

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليدجي بالأغواط



UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية التكنولوجيا
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Thèse

Présentée pour obtenir le Diplôme de Doctorat LMD

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

Thème

ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION THERMIQUE LORS DE LA CROISSANCE CRISTALLINE

Présentée par Mr. Aissa ATIA

Soutenue le

Devant le Jury proposé de :

Président : Mr. Ahmed BENCHATTI, Professeur à l'Université de Laghouat.
Encadreur : Mr. Saïd BOUABDALLAH, Maître de Conférences à l'Université de Laghouat.
Examineurs : Mr. Ahmed MEDJELLED, Professeur à l'Université de Laghouat.
Mr. Abdellah ABDELLAH EL-HADJ, Professeur à l'Université de Médéa.
Mr. Salah HANINI, Professeur à l'Université de Médéa.
Invité: Mr. Mounir ALLICHE, Maître de Conférences à l'Université de Médéa.

Année Universitaire 2015/2016

Préface

La Thèse présentée est réalisée au niveau du *Laboratoire de Mécanique*, agréé récemment (en 2009), au sein de l'équipe de recherche : *Transferts Thermiques et Energies Renouvelables*, à l'Université de Laghouat. Quatre ans d'efforts énormes ont été fournis d'une façon continue, pour la réussite de ce sujet de recherche. Des millions d'essais numériques et des multitudes de différentes situations du problème posé étaient nécessaires pour décrocher les lacunes numériques.

La Thèse présentée examine le problème de la convection thermique lors de la croissance cristalline. Trois modèles physiques similaires à celle de Bridgman vertical (2D), et de Czochralski (2D et 3D), qui sont utilisés pour la croissance des monocristaux sont examinés. L'étude a été faite pour deux régimes d'écoulement : stationnaire et instationnaire (oscillatoire), tel que l'ultime objectif dans le régime instationnaire est la détermination de la valeur critique du nombre de Reynolds (Re_{cr}), et de Grashof (Gr_{cr}) correspond à la transition d'un régime stable ou stationnaire à un régime oscillatoire. Ainsi leurs fréquences critiques correspondantes F_{cr} . Un champ magnétique externe et uniforme est appliqué pour différentes orientations et intensités afin de stabiliser les écoulements convectifs (Mixte et naturelle). Plusieurs variantes du problème sont examinées, telles que le nombre de Grashof (Gr) et l'inclination de la cavité (ϕ), pour la convection naturelle, le nombre de Richardson (Ri), le nombre de Reynolds (Re), et le rapport d'aspect (Ar), pour la convection mixte, ainsi que, le nombre de Hartmann (Ha), afin de voir leurs effets sur la convection.

A. ATIA

Résumé de la Thèse

Etude numérique de la convection thermique lors de la croissance cristalline

Dans cette thèse, une étude numérique de la convection thermique d'un métal liquide au cours de la croissance cristalline a été présentée. Trois modèles physiques sont considérés : une cavité similaire à celle de Czochralski, pour la convection mixte axisymétrique, une autre similaire à celle de Bridgman vertical pour la convection naturelle axisymétrique, et une tridimensionnelle pour la convection mixte dans une cavité de type Czochralski. Un champ magnétique externe uniforme de différentes intensités et orientations est appliqué sur les modèles physiques afin de stabiliser l'écoulement et éliminer les instabilités convectives. Un code de calculs propre basé sur la méthode des volumes finis est utilisé pour la résolution des équations de conservation des problèmes axisymétriques, et pour la convection mixte tridimensionnelle, le code commercial FLUENT est utilisé dans les simulations. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec ceux des travaux numériques et expérimentaux. Pour la convection mixte axisymétrique dans une cavité de type Czochralski, l'effet du nombre de Richardson (Ri), du rapport d'aspect (Ar) et du champ magnétique (Ha) sur le champ d'écoulement sont présentés et discutés. Nous avons trouvé que l'augmentation du Ri déstabilise l'écoulement et provoque la diminution du taux de transfert thermique, et que la forte stabilisation de l'écoulement se manifeste pour un grand allongement de la cavité ($Ar = 3$). Nous avons trouvé également, que l'augmentation du Ha entraîne une augmentation du nombre de Reynolds critique (Re_{cr}), et cause des changements remarquables sur la structure de l'écoulement, et que la forte stabilisation magnétique se trouve pour un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale. Pour la convection naturelle dans une cavité de type Bridgman vertical, l'effet du nombre de Grashof (Gr), l'inclinaison du cylindre (φ) et le champ magnétique Ha sur le champ d'écoulement sont présentés et discutés. Nous avons trouvé que l'augmentation du Gr déstabilise l'écoulement et augmente considérablement le taux de transfert thermique. Nous avons trouvé aussi que l'inclinaison du cylindre a un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement et que la forte stabilisation se trouve pour l'angle d'inclinaison $\varphi = 30^\circ$. Le champ magnétique a un effet très important dans la direction radiale $\delta = 0^\circ$, et la combinaison entre l'inclinaison du cylindre φ et l'orientation du champ magnétique δ , donne des résultats importants sur le contrôle de la convection naturelle. Alors, il facilite la stabilisation de l'écoulement par plusieurs méthodes, soit par l'inclinaison du cylindre, soit par l'orientation du champ magnétique, soit par la combinaison entre les deux. Pour la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité de type Czochralski. Nous avons trouvé que l'intensité du champ d'écoulement dépend fortement du Ri . Et que l'application du champ magnétique provoque un changement remarquable sur la structure d'écoulement et ralentisse la transition, par conséquent, stabilise l'écoulement convectif.

Mots clés : Convection thermique, Métal liquide, Croissance cristalline, Champ magnétique, Stabilité, Méthode des volumes finis.

Abstract of the thesis

Numerical study of the thermal convection during crystal growth

In this thesis, a numerical study of thermal convection of liquid metal during crystal growth has been presented. Three physical models are considered: a cavity similar to that of Czochralski, for the axisymmetric mixed convection, another similar to the vertical Bridgman for natural convection axisymmetric, and a three-dimensional for the mixed convection in Czochralski enclosure. An uniform external magnetic field of different intensities and directions is applied to the physical models in order to stabilize the flow and eliminate the convective instabilities. A clean computer code based on the finite volume method is used for solving the conservation equations of axisymmetric problems, and for three-dimensional mixed convection, the commercial code FLUENT is used in the simulations. The obtained results show a good agreement with those numerical and experimental works. For the axisymmetric mixed convection in a Czochralski cavity, the effect of the Richardson number (Ri), the aspect ratio (Ar) and magnetic field (Ha) on the flow field are presented and discussed. We found that the increasing of the Richardson number destabilizes the flow and causes a decrease in the heat transfer rate, and that the strong stabilization of the flow is manifested for a large elongation of the cavity ($Ar = 3$). We found also that the increase of Ha increases the critical Reynolds number (Re_{cr}) and causes a remarkable changes in the structure of the flow, and that the strong magnetic stabilization is located for the magnetic field applied in the radial direction. For the natural convection in a vertical Bridgman cavity, the effect of the Grashof number (Gr), the inclination of the cylinder (φ) and the magnetic field (Ha) in the flow field are presented and discussed. We found that the increase of Gr destabilize the flow and significantly increases the heat transfer rate. We have also found that the inclination of the cylinder has a very significant effect on the flow stabilization, and the strongest stabilization located for the angle of inclination $\varphi = 30^\circ$. The magnetic field has a very important effect in the radial direction $\delta = 0^\circ$, and the combination between the inclination of the cylinder φ and the orientation of the magnetic field δ gives a significant results on the control of natural convection. So, it facilitates the flow stabilization by several methods, by inclination of the cylinder, or by the orientation of the magnetic field, or by a combination between the two. For the three-dimensional mixed convection in Czochralski cavity. We found that the intensity of the flow field depends strongly on Ri . And that the application of the magnetic field causes a remarkable change in the flow structure and slows the transition, therefore, stabilizes the convective flow.

Keywords: Thermal convection, Crystal growth, Liquid metal, Magnetic field, Stability, Finite volume method.

ملخص الأطروحة

دراسة عددية للحمل الحراري خلال النمو البلوري

في هذه الأطروحة، دراسة عددية للحمل الحراري لسائل معدني خلال النمو البلوري قد قدمت. ثلاثة نماذج فيزيائية درست: تجويف مشابه لشوخرالسكي (Czochralski)، للحمل الحراري المختلط المتناظر بالنسبة لمحور الدوران، وآخر مشابه لبريدجمان (Bridgman) العمودي، للحمل الحراري الطبيعي المتناظر بالنسبة لمحور الدوران، و ثلاثي الأبعاد من نوع شوخرالسكي، للحمل الحراري المختلط. مجال مغناطيسي خارجي بمختلف الشدات و الاتجاهات طبق على النماذج الفيزيائية لإخماد السيلان و إلغاء الاضطرابات. برنامج حسابات مطور يعتمد على طريقة الحجوم المنتهية لحل معادلات الحفظ أستعمل للمسائل المتناظرة بالنسبة لمحور الدوران، و بالنسبة للحمل المختلط ثلاثي الأبعاد، البرنامج التجاري فلوينت أستعمل في المحاكاة. النتائج المحصل عليها في اتفاق جيد مع نتائج التقريبات العددية والنتائج التجريبية. بالنسبة للحمل الحراري المختلط المتناظر بالنسبة لمحور الدوران في التجويف المشابه لشوخرالسكي، تأثير عدد ريتشاردسون (Ri)، معامل الشكل (Ar)، والمجال المغناطيسي (Ha) على حقل السيلان قدم ونوقش. وجدنا بأن زيادة عدد ريتشاردسون يعمل على اضطراب السيلان ويحدث نقصان لمعدل الانتقال الحراري، و الإخماد المهم للسيلان وجد في الاستطالة الكبيرة للتجويف ($Ar = 3$). كما وجدنا بأن زيادة عدد هارتمان يحدث زيادة في عدد رينولدس المضطرب، و يحدث تغييرات في شكل السيلان، بحيث الإخماد الأقوى يوجد عندما يطبق المجال المغناطيسي في الاتجاه القطري. بالنسبة للحمل الحراري الطبيعي المتناظر بالنسبة لمحور الدوران في التجويف المشابه لبريدجمان العمودي، تأثير عدد غراشوف (Gr)، ميلان التجويف (ϕ)، والمجال المغناطيسي (Ha) على شكل السيلان قدم ونوقش. وجدنا أن زيادة عدد غراشوف يعمل على اضطراب السيلان و يحدث ارتفاع مهم لمعدل الانتقال الحراري. وجدنا أيضا بأن ميلان التجويف عامل مهم جدا لإخماد السيلان، بحيث الإخماد المهم وجد عندما يميل التجويف بزاوية $\phi = 30^\circ$. كما وجدنا أن المجال المغناطيسي قوي عندما يطبق في الاتجاه القطري، و أن الربط بين ميلان التجويف واتجاه المجال المغناطيسي يعطي لنا نتائج مهمة لمراقبة الحمل الطبيعي بحيث يسهل لنا عملية اخماد السيلان بعدة طرق، إما بإمالة التجويف، أو بتوجيه المجال المغناطيسي أو بالربط بينها. بالنسبة للحمل الحراري المختلط ثلاثي الأبعاد في التجويف من نوع شوخرالسكي، وجدنا أن شدة السيلان مرتبطة بعدد ريتشاردسون، بحيث زيادته تحدث اضطرابات للسيلان. كما وجدنا أيضا أن تطبيق المجال المغناطيسي في الاتجاه المحوري يحدث تغييرات ملحوظة في شكل السيلان كما يبطئ الانتقال وبالتالي يخمد السيلان.

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري، نمو البلورات، سائل معدني، مجال مغناطيسي، الإخماد، طريقة الحجوم المنتهية.

Remerciements

En préambule, je souhaite rendre *grâce à Dieu*, le clément et le miséricordieux de m'avoir donné la force et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Je remercie vivement Monsieur Saïd BOUABDALLAH, *Maître de Conférences* à l'Université de Laghouat encadreur de cette thèse, pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa disponibilité permanente, pour sa patience, pour ses conseils, pour sa contribution majeure de l'orientation de mes recherches, pour son aide et son soutien permanents.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Ahmed BENCHATTI, *Professeur* à l'Université de Laghouat, et Directeur du *Laboratoire de Mécanique*, d'avoir participé à ce Jury, en tant que président. Je lui exprime mes plus hauts respects.

Je remercie vivement Monsieur Abdellah ABDELLAH EL - HADJ, *Professeur* à l'Université de Médéa, Monsieur Salah HANINI, *Professeur* à l'Université de Médéa, Monsieur Ahmed MEDJELLED, *Professeur* à l'Université de Laghouat, et Monsieur Mounir ALLICHE, *Maître de Conférences* à l'Université de Médéa, d'avoir accepté d'être les examinateurs de cette thèse. Je leur exprime toute ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de ce travail et pour leurs appréciations.

Je remercie tous les enseignants du Département de Génie Mécanique et de la faculté de Technologie, et tout le personnel administratif.

Dédicaces

A ma très chère maman « Que dieu me la garde », qui m’a éclairé le chemin en
me donne la main tout au long de mes années d’études.

A la mémoire de mon père.

A mes frères.

A mes sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis sans exception.

Sommaire

PREFACE.....	i
RESUME FRANÇAIS.....	ii
ABSTRAT.....	iii
RESUME ARABE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
DEDICACE.....	vi
SOMMAIRE.....	vii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xvii
Nomenclature.....	xviii
Introduction générale.....	01
CHAPITRE I : Généralités et revue bibliographique	
I.1 Introduction.....	04
I.2 Méthodes d'élaboration des monocristaux.....	04
I.3 Revue bibliographique.....	12
I.4 Conclusion du chapitre I.....	30
CHAPITRE II : Problèmes physiques et formulations mathématiques	
II.1 Introduction.....	31
II.2 Description des problèmes et formulations mathématiques.....	31
II.2.1 Modèle N°1 : Convection mixte axisymétrique dans une cavité cylindrique similaire à celle de Czochralski.....	31
II.2.1.1 Hypothèses simplificatrices.....	32
II.2.1.2 Formulation mathématique.....	32
II.2.1.3 Formulation adimensionnelle.....	36
II.2.1.4 Nombres adimensionnels caractérisant le problème.....	37
II.2.1.5 Conditions initiales et aux limites.....	38
II.2.2 Modèle N°2 : Convection naturelle axisymétrique dans une cavité cylindrique similaire à celle de Bridgman vertical.....	40
II.2.2.1 Formulation mathématique.....	41
II.2.2.2 Formulation adimensionnelle.....	42
II.2.2.3 Conditions initiales et aux limites.....	43
II.2.3 Modèle N°3 : Convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski.....	45
II.2.3.1 Equations de transport tridimensionnelles.....	46
II.2.3.2 Conditions initiales et aux limites.....	47
II.3 Conclusion du chapitre II.....	48
CHAPITRE III : Méthode numérique de résolution	
III.1 Introduction.....	49
III.2 Maillage.....	50
III.3 Discrétisation implicite de l'équation générale de transport.....	52
III.3.1 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant $r..$	55
III.3.2 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant $\theta..$	56
III.3.3 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant $z..$	57
III.3.4 Discrétisation de l'équation d'énergie.....	58

III.4 Algorithmes de résolution.....	59
III.4.1 Algorithme SIMPLER.....	59
III.4.2 Algorithme TDMA.....	60
III.5 Critères de convergence.....	62
III.6 Description du code de calcul Fluent.....	63
III.6.1 Implémentation sous Fluent.....	63
III.6.2 Procédure sous Fluent.....	65
III.6.2.1 Précision des calculs.....	66
III.6.2.2 Choix du solveur.....	66
III.6.2.3 Schémas de discrétisation.....	68
III.6.2.4 Schémas d'interpolation de la pression.....	69
III.6.2.5 Méthodes de couplage pression-vitesse.....	70
III.6.2.6 Facteurs de relaxation.....	71
III.6.2.7 Intégration du module MHD sous Fluent.....	71
III.7 Conclusion du chapitre III.....	73
CHAPITRE IV : Convection mixte axisymétrique dans une cavité cylindrique similaire à celle de Czochralski	
IV.1 Introduction.....	74
IV.2 Effet du maillage sur les solutions numériques.....	74
IV.3 Validation et comparaison des résultats.....	76
IV.4 Présentations des résultats.....	79
IV.5 Solution stationnaire.....	81
IV.5.1 Effet du nombre de Richardson.....	81
IV.5.2 Effet du rapport d'aspect.....	86
IV.5.3 Effet du champ magnétique.....	89
IV.6 Solution instationnaire.....	94
IV.6.1 Structure de l'écoulement pendant d'un période de temps.....	95
IV.6.2 Diagrammes de stabilité.....	97
IV.6.3 Effet du champ magnétique.....	101
IV.6.1 Diagrammes de stabilité magnétique.....	102
IV.7 Conclusion du chapitre IV.....	105
CHAPITRE V : Convection naturelle axisymétrique dans une cavité cylindrique similaire à celle de Bridgman vertical	
V.1 Introduction.....	106
V.2 Effet du maillage sur les solutions numériques.....	106
V.3 Présentations des résultats.....	109
V.3.1 Solution stationnaire.....	110
V.3.1.1 Effet du nombre de Grashof.....	111
V.3.2 Solution instationnaire.....	116
V.3.2.1 Seuil des instabilités physiques.....	116
V.3.2.2 Structure de l'écoulement pendant d'une période de temps....	117
V.3.2.3 Effet du champ magnétique.....	123
V.3.2.3a Structure de l'écoulement pendant d'une période de temps...	124
V.3.2.3b Diagrammes de stabilité magnétique.....	124
V.3.2.4 Effet d'orientation du champ magnétique.....	129
V.3.2.5 Combinaison entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique.....	132
V.4 Conclusion du chapitre V.....	136
CHAPITRE VI : Convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski	

VI.1 Introduction.....	137
VI.2 Effet du maillage sur les solutions numériques.....	137
VI.3 Solution stationnaire.....	144
VI.3.1 Effet du nombre de Richardson.....	144
VI.3.2 Effet du champ magnétique.....	147
VI.4 Solution instationnaire.....	151
VI.4.1 Structure de l'écoulement pendant d'une période de temps	152
VI.4.2 Diagrammes de stabilité	152
VI.4.3 Effet du champ magnétique.....	159
VI.4.3.1 Structure de l'écoulement pendant d'une période de temps.....	159
VI.4.3.2 Diagrammes de stabilité magnétique.....	160
VI.5 Conclusion du chapitre VI.....	165
Conclusion générale	166
Références bibliographiques	168

Liste des Figures

	Page
Figure I.1 : Schéma de principe de la méthode de Bridgman horizontal (HB), processus de croissance des cristaux dans un four horizontal à une zone: (a) au début de l'expérience et (b) avec le cristal partiellement grandi (Dahanaraj et al. 2010).....	07
Figure I.2 : Schéma de principe de la méthode de Bridgman vertical (VB), processus de croissance des cristaux dans un four vertical à une zone: (a) au début de l'expérience et (b) avec le cristal partiellement grandi (Dahanaraj et al. 2010).....	08
Figure I.3 : Lingots obtenus par la technique de Bridgman.....	08
Figure I.4 : Schéma de principe de la méthode de la zone flottante (FZ) (Dahanaraj et al. 2010).....	09
Figure I.5 : Lingots obtenus par la technique de la zone flottante.....	10
Figure I.6 : Technique de croissance de Czochralski (CZ) (Dahanaraj et al. 2010).....	11
Figure I.7 : Lingots obtenus par la technique de Czochralski.....	11
Figure I.8 : Effet de nombre de Grashof sur le champ thermique et la fonction de courant dans un bain de croissance Cz ($Pr = 0.01$) (Kobayashi, 1978).....	14
Figure I.9 : Diagramme de stabilité $Ra = f(Pr)$ obtenu par Bottaro et Zebib (1988).....	14
Figure I.10 : Dispositif expérimental de Choi et al. (1997).....	16
Figure I.11 : Variation de nombre de Rayleigh critique en fonction de rapport d'aspect (Wu et al. 1998).....	17
Figure I.12 : Diagramme de stabilité trouvé par Bessaïh et al. (2009).....	20
Figure I.13 : Champ de température, (a) en absence, et (b) en présence d'un champ magnétique (Kakimoto et al, 2003).....	22
Figure I.14 : Modèle physique utilisé par Bontoux et al. (1986).....	25
Figure I.15 : Modèle physique de Kurian et al. (2009).....	25
Figure I.16 : Schématisation du problème considéré par Gelfgat et al. (1993).....	27
Figure I.17 : La variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} en fonction du nombre de Hartmann Ha (Gelfgat et al. 2001a).....	29
Figure II.1 : Modèle physique de la convection mixte axisymétrique.....	33
Figure II.2 : Modèle axisymétrique avec les conditions aux limites.....	39
Figure II.3 : Modèle physique de la convection naturelle axisymétrique	40
Figure II.4 : Modèle axisymétrique avec les conditions aux limites.....	44
Figure II.5 : Modèle physique de la convection mixte tridimensionnelle, avec les conditions aux limites	45
Figure III.1 : Volumes de contrôle typique et notation de maillage utilisée pour	

un maillage 2D.....	50
Figure III.2 : Volumes de contrôle du maillage entrelacé pour: (a) les quantités scalaires, (b) la composante radiale u , (c) la composante axiale v de vitesse.....	51
Figure III.3: Algorithme de calcul.....	61
Figure III.4 : Schéma des étapes utilisées dans la simulation par Fluent.....	64
Figure III.5 : Organigramme de l'approche « segregated » basée sur la Pression...	68
Figure III.6 : Schémas de discrétisation utilisés par Fluent.....	69
Figure III.7 : Schémas d'interpolation de la Pression utilisés par Fluent.....	69
Figure IV.1 : Différentes densités de maillage.....	74
Figure IV.2 : Distributions de vitesse radiale (a) et axiale (b) obtenues avec différentes densités de maillage à $r = 0$ pour $Ri = 0.1$	74
Figure IV.3 : Distributions de vitesse radiale (a) et axiale (b) obtenues avec différentes densités de maillage à $z = 1$ pour $Ri = 0.1$	74
Figure IV.4 : Distribution de la vitesse radiale (a) et azimutale (b) à $r = 0.6$: comparaison avec des données expérimentales de Michelson (1986) pour $Re = 1800$ et $Ar = 1$	76
Figure IV.5 : Distribution de la vitesse radiale à $r = 0.25$ (a) et à $r = 0.375$ (b) : comparaison avec des données expérimentales de Karcher et al. (2002) pour $Ra = 0.825 \times 10^6$	76
Figure IV.6 : Distribution de la température maximale pour différents nombres de Hartmann : comparaison avec des données expérimentales de Karcher et al. (2002)	77
Figure IV.7 : Comparaison par champ des lignes de courant: (a) notre travail, (b) le travail numérique de Bessaïh et al. (2003)	77
Figure IV.8 : Schéma présentant les positions des sondes utilisées dans les calculs numériques.....	79
Figure IV.9 : Evolution temporelle de la température adimensionnelle Θ en régime stationnaire ($Ri = 0.5$).....	82
Figure IV.10 : Contours des lignes de courant pour différents nombres de Richardson en régime stationnaire	82
Figure IV.11 : Lignes isothermes pour différents nombres de Richardson en régime stationnaire.....	83
Figure IV.12 : Vitesse azimutale w pour différents nombres de Richardson en régime stationnaire.....	83
Figure IV.13 : Champ de pression P pour différents nombres de Richardson en régime stationnaire.....	83
Figure IV.14 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0$ (a), et axiale v à $z = 1$ (b), pour différents nombres de Richardson en régime stationnaire.....	84
Figure IV.15 : Profils de température Θ à $r = 0$ (a), et nombre de Nusselt moyen	

