en déduit que l'erreur est majorée par

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \right| \leq \frac{M^2}{12n^2} (b-a)^3$$

$$E(f) \leq \frac{M^2}{12} h^2 (b-a).$$

Erreur de la méthode de Simpson

Cette fois $n = 2$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \right| \leq M_4 24 \left| \int_a^b (x-a)(x-b) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \right|$$

$$\leq \frac{M_4}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5.$$

La formule composée correspondante avec pas constant h donnera une erreur majorée par :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) \right] \right| \leq \frac{M_4}{2880n^4} (b-a)^5.$$

Par ailleurs, la méthode de Simpson (bien que reposant sur une interpolation à trois points) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Exemple 3.3

Calculons l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Utilisons les méthodes élémentaires précédentes à l'aide des valeurs de $f(x) = e^{-x^2}$ aux points $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.

Alors on a

$$f(1) = e; f(\frac{1}{2}) = 0.7880 \text{ et } f(0) = 1.$$

Méthode des rectangles

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1.$$

Calculons l'erreur

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}; f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \leq 0 \text{ sur } [0, 1]$$

alors f' est décroissante d'où $M_1 = |f'(1)| = 0.735788$ et

$$E_{rectangle}(f) \leq \frac{M_1}{2}(b - a)h = \frac{M_1}{2} = 0.367894.$$

Méthode des trapèzes pour $n = 1$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) = 0.68394.$$

Avec une erreur :

$$E_{trapeze}(f) \leq \frac{M_2}{1}2(b - a)^3 = \frac{M_2}{12} = 0.0613132.$$

Méthode de Simpson Pour $n = 2$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{h}{6}(f(0) + f(1) + 4f(\frac{1}{2})) = 0.74718.$$

Avec une erreur

$$E_{Simpson}(f) \leq \frac{M_4}{2880}(b - a)^5 = \frac{M_4}{2880} = 0.000254764.$$

La valeur exacte est $I_{exacte} = 0.74682$.

On remarque que $E = |I_{exacte} - I_S| = 0.00036 \approx 4 \times 10^{-4}$, donc la méthode de Simpson donne une approximation à 4×10^{-4} avec seulement trois valeurs de f par ce que les dérivées d'ordre supérieur ne varient pas trop sur l'intervalle $[0, 1]$.

3.5 Exercices .

Exercice 01

Soit une fonction f connue aux certains points $x_i, i = 0, \dots, n$ et $h = x_{i+1} - x_i$ un pas.

On cherche à approcher la dérivée première $f'(x_i)$ par les trois valeurs $f(x_{i-2}), f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$ à l'aide d'un schéma décentré suivant :

$$f'(x_i) = \frac{1}{h}[\alpha f(x_i) + \beta f'(x_{i-1}) + \gamma f''(x_{i-2})] + o(h^2).$$

Que valent les nombres α, β, γ ?

Exercice 02

A partir des données expérimentales

x	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

1. Calculer les approximations de $f'(1.005), f'(1.015)$ et $f''(1.01)$, données par les formules centrées

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

et

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

2. Si les données du tableau ont été précises à -0.005 quelle sera l'erreur commise sur les trois quantités calculées ?

Exercice 03

On considère l'intégrale suivante,

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

1. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes pour le pas $h = \frac{1}{3}$.

2. Calculer la valeur exacte de I .

(a) Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question 1. est-elle supérieure à $\ln 2$?

(b) Est-ce vrai quelque soit h ?

(c) Proposer une autre fonction dont la valeur de l'intégrale évaluée par la méthode des trapèzes est toujours supérieure à la valeur exacte de l'intégrale.

3. Si on souhaite évaluer I avec la méthode de Simpson, quel pas faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 04

Soit

$$F(x) = \int_0^x t \exp x^{-t}$$

Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer $F(1)$ à 10^{-5} près en utilisant

1. la méthode du point milieu.
2. la méthode de Simpson.

Exercice 05

Soit

$$I = \int_1^2 \exp x^{-2}$$

1. Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer I à 10^{-5} près en utilisant la méthode de Simpson.
2. Donner la valeur approchée de I en utilisant $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}$ et $x_4 = 1$.

Exercice 06

1. Trouvez une formule d'intégration numérique sur le segment $[0, 1]$ de la forme :

$$\int_0^1 f(t)dt \approx I(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f'(0) + \sigma f'(1).$$

qui soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal trois.

Exercice 07

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ

$t(ens)$	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\gamma \text{ en } = m/s^2$	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$, par les Trapèzes puis par Simpson.

Exercice 08

Soit, $I = \int_a^b f(x)dx$ avec $x_k = a + k \times \frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \dots, n$.

1. Calculer $\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_{0,k}(f)(x)dx$. où $P_{0,k}(x)$ est le polynôme de degré 0 qui passe par le point d'abscisse \bar{x}_k .
2. Calculer $\int_{x_{k-1}}^{x_k} P_{1,k}(f)(x)dx$. où $P_{1,k}(x)$ est le polynôme de degré 1 qui passe par les points d'abscisses x_{k-1} et x_k .
3. Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer I à 10^{-3} près en utilisant pour

$f(t) = t \cos(t)$ en utilisant

(a) la méthode des Trapèzes.

(b) la méthode de Simpson.

Exercice 09

1) Donner les formules des rectangles approchant

$$I = \int_a^b f(t) dt.$$

2) Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles, ainsi que le nombre minimum n de subdivisions de $[0, 1]$ pour avoir $\int_0^1 e^{t^2} dt$ à 10^{-2} .

3) Donner la méthode des rectangles à point milieu.

4) Trouver l'erreur commise en appliquant la méthode des rectangles à point milieu. Même application qu'à la question 2).

Exercice 10

On considère l'intégrale suivante,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

1. Rappeler les formules composites du point milieu, des trapèzes et de Simpson, ainsi que l'erreur commise dans chacune des méthodes.

2. Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer I à 10^{-3} près en utilisant la méthode de Simpson.

3. Donner la valeur approchée de I en utilisant la subdivision $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$, et $x_2 = 1$

4. Quelle est alors l'erreur commise.

Exercice 11

On note

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt, J(f) = \sum_{i=0}^n f(t_i).$$

1. On choisit $w_i = \int_a^b L_i(t) dt$, L_i les polynômes de base de Lagrange (coefficient du polynôme de Lagrange) associés aux points t_0, t_1, \dots, t_n .

1. Montrer que $I(p) = J(p)$; $\forall p \in P_n$.

2. Réciproquement, on suppose que $I(p) = J(p)$; $p \in P_n$.

Montrer que

$$w_i = \int_a^b L_i(t) dt.$$

3. On note par p_1, \dots, p_n la base canonique de P_n .

Montrer que $I(p) = J(p), \forall p \in P_n, I(p_i) = J(p_i); i = 0, 1, \dots, n$.