(b), pour différents nombres de Richardson.....	84
Figure IV.16 : Lignes isothermes pour différents rapport d'aspect.....	86
Figure IV.17 : Contour de lignes de courant pour différents rapport d'aspect.....	86
Figure IV.18 : Profils de la composante de vitesse axiale v à $z = 1$ (a), et de température Θ à $r = 0$ (b), pour différents rapport d'aspect.....	87
Figure IV.19 : Nombre de Nusselt moyen pour différents rapport d'aspect.....	87
Figure IV.20 : Contour de lignes de courant pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique axiale B_z).....	90
Figure IV.21 : Lignes isothermes pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique axiale B_z).....	90
Figure IV.22 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0.50$ (a), et axiale v à $z = 1$ (b), pour différents nombres de Hartmann (champ magnétique axial B_z).....	90
Figure IV.23 : Contour de lignes de courant pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique radiale B_r).....	91
Figure IV.24 : Lignes isothermes pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique radiale B_r).....	91
Figure IV.25 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0.50$ (a), et axiale v à $z = 1$ (b), pour différents nombres de Hartmann (champ magnétique radial B_r).....	91
Figure IV.26 : Profils de la vitesse axiale maximale v_{max} (a), et le nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} (b), pour différents nombres de Hartmann. Comparaison entre le champ magnétique axial (B_z) et radial (B_r).....	92
Figure IV.27 : Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale u , axiale v et de la température Θ , à la sonde S_5 , à deux pas de temps consécutifs $\Delta\tau$ et $\Delta\tau/2$ (a). Evolution temporelle de la température adimensionnelle Θ , aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité (b), pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$	96
Figure IV.28 : Evolution temporelle de la composante de vitesse adimensionnelle radiale u (a), et axiale v (b), aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité, pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$	96
Figure IV.29 : Portraits de phase dans le plan (v, u) aux sondes S_2 (a) et S_8 (b), pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$ (régime oscillatoire).....	97
Figure IV.30 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_5 (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_5 (b), en indication les temps adimensionnels ($\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et τ_f) utilisés dans la visualisation des structures de l'écoulement, pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$ (régime oscillatoire).....	97
Figure IV.31 : Evolution temporelle des contours de la fonction de courant adimensionnelle Ψ aux instants indiqués par ($\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et τ_f). Tracées méridiennes pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$	98

Figure IV.32 : Evolution temporelle des isothermes adimensionnelles aux instants indiqués par (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f). Tracées méridiennes pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$	98
Figure IV.33 : Evolution temporelle des iso-valeurs de la vitesse azimutale adimensionnelle w aux instants indiqués par (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f). Tracées méridiennes pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$	98
Figure IV.34 : Diagrammes de stabilité : (a) $Re_{cr} - Ri$, (b) $Fr_{cr} - Ri$	99
Figure IV.35 : Tracées méridiennes des isothermes adimensionnelles au $\tau = 1.15$: (a) sans champ magnétique pour $Re_{cr} = 2800$, $Ha = 0$ et $Ri = 1$, (b) avec champ magnétique axial pour $Re_{cr} = 3160$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$, (c) avec champ magnétique radial pour $Re_{cr} = 3300$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$	102
Figure IV.36 : Tracées méridiennes des fonctions de courants au $\tau = 1.15$: (a) sans champ magnétique pour $Re_{cr} = 2800$, $Ha = 0$ et $Ri = 1$, (b) avec champ magnétique axial pour $Re_{cr} = 3160$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$, (c) avec champ magnétique radial pour $Re_{cr} = 3300$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$	102
Figure IV.37 : Tracées méridiennes iso-valeurs de la vitesse azimutale adimensionnelle au $\tau = 1.15$: (a) sans champ magnétique pour $Re_{cr} = 2800$, $Ha = 0$ et $Ri = 1$, (b) avec champ magnétique axial pour $Re_{cr} = 3160$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$, (c) avec champ magnétique radial pour $Re_{cr} = 3300$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$	102
Figure IV.38 : Diagrammes de stabilité magnétique: $Re_{cr} - Ha$	103
Figure V.1 : Déférentes tailles de maillage.....	106
Figure V.2 : Effet du maillage sur la fonction de courant maximale (a) et sur le nombre de Nusselt moyen (b) pour $Gr = 10^5$ et $\varphi = 30^\circ$ (régime permanent).....	107
Figure V.3 : Les positions des sondes utilisées dans les calculs numériques.....	109
Figure V.4 : Evolutions temporelles des composantes de vitesse u , v et température Θ dans deux sondes, (a) à la sonde S_8 , (b) à la sonde S_3 , pour $Gr = 8 \times 10^5$ et $\varphi = 30^\circ$ (cas stationnaire).....	112
Figure V.5 : Contours de la fonction de courant pour $\varphi = 30^\circ$ et pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4$, 5×10^4 , 10^5 , 5×10^5 et 10^6	112
Figure V.6 : Contours des isothermes pour $\varphi = 30^\circ$ et pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4$, 5×10^4 , 10^5 , 5×10^5 et 10^6	113
Figure V.7 : Profils de la vitesse radiale u à $z = 1$ (a), et axiale v à $r = 0.50$ (b), pour $\varphi = 30^\circ$ et pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4$, 5×10^4 , 10^5 , 5×10^5 et 10^6	114
Figure V.8 : Variation de nombre du Nusselt moyen Nu_{moy} pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4$, 5×10^4 , 10^5 , 5×10^5 et 10^6 . ($\varphi = 30^\circ$)...	114
Figure V.9 : Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale u , axiale v (a) et de la température (b), au sonde S_8 , à deux pas de temps consécutifs $\Delta\tau$ et $\Delta\tau/2$, pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).....	118

Figure V.10 : Evolution temporelle de la composante de la vitesse adimensionnelle radiale u (a), et axiale v (b), aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).....	118
Figure V.11 : Evolution temporelle de la température adimensionnelle Θ , aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).....	119
Figure V.12 : Portraits de phase dans le plan (v, u) aux sondes S_2 (a) et S_4 (b), pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).....	119
Figure V.13 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse radiale adimensionnelle u au sonde S_5 , pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale adimensionnelle u au sonde S_6 , en indication; les instants adimensionnels $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$ sont utilisés pour la visualisation des structures de l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (b).....	120
Figure V.14 : Evolution temporelle des contours de la fonction de courant adimensionnelle Ψ aux instants indiqués par $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$, pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$	120
Figure V.15 : Variation temporelle des isothermes dans l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$, représentée aux différents instants adimensionnels $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$	121
Figure V.16 : Nombre de Grashof critique Gr_{cr} en régime oscillatoire (a), et la fréquence correspondante Fr_{cr} (b) en fonction du l'inclinaison du cylindre φ	121
Figure V.17 : Atténuation de la variation temporelle de la vitesse axiale v par un champ magnétique radial au sonde S_7 , pour $Gr = 2.1 \times 10^6$ et $\varphi = 0$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_8 , en indication ; les temps adimensionnels $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$ sont utilisés pour la visualisation des structures de l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$, $\varphi = 0$ et $Ha = 30$ (b)...	125
Figure V.18 : Evolution temporelle des contours de la fonction de courant adimensionnelle Ψ aux instants indiqués par $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$, pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$, $\varphi = 0$ et $Ha = 30$	126
Figure V.19 : Variation temporelle des isothermes dans l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$ et $\varphi = 0$, représentée aux différents instants adimensionnels $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$	126
Figure V.20 : Diagrammes de stabilité magnétique: $(Gr - Ha)$ (a) et $(Fr - Ha)$ (b)..	127
Figure V.21 : Variation de nombre du Nusselt moyen Nu_{moy} pour différents nombres de Hartmann : $Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50 . ($\varphi = 0^\circ$).....	127
Figure V.22 : Diagrammes de stabilité magnétique $(Gr - Ha)$ (a) et $(Fr - Ha)$ (b), pour différents orientation du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°).....	130

Figure V.23 : Diagrammes de stabilité magnétique ($Gr - Ha$) (a) et ($Fr - Ha$) (b), pour $\varphi = 30^\circ$ et différents orientation du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°).....	133
Figure V.24 : Diagrammes de stabilité magnétique ($Gr - Ha$) (a) et ($Fr - Ha$) (b), pour $\varphi = 45^\circ$ et différents orientation du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°).....	133
Figure V.25 : Diagramme de stabilité magnétique ($Gr - Ha$), dans le cas $\varphi = \delta$	134
Figure VI.1 : Domaine de calculs de différentes tailles de maillage.....	138
Figure VI.2 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0.5$ (a), axiale v à $z = 0.5$ (b) et azimutale w à $z = 0.5$ (c), pour différents tailles de maillage.....	139
Figure VI.3 : Profils de la température adimensionnelle Θ à $z = 0.5$, pour différents tailles de maillage.....	139
Figure VI.4 : (a) Position des plans dans la cavité, (b) vue de dessus de la position des sondes de mesures, pour différents paramètres hydrodynamiques et thermiques dans la cavité tridimensionnelle ($Ar = 1$).....	140
Figure VI.5 : Iso-surfaces de température, pour différents nombres de Richardson.....	143
Figure VI.6 : Trajectoires de quelques particules fluides, pour différents nombres de Richardson.....	144
Figure VI.7 : Profils de la composante de vitesse radiale à $r = 0$ (a), axiale à $z = 0.5$ (b) et azimutale à $z = 0.5$ (c), pour différents nombres de Richardson.....	145
Figure VI.8 : Iso-surfaces de température, pour différents nombres de Hartmann...	147
Figure VI.9 : Trajectoires de quelques particules fluides, pour différents nombres de Hartmann.....	148
Figure VI.10 : Profils de la composante de vitesse radiale à $r = 0$ (a) et axiale à $z = 0.5$ (b), pour différents nombres de Hartmann.....	149
Figure VI.11 : Evolution temporelle des vitesses adimensionnelles au point S_2 , (a) vitesse radiale u , (b) vitesse axiale v dans le plan ($z = 0.5$), pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	154
Figure VI.12 : Evolution temporelle au point S_2 , (a) vitesse azimutale w , (b) température adimensionnelle Θ dans le plan ($z = 0.5$), pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	152
Figure VI.13 : Evolution temporelle de la vitesse radiale adimensionnelle u aux points S_3 , S_4 et S_6 dans le plan ($z = 0.20$) (a), et la vitesse axiale adimensionnelle v aux points S_2 , S_4 et S_7 dans le plan ($z = 0.50$) (b), pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	153
Figure VI.14 : Evolution temporelle de la vitesse azimutale adimensionnelle w aux points S_3 , S_4 et S_6 dans le plan ($z = 0.80$) (a), et de la température adimensionnelle Θ aux points S_2 , S_3 et S_4 dans le plan ($z = 0.50$) (b), pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	153
Figure VI.15 : Portraits de phase dans le plan (u, v) (a), et dans le plan (u, v) (b)	154

au sonde S_2 , pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	
Figure VI.16 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_2 de plan $z = 0.50$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale adimensionnelle u au sonde S_2 (plan $z = 0.50$), en indication ; les instants adimensionnels (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) sont utilisés pour la visualisation des structures de l'écoulement à $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	154
Figure VI.17 : Iso-surfaces de la température dans la cavité aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	156
Figure VI.18 : Iso-surfaces de la vitesse axiale à $v = 0.109$ (droite), et trajectoires de quelques particules fluides dans la cavité (gauche) aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$	157
Figure VI.19 : Diagrammes de stabilité: $Re_{cr}-Ri$ (a), et de $Fr_{cr}-Ri$ (b).....	157
Figure VI.20 : Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale, axiale et azimutale u , v et w au point S_2 , dans le plan ($z = 0.50$) (a), et de la température adimensionnelle Θ aux points S_3 et S_4 , dans le plan ($z = 0.20$), pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$	160
Figure VI.21 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_2 de plan ($z = 0.50$) (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_3 (plan $z = 0.50$) (b), pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$	160
Figure VI.22 : Iso-surfaces de la température dans la cavité aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$	161
Figure VI.23 : Iso-surfaces de la vitesse axiale à $v = 0.109$ (droite), et trajectoires de quelques particules fluides dans la cavité (gauche) aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$	163
Figure VI.24 : Diagrammes de stabilité magnétique: $Re_{cr}-Ha$ (a), et $Fr_{cr}-Ha$ (b)..	163

Liste des Tableaux

	Page
Tableau III.1 : Définition de ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ des équations gouvernantes pour les problèmes axisymétriques (2D).....	53
Tableau III.2 : Facteurs de sous relaxation.....	71
Tableau IV.1 : Coordonnées physiques et logiques des sondes pour le maillage ($n_r \times n_z = 75 \times 150$).....	80
Tableau IV.2 : Différents orientations du champ magnétique.....	89
Tableau V.1 : Comparaison des solutions obtenues avec différentes grilles de maillage.....	107
Tableau V.2 : Coordonnées physiques et logiques des sondes pour le maillage ($n_r \times n_z = 80 \times 160$).....	110
Tableau V.3 : Valeurs critiques des paramètres des écoulements oscillatoires.....	118
Tableau V.4 : Variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , avec l'augmentation du champ magnétique ($Ha = 0 - 50$).....	125
Tableau V.5 : Variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , avec l'augmentation du champ magnétique ($Ha = 0 - 50$), et pour $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$	130
Tableau V.6 : Variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , avec l'augmentation du champ magnétique dans le cas de combinaison entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique.....	132
Tableau VI.1 : Estimation du temps de calcul, pour un test typique pour différents maillages.....	138
Tableau VI.2: Positions des sondes (r, θ, z) utilisées pour la détection du champ hydrodynamique et thermique dans la cavité tridimensionnelle, avec un maillage ($n_r \times n_\theta \times n_z = 60 \times 60 \times 60$).....	142

Nomenclature

Ar	: Rapport d'aspect géométrique [-].
$\vec{B}$	: Vecteur du champ magnétique [Tesla].
$\vec{J}$	: Vecteur du courant électrique [A/m ²].
$\tilde{p}$	: Pression [N/m ²].
$\tilde{u}$	: Vitesse radiale [m/s].
$\tilde{v}$	: Vitesse axiale [m/s].
$\tilde{w}$	: Vitesse azimutale [m/s].
$\tilde{r}$	: Coordonnée radiale [m].
$\tilde{z}$	: Coordonnée axiale [m].
B_r	: Champ magnétique orienté suivant la direction radiale [-].
B_z	: Champ magnétique orienté suivant la direction axiale [-].
C_p	: Chaleur spécifique à pression constante [J/kg.K].
dr	: Distance entre deux points consécutifs du maillage suivant r [m].
dz	: Distance entre deux points consécutifs du maillage suivant z [m].
F_{Lr}	: Composante adimensionnelle de la force de Lorentz radiale [-].
F_{Lz}	: Composante adimensionnelle de la force de Lorentz axiale [-].
$F_{L\theta}$	: Composante adimensionnelle de la force de Lorentz azimutale [-].
Fr	: Fréquence adimensionnelle [-].
g	: Accélération de la pesanteur [m/s ²].
H	: Hauteur de la cavité [m].
i	: Indice des nœuds dans la direction r [-].
il	: Nombre de points du maillage dans la direction r [-].
j	: Indice des nœuds dans la direction z [-].
P	: Pression adimensionnelle [-].
r	: Coordonnée radiale adimensionnelle [-].
S	: Terme source de l'équation de conservation [-].
S_ϕ	: Terme source d'une variable dépendante ϕ [-].
T	: Température [K].
t	: Temps [s].
u	: Vitesse radiale adimensionnelle [-].
v	: Vitesse axiale adimensionnelle [-].

w	: Vitesse azimutale adimensionnelle [-].
z	: Coordonnée axiale adimensionnelle [-].

Symboles Greques

σ	: Conductivité électrique [1/Ω.m].
μ_0	: Perméabilité magnétique [H/m].
$\tilde{\theta}$	: Coordonnée azimutale [m].
ν	: Viscosité cinématique [m ² /s].
δ	: Angle de l'orientation du champ magnétique
Δr	: Dimension d'un volume de contrôle suivant r [m].
ΔV	: Dimension d'un volume de contrôle [m ³].
Δz	: Dimension d'un volume de contrôle suivant z [m].
$\Delta \tau$	: Incrément du temps adimensionnel [-].
Θ	: Température adimensionnelle [-].
θ	: Coordonnée azimutale adimensionnelle [-].
λ	: Conductivité thermique [W/mk].
φ	: Angle de l'inclinaison du cylindre
Φ	: Potentiel électrique adimensionnel [-].
ϕ	: Potentiel électrique [Volt].
Ψ	: Fonction de courant adimensionnelle [-].
Ω	: Vitesse angulaire [rad/s].
Ω_s	: Vitesse angulaire du cristal [rad/s].
Γ	: Coefficient de diffusion générale [-].
α	: Diffusivité thermique [m ² /s].
μ	: Viscosité dynamique [kg/m.s].
ρ	: Masse volumique [kg/m ³].
τ	: Temps adimensionnel [-].

Indices

c	: Chaud.
cr	: Valeur critique.
E	: Nœud considéré du côté Est du nœud P.
e	: La face Est du volume de contrôle considéré.
f	: Froid.
moy	: Valeur moyenne.
N	: Nœud considéré du côté Nord du nœud P.

n	: La face Nord du volume de contrôle considéré.
S	: Nœud considéré du côté Sud du noeud P.
s	: La face Sud du volume de contrôle considéré.
W	: Nœud considéré du côté Ouest du noeud P .
w	: La face Ouest du volume de contrôle considéré.

Nombres Adimensionnels

Gr	: Nombre de Grashof.
Ha	: Nombre de Hartmann.
Nu	: Nombre de Nusselt local.
Nu_{moy}	: Nombre de Nusselt moyen.
Pr	: Nombre de Prandtl.
Re	: Nombre de Reynolds.
Ri	: Nombre de Richardson.

Exposant

n	: Correspond au temps τ .
$n+1$	: Correspond au temps $\tau + \Delta\tau$.
r, θ, z	: Directions radiale, azimutale et axiale.

Abréviations

CZ	Czochralski.
EDP	Equations aux Dérivées Partielles.
FFT	Transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform).
MHD	Magnétohydrodynamique.
PSD	Densité du spectre d'énergie (Power Spectrum Density).
VC	Volume de Contrôle.
VF	Volumes Finis.

Introduction Générale

De nos jours, les monocristaux sont devenus un produit clé dans de nombreuses industries à haute technologie, en particulier celles des secteurs informatiques, électroniques, optiques et des systèmes de communication. La croissance des cristaux se fait par *dépôt ordonné sur un germe* des constituants du cristal contenus dans une phase liquide ou gazeuse. Les types de croissance sont classés en fonction de la nature de la phase d'apport: *croissance à partir de l'état fondu*, *en solution* ou *en phase vapeur*. Les principaux paramètres de la phase de croissance, qui sont la température et la pression, peuvent couvrir une gamme extrêmement large. D'où une grande variété d'équipements et de techniques d'élaboration. Parmi les techniques qui concernent les systèmes intégralement confinés, citons la technique de Bridgman horizontale ou verticale. Pour les systèmes présentant au moins une surface libre, citons la technique de Czochralski qui est la plus répandue pour la croissance cristalline en gravité terrestre.

Pour toutes les techniques d'élaboration, la croissance cristalline est accompagnée d'un transport de masse et de chaleur dans la phase de solidification. Cette phase nécessite des conditions stables pour ces transports. Ainsi, toute perturbation des vitesses de transport qui conduit à des variations de température ou de concentration, affecte la morphologie, la ségrégation des impuretés, la perfection de la structure, l'homogénéité chimique, etc., et par conséquent, les propriétés physiques du cristal obtenu. Expérimentalement, il a été prouvé que durant le processus de solidification, des oscillations de température couplées à des *instabilités convectives*, engendrent une répartition non uniforme des impuretés dans la phase liquide, ce qui conduit à l'apparition des striations dans le cristal (alternance de zones de forte et faible concentration).

Pour contrôler ces transports et éliminer les instabilités, l'une des solutions envisagées, est l'application d'un champ magnétique ([Series et Hurle, 1991](#)). Il est bien connu que l'écoulement d'un fluide électriquement conducteur en présence d'un champ magnétique donne naissance à un courant électrique induit qui réagit avec ce champ magnétique pour créer une force appelée la force de Laplace. Cette force s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, d'où l'effet de stabilisation de l'écoulement par le champ magnétique si l'intensité de cette force est suffisamment élevée.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la convection thermique d'un métal liquide lors de la croissance cristalline. Pour cela, nous avons choisi des cavités similaires à celle de Czochralski et Bridgman vertical, en présence et non du champ magnétique.

Dans la première partie, nous examinons la convection mixte dans une cavité cylindrique axisymétrique similaire à celle de Czochralski (bidimensionnelle, $\text{plan}(r, z)$). Nous allons voir l'effet du nombre de Richardson et du rapport d'aspect de la cavité cylindrique sur la stabilisation de l'écoulement, et nous déterminons la valeur critique du nombre de Reynolds Re_{cr} pour chaque nombre de Richardson. Un champ magnétique orienté suivant la direction axiale et radiale séparément, est appliqué, afin de stabiliser l'écoulement convectif et commander la valeur de Reynolds critique du régime de transition.

Dans la deuxième partie, nous étudions la convection naturelle dans une cavité cylindrique axisymétrique similaire à celle de Bridgman vertical (bidimensionnelle, $\text{plan}(r, z)$). Nous allons voir l'effet du nombre de Grashof et l'angle d'inclinaison du cylindre sur le champ hydrodynamique et thermique, et sur les instabilités convectives, qui naissent dans l'écoulement. Un champ magnétique appliqué et orienté arbitrairement sur la cavité, pour voir leur effet sur la stabilisation magnétique, en combinaison avec l'inclinaison du cylindre.

Dans la troisième partie, nous faisons une extension du premier modèle (convection mixte axisymétrique) au cas de la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski. Le régime d'écoulement stationnaire et oscillatoire est étudié avec et sans champ magnétique appliqué suivant la direction axiale.

Le manuscrit est composé de six chapitres, et d'une conclusion générale.

- *Le premier chapitre* est consacré aux méthodes d'élaboration des monocristaux, et une revue bibliographique des travaux antérieurs en relation avec la convection dans des cavités au cours de la croissance cristalline (similaires à celle de Czochralski et Bridgman vertical).
- *Le deuxième chapitre* contient un exposé détaillé sur les trois modèles physiques examinés, les équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices, l'adimensionnalisation des équations gouvernantes, et les conditions initiales et aux limites.
- *Le troisième chapitre* présente la méthode numérique de résolution des équations gouvernantes, les différents schémas de discrétisation par la méthode des volumes finis, et l'organigramme global de résolution par notre code de calculs propre. Ainsi, les

différentes techniques de résolution par le code commercial Fluent, pour le cas de la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski.

- *Le quatrième chapitre* est consacré à la validation de notre code de calculs élaboré (en Fortran 90), et la présentation et discussion des résultats obtenus pour le cas de la convection mixte dans une cavité cylindrique axisymétrique similaire à celle de Czochralski, en régime stationnaire et oscillatoire, avec et sans champ magnétique.
- *Le cinquième chapitre* présente les résultats et discussions concernant la convection naturelle dans une cavité cylindrique axisymétrique similaire à celle de Bridgman vertical, en régime stationnaire et oscillatoire, avec et sans champ magnétique.
- *Le dernier chapitre*, présente les résultats et discussions de l'écoulement de convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski, en régime stationnaire et oscillatoire, avec et sans champ magnétique. Finalement, une conclusion générale récapitule les principaux résultats obtenus dans la thèse avec des perspectives aux futurs travaux.

Chapitre I

Généralités et Revue Bibliographique

I.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la littérature de la convection lors de la croissance cristalline. Nous commençons par des notions sur les différentes méthodes d'élaboration des monocristaux. Par la suite, nous donnons les travaux antérieurs en relation avec l'étude de la convection thermique dans des cavités similaires à celle de Czochralski et Bridgman vertical.

I.2 Méthodes d'élaboration des monocristaux

Les méthodes de croissance des monocristaux sont généralement classées en trois catégories:

- Croissance en solution.
- Croissance en phase vapeur.
- Croissance en bain de fusion.

Le choix d'une méthode est souvent guidé par sa nature (possibilité de réalisation, rentabilisation), ainsi que par les propriétés de matériau donné, par exemple les grenats de fer d'Yttrium (YIG) ne fondent pas convenablement, CaCO_3 et SiC à la pression atmosphérique, se décomposent avant leur fusion, et SiO_2 présente une transformation de phase à l'état solide entre le point de fusion et la température ambiante; par conséquent aucun monocristal de ces matériaux ne peut être obtenu par croissance en bain de fusion.

Dans plusieurs cas, du point de vue thermodynamique, les trois méthodes peuvent être utilisées pour la croissance des monocristaux des matériaux donnés. Dans de tels cas le choix d'une méthode doit être basé sur la cinétique de croissance (vitesse de croissance) et les exigences de volume, forme, pureté, qualité, et économie. Par exemple, comme tous les solvants ont une solubilité finie dans SiC solide, les cristaux de ce dernier de haute pureté ne peuvent être obtenus en solution. De même comme la vitesse de la croissance en phase vapeur est nettement inférieure à celle de la croissance en bain de fusion, l'économie empêche l'obtention de très grands cristaux en phase vapeur. Dans chacune des catégories de méthodes de croissance il existe plusieurs techniques, dont beaucoup d'entre elles sont spécifiques à une série d'exigences particulières.

Dans ce qui suit les principes généraux, les avantages et les inconvénients des méthodes les plus utilisés seront brièvement examinées.

I.2.1 Croissance en solution

La cristallisation à partir d'une solution est le fait de l'abandon par le solvant de l'excédent de la matière dissoute. Il est connu que les cristaux ne peuvent précipiter que dans des solutions sursaturées.

La sursaturation peut être obtenue de différentes manières, selon la solubilité du matériau dans le solvant choisi, et les résultats désirés. Ainsi on peut:

- Eliminer une partie du solvant par évaporation.
- Abaisser la température de la solution.
- Additionner le soluté.

Bien que la croissance en solution soit largement utilisée pour la fabrication de produits commerciaux sous forme de petits grains de monocristaux, elle est aussi très utilisée dans les laboratoires de cristallogenèse pour l'étude des phénomènes de la croissance cristalline, vu sa simplicité de réalisation et qu'elle permet, surtout, l'observation et le contrôle direct de la croissance. Avec cette méthode on peut fabriquer de gros cristaux avec des qualités convenables telles que, ADP (Ammonium Dihydrogen Phosphate), KDP (Potassium Dihydrogen Phosphate), ...

I.2.2 Croissance en phase vapeur

En général il est très difficile de faire croître de gros cristaux à partir de la phase vapeur en comparaison avec la croissance en bain de fusion ou en solution. Malgré cela, la méthode offre plusieurs avantages: le degré de sursaturation est plus facile à contrôler que dans la croissance en bain de fusion, de plus les gaz sont généralement obtenus avec des degrés de pureté supérieurs à ceux des liquides, et cette pureté peut être facilement maintenue pendant la croissance. Pour ces raisons la croissance en phase vapeur est souvent la méthode préférée pour étudier les processus de croissance. Les nombreux appareils utilisés en pratique, reposent sur le même principe, qui consiste à faire condenser la vapeur des substances cristallisantes, obtenues à haute température, dans des régions froides. La différence entre ces appareils réside dans la manière d'accomplir ce processus.

I.2.3 Croissance en bain de fusion

En principe, tous les matériaux peuvent donner des monocristaux en bain de fusion, à condition qu'ils fondent convenablement, ne se décomposent pas avant de fondre, et ne présentent aucune transformation de phase entre le point de fusion et la température de la salle. Car les transformations de phase sont généralement accompagnées de changements de volume impliquant des tensions excessives, défauts ou polycristallisation.

La croissance en bain de fusion est de loin la méthode de croissance la plus rapide, du fait que sa vitesse de croissance ne dépend pas du processus de transport de masse, contrairement à la croissance en solution et en phase vapeur. Elle peut être obtenue par une large variété de technique dépendant des propriétés spécifiques du matériau, telle que la contraction ou l'expansion durant la solidification, et aussi des exigences de volume, forme et composition (distribution du dopant).

Enfin dans cette méthode on utilise parfois des semences ou germes (seed) pour faciliter la cristallisation ou pour obtenir des cristaux avec des orientations bien définies. Parmi les méthodes les plus répandues on trouve :

1.2.3a Méthode de Bridgman

La méthode de croissance de Bridgman est fondamentalement un procédé de refroidissement contrôlé ayant lieu sous des conditions d'équilibre liquide-solide. La croissance a lieu, également, sous un gradient de la température, et le mécanisme doit produire un noyau duquel le monocristal se propagera et se développera. Ceci est réalisé en déplaçant l'interface solide - liquide lentement (5-50 mm/jour) jusqu'à ce que la totalité de la charge fondue soit solidifiée.

Cette méthode repose également sur la technique des hautes températures, variant entre 400 et 1400°C. Elle est utilisée pour les composés dont la phase fondue est toxique ou très réactive vis-à-vis de l'air ou en présence d'une forte tension de vapeur. Elle est employée pour la croissance de certains semi-conducteurs pour l'optique comme GaAs, AgGaS₂, AgGaSe₂, GaSe, Tl₃AsSe₃, ainsi que pour les halogénures alcalins comme CaF₂ et MgF₂.

Le creuset qui contient le matériau fondu est déplacé horizontalement en mouvement unidirectionnel à travers un gradient de température maintenu par le four ; c'est la technique de Bridgman horizontale ([Figure I.1](#)).

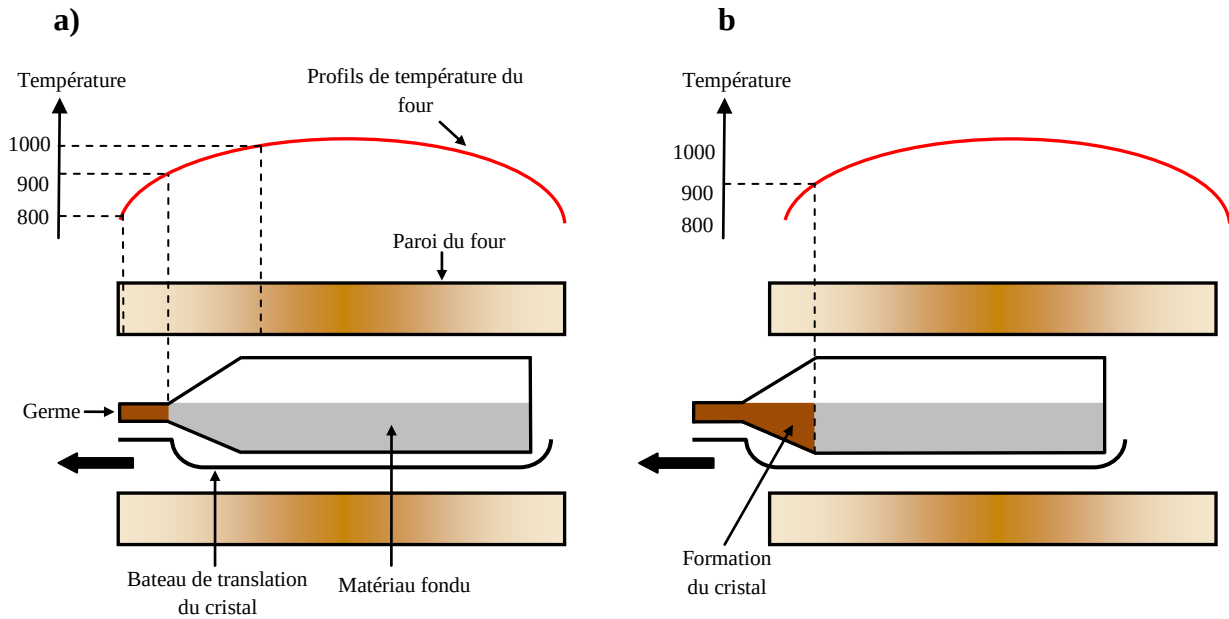


Figure I.1 : Schéma de principe de la méthode de Bridgman horizontale (BH), processus de croissance des cristaux dans un four horizontal à une zone: (a) au début de l'expérience et (b) avec le cristal partiellement grandi (Dahanaraj et al. 2010).

Une seconde technique de Bridgman est actionnée verticalement (Figure I.2), comme son nom l'indique le creuset qui contient le matériau fondu est placé verticalement. Le bain est au-dessus du cristal : la croissance est alors réalisée en ampoule scellée, introduisant une difficulté supplémentaire par rapport à la technique de Czochralski. Comparée à d'autres méthodes de croissance, la méthode de Bridgman est considérée comme un procédé simple mais plusieurs limitations existent. Cette technique ne peut pas être appliquée à un matériau qui se décompose avant qu'il fonde, à des systèmes ayant des pressions élevées à l'état gazeux, ou à des matériaux révélant des transformations de phase solide-solide destructives qui affecteront la qualité du cristal. Un autre inconvénient de cette technique est la nécessité d'utiliser une ampoule pour soutenir le bain, la différence des coefficients de dilatation thermique de l'ampoule et du solide pouvant induire des contraintes thermoélastiques lors du refroidissement induisant des défauts indésirables dans le lingot produit. La Figure I.3 présente quelques lingots monocristallins élaborés par la méthode de Bridgman.

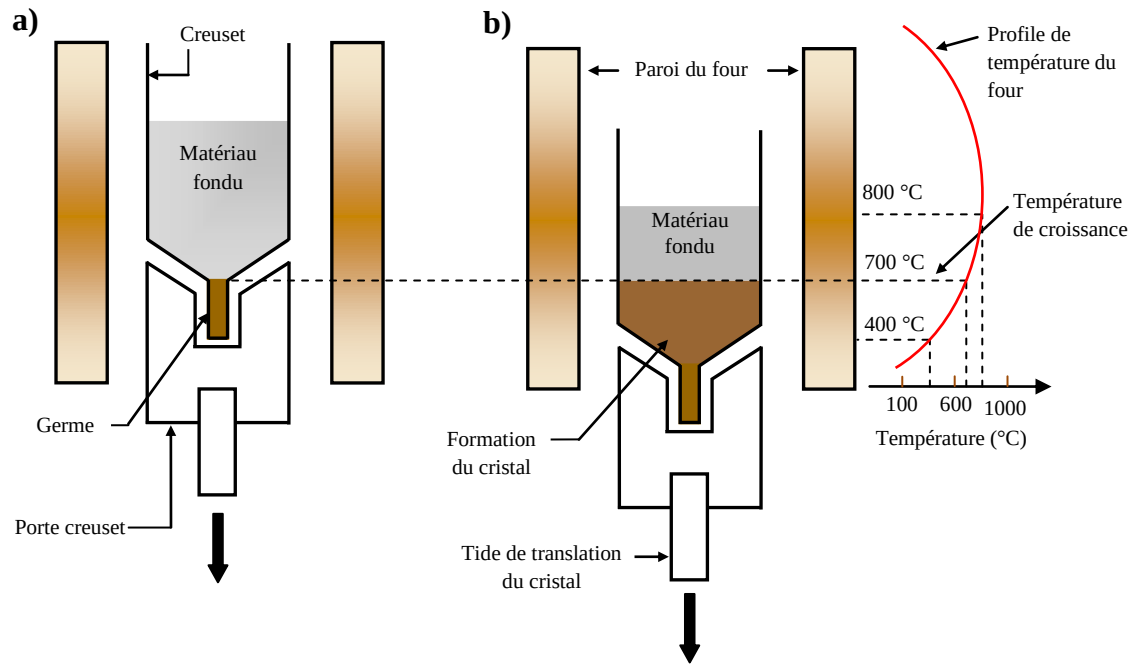


Figure I.2 : Schéma de principe de la méthode de Bridgman verticale (BV), processus de croissance des cristaux dans un four vertical à une zone: (a) au début de l'expérience et (b) avec le cristal partiellement grandi (Dahanaraj et al. 2010).



Figure I.3 : Lingots élaborés par la technique de Bridgman.

I.2.3b Méthode de la zone flottante (FZ)

La méthode de la zone flottante permet de fabriquer des monocristaux de très haute pureté en comparaison avec les autres méthodes. Elle s'est donc imposée dans le domaine des semi-conducteurs (Si, Ge, ...). La méthode de cristallisation par zone flottante permet d'une part de purifier un barreau de Silicium polycristallin et d'autre part de le transformer en un monocristal d'orientation cristalline et de diamètre contrôlés. La solidification est initiée au moyen d'un germe monocristallin qui sélectionne l'orientation du monocristal massif. L'opération est illustrée schématiquement sur la Figure I.4.

L'extrémité inférieure du barreau polycristallin est fondue, en général par induction, après un préchauffage par passage d'un courant à effet joule, dans le barreau. Le germe monocristallin est orienté et plongé depuis le bas dans la goutte de Silicium fondu. La zone fondue est progressivement déplacée vers le haut du cristal. Elle est maintenue par tensions superficielles. Un contrôle judicieux des températures, des vitesses déplacement et de rotation conduit à la recristallisation de tout le barreau. La pureté du lingot monocristallin est déterminée par la pureté du matériau de départ, par celle de l'atmosphère ambiante (vide poussé, gaz inerte) et par les parois du récipient. Des lingots de 15-20 cm de diamètre et de plusieurs dizaines de kilos sont aisément fabriqués. Au stade initial de la croissance, on procède de façon qu'un rétrécissement se forme immédiatement au-dessous du germe (diamètre d'environ 3 mm sur une longueur de l'ordre de 10mm). L'étranglement ainsi formé correspond à un accroissement sensible de la surface par apport au volume du cristal. Cette opération favorise l'élimination des dislocations qui sont provoquées par le choc thermique lors du contact germe froid avec la goutte fondue. En effet, les dislocations tendent à croître vers les surfaces libres de l'échantillon où les contraintes mécaniques sont plus faibles. Le déplacement uniforme et contrôlé de la zone fondue, garantit ensuite la croissance d'un monocristal de diamètre régulier et sans dislocations. Du point de vue des réglages, cette méthode est un mécanisme extrêmement complexe: la vitesse d'avancée, la vitesse de fusion, le volume de fusion, les forces centrifuges et la puissance du générateur sont des paramètres dépendant les uns des autres et qui doivent être accordés avec une extrême précision pendant toute la durée du processus.

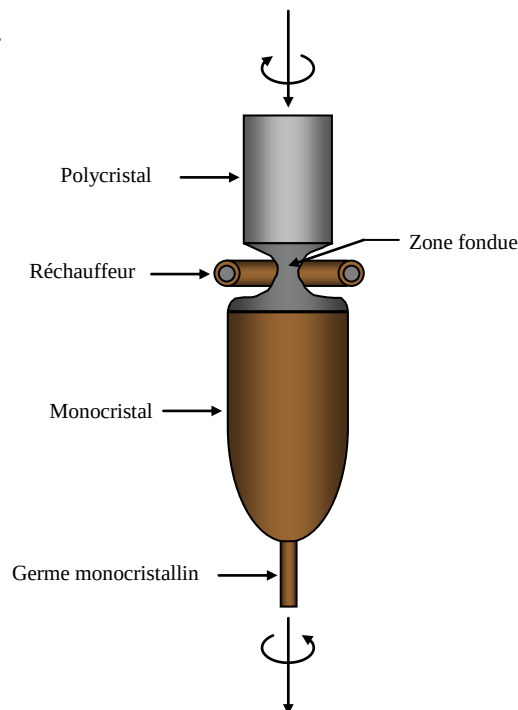


Figure I.4 : Schéma de principe de la méthode de la zone flottante (FZ) (Dahanaraj et al. 2010).

Les cristaux fabriqués par la méthode de la zone flottante sont relativement purs grâce à l'absence de contact entre la phase fondue et un creuset ([Figure I.5](#)). Il convient particulièrement bien à la fabrication de dispositifs à semi-conducteur de puissance et détecteurs infrarouges. Par contre, leurs résistances mécaniques ainsi qu'aux contraintes thermiques sont relativement faibles.

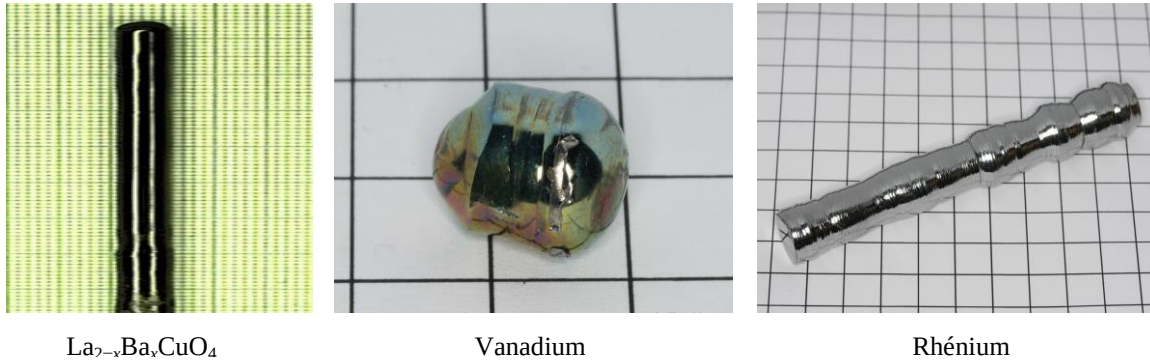


Figure I.5 : Lingots élaborés par la technique de la zone flottante.

I.2.3c Méthode de Czochralski (CZ)

Cette technique qui s'adapte aux hautes températures, jusqu'à 2000°C, convient particulièrement à la croissance de composés semi-conducteurs, oxydes ou fluorures minéraux pour lesquels la phase fondue ne nécessite pas de récipient étanche. C'est la méthode employée industriellement pour le tirage du Silicium, du Germanium, et également pour certains oxydes ou fluorures minéraux à propriétés optiques comme LiNbO₃ ou les matrices lasers de YAG (Y₃Al₅O₁₂), de Saphir, d'YLiF₄ et de Ca₄TRO(BO₃)₃. Cette technique, dont la difficulté majeure est la maîtrise des hautes températures, permet d'obtenir de très gros lingots avec des vitesses de croissance élevées.

La croissance de Czochralski ou tirage du cristal est une méthode utilisée pour produire des cristaux de grande qualité, avec un minimum de dislocations (désorganisation). Cette technique a été développée par Czochralski, ayant pour but la production des cristaux d'une large variété de matériaux, pour les utiliser en semi-conducteurs et lasers.

Le four de Czochralski est montré sur la [Figure I.6](#). Le matériau qu'on veut cristalliser est rempli dans un creuset et est chauffé au-dessus du point critique. Ceci s'effectue soit par une résistance, soit par une fréquence radio. Le chauffage par une résistance radio introduit un faible décalage thermique dans le système. Le creuset est contenu dans une atmosphère inerte (Argon) pour éviter l'oxydation. Une tige de tirage (pull rod) avec un paleron (chuck) contenant un germe de cristal, est mise au-dessus du creuset, et la température du bain est ajustée jusqu'à un minimum que peut supporter le germe du cristal. La tige du tirage est

animée par une rotation lente et un mouvement de translation épitaxial, et par ajustement de l'énergie cédée au bain, un cristal de diamètre voulu peut être obtenu. La température du bain est souvent contrôlée par un thermocouple qui donne le contrôle à boucle fermée de l'énergie de chauffage.

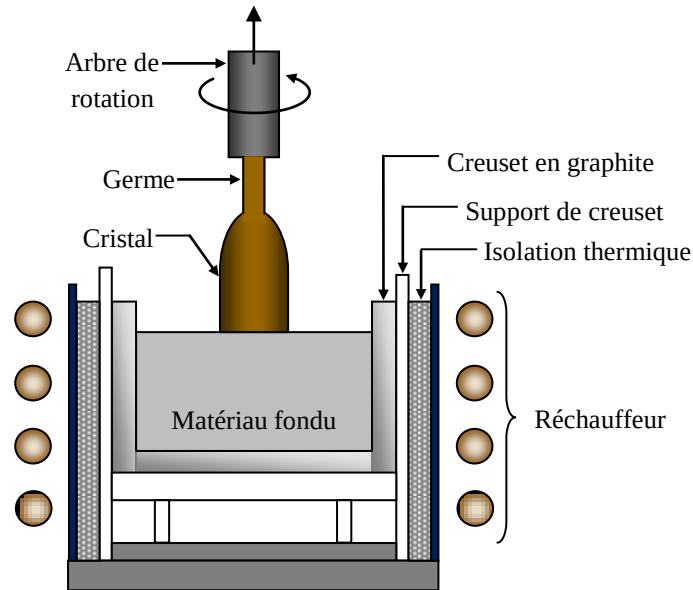


Figure I.6 : Technique de croissance de Czochralski (CZ) (Dahanaraj et al. 2010).

Au cours de la croissance, le creuset se vide au fur et à mesure, perturbant l'équilibre thermique du système. Pour que le niveau du bain garde la même position par rapport à l'élément chauffant, le creuset se déplace lentement. De plus, le creuset et le cristal sont munis de mouvements de rotation contrôlés pour rendre le champ thermique axisymétrique, afin de mieux contrôler l'écoulement du fluide dans le bain et la distribution des éléments dopants ou des impuretés près de l'interface. Un isolant thermique est souvent placé au-dessus du creuset afin d'atteindre la vitesse de transfert radiatif désiré. Le système complet est protégé par une enceinte en acier inoxydable. La Figure I.7 présente quelques lingots monocristallins élaborés par la technique de Czochralski.



Sapphire



Cuivre



Silicium

Figure I.7 : Lingots élaborés par la technique de Czochralski.

I.3 Revue bibliographique

Historiquement, le fondateur de la cristallogénèse scientifique est le professeur A. Verneuil. Dans un compte-rendu à l'académie des Sciences en 1904, il a décrit une technique de croissance par fusion à la flamme lui ayant permis d'obtenir les premiers monocristaux de saphir et rubis (Verneuil, 1904). La première expérience de tirage d'un monocristal, à partir d'un bain fondu, a été réalisée en 1916 par Jan Czochralski. Il s'agissait du tirage d'un fil d'étain monocristallin. Toutes les techniques de cristallisation, qui sont développées ensuite (Bridgman (1923), Kyropoulos (1926), Stockbarger (1936)...) vont attendre plusieurs années pour se développer.