3.6 Corrigés des exercices.

Solution exercice 01 :

On utilise le développement de Taylor, on a

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + o(h^3)$$

et

$$f(x_{i-2}) = f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + o(h^3).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}[\alpha f(x_i) + \beta f'(x_{i-1}) + \gamma f''(x_{i-2})] \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{h}f(x_i) - (\beta + 2\gamma)f'(x_i) + h\left(\frac{\beta}{2} + 2\gamma\right)f''(x_i) + o(h^2) \end{aligned}$$

et cette relation est identique à $f'(x_i)$ si et seulement si

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

$$-\beta - 2\gamma = 1$$

$$\beta + 2\gamma = 0.$$

Alors, on obtient :

$$\beta = -2, \gamma = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = \frac{3}{2}. \text{ On a donc}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{1}{h}[f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + \frac{1}{2}] + o(h^2).$$

C'est un schéma inventé par **Gear** dans les années 1960.

Solution exercice 02 :

On a

x	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

1. Calculer les approximations de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$, en utilisant les formules centrées :

$$\begin{aligned} f'(1.005) &= \frac{f(1.005 + 0.005) - f(1.005 - 0.005)}{0.005} \\ &= \frac{f(1.01) - f(1)}{0.005} \\ &= 10 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'(1.015) &= \frac{f(1.015 + 0.005) - f(1.015 - 0.005)}{0.005} \\ &= \frac{f(1.02) - f(1.01)}{0.005} \\ &= 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1.01) &= \frac{f(1.01 + 0.01) - 2f(1.01) + f(1.01 - 0.01)}{0.012} \\ &= \frac{f(1.02) - 2f(1.01) + f(1)}{0.0001} \\ &= 100. \end{aligned}$$

2. Sachant que les données du tableau sont précises à $\epsilon = \pm 0.005$, c'est à dire l'erreur absolue de f est $f(x_i) = -0.005$ pour $i = 0, 1, 2$.

En vertu de la proposition (Addition) et la proposition (Soustraction) du premier chapitre, on a

$$\Delta[f(x+h) - f(x-h)] = \Delta f(x+h) + \Delta f(x-h) \approx 2\Delta f(x)$$

et même chose pour

$$\Delta[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = \Delta f(x+h) + 2\Delta f(x) + \Delta f(x-h) \approx 4\Delta f(x).$$

Par conséquent, d'après la première question, on obtient

$$f'(1.005) = 10 \pm 2 \frac{\Delta f(x)}{h} = 10 \pm 2,$$

$$f'(1.015) = 12 \pm 2 \frac{\Delta f(x)}{h} = 12 \pm 2,$$

et

$$f''(1.01) = 100 \pm 4 \frac{\Delta f(x)}{h^2} = 100 \pm 200.$$

D'après ces résultats, on remarque que une petite perturbation de f a induit une grande perturbation de f' et f'' .

Solution de l'exercice 03

On considère l'intégrale suivante,

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

1. La formule composite du trapèze est donnée par

$$I_c^T(f) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

Dans notre cas on a donc pour le pas $h = \frac{1}{3}$

$$I_c^T(f) = \frac{1}{6}[f(1) + f(2)] + \frac{1}{3}[f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3})] = \frac{21}{30} = 0.7.$$

2. La valeur exacte de I est $\ln 2 \approx 0.69$.

(a) On observe effectivement que I^T calculer en 1. est supérieur à $\ln(2) \approx 0.69$.

On peut se convaincre à l'aide d'un dessin que les trapèzes sont au-dessus de la courbe $y = \frac{1}{x}$, l'aire sous les trapèzes sera donc supérieure à l'aire sous la courbe.

(b) Cela reste vrai quelque soit le pas h choisi car la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est convexe sur $]0, +\infty[$ ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe $y = \frac{1}{x}$ sera toujours au-dessus de la courbe et par le raisonnement précédant l'aire sous les trapèzes sera supérieure à l'aire exacte.

(c) Il suffit de trouver une fonction dont la dérivée seconde soit positive, par exemple $x \rightarrow x^2$.

3. une condition suffisante pour avoir $|E^S| \leq 10^{-4}$ est d'avoir

$$\frac{h^4}{24 \times 120} \max_{x \in [1,2]} f^{(4)}(x) \leq 10^{-4}.$$

Or $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ ce qui implique $\max_{x \in [1,2]} f^{(4)}(x) = 24$.

Donc on devrait avoir

$$h^4 \leq \frac{24 \times 120 \times 10^{-4}}{24} = 0.012 \Rightarrow h \leq 0,3309$$

Donc $h = \frac{1}{4}$. donnera la précision voulue. C'est à dire que

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx \frac{1}{6 \times 4} [f(1) + 2[f(\frac{5}{4}) + f(\frac{6}{4}) + f(\frac{7}{4})] + f(2)] \\ &\quad + \frac{1}{4 \times 6} 4[f(\frac{9}{8}) + f(\frac{11}{8}) + f(\frac{13}{8}) + f(\frac{15}{8})] \\ &= \frac{1}{24} [\frac{4}{4} + 2(\frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{4}{8}) + \frac{1}{6}(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15})]. \end{aligned}$$

$$= 0.693154.$$

Solution de l'exercice 04

Soit

$$F(x) = \int_0^x te^{-t} dt.$$

On cherche le nombre de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer $F(1)$ à 10^{-5} près.

1. la méthode du point milieu une condition suffisante pour avoir

$$|E_{PM}^c| \leq 10^{-5} \text{ est d'avoir } (b-a) \frac{h^2}{24} \max_{t \in [1,2]} |f^{(2)}(t)| \leq 10^{-5}.$$

Or $(b-a) = 1$, dans ce cas et $f^{(2)}(t) = (t-2)e^{-t}$ ce qui implique $\max_{t \in [0,1]} |f^{(2)}(t)| = 2$.

Donc on devrait avoir

$$h^2 \leq 12 \times 10^{-5} \Rightarrow h \leq 0.0109544$$

Donc $h = \frac{1}{92}$ donnera la précision voulue. On aura donc besoin de 92 points de subdivision.

2. la méthode de Simpson une condition suffisante pour avoir $|E_S^c| \leq 10^{-5}$ est d'avoir

$$\frac{h^4}{2880} \max_{t \in [1,2]} |f^{(4)}(t)| \leq 10^{-5}.$$

Or $f^{(4)}(t) = (t-4)e^{-t}$. ce qui implique $\max_{t \in [0,1]} |f^{(4)}(t)| = 4$.