I.3.1 Convection thermique dans des cavités de type Czochralski

Au cours du processus de croissance cristalline de Czochralski (Cz), plusieurs forces interagissent l'une sur l'autre à différentes échelles, rendant le procédé difficile à contrôler et à caractériser. Les forces qui influencent l'écoulement sont principalement la force d'Archimède, la tension superficielle, la force centrifuge et la force de Coriolis. En raison de l'interaction de ces forces, plusieurs types d'instabilités peuvent avoir lieu et affecter le procédé de transfert dans un bain de Cz. Les transferts dans le volume du bain Cz, à leur tour, influencent la qualité de la croissance cristalline. Le déséquilibre entre les différentes forces en action introduit une instabilité thermique dans le bain qui peut considérablement affecter la qualité du monocristal. Par conséquent, la maîtrise et le contrôle des phénomènes d'écoulement de fluide dans le bain constituent la préoccupation majeure de la technique de la croissance cristalline.

La stabilité d'écoulement dans les bains de Czochralski a un impact direct sur les micros et macro défauts dans les cristaux. Les striations et variations microscopiques de concentration sont le résultat du mouvement oscillatoire de l'interface due à l'instabilité convective dans le bain.

En effet, les perturbations provoquées par les instabilités d'écoulement dans le bain de Czochralski peuvent être imputées à la convection naturelle, aux forces centrifuges, ainsi qu'à la tension superficielle, pouvant conduire à l'apparition de différentes structures d'écoulement sur la surface libre du bain. Selon la géométrie du creuset, la taille du cristal et d'autres paramètres l'écoulement dans un creuset de Cz peut être oscillatoire, transitoire ou turbulent.

Des simulations numériques de la convection thermique, naturelle (dû au gradient de température), forcée (dû à la rotation de cristal et de creuset) et mixte (dû à la combinaison

entre les deux) lors de la croissance cristalline dans des cavités similaires à celle de Czochralski ont été effectuées par beaucoup de chercheurs.

La convection thermique a été examinée par Kobayashi (1978) et Langlois (1979), qui sont des pionniers dans l'étude de la croissance cristalline. Ils ont simulé numériquement en régime stationnaire le processus de Czochralski pour deux matériaux différents: le Gadolinium Gallium Garnet (GGG) et l'Yttrium Aluminium Garnet (YAG). En faisant varier le nombre de Grashof, ils ont remarqué que l'intensité et la structure de l'écoulement changent considérablement.

Kobayashi (1978) a étudié l'effet de la convection dans un creuset cylindrique de type Czochralski pour différents fluides $0.01 < Pr < 1$. Il a trouvé que pour des matériaux ayant un faible nombre de Prandtl (métaux liquides) la distribution de la température est très sensible aux conditions aux limites thermiques et presque indépendantes de l'écoulement dans le creuset, car la chaleur est principalement transportée par conduction, et pour les fluides avec un nombre élevé de Prandtl, la distribution de température dépende non seulement des conditions aux limites thermiques mais également au mouvement de fluide dans le creuset. Il a montré la dominance de la convection forcée pour le nombre de Grashof $Gr = 2 \times 10^3$, la convection naturelle pour $Gr = 2 \times 10^5$ et la convection mixte pour $Gr = 2 \times 10^4$ et 6.25×10^4 (Figure I.8).

Une année après, Langlois (1979) a observé que pour les faibles valeurs du Gr, la cellule convective est encapsulée entre la surface de creuset et l'extrémité tourbillon du cristal tournant, et pour les valeurs élevées du Gr cette cellule pénètre à la surface libre où il dominant tout l'écoulement. De plus, l'intensité de la cellule convective est proportionnelle à la racine carrée du nombre de Grashof.

Langlois (1977) et Milhelcic et al. (1982) sont parmi les premiers à se pencher sur l'écoulement instationnaire de nature périodique ou oscillatoire. Ils ont montré que la croissance de Czochralski présente des défauts d'inhomogénéité sous forme de bandes transversales à différentes concentrations. Ces bandes ou striations sont causées par l'effet de la convection instationnaire dans le bain. L'apparition des striations mène à la bifurcation de l'écoulement du régime laminaire stable au régime quasi stationnaire instable.

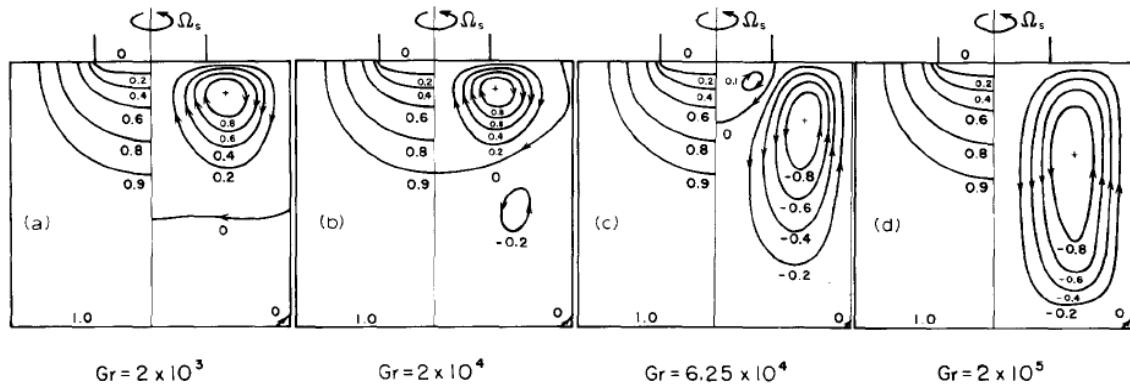


Figure 1.8 : Effet du nombre de Grashof sur le champ thermique et la fonction de courant dans un bain de croissance Cz ($Pr = 0.01$). (Kobayashi, 1978).

Kolker (1980) a montré expérimentalement pour les nombres de Rayleigh moins de la valeur critique, les striations non rotationnelles ne semblent pas. Au-dessus de cette valeur critique, les striations peuvent être régulièrement espacées quand il y a des oscillations régulières de la température dans le fluide, ou aléatoire lorsque le mouvement dans le fluide est turbulent. Après, Bottaro et Zebib (1988) ont analysé en régime stationnaire l'influence de la convection naturelle pour différents nombres de Rayleigh ($Ra = Gr \times Pr$), en utilisant des très faibles nombres de Prandtl. Ils ont démontré que l'instabilité apparaît sous la forme d'oscillations régulières pour des valeurs suffisamment élevées du nombre de Rayleigh. Ces oscillations régulières sont précédées par une structure multicellulaire en mouvement de la masse fondue, avec une séparation d'écoulement à la paroi. L'évolution de Ra_{cr} en fonction de Pr obtenue par Bottaro et Zebib après une série de calculs est illustrée sur la Figure 1.9.

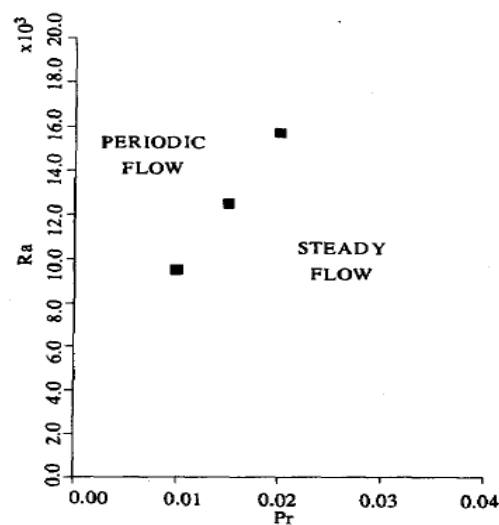


Figure 1.9 : Diagramme de stabilité, $Ra = f(Pr)$ obtenu par Bottaro et Zebib (1988).

Crochet et al. (1983) ont étudié par la méthode de différences finies la convection mixte pour le cas de la croissance de cristaux d'Arséniure de Gallium (GaAs) dans le régime stationnaire et instationnaire. Ils ont constaté que la rotation du creuset engendre un écoulement centrifuge dans le bain est dû au gradient radial de la pression formant ainsi un tourbillon convectif. Selon Crochet et al. (1983), la base d'un cristal muni d'un mouvement de rotation agit comme un ventilateur, expulsant le fluide vers la paroi du creuset, générant ainsi une cellule tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Muller (1993) a remarqué qu'au-delà des valeurs critiques des paramètres régissant le processus de croissance, les instabilités induites par la poussée d'Archimède telles que les roulements oscillatoires, des panaches peuvent se produire dans le bain d'oxyde. Ces instabilités peuvent exister dans le bain d'oxyde dû à la poussée d'Archimède qui se combine aux mouvements de rotation. De telles instabilités conduisent à différents types de structures telles que le modèle de strie, ondes avec saillie qui peuvent à leurs tours influencer significativement la qualité et la stabilité des cristaux croissants. Ces instabilités commencent à la surface du cristal et se déplacent vers la paroi du creuset au-delà d'une certaine vitesse critique de rotation du cristal.

Choi et al. (1997) ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet des nombreux facteurs sur les modes de transition, dans une configuration de Czochralski (Figure I.10). Un bon accord entre les essais pratiques et la simulation numérique est trouvé. Ils ont trouvé également que l'influence du nombre de Prandtl (Pr) sur la transition n'est pas importante pour les Pr élevées ($Pr = 910, 4445$ et 8889). L'effet de la rotation du creuset sur les modes d'écoulement de transition a été aussi examiné, où ils ont trouvé que le régime de transition pour $Re_{creuset} = -12.85$ est plus large que celui de $Re_{creuset} = 12.85$.

Wu et al. (1998) ont étudié numériquement la stabilité de convection naturelle d'un métal liquide ($Pr = 0.015$) dans une configuration de type Czochralski en régime laminaire et turbulent par le modèle low-Reynolds number K- ϵ . Leurs résultats montrent que l'écoulement est stable pour des faibles nombre de Rayleigh ($Ra < 4.5 \times 10^4$). Le rapport d'aspect de la masse fondue a une influence significativement sur la convection naturelle, où ils ont trouvé une meilleure stabilisation pour un rapport d'aspect égale à 0.5 (Figure I.11). Dans le régime turbulent de modèle K- ϵ , l'écoulement prédit un seul tourbillonnaire, qui est le résultat de la surproduction de viscosité turbulente, et pour un creuset peu profond, la valeur des variables de turbulence diminue jusqu'à zéro, ce qui entraîne la convection laminaire.

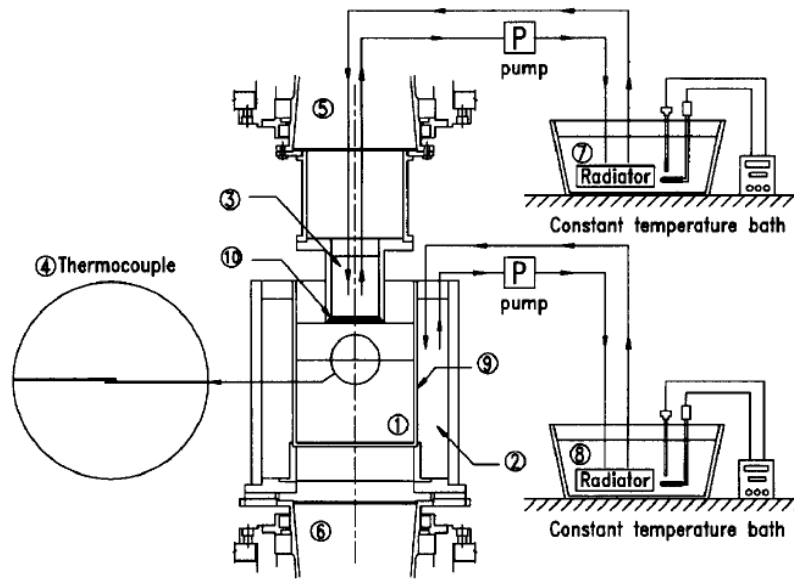


Figure I.10 : Dispositif expérimental de *Choi et al. (1997)*.

Enger et al. (2001) ont noté que la convection forcée induite par la rotation du cristal a une influence significative sur la nature et la structure des instabilités dans le domaine d'écoulement en termes de structures périodiques et non-périodiques. Ils ont proposé un nouveau critère pour définir la transition des écoulements périodiques aux non-périodiques basés sur la prévalence relative des forces gravitaires et forces centrifuges.

Basu et al. (2001) ont étudié numériquement l'effet de la vitesse de rotation du cristal sur les caractéristiques du champ d'écoulement tridimensionnel turbulent dans un bain d'oxyde. Leurs simulations numériques ont été effectuées pour analyser le champ d'écoulement dans un creuset à différentes vitesses de rotation du cristal de 0.0 à 6.0 tr/mn. Ils ont remarqué que la vitesse de rotation de cristal est un paramètre sensible et a un effet appréciable sur les caractéristiques du champ d'écoulement. Ils ont montré que le critère proposé par *Enger et al. (2001)* ($Gr/Re^2 < 235$) pourrait être utilisé pour contrôler la périodicité du champ thermique et hydrodynamique dans le bain pendant la croissance des cristaux d'oxyde. Ils ont déduit que la force centrifuge due à la rotation du cristal a un effet stabilisant sur la nature tridimensionnelle de l'écoulement. Ils ont constaté également qu'une petite variation de la vitesse de rotation du cristal (c-à-d, de 4.5 à 6.0 tr/mn) peut mener à une grande variation des champs thermique et hydrodynamique.

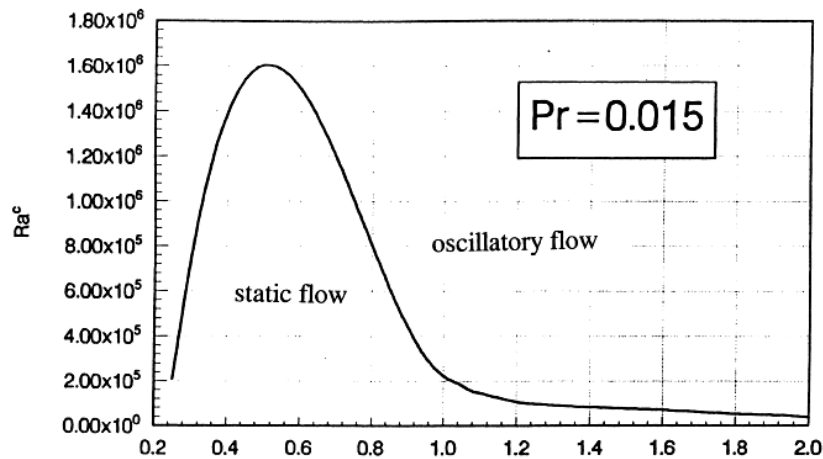


Figure I.11 : Variation du nombre de Rayleigh critique en fonction de rapport d'aspect (Wu et al. 1998).

Galazka et al. (2003) ont étudié le transfert de chaleur et de masse au cours de la croissance des cristaux (YAG) par la méthode de Czochralski. Ils ont constaté que le transport de la chaleur renforcé par le cristal dû au rayonnement intérieur affecte la forme d'interface de manière significative. Sa déflexion demeure sans changement jusqu'à une vitesse de rotation d'environ $\Omega = 18$ tr/min. Et également, la convection forcée dans cette gamme de rotation n'est pas assez forte pour équilibrer la convection naturelle et thermocapillaire, autrement dit, pour compenser la perte de chaleur par le cristal, afin de garder son diamètre constant. Dans l'intervalle $0 < \Omega < 18$ tr/min, le vortex dû à la convection forcée n'est pas visible. Dans la gamme $18 < \Omega < 25$ tr/min la déflexion d'interface diminue graduellement, et dès lors la convection forcée devient assez forte pour développer un vortex contrarotatif par rapport à celui généré par la convection naturelle et thermocapillaire. Un accroissement ultérieur de la vitesse de rotation de cristal peut causer une croissance rapide de ce vortex et un aplatissement de l'interface. Pour $\Omega = 28,9$ tr/min l'interface devient presque plate. Ainsi, dans la gamme des rotations $25 < \Omega < 29$ tr/min, l'interface est très sensible à tous les changements de la rotation de cristal et d'autres conditions de croissance si la rotation est maintenue constante.

Les écoulements des fluides conducteurs à l'électricité en présence d'un champ magnétique sont nommés des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD en abrégé). Un écoulement MHD peut différer significativement d'un écoulement hydrodynamique ordinaire équivalent. Le mouvement du métal fondu à travers des lignes de champ magnétique produit un courant électrique qui agit réciproquement avec le champ magnétique pour produire une force motrice électromagnétique (EM), qui s'oppose au mouvement du liquide. Même un

champ magnétique faible fournit assez de force EM d'amortissement pour éliminer la turbulence et l'instabilité dans la plupart du mouvement concerné, éliminant ainsi beaucoup de micro-défauts dans le cristal. Le taux d'amortissement dépendra en vertu de la force du champ magnétique appliqué aussi bien que son orientation en ce qui concerne la circulation convective ([Bessaïh, 2003](#)).

[Milhelcic et al. \(1985\)](#) ont envisagé l'influence d'un champ magnétique axisymétrique à différentes intensités sur l'écoulement et le champ de température. Ils ont montré que le champ magnétique stabilise l'écoulement et le champ de température. Ils ont également noté que les fluctuations de température peuvent être atténuées sous l'effet du champ magnétique. Ces fluctuations thermiques sont néfastes pour la croissance cristalline car elles conduisent à des solidifications et des fusions périodiques du cristal qui sont accompagnées de variations locales de concentration. [Liu et Kakimoto \(2005\)](#) ont simulé numériquement l'effet de la rotation du cristal sur la forme de l'interface dans la croissance cristalline du Silicium sous champ magnétique. Ils ont montré que l'interface est tridimensionnelle quand le cristal est fixe, et elle devienne bidimensionnelle quand le cristal est mis en rotation même si la vitesse de rotation est faible. Ils ont trouvé aussi que le gradient thermique dans la direction axiale localisée à l'interface cristal-bain augmente avec la croissance de la vitesse de rotation sauf à la frontière du cristal où l'évolution est inversée.

[Kalaev \(2007\)](#) a étudié l'effet du champ magnétique sur l'écoulement dans le bain et sur le front de solidification dans la croissance des cristaux de Silicium de 400 mm de diamètre. Il a trouvé que l'application d'un faible ou fort champ magnétique peut être un moyen efficace pour contrôler la turbulence dans le bain et pour réduire les fluctuations thermiques au niveau de l'interface de solidification.

[Talmage et al. \(2000\)](#) ont publié un article présentant une étude plus approfondie du mouvement de rotation du métal liquide pendant la production de cristaux de Silicium par le procédé de Czochralski avec un champ magnétique élevé, uniforme et vertical. Cet article traitait spécialement les effets inertiels dans la couche limite avec la résolution numérique des équations non-linéaires gouvernantes, et les équations de transport pour la vitesse primaire azimutale et pour la vorticité de l'écoulement secondaire avec la méthode de prédiction-correction d'Adams-Bashforth-Moulton de quatrième ordre. Ils ont discuté les effets d'inertie sur le mouvement de métal liquide, et ont prévu une compréhension plus claire du mouvement du liquide (Silicium fondu), sans laquelle des cristaux plus propre seront difficiles de se produire sur une base cohérente.

Bessaïh et al. (1999) ont porté une étude numérique sur l'écoulement MHD laminaire d'un métal liquide contenu dans une enceinte cylindrique, ayant un rapport d'aspect égal à 1, dont la paroi supérieure est en rotation. L'ensemble est soumis à un champ magnétique externe vertical. Un bon accord entre les résultats asymptotiques et numériques est obtenu par les auteurs, ces derniers ont montré que l'on peut contrôler l'écoulement primaire par un bon choix de la conductivité électrique des parois de l'enceinte en question.

Des travaux expérimentaux et numériques récents soutiennent cette idée comme ceux faits par Juel et al. (1999, 2001) qui montre l'effet d'un champ magnétique orthogonal à la direction principale de l'écoulement du Gallium liquide en convection tridimensionnelle. Une fois le champ magnétique est appliqué, la convection sera réduite, aussi que les oscillations trouvées aux gradients élevés de température peuvent être supprimées, tandis que sans application de champ magnétique, l'écoulement est amené à une structure complexe qui soutient la transition observée à la convection oscillante.

En outre, Bessaïh et al. (2003a) ont porté une étude numérique et analytique du l'écoulement laminaire stable engendré par un disque tournant au sommet d'un cylindre ayant un rapport d'aspect égal à l'unité, rempli d'un métal liquide et soumis à un champ magnétique axial, en résolvant les équations régissant l'écoulement par une méthode de volume finis. Ils donnaient différentes formules analytiques de vitesse et avaient montré qu'en présence d'un champ magnétique, les profils analytiques de vitesse proches des disques aux extrémités obtenus pour une valeur élevée du paramètre d'interaction magnétique N , présentent un excellent accord avec ceux obtenus par des simulations numériques. Ainsi, ils ont mettaient en évidence l'importance de la conductivité électrique des parois du conteneur (les deux disques et la paroi latérale), dans le contrôle de l'écoulement. Dans un autre travail (combinée numérique et analytique) de Bessaïh et al. (2003b), ont montré la forte dépendance de la structure de l'écoulement et de transfert de chaleur avec le champ magnétique et la conductivité électrique des parois constituant l'enceinte cylindrique, pour le cas des écoulements à Pr élevé. En absence du champ magnétique, le nombre de Nusselt suit une dépendance semblable à celle trouvée pour un réservoir cylindrique mélangé par une turbine à aubes. En présence du champ magnétique, les auteurs ont trouvé un amortissement important du transfert de chaleur.

En 2009, Bessaïh et al., ont étudié la stabilité magnétohydrodynamique d'un écoulement tournant dans un cylindre contient du métal liquide ($Pr = 0.015$) ayant un rapport d'aspect égal à 2 et soumis à un gradient vertical de température et un champ magnétique. Ils ont trouvé qu'en absence du champ magnétique, le nombre de Reynolds critique est une

fonction décroissante du nombre de Richardson (pour $Re_{cr} = 2575, 924, 802$ et 606 , correspondant respectivement aux $Ri = 0, 0.5, 1.0$ et 2.0). Ils ont montré également qu'en présence d'un champ magnétique vertical, la stabilité de l'écoulement se conserve pour des valeurs du nombre de Reynolds élevées. Le diagramme de la stabilité (Figure I.12) met en évidence la dépendance du Re_{cr} avec l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha , pour différentes Ri .

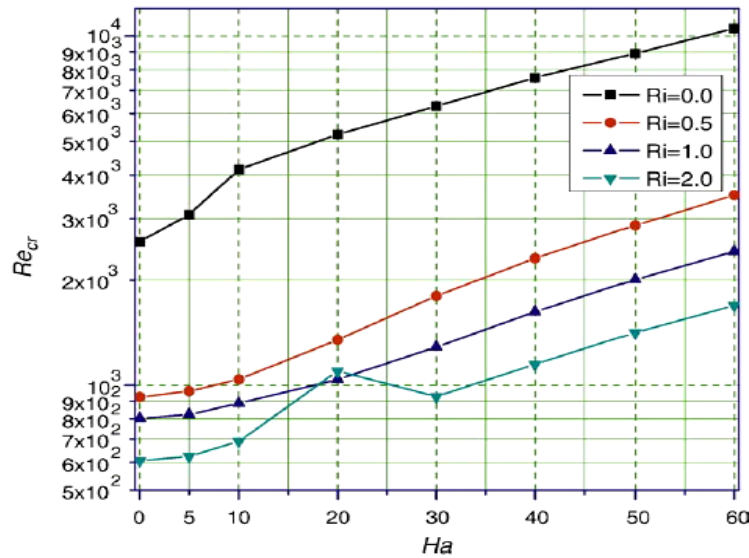


Figure I.12 : Diagramme de stabilité trouvé par Bessaïh et al. (2009).

Kharicha et al.(2004), ont utilisé le code commercial Fluent V.5 pour avoir une solution numérique du modèle de l'écoulement MHD laminaire, permanent conduit par un disque tournant au sommet d'une cavité cylindrique remplie d'un métal liquide. Les effets du champ magnétique, des conductivités électriques des parois et l'épaisseur pariétale sont examinées. Les paramètres appropriés pour ce type d'écoulements ont été variés comme $Re = 100$ et le nombre de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$, ce qui correspond à une gamme de paramètre d'interaction $0 \leq N \leq Ha^2 / Re = 100$. Malgré la supposition d'un très petit nombre de Reynolds magnétique R_m , le champ magnétique incité par ce petit R_m a été tenu en compte dans la formulation de leur problème. Leur étude est destinée à prédire l'influence d'un champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur une paroi métallique, ils ont résolu l'équation de concentration pour le produit de corrosion et ont montré que le transfert de masse évolue avec le Hartmann Ha , et pour une valeur de Ha fixe, le transfert de matière est plus élevé pour des parois électriquement conductrices que des parois isolantes. Ma et al. (2004a) ont étudié numériquement le processus de croissance cristalline de Bromure de Potassium (KBr) dans une configuration verticale de Bridgman, en employant un modèle

intégré qui combine une formulation globale de transfert de chaleur et des tensions thermiques. La distribution globale de température dans le cylindre, les formes des lignes de courant dans le métal liquide, aussi les effets de la convection naturelle aux fronts de croissance ont été examinés. Un autre travail de [Ma et al. \(2004b\)](#), ont présenté une analyse de la stabilité linéaire de la convection thermocapillaire dans un pont liquide limité par deux interfaces liquides-solides planes, maintenues à la même température et par une surface cylindrique avec une entrée axisymétrique de chaleur, les deux frontières solides sont mises en rotation à la même vitesse angulaire dans une direction azimutale et un champ magnétique tournant est appliqué dans l'opposé de la direction azimutale. Les valeurs critiques du nombre de Reynolds pour la convection thermocapillaire et les fréquences de mode critique sont présentées comme les fonctions du nombre de Taylor magnétique pour les champs magnétiques tournants et du nombre de Reynolds pour la vitesse angulaire des frontières solides. [Ganapathysubramanian et Zabaras \(2004\)](#) dans leur travail ont examiné l'effet d'appliquer un gradient de champ magnétique convenablement placé sur la croissance de cristaux simples, en particulier, la courbure d'interface, le taux de croissance et la distribution de dopant ont été examinés. Aussi, ils ont effectué une comparaison entre la croissance de cristal sous l'influence d'un champ magnétique uniforme et un gradient de champ magnétique et ont révélé les avantages significatifs d'utiliser la méthode de gradient magnétique pour donner une distribution uniforme du dopant et produire une interface plane, ainsi que la faisabilité commerciale d'une telle technique.

[Kharicha et al. \(2005\)](#), ont effectué une autre investigation expérimentale de l'écoulement MHD laminaire dans le cas permanent induit par la rotation d'un disque au sommet d'une cavité cylindrique remplie de l'eau ou de mercure. Ils ont analysé les distributions de vitesse en employant la technique de mesure par ultrasons (UVP). Leurs mesures ont été comparées avec des résultats obtenus par un modèle numérique. Ils ont effectué ses mesures et comparaisons essentiellement pour les valeurs de Reynolds allant jusqu'à 30000 et pour $Ha \leq 260$. Alors, ils avaient un proche accord entre les résultats numériques, les mesures par ultrasons et d'autres travaux expérimentaux et numériques annoncés dans la littérature. Ses expériences ont révélé quelque chose qui n'a pas été prévu numériquement, la couche pariétale latérale est instable pour des valeurs spécifiques des nombres de Hartmann et de Reynolds.

[Mittal et al. \(2005\)](#) ont présenté une simulation numérique pour analyser la convection naturelle bidimensionnelle de métaux liquides soumis au champ magnétique transversal. Dans leur étude spatio-temporelle, ils avaient montré que l'écoulement oscillant change vers un

écoulement stable avec l'augmentation de l'intensité de champ magnétique appliqué pour une gamme du nombre de Rayleigh (Ra) entre 10^5 et 10^8 , même pour cette gamme de Ra , la magnitude du champ magnétique amortie significativement l'amplitude des vitesses, et les amplitudes des oscillations apériodiques de n'importe quelle variable dynamique. Alors, ils ont analysé l'interaction des forces de buoyancy et les forces électromagnétiques sur le développement et la formation spatio-temporelle des motifs de courant. Pour comprendre cette interaction, ils ont varié l'intensité du champ magnétique appliqué via la variation du nombre de Chandrasekhar Q ($Q = \sigma H^2 B^2 / \rho \nu = Ha^2$) pour une gamme de Ra , en résolvant numériquement les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes, de l'énergie et de la MHD pour des métaux liquides à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.015$, cas des semi-conducteurs), confinés dans des cavités carrées de profondeur H . Outre l'analyse non-linéaire, les auteurs (Mittal et al. 2005) ont effectué une analyse spectrale pour montrer qu'avec l'augmentation de Q , le spectre des énergies (PSD) correspondant aux fréquences dominantes diminue, et le nombre de fréquences se réduit aussi en raison d'élimination des basses fréquences.

Kakimoto et al. (2003) ont analysé les effets du champ magnétique sur la forme de l'interface bain-cristal (Figure I.13), et ils ont comparé les résultats pour deux cas: sans et avec champ magnétique pour différentes vitesses du cristal.

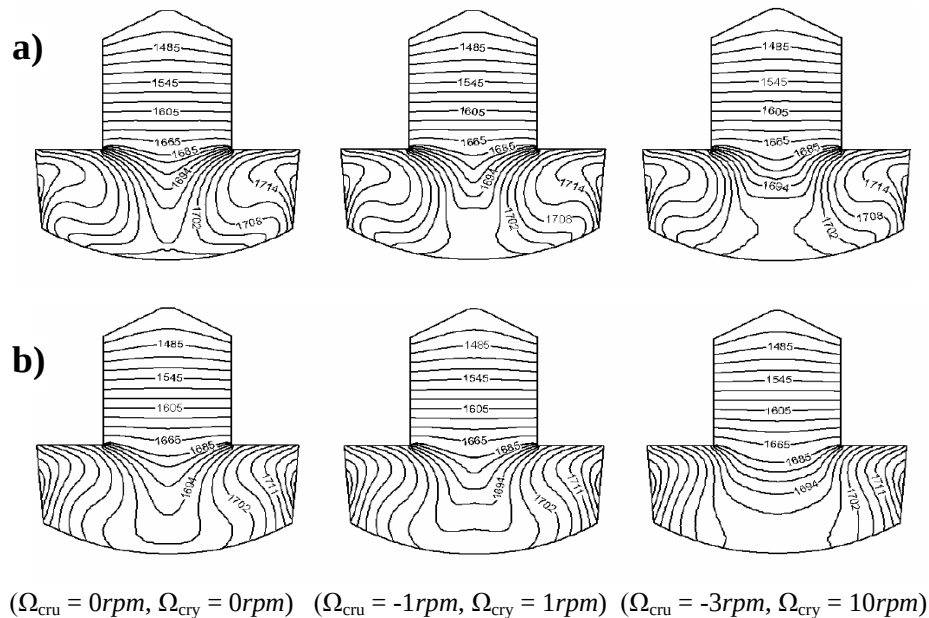


Figure I.13 : Champ de température, (a) en l'absence et (b) en présence d'un champ magnétique Kakimoto et al. (2003). (Ω_{cry} : rotation du cristal, Ω_{cru} : rotation du creuset).

Ils ont constaté que dans le cas d'un champ magnétique appliqué, l'interface apparaît plus lisse qu'en son absence. Ils ont également remarqué que la convection dans le creuset

s'affaiblit considérablement sous l'effet du champ magnétique. Ceci indique que l'écoulement méridional et le transfert thermique dans le creuset sont dominés par les effets du champ magnétique. Cependant, la forme d'interface est fortement modifiée dans le cas où les vitesses de rotation sont élevées en raison de la présence d'un courant azimuthal dans le bain, et à cause du cristal qui réduit l'intensité d'écoulement généré par la force de Lorenz.

I.3.2 Convection naturelle dans des cavités de type Bridgman vertical

L'étude de la convection naturelle et des caractéristiques des écoulements, générés par la poussée d'Archimède dans des cavités, est un problème dont l'intérêt est important sur le plan fondamental qu'au niveau des applications pratiques. En plus, la convection naturelle constitue un problème test pour de nombreuses techniques numériques telles que les différences finies, volumes finis, éléments finis et autres méthodes spectrales.

De nombreux travaux concernent l'étude des phénomènes thermiques dans des cavités cylindrique fermées de type Bridgman vertical ; le but ultime étant de pouvoir maîtriser les transferts de chaleur. Il est reconnu que la convection dans le liquide est laminaire et stable relativement aux faibles nombres de Grashof. Cependant, la convection naturelle peut devenir oscillatoire et périodique dans le temps à partir de certaine valeur, appelée valeur critique, pour lequel le comportement de l'écoulement devient soudain qualitativement différent du comportement antérieur. Un tel changement de comportement est appelé bifurcation et se traduit par une perte de symétrie du système. Les instabilités représentent un sous-ensemble de l'ensemble plus général des bifurcations (Zhou et Zebib, 1992).

Pour l'étude de la convection au-delà de son apparition dans des cavités cylindriques chauffées de type Bridgman, nous nous limitons aux travaux réalisés pour l'analyse de stabilité de la solution axisymétrique. Charlson et Sani (1975) ont analysé par simulation numérique, la stabilité du mode axisymétrique dans une cavité de type Bridgman. Mais aucune bifurcation secondaire n'a pu être mise en évidence, à cause de la troncature trop sévère des modes sur lesquels les solutions sont développées.

Muller et al. (1984) ont étudié numériquement et expérimentalement le problème de la convection dans une cavité de type Bridgman pour deux valeurs du nombre de Prandtl: $Pr = 0.02$ et 6.7 . Numériquement ils ont détecté pour $Ar = 0.5$, $Pr = 6.7$ et à $Ra = 2800$ une solution stable tridimensionnelle, alors qu'expérimentalement l'écoulement reste axisymétrique à cette valeur, et devient instable à une perturbation du type $m = 1$ pour $Ra_{c2} = 22600$ (Ra_{c2} désigne la valeur du Rayleigh critique correspondant à la bifurcation secondaire où la solution

axisymétrique perd sa stabilité). [Neumann \(1990\)](#) a refait une simulation numérique qui confirme que pour $Ar = 0.5$ et $Pr = 6.7$, l'écoulement est déjà asymétrique pour $Ra = 2800$ et que pour $Pr = 0.02$, la transition d'un écoulement axisymétrique à un écoulement tridimensionnel se passe à $Ra_{c2} = 2525$. Pour les deux cas le mode axisymétrique devient instable pour une perturbation du type $m = 2$. [Hardin et Sani \(1993\)](#), ont refait une autre analyse en faisant un développement, selon les six modes les plus instables (donnés par les valeurs propres ayant les plus grandes parties réelles) calculés par l'analyse de stabilité linéaire de la solution diffusive. Pour $Ar = 0.5$, ils ont obtenu une valeur de Ra_{c2} égale à 2850 pour $Pr = 6.7$ et à 2430 pour $Pr = 0.02$. [Wagner et al. \(1994\)](#) ont réalisé une simulation numérique de l'écoulement à $Ra = 2800$ pour $Ar = 0.5$ et $Pr = 6.7$ qui a montré que le mode axisymétrique est stable. Pour ces deux derniers travaux, les résultats sont en nette contradiction avec les résultats numériques de [Müller et al. \(1984\)](#) et [Neumann \(1990\)](#), notamment pour $Pr = 6.7$ et $Ar = 0.5$.

Le travail le plus riche est celui qui vient d'être publié par [Wanschura et al. \(1996\)](#). Ils ont limité leur étude aux rapports de forme pour lesquels la convection apparaît sous forme du mode axisymétrique ($0.33 < Ar < 0.55$). L'évolution de la valeur critique Ra_{c2} en fonction du rapport de forme a montré que la solution axisymétrique peut devenir instable pour des perturbations du type $m = 1, 2, 3$ ou 4 . Pour $Pr = 0.02$, la bifurcation secondaire est dominée par une perturbation $m = 2$, et pour $Pr = 1$, elle est dominée par une perturbation du type $m = 1$. Ils ont montré que, pour $Pr = 6.7$ et $Ar = 0.5$, la solution axisymétrique devient instable pour une perturbation du type $m = 1$ à $Ra_{c2} = 10134$. En analysant le bilan énergétique dû à la perturbation de la solution axisymétrique, ils ont montré que cette instabilité est d'origine dynamique pour les petits nombres de Prandtl ($Pr = 0.02$) et thermique pour les Pr plus élevés ($Pr = 1$ ou $Pr = 6.7$).

L'effet de l'inclinaison dans les cavités de type Bridgman aussi, prend une attention par les chercheurs. Par exemple, [Markham et Rosenberger \(1984\)](#), il a été rapporté que les plus grands transports sont obtenus en inclinant la cavité (ampoule). Motivé par ce, [Bontoux et al. \(1986\)](#) ont réalisé une étude numérique et expérimentale sur l'influence de l'inclinaison du cylindre 3D sur l'écoulement de convection naturelle. Dans leur travail, le cylindre (ampoule) est de rapport d'aspect $Ar = 5$, et soumis à un gradient de température vertical, et des parois latérales du cylindre ont été prises pour être parfaitement conductrices ([Figure I.14](#)). Ils ont trouvé que l'effet de l'inclinaison du cylindre a un effet important sur la stabilisation de l'écoulement.

Beaucoup d'autres exemples sur l'effet d'inclinaison sur les écoulements de convection naturelle ont été rapportés par [Delgado-Buscalioni et Crespo Del Arco \(2001\)](#). Il a été prouvé que l'amélioration significative de transfert de chaleur peut être obtenue lorsque le tube dans un échangeur de chaleur est incliné de façon optimale.

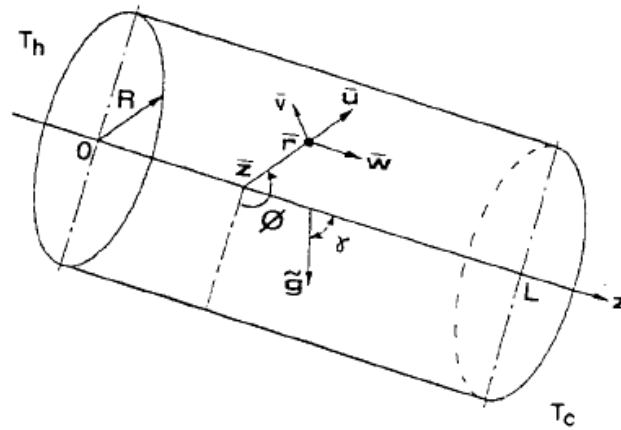


Figure I.14 : Modèle physique utilisé par [Bontoux et al. \(1986\)](#).

[Kurian et al. \(2009\)](#) ont utilisé le code CFD (fluent) pour étudier l'effet de l'inclinaison sur le tirage thermique induit par les écoulements internes et le transfert thermique par la convection naturelle. Ils ont étudié à l'aide d'une méthode de volumes finis, la convection naturelle dans une cavité cylindrique différentiellement chauffée et inclinée, ils présentent leurs résultats pour les configurations dynamiques et thermique suivantes :

- La valeur du nombre de Rayleigh limité entre 10^3 et 3.1×10^4 .
- La valeur du nombre de Prandtl est égale à 0.71.
- L'angle d'inclinaison compris entre 0° et 180° .

Ces auteurs ont étudié les structures thermique et dynamique des écoulements et déterminé le taux de transfert de chaleur ; ils donnent aussi la valeur critique du nombre de Rayleigh.

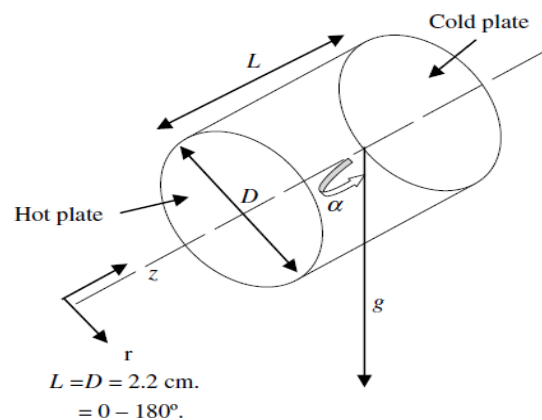


Figure I.15 : Modèle physique de [Kurian et al. \(2009\)](#).

Schneider et Straub (1990) ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité cylindrique tridimensionnelle, et vérifié les résultats expérimentalement. Ils ont traité l'effet de plusieurs paramètres, comme : le nombre de Rayleigh ($Ra < 8 \times 10^4$), le nombre de Prandtl ($0.023 \leq Pr \leq 135$), le rapport d'aspect ($0.5 \leq Ar \leq 2$) et l'inclinaison du cylindre ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) sur les mouvements convectifs et le transfert de chaleur. Leurs résultats montrent que pour $Ar > 1$ le mode d'écoulement est manifeste non-axisymétrique, et le transfert de chaleur maximale est trouvé à $\alpha \approx 45^\circ - 60^\circ$ pour $Ar = 1$. Aussi ils ont trouvé que le nombre de Prandtl a une influence mineure pour $Pr \geq 0.7$, tandis que le transfert de chaleur et de débit vitesses diminuent avec la diminution du nombre de Prandtl dans la gamme du $Pr < 0.7$. En conséquence, pour des applications techniques, où le transfert de chaleur doit être amélioré, il est recommandé d'incliner la cavité environ de 45° .

L'effet d'un champ magnétique constant sur les écoulements de convection naturelle d'un métal liquide dans différentes configurations a fait l'objet de nombreuses études. De nombreux travaux se sont intéressés à la configuration de de Bridgman vertical a suscité un intérêt accru. Chandrasekhar (1961) a développé une analyse linéaire pour étudier l'effet d'un champ magnétique sur les seuils primaires d'instabilité thermique. Pour cela, il a considéré un fluide chauffé par le bas, et soumis à l'action d'un champ magnétique vertical. Ce fluide est contenu dans un domaine confiné selon la direction verticale et infini selon les directions horizontales. Trois types de conditions aux limites ont été envisagés: rigide-rigide, rigide-libre et libre-libre. Pour ces trois cas, les résultats montrent un comportement asymptotique des seuils primaires en Ha^2 et du nombre d'onde en $Ha^{-1/3}$.

Baumgartel et Müller (1992) ont étudié l'effet d'un champ magnétique vertical sur la convection dans une cavité cylindrique chauffée par le bas. Pour cette analyse numérique, ils ont considéré trois types d'approximations de complexité croissante. Ils ont montré que l'approximation la plus simplifiée n'est pas capable de reproduire les phénomènes tridimensionnels ou instationnaires en Magnétohydrodynamique. Pour les écoulements faibles et stationnaires, la deuxième approximation donne des résultats admissibles. Dans le cas où la dépendance en temps du champ magnétique ne peut plus être négligée, seule l'approximation la plus complexe est capable de donner des résultats corrects, mais le temps de calcul est nettement plus important que pour les deux autres approximations. Mössner (1996) a étudié le freinage par champ magnétique d'un écoulement dans une cavité cylindrique chauffée par le bas avec des parois rigides. Il a montré la multiplication du nombre de rouleaux quand l'intensité du champ magnétique est augmentée.

Touihri et al. (1999) ont mené une étude numérique tridimensionnelle dans une enceinte cylindrique chauffée par le bas. L'enceinte est exposée à un champ magnétique en considérant toutes les frontières isolantes. Ils ont obtenus les diagrammes de stabilité et ont déterminé les modes propres des instabilités de l'écoulement pour des différents paramètres à savoir l'orientation du champ magnétique, son intensité et le rapport d'aspect. Ben Hadid et al. (1997) ont employé une méthode numérique spectrale afin de résoudre directement les équations de Navier-stokes de l'écoulement tridimensionnel oscillatoire d'un métal liquide conducteur confiné dans une cavité cylindrique horizontal de longueur modérée, ainsi, ils examinaient les signaux temporels, les propriétés de symétrie et les bilans d'énergie caractérisant les oscillatoires de l'écoulement, et l'amortissement des écoulement oscillatoires par un champ magnétique vertical jusqu'à la stabilisation de cet écoulement.

Gelfgat et al. (1993) ont étudié expérimentalement l'écoulement d'un métal liquide induit par un champ magnétique tournant dans un récipient cylindrique confiné. Ils ont démontré que l'écoulement dans un champ magnétique tournant est semblable aux écoulements géophysiques, où le fluide tourne uniformément avec la profondeur dont la couche d'Ekman existe. Près de la paroi verticale, l'écoulement est présenté sous forme d'un jet confiné dont l'épaisseur détermine le début d'instabilité dans un champ magnétique tournant. Ils ont étudié aussi l'effet de la fréquence du champ magnétique sur le flux de fluide. Un modèle théorique approximatif est présenté pour décrire le flux de fluide dans un domaine tournant uniforme (Figure I.16).

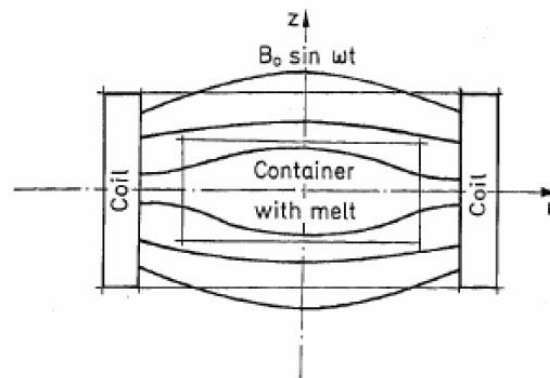


Figure I.16 : Schématisation du problème considéré par Gelfgat et al. (1993).

Ben Hadid et Henry (1996) ont effectué une recherche numérique pour des écoulements tridimensionnels du mercure dans une cavité cylindrique d'allongement égal à 4, avec différentes orientations du champ magnétique. Ils trouvent la bonne concordance avec les

évaluations analytiques de [Garandet et Alboussiere \(1992\)](#), [Alboussiere et al. \(1993, 1996\)](#) pour l'atténuation des champs de vitesse.

[Gelfgat et al. \(2000\)](#) ont présenté une étude numérique de l'instabilité tridimensionnelle d'un écoulement axisymétrique associée à la croissance du cristal. Leur objectif principal est le calcul des paramètres critiques correspondant à une transition de l'asymétrie régulier au modèle non-axisymétrique tridimensionnel d'écoulement. Ils ont effectué une étude paramétrique de la dépendance du nombre critique Gr_{cr} à l'égard le nombre de Prandtl $0 < Pr < 0.05$ (caractéristique des semi-conducteurs) et l'allongement du cylindre $1 < Ar < 4$. La dépendance forte du nombre critique de Grashof et la périodicité azimutale de l'écoulement tridimensionnel résultant indique l'importance d'une analyse paramétrique complète de stabilité dans différentes configurations de croissance en cristal. En particulier, ils ont montré que la première instabilité de l'écoulement considéré est toujours tridimensionnelle.