Donc, on devrait avoir

$$h^4 \leq \frac{2880 \times 10^{-5}}{4} \Rightarrow h \leq 0.29.$$

Donc $h = \frac{1}{4}$ donnera la précision voulue. On aura donc besoin de seulement 4 points de subdivision dans cette méthode.

Solution de l'exercice 05 :

soit $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ où $f(x) = e^{-x^2} \forall x \in [0, 1]$

1. Nombre de subdivisions pour évaluer I à 10^{-4} près par la méthode de Simpson Dérivées

successives de $f(x) = e^{-x^2}$,

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(t) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

$$f^{(3)}(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}.$$

$$f^{(4)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}.$$

et on a

$$\begin{aligned} |(16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}| &\leq |(16x^4 - 48x^2 + 12)|e^{-x^2} \\ &\leq |(16x^2(x^2 - 1))| + |(12(1 - x^2))| + |20x^2| \leq 48. \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - I_S^C(f) \right| \leq \frac{(1-0)^4}{120 \times 24n^4} \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{48}{120 \times 24n^4} \leq 10^{-4}$$

ce qui entraîne que $n^4 \geq 10460$ d'où $n \geq \sqrt[4]{166.66}$ c'est à dire $n \geq 4$.

2. Valeur de I en utilisant la subdivision $x_0 = 1, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75$ et $x_4 = 1$.

Solution de l'exercice 06 :

Écrivons que la formule est exacte pour les monômes de degré 0 à 3 :

$$f(x) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1.$$

$$f(x) = x \Rightarrow \beta + \gamma + \sigma = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \beta + 2\sigma = \frac{1}{3}.$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \beta + 3\sigma = \frac{1}{4}.$$

ce qui donne $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{12}, \sigma = -\frac{1}{12}$.

Solution de l'exercice 07 :

On sait que l'accélération est la dérivée de la vitesse V , donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(t) dt.$$

$$V(80) = 0 + \int_0^{80} \gamma(t) dt.$$

a) Calculons $V(80)$ par la méthode des trapèzes, d'après le tableau des valeurs, on a $h = 10$ et $n = 8$. Alors

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{2} [\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + 2(\sum_{i=1}^n \gamma(t_i))] \\ &= 5(30 + 50.67 + 2(31.63 + 33.44 + 35.47 + 37.75 + 40.33 + 43.29 + 46.70)) \\ &= 3089m/s \end{aligned}$$

b) Calculons $V(80)$ par la méthode de Simpson

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3} [\gamma(t_0) + \gamma(t_n) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \gamma(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \gamma(x_{2i+1})] \\ &= \frac{10}{3} (30 + 50.67 + 2(33.44 + 37.75 + 43.29) + 4(31.63 + 35.47 + 40.33 + 46.70)) \\ &= 3087m/s \end{aligned}$$

Chapitre 4

Résolution d'équations algébriques.

4.1 Introduction

Rares sont les équations en mathématiques que l'on peut effectivement résoudre. Les équations polynomiales du premier et second degré sont particulièrement bien connues et étudiées. Pour le reste, la situation se dégrade très vite !

Si l'on dispose effectivement de formules de résolution générale pour les troisième et quatrième degrés, elles ne sont que très rarement utilisées dans la pratique, à cause de leur complexité. Quant au cinquième degré, ou au-delà, on sait depuis **Abel**¹ et **Galois**² qu'elles ne peuvent être résolues par radicaux sans parler bien sûr des équations non polynomiales, pour lesquelles des méthodes générales de résolution n'existent que très rarement. Autant dire qu'il est important, sinon essentiel, d'être capable de résoudre de façon approchée des équations de type $f(x) = 0$, où f est une fonction réelle de variable réelle quelconque.

Il existe toute une panoplie de méthodes numériques (dichotomie, point fixe, Newton) conduisant à chercher numériquement les zéros de fonction $f(x) = 0$ d'une variable réelle. La majorité de ces méthodes sont itératives. En d'autres mots, elles calculent des approximations successives x_1, x_2, x_3, \dots de la véritable racine x^* de l'équation $f(x) = 0$, à partir d'une valeur initiale x_0 plus au moins bien choisie. Ce qui les distingue, entre autre, c'est leur vitesse de convergence et leur robustesse. Dans certaines applications, cette vitesse de convergence devient un facteur déterminant notamment quand il s'agit de calculer les racines d'une succession de fonctions.

1. Niels Henrik Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien.

2. Évariste Galois est un mathématicien français, né 1811-1832.

En général, les méthodes de résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ sont des méthodes itératives. Elles consistent à construire une suite x_n convergente (plus rapidement possible) vers la solution.

Ce chapitre est consacré à résoudre l'équation non linéaire du type :

$$f(x) = 0.$$

où f est une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Le problème est de trouver les valeurs de x dans l'intervalle $[a, b]$ satisfaisant l'équation $f(x) = 0$.

4.2 Méthode de Dichotomie (ou bisection).

Le principe de la méthode de Dichotomie, encore appelée méthode de bisection, est basé sur le théorème de la valeur intermédiaire.

Théorème 13 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$, avec f une fonction continue sur $[a, b]$, il faut d'abord localiser la racine x dans l'intervalle $[a, b]$, où x est une racine simple.

On procède de la manière suivante :

I. On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux parties égales et on pose $x_0 = \frac{a+b}{2}$ Alors

$x \in [a, x_0]$; si $f(a)f(x_0) < 0$

$x \in [x_0, b]$; si $f(b)f(x_0) < 0$:

II. On note le nouveau intervalle contenant x par $[a_1; b_1]$: $a_1 = a$ et $b_1 = x_0$ si $x \in [a, x_0]$

$a_1 = x_0$ et $b_1 = b$ si $x \in [x_0, b]$.