[Gelfgat et al. \(2001a\)](#) ont fait une étude de l'effet d'un champ magnétique externe sur l'instabilité d'un écoulement axisymétrique de convection naturelle, associée à la croissance du volume d'un cristal fondu. Ils ont considéré la convection dans un cylindre vertical avec un profil de température parabolique sur la paroi latérale comme modèle représentatif. Ils ont effectué une étude paramétrique de la dépendance du nombre critique de Grashof Gr_{cr} à l'égard du nombre de Hartmann Ha pour des valeurs fixes du nombre de Prandtl ($Pr = 0.015$) et de l'allongement du cylindre ($Ar = 1, 2$ et 3). Ils ont obtenu le diagramme $Gr_{cr} - Ha$ de stabilité correspondant à la transition tridimensionnelle axisymétrique pour des valeurs croissantes du champ magnétique axial. Ils ont montré qu'aux valeurs relativement petites de Ha , l'écoulement axisymétrique tend à être instable oscillant et si l'intensité du champ magnétique (Ha) est importante et dépasse une certaine valeur, l'instabilité causée par le mécanisme de Rayleigh-Bénard commute à une bifurcation régulière. Ainsi pour la configuration la plus petite, la stabilisation est considérablement plus forte que dans la plus grande ([Figure I.17](#)). Dans un autre travail de [Gelfgat et al. \(2001b\)](#), ont intéressés au problème du seuil des instabilités oscillatoires dans l'écoulement d'un fluide semi-conducteur ($Pr = 0.015$) sous un champ magnétique extérieurs stationnaire et uniforme. Ils ont considéré la configuration horizontale de Bridgman associées au processus de croissance en cristal (l'allongement $Ar = 4$). L'effet d'un champ magnétique uniforme avec différentes intensités et orientations sur la stabilité des écoulements d'état d'équilibre (avec une cellule ou un modèle de deux cellules) est présenté. Les diagrammes de stabilité montrant la dépendance du nombre de Grashof critique à l'égard du nombre de Hartmann. Ils ont montré qu'un champ magnétique vertical fournit l'effet de stabilisation le plus fort, et que la multiplicité d'états

d'équilibres est supprimée par l'effet électromagnétique, de sorte qu'à un certain niveau de champ seulement les écoulements unicellulaires demeurent stables. Une analyse des perturbations d'écoulement les plus dangereuses prouve que, en commençant par une certaine valeur du nombre de Hartmann, des écoulements unicellulaires sont déstabilisés à l'intérieur des couches de frontière minces de Hartmann. Ceci peut mener à la déstabilisation de l'écoulement avec une augmentation de la grandeur du champ magnétique.

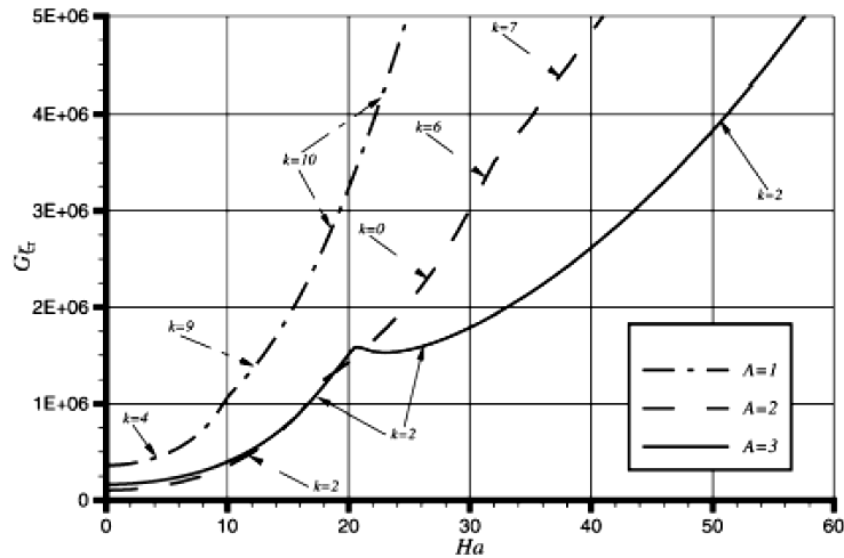


Figure I.17 : La variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} en fonction du nombre de Hartmann Ha (Gelfgat et al. 2001a).

Berrahil et Bessaih (2010) ont effectué une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte cylindrique remplie d'un métal liquide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.015$). Ayant un rapport d'aspect égal à 2 et soumise à un gradient vertical de température, et un champ magnétique. Ils ont trouvé que la stabilité de l'écoulement est conservée pour des valeurs supérieures du nombre de Grashof Gr . Le diagramme obtenu met en évidence la dépendance du Gr_{cr} avec l'augmentation du nombre de Hartmann.

I.4 Conclusion du chapitre I

L'étude bibliographique que nous avons présentée montre que la convection thermique est fortement contrôlée par les paramètres adimensionnels, tels que le nombre de Rayleigh ou de Grashof, pour l'intensité de la convection naturelle, le nombre de Reynolds ou de Richardson pour l'intensité de la convection mixte, le nombre de Hartmann, pour l'intensité du champ magnétique, le rapport d'aspect, ainsi que l'inclinaison de la cavité. La majorité de ces travaux sont intéressées par le régime d'écoulement stationnaire et peu des travaux examinent le régime de transition stationnaire-oscillatoire avec et sans champ magnétique. Cette transition du régime a des effets néfastes sur la production des monocristaux en phase liquide, ainsi la possibilité du contrôle de l'écoulement de convection d'un fluide conducteur à l'électricité par un champ magnétique (contrôle sans intervention mécanique). Alors l'étude de la convection dans le régime oscillatoire avec la présence et non du champ magnétique, reste incomplète. Ceci nous a incité pour développer ce thème de recherche.

Dans ce travail, nous proposons une simulation numérique de la convection thermique dans des cavités similaires à celles de Bridgman vertical et de Czochralski.

Pour la cavité de type Czochralski nous examinons la convection mixte axisymétrique (2D), et nous faisons une extension au cas tridimensionnel (3D), avec et sans champ magnétique en régime stationnaire et en régime oscillatoire. Et nous verrons l'effet du nombre de Richardson (Ri) et de rapport d'aspect (Ar) sur la stabilisation de l'écoulement convectif.

Le champ magnétique est appliqué suivant les deux directions radiale et axiale et pour différentes intensités (Ha). Nous déterminons également les valeurs critiques correspondantes au régime de transition : la valeur du nombre de Reynolds critique (Re_{cr}), pour chaque nombre de Richardson Ri et pour chaque nombre de Hartmann Ha .

Pour la cavité de type Bridgman vertical, nous examinons la convection naturelle axisymétrique en régime stationnaire et régime oscillatoire. Le champ magnétique est appliqué pour différentes intensités et différentes orientations. La stabilité de l'écoulement de convection est contrôlée par l'inclinaison de la cavité, ou par l'application du champ magnétique ou par la combinaison entre les deux. En régime instationnaire nous déterminons le nombre de Grashof (Gr_{cr}), en fonction de l'inclinaison du cylindre φ et en fonction de l'intensité du champ magnétique (nombre de Hartmann Ha) et l'orientation du champ magnétique (δ).

Les problèmes physiques et la formulation mathématique des modèles proposés seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre II

Problèmes Physiques et Formulations Mathématiques

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les trois modèles physiques considérés : convection mixte axisymétrique dans une cavité similaire à celle de Czochralski, convection naturelle axisymétrique dans une cavité similaire à celle de Bridgman vertical, et convection mixte tridimensionnelle dans une cavité de type Czochralski. Ainsi que, les équations modélisant le phénomène. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs (cas des métaux liquides) en convection laminaire (naturelle et mixte). Elles sont fondées selon les lois physiques : de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie. En présence d'un champ magnétique, l'apparition d'une nouvelle force de volume (force de Lorentz) au sein du liquide (écoulement MHD), ajoute une autre équation pour compléter le système. Les démonstrations nécessaires à l'obtention des équations susmentionnées décrivant la dynamique de l'écoulement du fluide avec transfert de chaleur sont bien expliquées et illustrées dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des fluides et de transferts thermiques.

II.2 Description des problèmes et formulations mathématiques

II.2.1 Modèle N°1 : Convection mixte axisymétrique dans une cavité similaire à celle de Czochralski

Le système physique considéré est montré sur la [Figure II.1](#), est une enceinte cylindrique similaire à celle de Czochralski ([Wu et al. 1998](#); [Lipchin et al. 1999](#); [Polezhaev et al. 2001](#)), de rayon R et de hauteur H , dont le rapport d'aspect fixe ($Ar = H/R = 2$). L'enceinte contient du métal liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl (Silicium, $Pr = 0.011$), le cristal (disque supérieur) refroidi par une température $T_f < T_c$ et soumis à une rotation à la vitesse angulaire constante (Ω_s), tandis que le fond du cylindre est thermiquement isolé. La paroi latérale rigide est chaude T_c . L'ensemble peut être soumis à un champ magnétique de magnitude constante, uniforme et orienté en deux directions axiale et radiale séparément. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolées.

II.2.1.1 Hypothèses simplificatrices

Afin d'aborder la résolution des équations régissant la convection mixte MHD d'un métal liquide, relatif à la géométrie déjà montrée, on va adopter les hypothèses de simplifications suivantes:

- L'écoulement est laminaire axisymétrique, avec tourbillon (swirl).
- Le métal liquide est incompressible ($\rho = Cste$) et Newtonien.
- L'effet Joule est négligeable.
- Pas de génération de chaleur volumétrique, et la dissipation visqueuse est supposée négligeable.
- Le métal liquide est non magnétisé puisque la perméabilité magnétique $\mu_m = 1$.
- L'écoulement n'affecte pas le champ magnétique, c-à-d le nombre de Reynolds magnétique est très petit ($Re_m = \mu_0 \sigma \Omega R \ll 1$).
- La surface libre est considérée comme une surface plate.
- Les propriétés physiques du métal liquide (σ, λ, α et ν) sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est valide : si la variation de densité n'est pas large, on peut considérer la densité comme constante dans les termes transitoire et convectif, et la traiter comme variable seulement dans le terme gravitationnel, en sachant qu'elle est exprimée par la formule : $(\rho - \rho_0)g = -\rho_0 g \beta (T - T_0)$ (Lienhard IV, 2005), où ρ_0 est la masse volumique de référence, et β est le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

II.2.1.2 Formulation mathématique

La résolution d'un problème de convection thermique consiste à déterminer les champs de vitesses, de pression et de température en chaque point du domaine occupé par le fluide. Pour cela, nous devons établir les équations de conservation régissant le problème. Ces équations sont déduites des principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. En adoptant les hypothèses simplificatrices précédentes, les équations de conservation qui régissent cet écoulement en convection mixte en coordonnées cylindriques 2D s'écrivent :

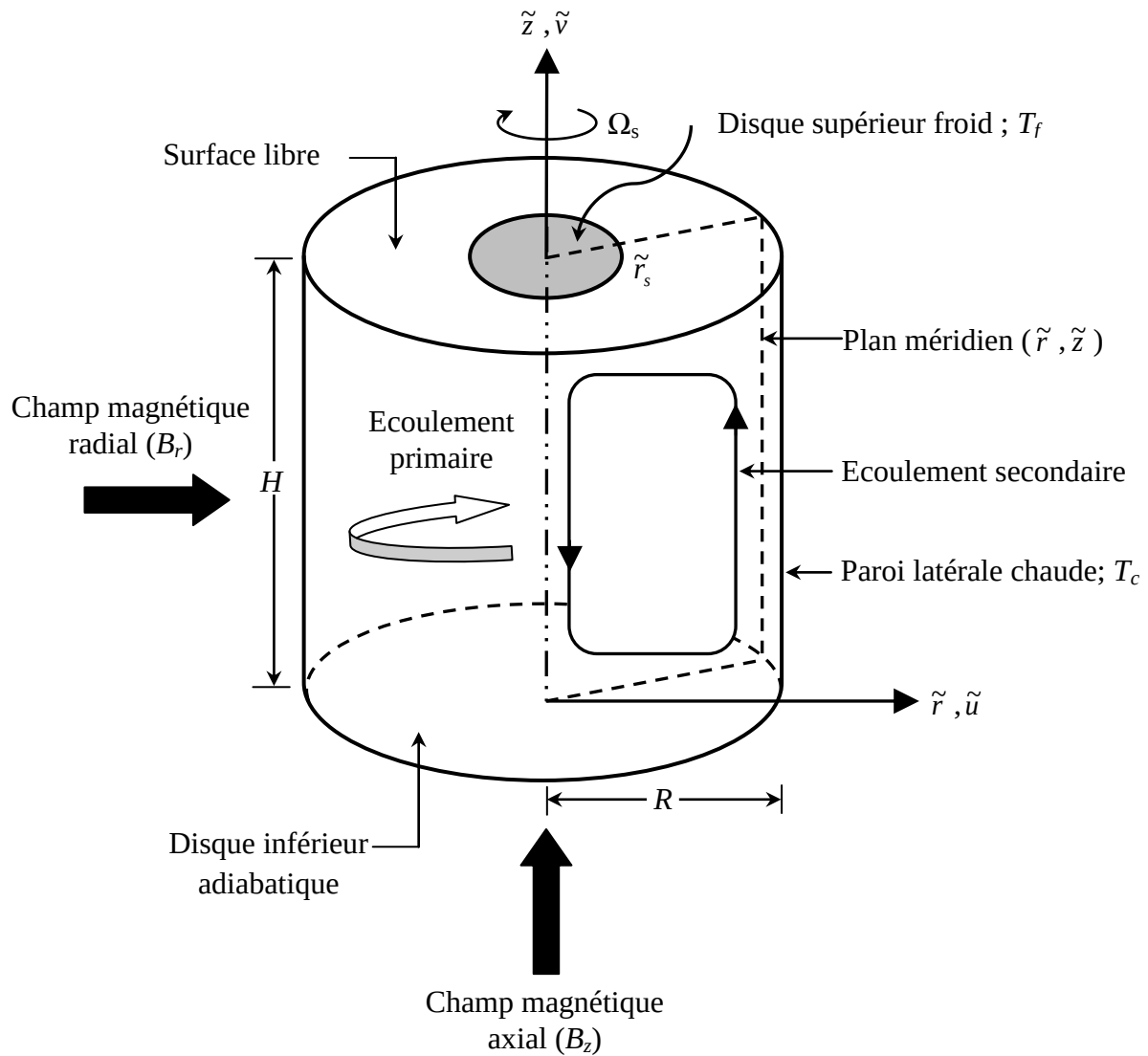


Figure II.1 : Modèle physique de la convection mixte axisymétrique.

► Equation de conservation de masse

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de la variation de la masse du fluide durant un intervalle de temps élémentaire et des flux massiques traversant la surface de ce volume. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{u})}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} = 0 \quad (\text{II.1})$$

► Equations de quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement sont obtenues par l'application de la deuxième loi de la dynamique à une particule de fluide passant à travers un volume de contrôle infinitésimal. Elles s'écrivent :

► Equation de quantité de mouvement radiale

$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{r}} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{r}} + \mu \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right] + \tilde{f}_{Lr} \quad (\text{II.2})$$

► Equation de quantité de mouvement azimuthale (swirl)

$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\tilde{u} \tilde{w}}{\tilde{r}} \right) = \mu \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}^2} \right] + \tilde{f}_{L\theta} \quad (\text{II.3})$$

► Equation de quantité de mouvement axiale

$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} + \mu \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right] + \rho g \beta (T - T_f) + \tilde{f}_{Lz} \quad (\text{II.4})$$

Où $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimuthale, g est l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide et $\tilde{f}_{Lr}, \tilde{f}_{L\theta}, \tilde{f}_{Lz}$ sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimuthale, cette force EM est donnée par la formule (Bessaïh et al. 2003):

$$\tilde{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.5})$$

La composante azimuthale $\tilde{w}$ de la vitesse est une grandeur scalaire, introduite dans ce système d'équations seulement pour avoir une information de plus sur le champ de vitesse, et pour le calcul du potentiel électrique.

► Equation d'énergie

L'équation de transport de l'énergie est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation, dans laquelle les termes de dissipations visqueuses sont négligés, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial T}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{z}^2} \right] \quad (\text{II.6})$$

Où $\alpha = \lambda / \rho C_p$, est la diffusivité thermique du liquide, λ est sa conductivité thermique et C_p sa chaleur spécifique à pression constante.

► Equation de potentiel électrique

Cette équation est introduite au système d'équations gouvernant, lors de la présence du champ magnétique pour compléter ce système vis-à-vis l'apparition d'une nouvelle force de

volume (Force de Lorentz), dont les composantes sont les termes $\tilde{f}_{Lr}, \tilde{f}_{L\theta}, \tilde{f}_{Lz}$ ajoutés aux équations de Navier-Stokes.

En supposant que la conductivité électrique σ du fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant et $\vec{E}$ le champ électrique local. Suivons dans son mouvement un élément fluide; dans un repère absolu, la dernière équation s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.8})$$

$\vec{V} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta + w\vec{e}_z$: Désigne le vecteur de la vitesse dans le plan méridien.

$\vec{B} = B\vec{e}_r$: Le vecteur du champ magnétique radial.

$\vec{B} = B\vec{e}_z$: Le vecteur du champ magnétique axial.

Aussi puisque, le courant électrique est conservé :

$$\vec{\text{Rot}}\vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (\text{II.9})$$

Et

$$\text{div}\vec{j} = 0 \quad (\text{II.10})$$

C-à-d : le courant électrique dérive d'un potentiel électrique ϕ

En substituant les équations (II.9) et (II.10) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi + \vec{V} \wedge \vec{B}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\phi = \text{div}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.11})$$

► Equation de potentiel électrique pour un champ radial

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{z}^2} = -B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} \quad (\text{II.12})$$

► Equation de potentiel électrique pour un champ axial

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{z}^2} = B \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{w})}{\partial \tilde{r}} \right) \quad (\text{II.13})$$

► Forces de Lorentz pour le champ radial

$$\begin{cases} F_{Lr} = 0 \\ F_{L\theta} = \sigma B \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} - \tilde{w} B \right) \\ F_{Lz} = -\sigma \tilde{v} B^2 \end{cases} \quad (\text{II.14a})$$

► Forces de Lorentz pour le champ axial

$$\begin{cases} F_{Lr} = -\sigma \tilde{u} B^2 \\ F_{L\theta} = \sigma B \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} - \tilde{w} B \right) \\ F_{Lz} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.14b})$$

II.2.1.3 Formulation adimensionnelle

Pour donner une formulation générale au problème étudié, on introduit dans les équations de conservation précédentes, les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\tilde{r}}{R}, \quad r_s = \frac{\tilde{r}_s}{R}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{R} \\ u &= \frac{\tilde{u}}{\Omega_s R}, \quad w = \frac{\tilde{w}}{\Omega_s R}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\Omega_s R} \\ \tau &= \frac{t}{(1/\Omega_s)}, \quad P = \frac{\tilde{P}}{\rho(\Omega_s R)^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \quad \Phi = \frac{\phi}{(\Omega_s R^2 B)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

Alors, les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors :

► Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.16})$$

► Equation de quantité de mouvement radiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] + \frac{Ha^2}{\text{Re}} F_{Lr} \quad (\text{II.17})$$

► Equation de quantité de mouvement azimutale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right] + \frac{Ha^2}{\text{Re}} F_{L\theta} \quad (\text{II.18})$$

► Equation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \Theta + \frac{Ha^2}{\text{Re}} F_{Lz} \quad (\text{II.19})$$

► Equation d'énergie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re.Pr}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.20})$$

► Equation de potentiel électrique suivi par un champ magnétique radial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{II.21})$$

► Equation de potentiel électrique suivi par un champ magnétique axial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) \quad (\text{II.22})$$

Les forces électromagnétiques pour les deux directions du champ magnétique sont :

- Cas d'un champ magnétique radial:

$$\begin{cases} F_{Lr} = 0 \\ F_{L\theta} = \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial z} - w \right) \\ F_{Lz} = -v \end{cases} \quad (\text{II.23a})$$

- Cas d'un champ magnétique axial:

$$\begin{cases} F_{Lr} = -u \\ F_{L\theta} = \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial z} - w \right) \\ F_{Lz} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.23b})$$

II.2.1.4 Nombres adimensionnels caractérisant le problème

La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservation fait apparaître des nombres sans dimension caractéristiques du problème. Ces paramètres sont :

❖ **Nombre de Reynolds** : Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces

de viscosité, $\text{Re} = \frac{\Omega_s R^2}{\nu}$.

❖ **Nombre de Grashof** : C'est le rapport entre les forces de flottabilité et les forces de

viscosité, $\text{Gr} = \frac{\beta g (T_c - T_f) R^3}{\nu^2}$.

❖ **Nombre de Prandtl** : Il représente le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité thermique, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.

❖ **Nombre de Richardson** : représente l'importance relative de la convection naturelle à la convection forcée et joue un rôle important pour indiquer les régimes de convection,

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\beta g (T_c - T_f)}{\Omega_s^2 R}.$$

❖ **Nombre de Hartmann** : définit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité, $Ha = BR\sqrt{\sigma/\rho\nu}$.