III. En itérant ce procédé, on obtient une suite de valeurs :

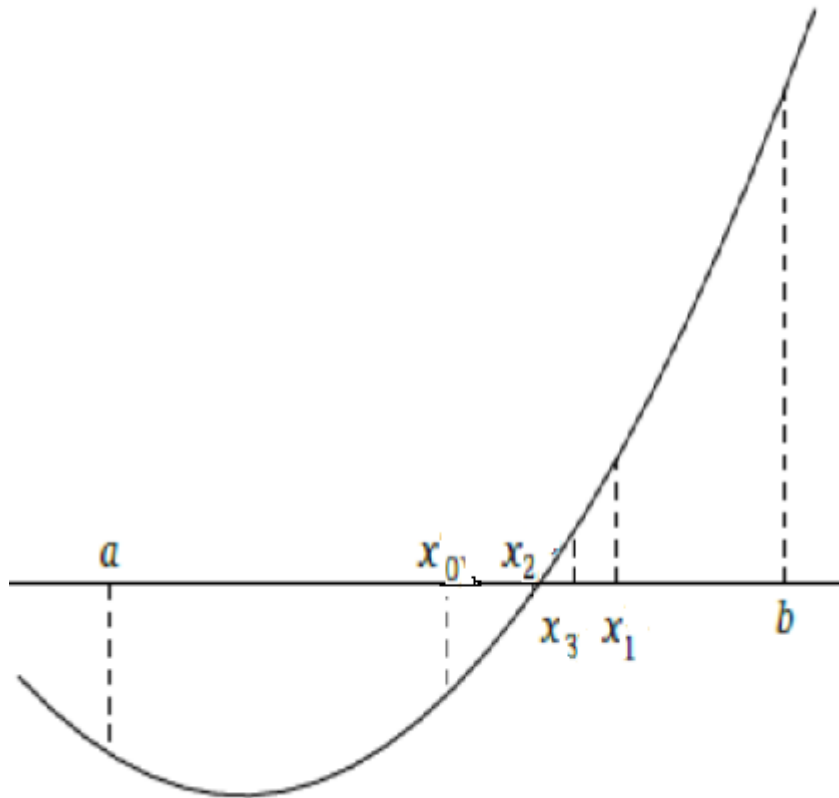
$x_0 = \frac{a+b}{2}, x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, \dots, x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, Cela nous amène à l'algorithme suivant.

4.3 Algorithme de dichotomie(ou bisection)

Donnée : $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \frac{(a+b)}{2}$ et $\epsilon > 0$

For

$k = 0; N_\epsilon$



Construction des premiers itérés de la méthode de dichotomie.

If $f(x_k)f(a_k) < 0$

$$a_{k+1} = a_k$$

$$b_{k+1} = x_k$$

else

$$a_{k+1} = x_k$$

$$b_{k+1} = b_k$$

end

$$x_{k+1} = \frac{(a_{k+1}+b_{k+1})}{2}$$

End

4.4 Étude de convergence

Théorème 14 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$; on suppose que $f(a) \times f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $c \in]a, b[$. Si l'algorithme de

dichotomie arrive jusqu'à l'étape n (de sorte que $x_i \neq c$, pour $i = 0, \dots, n$) alors

$$|x_n - c| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Preuve. On a $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n$ et par récurrence $b_n - a_n = b - a$

D'où

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

En suite, on a x_{n+1} était au milieu de l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall x \in [a_n, b_n]$. Alors on trouve

$$|x - x_{n+1}| \leq \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2} = \frac{b - a}{2^{n+2}}.$$

Et par définition c est la racine se trouve dans $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ par $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$, nous pouvons donc prendre $x = c$.

Ainsi

$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{b - a}{2^{n+2}}.$$

■ Remarques

1/D'après le théorème précédent les itérations par la méthode de la dichotomie s'achèvent à la m -ème étape quand

$$|x_m - \bar{x}| \leq \left| \frac{b_m - a_m}{2} \right| = \frac{b - a}{2^{m+1}}$$

, où ϵ est une tolérance fixée et x est la racine dans $[a, b]$.

Donc pour avoir une erreur $|x_m - \bar{x}| \leq \epsilon$ il suffit de prendre le plus petit m qui vérifie

$$m > \frac{\ln(b-a)}{\ln 2} - 1.$$

2/Avantages : Convergence certaine vers la racine (si elle est unique sur l'intervalle), si f est continue.

Exemple 4.1.

Soit $f(x) = x^3 - 3$. f est une fonction continue sur \mathbb{R} . L'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ est $\sqrt[3]{3}$. On veut approcher la valeur de $\sqrt[3]{3}$.

4.5 Méthode de Newton-Raphson

Soit $f \in C^1([a; b])$ tel que $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a; b]$ et on suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $[a, b]$. Le principe de la méthode de Newton-Raphson³ consiste à remplacer le problème non linéaire $f(x) = 0$ par un problème affine

3. Joseph Raphson 1648-1715

$g(x) = 0$; où g est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0 donné. On identifie la représentation de g à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse au voisinage de x_0 . En effet, par la formule de Taylor on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \quad (4.5.1)$$

On suppose que $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, et nous définissons x_1 tel que $g(x_1) = 0$. Notons que x_1 est bien définie lorsque $f'(x_0) \neq 0$ donné par :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Nous construisons ainsi par récurrence, sous réserve que $x_n \in [a, b]$, la suite comme suit :

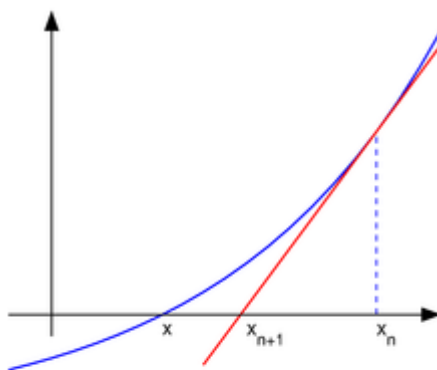


Figure 2. Illustration de la méthode de Newton.

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \text{ donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

4.6 Étude de convergence

Théorème 15 (convergence globale de la méthode de Newton-Raphson)

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[a, b]$ telle que

i) $f(a) \times f(b) < 0$;

ii) $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

iii) $f'(x)$ et $f''(x)$ sont non nulles et gardent des signes constants dans $[a, b]$.

Alors la suite des itérés de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \forall n \in \mathbb{N}$$

converge vers l'unique zéro $\bar{x} \in [a, b]$ de f .

Preuve. Les hypothèses de changement de signe de la fonction continue f et désigne constant de sa dérivée f' , également continue, sur $[a, b]$ impliquent qu'il existe un unique zéro $x^* \in [a, b]$. Par conséquent, si $f(x_0)f''(x_0) = 0$, on a directement $x_0 = \psi$ et la méthode est(trivialement) convergente. On suppose donc que $f(x_0) \times f''(x_0) > 0$.

Puisque f'' garde un signe constant, sur l'intervalle $[a, b]$, on doit distinguer deux cas.

Soit, $\forall, x \in [a, b], f''(x) > 0$ et alors $f(x_0) > 0$. Si de plus, $\forall, x \in [a, b], f'(x) > 0$, on a alors, $\forall, x \in [a, x^*[, f(x) < 0$ et, $\forall, x \in]x^*, b], f(x) > 0$, d'où $x_0 \in]x^*, b]$. On vérifie alors que

$$\forall, x \in]x^*, b]; g'(x) = \frac{f(x)}{f''(x)(f'(x))^2} > 0,$$

La fonction g définissant la méthode est donc strictement croissante sur $]x^*, b]$. On en déduit d'une part que

$$\psi = g(\psi) \leq g(x_0) = x_1,$$

d'où $\psi \leq x_1 < x_0$. Par récurrence, on obtient que la suite de Newton Raphson est strictement décroissante et minorée par ψ . Elle est donc convergente et a pour limite l'unique point fixe ψ de la fonction g . Si, $\forall, x \in [a, b], f'(x) < 0$, un raisonnement identique conduit au fait que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Newton-Raphson est strictement croissante et majorée par ψ . De nouveau, cette suite est convergente et a pour limite ψ . Enfin, si $\forall, x \in [a, b], f''(x) < 0$ et $f(x_0) < 0$, il suffit de reprendre la preuve ci-dessus en remplaçant f par $-f$ pour établir la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

■

Remarque

Commentaires : Il est très important de choisir x_0 aussi proche que possible de α , sinon, non seulement la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut converger vers une autre racine, mais peut aussi diverger. Conclusion sur la méthode de **Newton-Raphson**.

I. Avantage principal : en règle générale, la convergence de cette méthode (si elle a lieu) est quadratique (d'ordre 2) telle que $|x_{n+1} - \alpha| = k|x_n - \alpha|^2, k \in \mathbb{R}$, (celle du point fixe quelconque est, en général, d'ordre 1 $|x_{n+1} - \alpha| = k|x_n - \alpha|, k \in \mathbb{R}$).

II. Inconvénients :

- a) Choix du point de départ x_0 pour avoir la convergence.
- b) Calcul à chaque étape, de $f'(x_n)$ en plus de $f(x_n)$.

4.7 Méthode de point fixe

La méthode de point fixe consiste à transformer l'équation non linéaire $f(x) = 0$ en un problème équivalent

$$g(x) = x$$

où la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a la propriété suivante $\bar{x} = g(\bar{x})$ si et seulement si $f(\bar{x}) = 0$: Dans la définition suivante, on va donner maintenant la notion de point fixe.

Définition 13 Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\bar{x} \in \mathbb{R}$ est tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$, on dit que \bar{x} est un point fixe de g (l'image de \bar{x} par g est lui-même).

La méthode de point fixe consiste à la construction d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b], \text{ donnée} \\ x_{n+1} = g(x_n); n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Le théorème suivant nous donne les conditions de convergence de la suite de la méthode de point fixe.

Théorème 16 Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On se donne $x_0 \in [a, b]$.

Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

I. $g(x) \in [a, b]$ pour tout $x_0 \in [a, b]$ (condition de stabilité).

II. Il existe $k \in [0; 1[$ tel que $|g(x) - g(y)| < k|x - y|$ pour tout $x, y \in [a, b]$ (condition de contraction stricte)(ou bien $|g'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$.)

Alors

i) g est continue,

ii) g a un et un seul point fixe x dans $[a, b]$,

iii) la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers \bar{x} pour tout choix de x_0 dans $[a, b]$: De plus, si x^* est la solution de l'équation $g(x) = x$ alors

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|, n > 1.$$

Preuve. Continuité.

La condition de contraction stricte implique que g est continue puisque, si on prend une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]$ qui converge vers un élément x de $[a, b]$; alors nous avons

$$|g(x) - g(y_n)| \leq k|x - y_n|$$

et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(x).$$

Existence.

La fonction $h(x) = g(x) - x$ est continue dans $[a, b]$ et, d'après la condition de stabilité, on a $h(a) = g(a) - a < 0$ et $h(b) = g(b) - b > 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que h a au moins un zéro dans $[a, b]$, i.e. g a au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Unicité.

L'unicité du point fixe découle de la condition de contraction stricte. En effet, on suppose qu'on a deux points fixes distincts x_1 et x_2 , alors

$$|x_1 - x_2| = |g(x_1) - g(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$$

ce qui est impossible avec $x_1 \neq x_2$.

Convergence.

On a

$$0 \leq |x_{n+1} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| \leq k|x_n - \bar{x}|, k < 1.$$

Et par récurrence on obtient

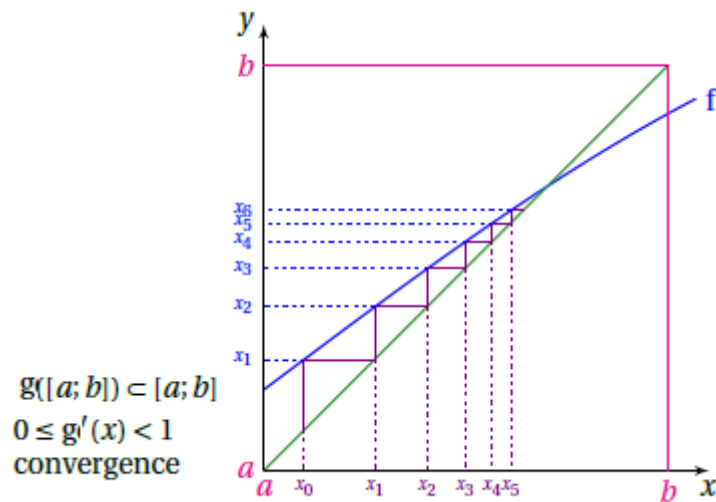
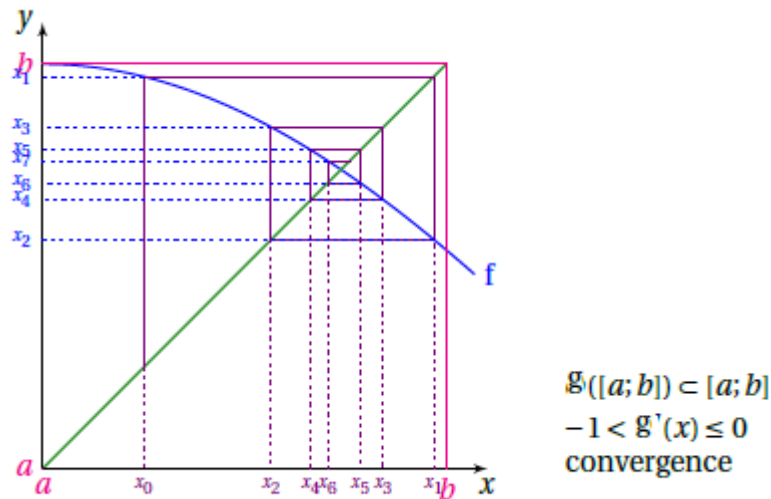
$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq k^{n+1}|x_0 - \bar{x}|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \bar{x}| = 0.$$

■

Dans les figures suivantes, on va donner l'interprétation géométrique du théorème de point fixe.



Remarques.

- i) Choisir x_0
- ii) Calculer $x_{n+1} = g(x_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$
- iii) Choisir $g(x)$ tel que $x = g(x)$.
- iv) **Avantages :** Facile à mettre en œuvre, $g(x)$ qui converge rapidement n'est souvent pas trop difficile trouver.
- v) **Inconvénients :** Bien choisir $g(x)$, tel que $g(x) = x$. Il faut parfois différents $g(x)$ pour trouver différentes racines d'une même équation.