II.2.1.5 Conditions initiales et aux limites

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement de calculs comme étant la solution obtenue par le calcul antécédent (les répartitions de u, v, w, P, Φ et Θ dans le fluide). Toutefois, pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$, on aura :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 0, \Phi = 0 \quad (II.24a)$$

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de swirl avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant $\tau > 0$,

- Sur l'axe de symétrie:

$$u = 0, \frac{\partial v}{\partial r} = 0, w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 0, 0 \leq z \leq Ar) \quad (II.24b)$$

- A la paroi latérale chaude:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1, 0 \leq z \leq Ar) \quad (II.24c)$$

- Au disque supérieur froid (cristal):

$$u = 0, v = 0, w = r, \Theta = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = Ar, 0 \leq r \leq r_s) \quad (II.24d)$$

- A la surface libre :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = Ar, r_s \leq r \leq 1) \quad (II.24e)$$

- Au disque inférieur adiabatique :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r \leq 1) \quad (II.24f)$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont visualisées schématiquement sur la [Figure II.2](#) :

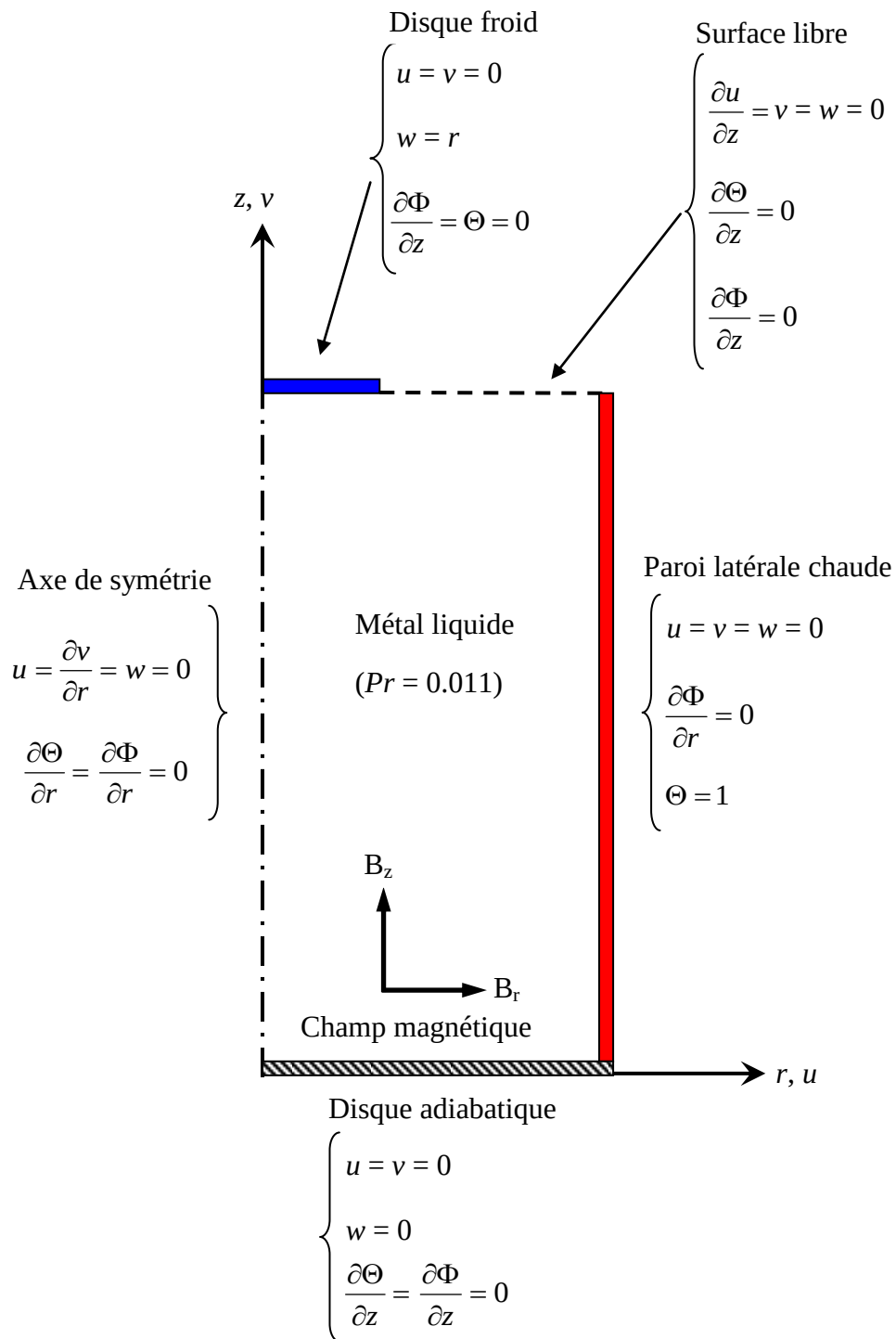


Figure II.2 : Modèle axisymétrique avec les conditions aux limites.

II.2.2 Modèle N°2 : Convection naturelle axisymétrique dans une cavité similaire à celle de Bridgman vertical

La géométrie considérée est schématisée sur la Figure II.3, il s'agit d'une enceinte cylindrique inclinée similaire à celle de Bridgman vertical (Touihri et al. 1999) remplie d'un métal liquide ($Pr = 0.015$), ayant une hauteur H et un rayon R avec un rapport d'aspect $Ar = H/R = 2$. Le cylindre contient deux disques fixes aux extrémités, dont le supérieur est maintenu à une température froide T_f , et l'autre est maintenu à une température chaude T_c ($T_c > T_f$). La paroi latérale du cylindre est supposée adiabatique. L'ensemble est soumis à champ magnétique extérieur et uniforme. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolées. Les sondes de S_1 à S_9 sont utilisées pour capter les instabilités physiques naissant au sein de l'écoulement convectif.

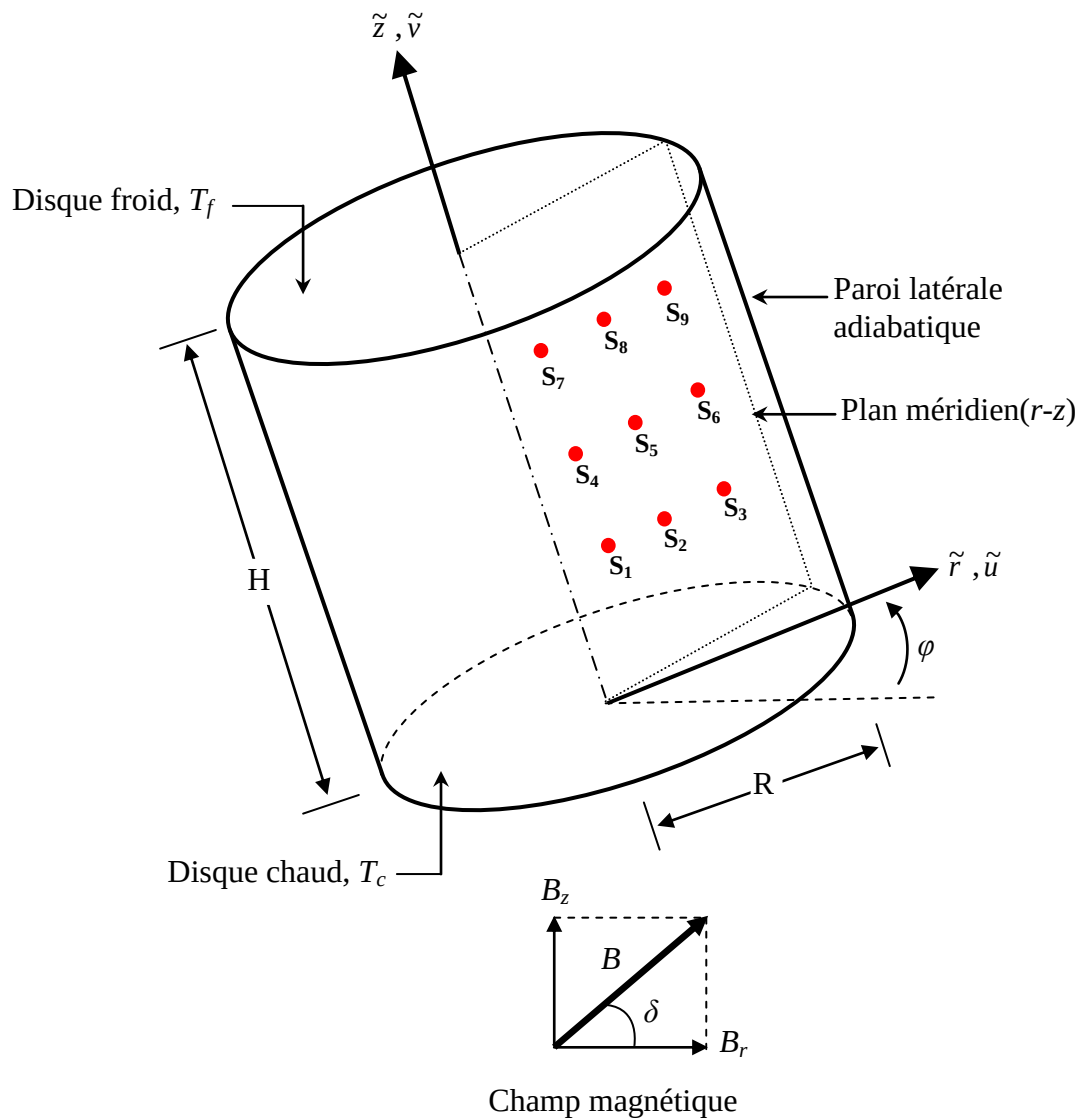


Figure II.3 : Modèle physique de la convection naturelle axisymétrique.

II.2.2.1 Formulation mathématique

En adoptant les hypothèses simplificatrices précédentes, sauf l'écoulement qui devient sans tourbillon (swirl). Les équations de conservation qui régissent cet écoulement en coordonnées cylindriques 2D s'écrivent :

► Equation de conservation de masse

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de la variation de la masse du fluide durant un intervalle de temps élémentaire et des flux massiques traversant la surface de ce volume. Elle est définie par :

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{u})}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} = 0 \quad (\text{II.25})$$

► Equations de quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement sont obtenues par l'application de la deuxième loi de la dynamique à une particule de fluide passant à travers un volume de contrôle infinitésimal. Elles s'écrivent :

► Equation de quantité de mouvement radiale

$$\rho \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{r}} + \mu \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right] + \rho \cdot g\beta(T - T_f) \sin\varphi + \tilde{f}_{Lr} \quad (\text{II.26})$$

► Equation de quantité de mouvement axiale

$$\rho \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{z}} + \mu \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{z}^2} \right] + \rho \cdot g\beta(T - T_f) \cos\varphi + \tilde{f}_{Lz} \quad (\text{II.27})$$

Où $\tilde{u}, \tilde{v}$ représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale et axiale, g est l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide et $\tilde{f}_{Lr}, \tilde{f}_{Lz}$ sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale et axiale.

► Equation d'énergie

L'équation de transport de l'énergie est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation, dans laquelle les termes de dissipations visqueuses sont négligés, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} = -\alpha \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{z}^2} \right] \quad (\text{II.28})$$

Où $\alpha = \lambda / \rho C_p$, est la diffusivité thermique du liquide, λ est sa conductivité thermique et C_p sa chaleur spécifique à pression constante.

II.2.2.2 Formulation adimensionnelle

Pour donner une formulation générale au problème étudié, on introduit dans les équations de conservation précédentes, les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\tilde{r}}{R}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{R} \\ u &= \frac{\tilde{u}}{\nu / R}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\nu / R} \\ \tau &= \frac{t}{(R^2 / \nu)}, \quad P = \frac{\tilde{P}}{\rho(\nu / R)^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \quad \Phi = \frac{\phi}{(\nu B / R^2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.29})$$

Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors :

► Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.30})$$

► Equation de quantité de mouvement radiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] + Gr \cdot \Theta \cdot \sin(\varphi) + F_{Lr} \quad (\text{II.31})$$

► Equation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + Gr \cdot \Theta \cdot \cos(\varphi) + F_{Lz} \quad (\text{II.32})$$

► Equation d'énergie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{Pr} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.33})$$

► Equation de potentiel électrique

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) \sin(\delta) - \frac{\partial w}{\partial z} \cos(\delta) \quad (\text{II.34})$$

Les forces électromagnétiques ainsi que le courant électrique sont:

$$\begin{cases} F_{Lr} = Ha^2 [v \cdot \cos(\delta) \sin(\delta) - u \cdot \sin^2(\delta)] \\ F_{Lz} = Ha^2 [u \cdot \cos(\delta) \sin(\delta) - v \cdot \cos^2(\delta)] \end{cases} \quad (\text{II.35a})$$

II.2.2.3 Conditions initiales et aux limites

On a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$, on aura :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 0, \Phi = 0 \quad (\text{II.36a})$$

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles, pour un instant $\tau > 0$,

- Sur l'axe de symétrie:

$$u = 0, \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 0, 0 \leq z \leq Ar) \quad (\text{II.36b})$$

- A la paroi latérale adiabatique :

$$u = 0, v = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1, 0 \leq z \leq Ar) \quad (\text{II.36c})$$

- Au disque supérieur froid :

$$u = 0, v = 0, \Theta = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = Ar, 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.36d})$$

- Au disque inférieur chaud :

$$u = 0, v = 0, \Theta = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.36e})$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont visualisées schématiquement sur la [Figure II.4](#) :

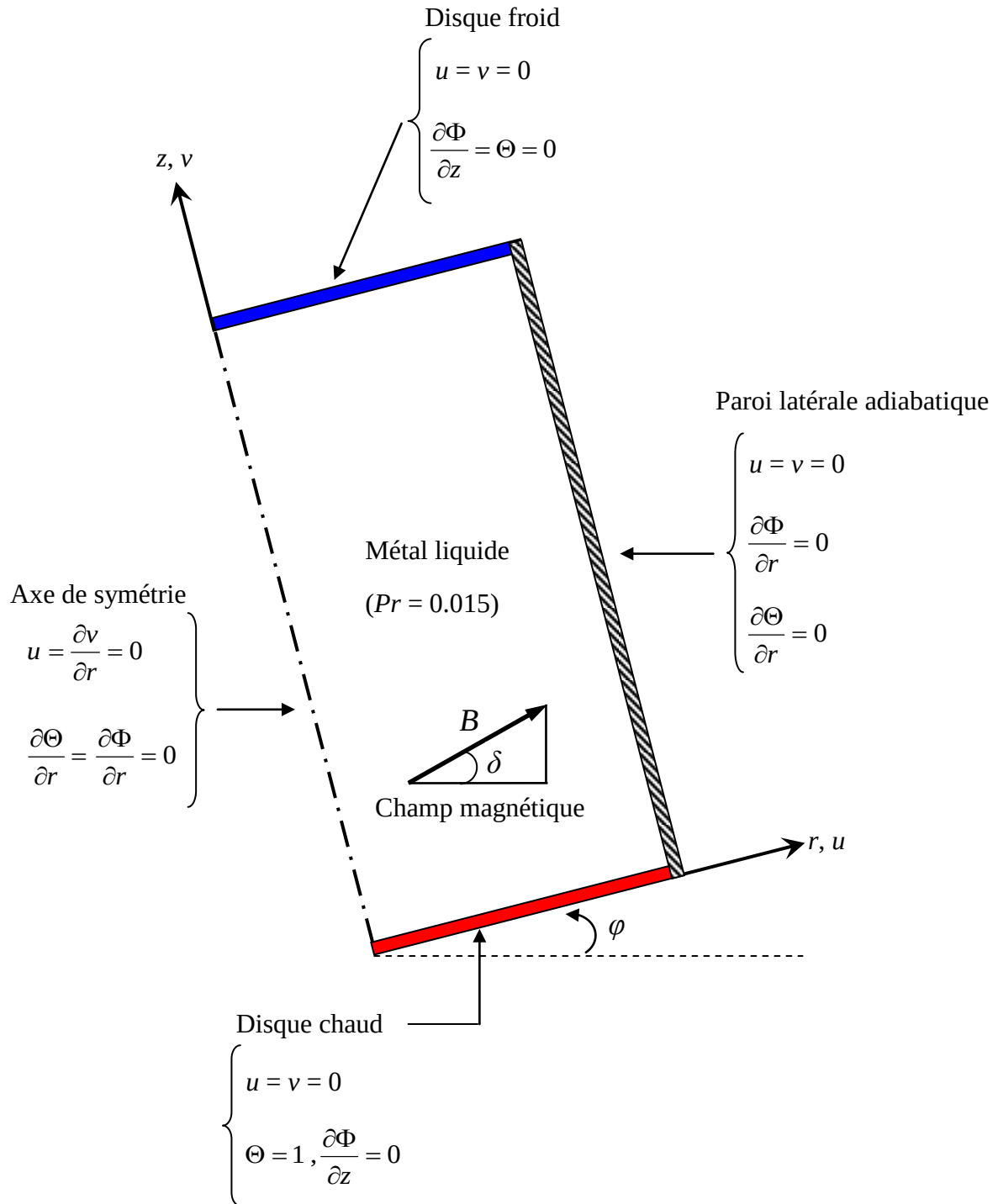


Figure II.4 : Modèle axisymétrique avec les conditions aux limites.

II.2.3 Modèle N°3 : Convection mixte tridimensionnelle dans une cavité de type Czochralski

Le problème physique est présenté sur la [Figure II.5](#), une enceinte cylindrique tridimensionnelle de type Czochralski ([Abbosaglu et Sezai, 2007](#) ; [Wanger et Friedrich, 2004](#)), de rayon R et de hauteur H , ayant un rapport d'aspect $Ar = H/R = 1$. Le cylindre contient un métal liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl (Silicium liquide, $Pr = 0,011$), le disque haut de rayon $\tilde{r}_s$ représente le cristal refroidi par T_f ($T_f < T_c$) et soumis à une rotation (Ω_s). La surface libre et l'interface cristal-fusion sont supposées être plates. La paroi latérale du creuset soit à une température supérieure T_c , et la surface inférieure est supposée adiabatique. Un champ magnétique externe et uniforme est appliqué suivant la direction axiale.

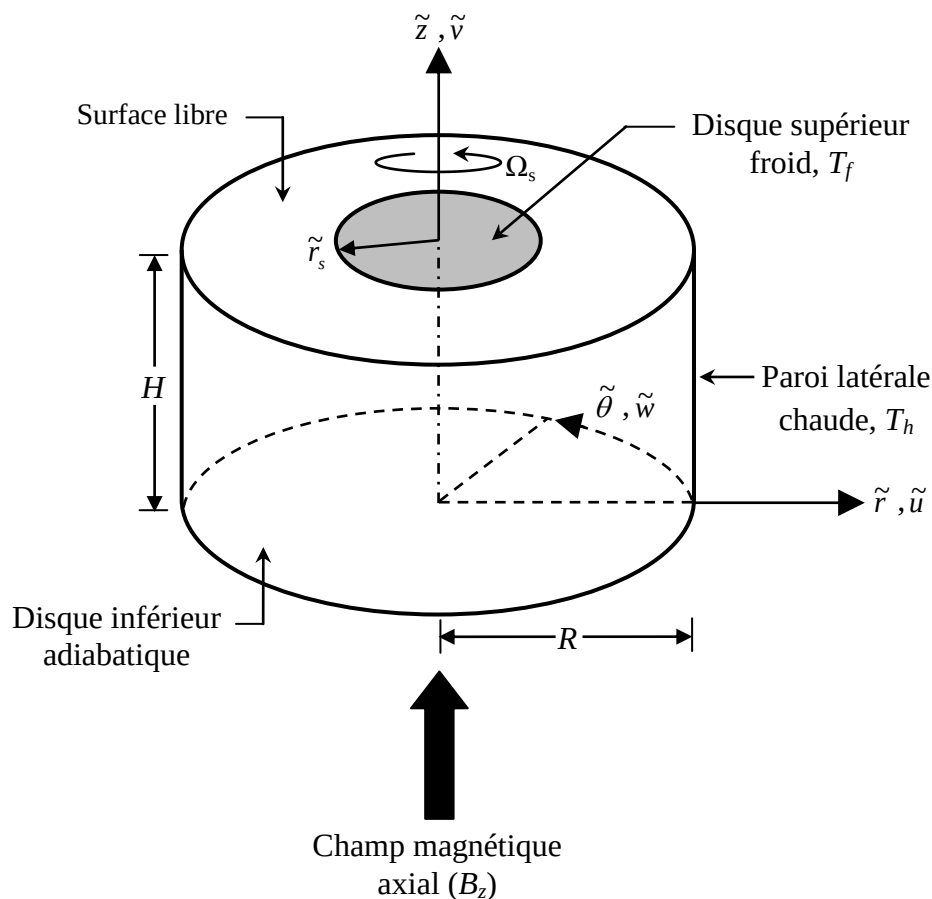


Figure II.5 : Géométrie de troisième problème considéré.

II.2.3.1 Equations de transport tridimensionnelles

On applique les mêmes hypothèses de simplification que l'état de convection mixte, mais on ne tient pas compte l'hypothèse de l'axisymétrie. Pour simplifier les équations du problème étudié, on introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\tilde{r}}{R}, \quad r_s = \frac{\tilde{r}_s}{R}, \quad \theta = \frac{\tilde{\theta}}{R}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{R} \\ u &= \frac{\tilde{u}}{\Omega_s R}, \quad w = \frac{\tilde{w}}{\Omega_s R}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\Omega_s R} \\ \tau &= \frac{t}{(1/\Omega_s)}, \quad P = \frac{\tilde{P}}{\rho(\Omega_s R)^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \quad \Phi = \frac{\phi}{(\Omega_s R^2 B)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.37})$$

Les équations adimensionnelles régissant l'écoulement tridimensionnel rapportées à un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont données par:

► **Equation de continuité**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.38})$$

► **Equation de quantité de mouvement radiale**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial r} + \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] + \frac{Ha^2}{\text{Re}} F_{Lr} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

► **Equation de quantité de mouvement azimutale**

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] + \frac{Ha^2}{\text{Re}} F_{L\theta} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

► **Equation de quantité de mouvement axiale**

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \Theta + \frac{Ha^2}{\text{Re}} F_{Lz} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

► Equation d'énergie

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re.Pr}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.42})$$

► Equation de potentiel électrique

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rw)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{II.43})$$

Les forces électromagnétiques sont:

$$\begin{cases} F_{Lr} = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - u \right) \\ F_{L\theta} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) \\ F_{Lz} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

II.2.3.2 Conditions initiales et aux limites

On a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$, on aura :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 0, \Phi = 0 \quad (\text{II.45a})$$

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement tridimensionnel avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant $\tau > 0$.

- A la paroi latérale chaude :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \Theta = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1, 0 \leq z \leq Ar, 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (\text{II.45b})$$

- Au disque supérieur froid :

$$u = 0, v = 0, w = r, \Theta = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = Ar, 0 \leq r \leq r_s, 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (\text{II.45c})$$

- A la surface libre :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = Ar, r_s \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (\text{II.45d})$$

- Au disque inférieur adiabatique :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi) \quad (\text{II.45e})$$

II.3 Conclusion du chapitre II

Dans ce chapitre, nous avons présenté les trois modèles physiques considérés : convection mixte dans une cavité axisymétrique similaire à celle de Czochralski, convection naturelle dans une cavité axisymétrique similaire à celle de Bridgman vertical, et la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité de type Czochralski. Les systèmes des équations gouvernantes, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites associées sont également présentés en détails. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre non linéaires.

- La résolution analytique de ces équations de conservation est pratiquement impossible.
- Les non-linéarités visibles dans les équations sont principalement à l'origine des difficultés pour obtenir une solution analytique.

Pour cela, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution des équations du modèle mathématique.

Dans le présent travail, la méthode des volumes finis est choisie pour la discrétisation des équations. Les démarches relatives à la technique de résolution, au traitement, et à l'organigramme de résolution sont abordées dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Méthode Numérique de Résolution

III.1 Introduction

Comme nous avons exposé au chapitre précédent, les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires, dont la résolution analytique ne peut être possible au moyen des outils d'analyse mathématique contemporain. Mais une solution numérique peut être possible en transformant ces équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires par une méthode de discrétisation avant de résoudre ce système par des méthodes directes ou par itérations. Pour la présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations du modèle mathématique.

La méthode des volumes finis (VF) emploie la forme intégrale des équations de transport comme son point de départ. Le domaine de solution est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle (VC) contigus et les équations de conservation sont appliquées à chaque volume de contrôle. Au centre de chaque VC se trouve un nœud auquel les quantités variables doivent être calculées. L'interpolation est employée pour exprimer des valeurs variables à la surface du volume en termes des valeurs nodales au centre du VC. Les intégrales de surface et de volume sont approchées en employant des formules de quadrature appropriées. En conséquence, on obtient une équation algébrique pour chaque VC, dans laquelle quelques valeurs nodales voisines apparaissent.

La méthode VF peut accommoder n'importe quel type de maillage, même pour les géométries complexes. Le maillage définit seulement les frontières de volume de contrôle et n'a pas besoin d'être rapporté à un système de coordonnées. L'approche par VF est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approchés ont la signification physique c'est pourquoi cette méthode est choisie.

III.2 Maillage

Pour la première et la deuxième partie nous avons utilisé un code de calcul propre développé en **FORTRAN** traitant le cas axisymétrique. Dans la troisième partie nous avons utilisé une configuration tridimensionnelle et nous avons recours au logiciel **FLUENT**.