Convergence Si $g'(x_0) < 1$ (vérifier graphiquement si graphe de $g'(x) <$ pente $y = x$).
 (divergence si $g(x)$ pas bonne).

Convergence lente (si $g(x)$ est valable).

Exemple 4.3.

Soit l'équation

$$e^x - x - 2 = 0.$$

On pose $f(x) = e^x - x - 2$, alors

$$f(x) = 0, f(x) + x = x, e^x - 2 = x$$

ou $e^x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = x + 2, x = \ln(x + 2)$.

Donc on note $g_1(x) = e^x - 2$ et $g_2(x) = \ln(x + 2)$.

D'autre part, on a $f(1) = e - 3 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, d'où on prend $I = [1, 2]$.

Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe.

Maintenant, on vérifie les conditions du théorème de point fixe.

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow e - 2 \leq e^x - 2 \leq e^2 - 2 > 2$$

d'où $g_1([1, 2]) \not\subset [1, 2]$. Alors la méthode de point fixe diverge.

Par contre la fonction $g_2([1, 2]) \subset [1, 2]$ et $|g_2'(x)| < k$ où $0 \leq k < 1$.

En effet, $1 < \ln 3 \leq \ln(x + 2) \leq \ln 4 < 2$ pour $x \in [1, 2]$ et $g_2'(x) = \frac{1}{x+2}$ alors $g_2'(1) = \frac{1}{3} < 1$ et $g_2'(2) = \frac{1}{4} < 1$

D'autre part, $g_2''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Donc $|g_2'(x)| < \frac{1}{3} < 1$.

D'où la méthode de point fixe converge. On choisit $x_0 = 1$, on a

$$x_1 = g_2(x_0) = \ln 3.$$

$$x_2 = g_2(x_1) = \ln(\ln 3 + 2) \approx 1,1309.$$

$$x_3 = g_2(x_2) \approx 1,143205032.$$

4.8 Conclusion.

1. L'avantage de la méthode du point fixe est que si elle converge, elle convergera quelle que soit la valeur initiale choisie dans l'intervalle de convergence. Son inconvénient principal est sa lenteur de convergence, on peut néanmoins l'accélérer.

2. La méthode de Newton-Raphson est plus rapide car la vitesse de convergence est d'ordre au moins 2; la difficulté réside dans le choix de la valeur initiale!

3. Les différentes méthodes proposées ont leurs avantages et leurs inconvénients, on choisira celle qui convient le mieux au problème posé! On voit qu'il est donc nécessaire d'étudier correctement les algorithmes avant de se lancer dans la programmation! C'est la démarche obligatoire en analyse numérique.

Linéaire : on gagne la même quantité de précision à chaque itération.

Quadratique : on gagne le double de précision à chaque itération.

Cubique : on gagne le triple de précision à chaque itération...etc.

2) Résolution d'une équation $f(x)=0$.

2.a) Estimer graphiquement la racine.

2.b) Tracer le graphe de la fonction et zoomer sur les racines.

4.9 Exercices

Exercice 01 :

Soit

$$f(x) = 2x^3 - x - 5.$$

1. Montrer que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1, 2]$.
2. Tracer le graphe de la fonction f .
3. En utilisant la méthode de Dichotomie dans l'intervalle $[1, 2]$ avec une précision de $\epsilon = 10^{-2}$. Calculer les zéros de cette fonction.

Exercice 02 :

On veut donner une approximation de la solution de l'équation suivante

$$\ln x + x = 0.$$

Montrer qu'il n'y a qu'une solution $x_0 \in \mathbb{R}^+$ puis appliquer la méthode de Newton-Raphson sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ pour les cinq premières itérations.

Exercice 03 : On veut trouver les zéros de la fonction suivante

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2.$$

1. Étudier graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Et en déduire qu'il y a une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. Étudier la convergence de la suite de la méthode de point fixe et quel est son ordre de convergence.
3. Étudier la convergence de la suite de la méthode de Newton en précisant l'ordre de convergence.
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 04

On cherche de déterminer le zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - 3e^{-x}.$$

1. Rappeler pourquoi f admet un unique zéro sur \mathbb{R} noté \bar{x} .
2. Calculer \bar{x} directement à partir de l'équation satisfaite par \bar{x} .
3. L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à

$$\forall \lambda \neq 0, x = x + \lambda f(x).$$

Si on pose $g(x) = x + \lambda f(x)$, on est donc ramené à trouver λ pour que la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge.

(a) On prend x_0 dans $[1, 2]$. Trouver λ pour que la suite converge et justifier le choix de x_0 .

(b) Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite ?

Exercice 04

On cherche de déterminer le zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = 1 - 3e^{-x}.$$

1. Rappeler pourquoi f admet un unique zéro sur \mathbb{R} noté x .

2. Calculer \bar{x} directement à partir de l'équation satisfaite par \bar{x}

3. L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $\forall \lambda \neq 0; x = x + \lambda f(x)$.

Si on pose $g(x) = x + \lambda f(x)$ on est donc ramené à trouver pour que la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge.

(a) On prend x_0 dans $[1, 2]$. Trouver λ pour que la suite converge et justifier le choix de x_0 .

(b) Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite ?

Exercice 05 :

On veut trouver les zéros de la fonction suivante

$$f(x) = e^{x^2} - 4x^2.$$

1. Étudier graphiquement $f(x) = 0$. Et en déduire qu'il y a une racine dans l'intervalle $[0, 1]$.

2. Étudier la convergence de la suite de la méthode de point fixe et quel est son ordre de convergence.

3. Étudier la convergence de la suite de la méthode de Newton en précisant l'ordre de convergence.

4. Que peut-on conclure ?

Exercice 06 :

1. On considère l'équation :

$$x = f(x) = \frac{1}{1 + \lambda}(e^{-\lambda x} + \lambda x), x \in [0, 1]; \lambda \in \mathbb{R}_+^*. \quad (1)$$

1. a) Montrer que les hypothèses du théorème du point fixe sont vérifiées par f dans l'intervalle $[0, 1]$.

b) En déduire que l'équation (1) admet une solution séparée $\alpha \in [\frac{1}{1+\lambda}, 1]$.

2. Soit l'équation :

$$F(x) = e^{-x} - x = 0. \quad (2)$$

a) Quelle relation y a-t-il entre les équations (1) et (2) ?

b) Les hypothèses du théorème de Newton sont-elles vérifiées dans l'intervalle $[0, 1]$?

c) Trouver un sous-intervalle I fermé de $[0, 1]$ dans lequel l'algorithme de Newton appliqué à l'équation (2) converge $\forall x_0 \in I$.

Exercice 07 :

Soient les deux fonctions : $f(x) = \ln(1+x) - x + 0.2$ et $g(x) = \ln(1+x) + 0.2$ définies sur \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que f admet une racine unique l sur \mathbb{R}^+ .

2. Montrer que la racine est localisée sur l'intervalle $[0.7, 1.1]$. Ensuite réduire l'intervalle par Dichotomie afin de localiser la racine sur un intervalle de longueur 0.1.

3. Vérifier que g vérifie les conditions du théorème de point fixe pour le problème $f(x) = 0$ sur l'intervalle de longueur 0.1.

4. Étudier la convergence de la méthode de point fixe donnée par la fonction g sur l'intervalle de longueur 0.1.

Exercice 08 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-x} - x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution séparée α dans l'intervalle $[1, 2]$.

2. Déterminer un intervalle I et une fonction Φ tels que la méthode du point fixe converge vers la solution α , en prenant $x_0 = 1$.

Exercice 09 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = -e^{-1}x + \frac{3}{4} - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines réelles positives α et β où $\alpha \in [0, 1]$ et

$$\beta \in [1, e].$$

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente sur $[1, e]$ à l'équation $\Phi(x) = x$ où $\Phi(x) = \frac{3}{4}e - e^{1-x}$.

b) La fonction Φ vérifie-t-elle les conditions du théorème du point fixe sur l'intervalle $[1, e]$?

c) Montrer que la suite itérative $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n > 0$ converge vers la racine β et

$$\forall x_0 \in [1 + \frac{1}{10}, e].$$

d) En prenant $x_0 = 1.1$, calculer x_2 et estimer l'erreur $|x_2 - \beta|$.

(**Indication** : $e^{-e} = 0.0660$ et $e^{1-e} = 0.1794$.)

4.10 Corrigés des exercices.

Solution exercice 01 :

1. On montre que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[1, 2]$.

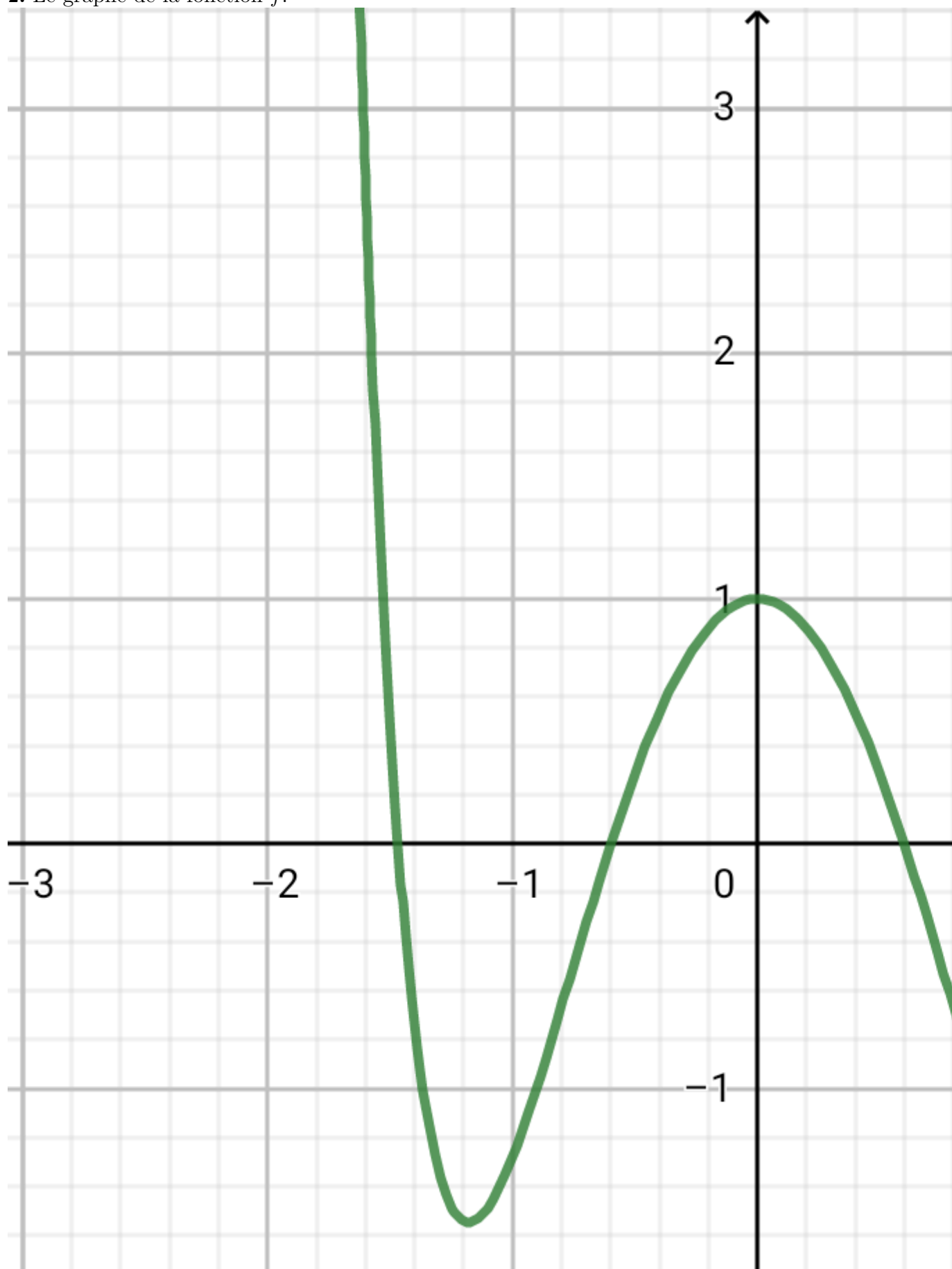
Soit $f(x) = 2x^3 - x - 5$ une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} .

Sur l'intervalle $[1, 2]$ on a $f'(x) = 6x^2 - 1 > 0$ et $f(1) = -4 < 0, f(2) = 9 > 0$.

D'après théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique

$$c \in]1, 2[/ f(c) = 0.$$

2. Le graphe de la fonction f .



En appliquant la méthode de dichotomie avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$ sur $[1, 2]$.

On calcule d'abord le nombre d'itération. On sait que

$$n > \frac{\ln(b-a)}{\ln 2} - 1.$$

avec $a = 1$ et $b = 2$. On obtient $n \simeq 6$.

Pour $I_0 = [1, 2]$, on calcule

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 14 > 0,$$

d'où

$$I_1 = \left[1, \frac{3}{2}\right] = [a_1, b_1],$$

alors

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{75}{32} < 0,$$

d'où

$$I_2 = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] = [a_2, b_2],$$

alors

$$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f\left(\frac{11}{8}\right) = -\frac{301}{256} < 0.$$

D'où

$$I_3 = \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right] = [a_3, b_3],$$

alors

$$f\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right) = f\left(\frac{23}{16}\right) = -\frac{1017}{2048} < 0.$$

D'où

$$I_4 = \left[\frac{23}{16}, \frac{3}{2}\right] = [a_4, b_4],$$

alors

$$f\left(\frac{a_4+b_4}{2}\right) = f\left(\frac{47}{32}\right) = -\frac{21611}{6384} < 0.$$

D'où

$$I_5 = \left[\frac{47}{32}, \frac{3}{2}\right] = [a_5, b_5],$$

alors

$$\bar{x} = \frac{95}{64} \in \left[\frac{47}{32}, \frac{3}{2}\right].$$

solution d'exercice 02 :

La fonction $f(x) = x + \ln(x)$ est définie, continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , et

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +} f(x) = +\infty$. Par

le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(c) = 0$.

Appliquons la méthode de Newton-Raphson sur $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

La suite de Newton-Raphson est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \ln(x_n)}{1 + \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n(1 + \ln(x_n))}{1 + x_n}.$$

Avec $x_0 = \frac{1}{2}$ on obtient

$$x_1 \approx 0.56438239352,$$

$$x_2 \approx 0.567138987716,$$

$$x_3 \approx 0.567143290399,$$

$$x_4 \approx 0.567143290410,$$

$$x_5 \approx 0.5671432904098 \approx 0.567143290410.$$

On remarque que on a 10 décimales exactes avec x_5 .

solution d'exercice 07 :

1. $f'(x) = \frac{-x}{1+x} < 0$ pour x positif donc f admet au plus une seule racine.

D'autre part on a $f(0) = 0.2 > 0$ et $f(1) = \ln(2) - 1 + 0.2 < 0$ donc la racine existe.

2. $f(0.7) = \ln(1.7) - 0.5 = 0.5306... - 0.5 > 0$ et $f(1.1) = \ln(2.1) - 0.9 = 0.7419... - 0.9 < 0$

donc la racine est dans l'intervalle $[0.7, 1.1]$

Première dichotomie :

$$0.9 = \frac{0.7+1.1}{2} \text{ et } f(0.9) = \ln(1.9) - 0.7 = 0.6418... - 0.7 < 0.$$

Donc la racine se trouve dans $[0.7, 0.9]$.

Deuxième dichotomie :

$$(0.7, 0.8) = \frac{0.7+0.9}{2} \text{ et } f(0.8) = \ln(1.8) - 0.6 = 0.5877... - 0.6 < 0.$$

Donc la racine se trouve dans $[0.7, 0.8]$ de longueur 0.1.

3. On a $g'(x) = \frac{1}{1+x} < 1$ pour $x \in [0.7, 0.8]$

$$g(0.7) = \ln(1.7) + 0.2 = 0.7306... \in [0.7, 0.8].$$

$$\text{De plus } g(0.8) = \ln(1.8) + 0.2 = 0.7877... \in [0.7, 0.8]$$

Ainsi $g([0.7, 0.8]) \subset [0.7, 0.8]$.

4. D'après le théorème de point fixe, la méthode est convergente pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [0.7, 0.8], \\ x_{n+1} = g(x_n); n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Solution exercice 04 :

1. La fonction $f(x) = 1 - 3e^{-x}$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3e^{-x}$.

En plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 > 0$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

2. On résout l'équation $1 - 3e^{-x} = 0$ on trouve $\bar{x} = \ln 3$.

3. Maintenant, on pose $g(x) = x + \lambda f(x)$, $\lambda \neq 0$ et

$$g'(x) = 1 + 3\lambda e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a). On a $f(1) = 1 - \frac{3}{e} < 0$ et $f(2) = 1 - \frac{3}{e^2} > 0$ et $f'(x) > 0$ sur $[1, 2]$ alors $x \in [1, 2]$ donc on choisit x_0 dans l'intervalle $[1, 2]$.

Pour que la méthode converge on a besoin de garantir $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in [1, 2]$.

Pour $g'(x) < 1$ il est nécessaire que $\lambda < 0$ et pour que $g'(x) > -1$ il faut que $\lambda > -\frac{2e}{3}$.

Ainsi la méthode de point fixe converge si $\lambda \in]-\frac{2e}{3}, 0[$.

(b) Le choix optimal pour λ (pour la convergence de la suite x_n) est celui pour lequel

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 3\lambda e^{-\bar{x}} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{e^{-\bar{x}}}{3}.$$

Et d'après la formule de Taylor à l'ordre 2 on a

$$\exists c_n \in [1, 2] : g(x_n) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \frac{g''(c_n)}{2}(x_n - \bar{x})^2.$$

Et donc, pour $\lambda = -\frac{e^{-\bar{x}}}{3}$, on a $g(\bar{x}) = \bar{x}$ et $g'(\bar{x}) = 0$. On en déduit que

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \sup_{x \in [1, 2]} |g''(x)| |x_n - \bar{x}|^2$$

La méthode est donc d'ordre 2.

Bibliographie

- [1] M. Atteia, M. Pradel, *Eléments d'analyse numérique*, Ceradues-Editions. 1990.
- [2] J. Baranger, *Introduction à l'analyse numérique*, Ed. Hermann 1977.
- [3] M. Boumahrat, A. Bourdin, *Méthodes numériques appliquées*, Ed. OPU 1983.
- [4] J.P. Calvi, *Analyse numérique*, UPS Université de Toulouse 2011.
- [5] Ph. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, Paris 1998.
- [6] F. Curtis., P.O. Gerald Wheatdey, *Applied Numerical Analysis*, Addison- Wesley Pub. Compagny. 2003.
- [7] B. Démodovitch, I. Maron, *Eléments de calcul numérique*, Ed. Mir Mosco. 1979.
- [8] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses internationales polytechnique 1994.
- [9] B. Démodovitch, I. Maron, *Eléments de calcul numérique*, Ed. Mir Mosco. 1979.
- [10] M. Lakrib, *Cours d'analyse numérique*, Office des publications universitaires OPU 4274, 2016.
- [11] P. Lascaux, R. Theodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art d'ingénieur*, Tomes I et II, Masson, Paris. 1986.
- [12] G. Legendre, *Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique*, Dauphine université de Paris 2018.
- [13] G.A. Meurant, G.H. Golub, *Résolution numérique des grands systèmes*, Ed. Stanford University. 1983.
- [14] M. Pierre, A. Henrot, *Analyse Numérique*, École de MINES de Nancy 2013-2014.