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis. Sur la [Figure III.1](#), on montre un ensemble de volumes de contrôle typiques 2D avec la notation que nous emploierons. La surface de VC consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction (e , w , n et s) en ce qui concerne le nœud central (P). E , W , N et S sont les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à l'Est, Ouest, Nord et Sud de celui contenant P . Il est typique d'employer un réseau entrelacé comme indiqué sur la [Figure III.2](#). L'idée est d'évaluer les quantités scalaires: composante de vitesse azimutale w , pression p , température Θ et potentiel électrique j stockées aux centres des volumes finis, mais calculer les deux composantes de la vitesse u et v sur un réseau entrelacé centré autour des faces du volume. La motivation dans l'utilisation d'un tel réseau est d'éviter l'instabilité bien connue « *checkboard* » ([Patankar, 1980](#)) : dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

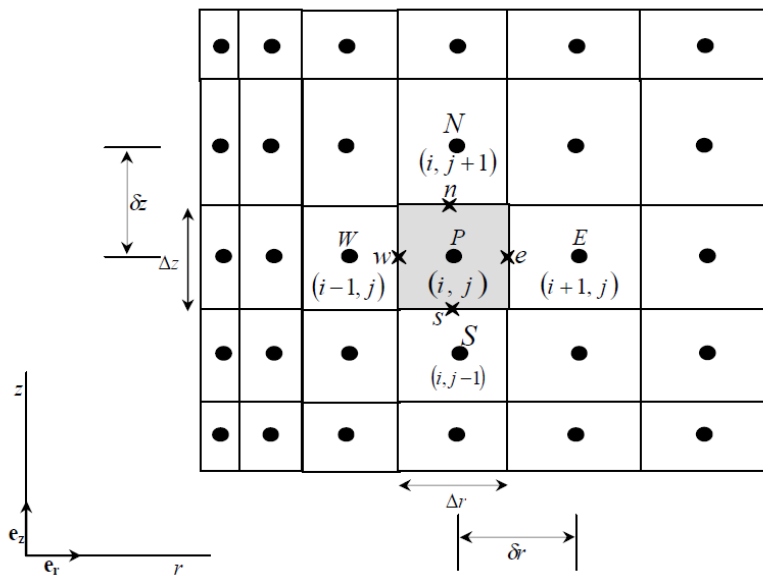


Figure III.1 : Volume de contrôle typique et notation de maillage utilisée pour un maillage 2D.

Dans les écoulements MHD, les couches limites de Hartmann se développent et diffèrent de celles ordinaires présentent en situation purement hydrodynamique. Aux parois perpendiculaires au champ magnétique, les couches limites de Hartmann sont caractérisées par une décroissance exponentielle de la vitesse vers la paroi ([Bessaih et al. 2003 ; Kharicha](#)

et al. 2005). Aux parois parallèles au champ magnétique, une couche appelée couche parallèle existe, et cela engendre d'importants gradients de vitesse et de température. Dans l'optique de comprendre ce qu'il est produit aux couches de Hartmann et parallèles, et en prenant en considération la loi de variation de leurs épaisseurs, on a raffiné le réseau de maillage près des parois selon une progression géométrique de raison 1.05 dans la direction r et 1.05 dans la direction z .

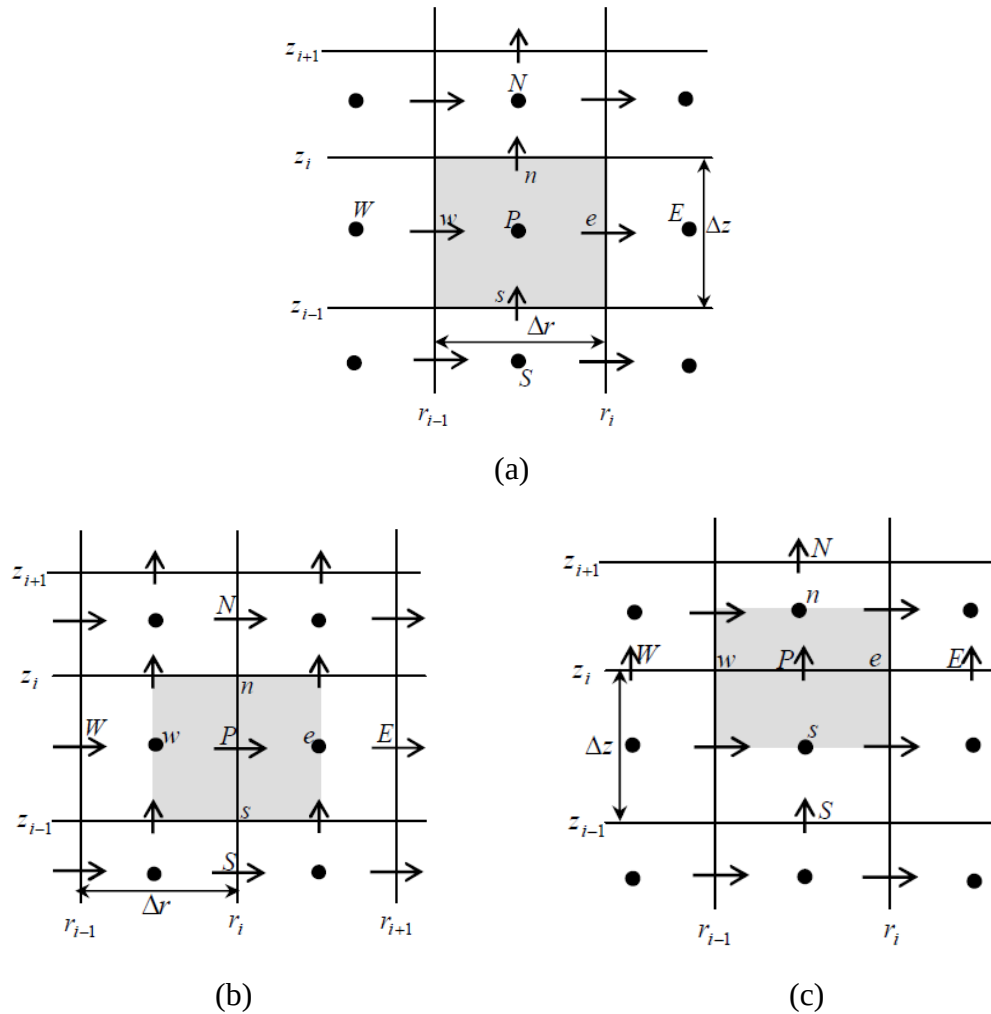


Figure III.2 : Volume de contrôle du maillage entrelacé pour: (a) les quantités scalaires, (b) la composante radiale u , (c) la composante axiale v de vitesse.

Pour le cas de la convection mixte tridimensionnelle, on a dans un premier temps essayé d'utiliser un maillage aux pas d'espace non réguliers, mais les résultats n'étaient pas très satisfaisants. La création de la géométrie ainsi que le maillage s'est fait sous le progiciel **GAMBIT**. Les résultats numériques sont obtenus en utilisant le code de simulation **FLUENT** basé sur la méthode des volumes finis pour la discrétisation des équations du problème.

III.3 Discrétisation implicite de l'équation générale de transport

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la forme suivante de l'équation généralisée de transport d'une variable dépendante ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) + S_{\phi} \quad (\text{III.1})$$

Où :

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z}$: représente le transport par convection de ϕ .

$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right)$: représente la diffusion de ϕ .

S_{ϕ} : représente le terme source.

Le [Tableau III.1](#) rassemble les expressions de la variable dépendante ϕ , du coefficient de diffusion Γ_{ϕ} et du terme source S_{ϕ} concernant les équations adimensionnelles citées au chapitre précédent. Toutefois, pour l'équation du potentiel électrique, elle est du type Poisson bien connu, et représente la loi de comportement pour la quantité ϕ en régime stationnaire, et nous faisons abstraction des termes transitoire et de convection pour l'écrire sous la forme de transport générale ([Equation III.1](#)).

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable dépendante ϕ , on intègre l'équation générale de transport ([Equation III.1](#)) sur un volume fini de contrôle typique de dimensions $\Delta r \times \Delta z$, son volume par unité de profondeur est $\Delta V = r \Delta r \cdot \Delta z$, et on obtient :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (\text{III.2})$$

Les coefficients multiplicatifs (A_i ; $i = P, E, W, N, S$) de la variable dépendante ϕ ainsi que le terme b de l'équation (III.2) sont décrits en détail dans [Patankar \(1980\)](#), et sont rappelés ci- dessous:

$$\begin{cases} A_E = D_e A(P_e) + \max(-F_e, 0) \\ A_W = D_w A(P_w) + \max(F_w, 0) \\ A_N = D_n A(P_n) + \max(-F_n, 0) \\ A_S = D_s A(P_s) + \max(F_s, 0) \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_{P0} \quad (\text{III.4})$$

$$b = \left(\overline{S_\phi} + \frac{\phi^0}{\Delta t} \right) r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z \quad (\text{III.5})$$

Tableau III.1 : Définition de ϕ , Γ_ϕ et S_ϕ des équations gouvernantes pour les problèmes axisymétriques (2D).

Equation		ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	Naturelle	1	0	0
	Mixte		0	0
Quantité de mouvement suivant r	Naturelle	u	1	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + Gr \cdot \Theta \cdot \sin(\varphi) + F_{Lr}$
	Mixte		$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{u}{r^2} + \frac{w^2}{r} + \frac{Ha}{Re^2} F_{Lr}$
Quantité de mouvement suivant z	Naturelle	v	1	$-\frac{\partial P}{\partial z} + Gr \cdot \Theta \cdot \cos(\varphi) + F_{Lz}$
	Mixte		$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{Gr}{Re^2} \cdot \Theta + \frac{Ha}{Re^2} F_{Lz}$
Quantité de mouvement suivant θ	Naturelle	w	0	0
	Mixte		$\frac{1}{Re}$	$\frac{1}{Re} \cdot \frac{w}{r^2} - \frac{uw}{r} + \frac{Ha}{Re^2} F_{L\theta}$
Energie	Naturelle	Θ	$\frac{1}{Pr}$	0
	Mixte		$\frac{1}{Re \cdot Pr}$	0

Avec A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont respectivement les coefficients correspondants aux nœuds central (point P), Est, Ouest, Nord et Sud du volume fini de contrôle et A_{P0} est le coefficient de la variable générale ϕ à calculer au point P en un instant précédent par :

$$A_{P0} = \frac{r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z}{\Delta \tau} \quad (\text{III.6})$$

Et b : appelé terme source, qui englobe tous les termes supposés être constants dans le volume de contrôle. D_e, D_w, D_n, D_s et F_e, F_w, F_n, F_s sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud. Leurs expressions sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta r_e} r_e \cdot \Delta z \\ D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta r_w} r_w \cdot \Delta z \\ D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta z_n} r_n \cdot \Delta r \\ D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta z_s} r_s \cdot \Delta r \end{array} \right. \quad (III.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_e = u_e \cdot r_e \cdot \Delta z \\ F_w = u_w \cdot r_w \cdot \Delta z \\ F_n = v_n \cdot r_p \cdot \Delta r \\ F_s = v_s \cdot r_p \cdot \Delta r \end{array} \right. \quad (III.8)$$

Et P_e, P_w, P_n, P_s sont :

$$P_i = \frac{F_i}{D_i} ; \quad i = e, w, n, s \quad (III.9)$$

Ces nombres appelés nombres du Peclet, désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume fini de contrôle. Les coefficients A_p, A_E, A_W, A_N et A_S dépendent du schéma numérique choisi et du nombre de Peclet.

Dans tous nos calculs, on a utilisé le schéma numérique de différences centrées (Patankar, 1980). Ce choix est motivé par le fait que ce schéma soit le plus usuellement utilisé dans la littérature pour découvrir les instabilités physiques. Ce schéma est donné par la fonction suivante:

$$A(|P_i|) = 1 - 0.5 |P_i| ; \quad i = e, w, n, s \quad (III.10)$$

Cependant la résolution de l'Equation III.1 fait apparaître deux difficultés :

- Les coefficients des équations discrètes dépendent des valeurs des variables, le système n'est donc pas linéaire.
- Les termes source des équations de quantité de mouvement font intervenir le gradient de pression.

III.3.1 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant r

$$A_p(i, j)u^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)u^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)u^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)u^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)u^{n+1}(i, j-1) + b_u(i, j) \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(-F_w, 0) \\ A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(-F_s, 0) \end{cases}$$

$$b_u(i, j) = [P(i, j) - P(i+1, j)]r_c(i).\Delta z(j) + C_1 \left(\frac{w_p^2}{r_c(i)} \right) r_c(i).dr(i).\Delta z(j) + \frac{u^n(i, j)}{\Delta \tau} r_c(i).dr(i).\Delta z(j) \quad (\text{III.12})$$

Où :

$$w_p = \frac{1}{2} [w(i, j) + w(i+1, j)] \quad (\text{III.13})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{r_c(i)dr(i).\Delta z(j)}{\Delta \tau} + \frac{C_2}{Re} \frac{r_c(i).dr(i).\Delta z(j)}{r_c(i)^2} + (F_{Lr})r_c(i).dr(i).\Delta z(j) \quad (\text{III.14})$$

Remarque : pour la convection naturelle on pose $C_1 = 0$ et $C_2 = Re$, et pour la convection mixte on pose $C_1 = 1$ et $C_2 = 1$.

Les flux convectifs :

$$\begin{cases} F_e = 0.5[u(i+1, j) + u(i, j)]r_p(i+1).\Delta z(j) \\ F_w = 0.5[u(i-1, j) + u(i, j)]r_p(i).\Delta z(j) \\ F_n = 0.5[v(i, j) + v(i+1, j)]r_c(i).dr(i) \\ F_s = 0.5[v(i, j-1) + v(i+1, j-1)]r_c(i).dr(i) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Les flux diffusifs :

$$\begin{cases} D_e = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_p(i+1) \cdot \Delta z(j)}{\Delta r(i+1)} \\ D_w = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_p(i) \cdot \Delta z(j)}{\Delta r(i)} \\ D_n = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_c(i) \cdot dr(i)}{dz(j)} \\ D_s = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_c(i) \cdot dr(i)}{dz(j-1)} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

III.3.2 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant θ

$$\begin{aligned} A_p(i, j) w^{n+1}(i, j) &= A_E(i, j) w^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j) w^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j) w^{n+1}(i, j+1) \\ &+ A_S(i, j) w^{n+1}(i, j-1) + b_w(i, j) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(-F_w, 0) \\ A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(-F_s, 0) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

$$b_w(i, j) = - \left(\frac{u_p w^n(i, j)}{r_p(i)} \right) r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot \Delta z(j) + \frac{w^n(i, j)}{\Delta \tau} r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot \Delta z(j) \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} A_p(i, j) &= A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{r_p(i) \Delta r(i) \cdot \Delta z(j)}{\Delta \tau} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot \Delta z(j)}{r_p(i)^2} + (F_{L\theta}) r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot \Delta z(j) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$\text{Où : } u_p = \frac{1}{2} [u(i, j) + u(i-1, j)] \quad (\text{III.21})$$

Les flux convectifs :

$$\begin{cases} F_e = u(i, j) r_c(i) \cdot \Delta z(j) \\ F_w = u(i-1, j) r_c(i-1) \cdot \Delta z(j) \\ F_n = v(i, j) r_p(i) \cdot \Delta r(i) \\ F_s = v(i, j-1) r_p(i) \cdot \Delta r(i) \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Les flux diffusifs :

$$\begin{cases} D_e = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_c(i) \cdot \Delta z(j)}{dr(i)} \\ D_w = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_c(i-1) \cdot \Delta z(j)}{dr(i-1)} \\ D_n = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_p(i) \cdot \Delta r(i)}{dz(j)} \\ D_s = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_p(i) \cdot \Delta r(i)}{dz(j-1)} \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

III.3.3 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement suivant z

$$A_p(i, j) v^{n+1}(i, j) = A_E(i, j) v^{n+1}(i+1, j) + A_w(i, j) v^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j) v^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j) v^{n+1}(i, j-1) + b_v(i, j) \quad (\text{III.24})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_w(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(-F_w, 0) \\ A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(-F_s, 0) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

$$b_v(i, j) = [P(i, j) - P(i, j+1)] r_p(i) \cdot \Delta r(i) + C_2^2 \cdot \text{Ri} \left[\frac{(\Theta(i, j) + \Theta(i, j+1))}{2} \right] r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot dz(j) + \frac{v^n(i, j)}{\Delta \tau} r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot dZ(j) \quad (\text{III.26})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_w(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{r_p(i) \Delta r(i) \cdot dz(j)}{\Delta \tau} + (F_{Lz}) \cdot r_p(i) \cdot \Delta r(i) \cdot \Delta z(j) \quad (\text{III.27})$$

Les flux convectifs :

$$\begin{cases} F_e = 0.5[u(i, j) + u(i, j+1)] r_c(i) \cdot dz(j) \\ F_w = 0.5[u(i-1, j) + u(i-1, j+1)] r_c(i-1) \cdot dz(j) \\ F_n = 0.5[v(i, j+1) + v(i, j)] r_p(i) \cdot \Delta r(i) \\ F_s = 0.5[v(i, j-1) + v(i, j)] r_p(i) \cdot \Delta r(i) \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Les flux diffusifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_c(i).dz(j)}{dR(i)} \\ D_w = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_c(i-1).dz(j)}{dr(i-1)} \\ D_n = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_p(i).\Delta r(i)}{\Delta z(j+1)} \\ D_s = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{r_p(i).\Delta r(i)}{\Delta z(j)} \end{array} \right. \quad (\text{III.29})$$

III.3.4 Discrétisation de l'équation d'énergie

$$A_p(i, j)\Theta^{n+1}(i, j) = A_E(i, j)\Theta^{n+1}(i+1, j) + A_W(i, j)\Theta^{n+1}(i-1, j) + A_N(i, j)\Theta^{n+1}(i, j+1) + A_S(i, j)\Theta^{n+1}(i, j-1) + b_\Theta(i, j) \quad (\text{III.30})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_E(i, j) = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0) \\ A_W(i, j) = D_w A(|P_w|) + \max(-F_w, 0) \\ A_N(i, j) = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0) \\ A_S(i, j) = D_s A(|P_s|) + \max(-F_s, 0) \end{array} \right. \quad (\text{III.31})$$

$$b_\Theta(i, j) = \frac{\Theta^n(i, j)}{\Delta \tau} r_p(i).\Delta r(i).\Delta z(j) \quad (\text{III.32})$$

$$A_p(i, j) = A_E(i, j) + A_W(i, j) + A_N(i, j) + A_S(i, j) + \frac{r_p(i)\Delta r(i).\Delta z(j)}{\Delta \tau} \quad (\text{III.33})$$

Les flux convectifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_e = u(i, j)r_c(i).\Delta z(j) \\ F_w = u(i-1, j)r_c(i-1).\Delta z(j) \\ F_n = v(i, j)r_p(i).\Delta r(i) \\ F_s = v(i, j-1)r_p(i).\Delta r(i) \end{array} \right. \quad (\text{III.34})$$

Les flux diffusifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e = \left(\frac{1}{\text{Re.Pr}} \right) \frac{r_c(i).\Delta z(j)}{dR(i)} \\ D_w = \left(\frac{1}{\text{Re.Pr}} \right) \frac{r_c(i-1).\Delta z(j)}{dr(i-1)} \\ D_n = \left(\frac{1}{\text{Re.Pr}} \right) \frac{r_p(i).\Delta r(i)}{dz(j)} \\ D_s = \left(\frac{1}{\text{Re.Pr}} \right) \frac{r_p(i).\Delta r(i)}{dz(j-1)} \end{array} \right. \quad (\text{III.35})$$

III.4 Algorithmes de résolution

La résolution du système d'équations (III.11), (III.17), (III.24) et (III.30) n'est pas facile, car les coefficients A_E , A_W , A_N , A_S et A_P des équations discrétisées de quantité de mouvement suivant r et z dépendent respectivement des variables u et v (des équations non linéaires), et les termes sources des équations discrétisées de quantité de mouvement contiennent un gradient de pression, or jusqu'à présent nous n'avons pas une équation qui gère cette variable.

La résolution est donc possible grâce à un Algorithme développé par Patankar (1980) dit « Algorithme **SIMPLER** ». Les abréviations des premières lettres des mots suivants : **S**emi – **I**mplicit – **M**ethod – for **P**ressure – **L**inked – **E**quation – **R**evised.

On a fait appel à l'Algorithme SIMPLER pour construire les coefficients formant les systèmes des équations algébriques. Puis on les résout par l'Algorithme **TDMA** (Tridiagonal Matrix Algorithm), qui est plus approprié à ce genre de systèmes algébriques.

III.4.1 Algorithme SIMPLER

Cet Algorithme permet d'obtenir une bonne convergence en pression, nous présentons l'Algorithme SIMPLER qu'on utilise dans les calculs, mais on a ajouté les étapes 6,7 et 8 qui sont spécifique à notre problème à résoudre:

- 1)- Donner une estimation du champ de vitesse.
- 2)- Calculer les Pseudo-vitesses $\hat{u}$ et $\hat{v}$ donnée par les équations :

$$\hat{u}_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i u_i + b_e^u)}{A_e} \quad (\text{III.36a})$$

$$\hat{u}_w = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i v_i + b_w^u)}{A_w} \quad (\text{III. 36b})$$

$$\hat{u}_n = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i u_i + b_n^v)}{A_n} \quad (\text{III. 36c})$$

$$\hat{u}_e = \sum_{i=E,W,N,S} \frac{(A_i v_i + b_s^v)}{A_s} \quad (\text{III. 36d})$$

Ici b_e^u, b_w^u, b_n^v et b_s^v sont les termes de source ne contenant pas les gradients de pression.

Ainsi les vitesses s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e^u P \quad (\text{III. 37a})$$

$$u_w = \hat{u}_w + d_w^u P \quad (\text{III. 37b})$$

$$u_n = \hat{u}_n + d_n^v P \quad (\text{III. 37c})$$

$$u_s = \hat{u}_s + d_s^v P \quad (\text{III. 37d})$$

Où $d_i P$; $i = E, W, N, S$ sont les termes de pression déjà omis dans les Equations III. 36a-d.

3)- Résoudre l'équation de pression résultante en substituant les Equations III. 37a-d dans l'équation discrète de conservation de la masse cette équation sera :

$$A_p P = \sum_{i=E,W,N,S} ((A_i)_p P_i + b_p) \quad (\text{III.38})$$

4)- Considérer le champ de pression comme estimation P^* , et l'utiliser pour résoudre en u^* , v^* comme des estimées.

5)- Corriger le champ de vitesse, mais ne pas corriger la pression.

6)- Résoudre l'équation de swirl, et obtenir w .

7)- Résoudre l'équation de l'énergie, pour obtenir Θ .

8)- Résoudre l'équation de potentiel électrique Φ en utilisant les valeurs de w déjà obtenues.

9)- Retourner à l'étape 2, avec le nouveau champ de vitesse jusqu'à convergence.

L'organigramme suivant (Figure III.3) montre les étapes entreprises pour programmer la méthode numérique de résolution et simuler le phénomène étudié.

III.4.2 Algorithme TDMA

Quand des équations aux dérivées partielles sont discrétisées, par exemple, en utilisant la méthode des volumes finis, les équations résultantes algébriques ont une structure particulièrement simple. Chaque équation contient seulement les variables à son propre nœud et ses voisins immédiats gauches et droites :

$$A_w^i \phi_{i-1} + A_p^i \phi_i + A_e^i \phi_{i+1} = Q_i \quad (\text{III.39})$$

La matrice $\mathbf{A}$ correspondante à un système a des termes non nuls seulement sur sa diagonale principale (représenté par A_p) et les diagonales immédiatement ci-dessus et au-dessous de cela (représentées par A_e et A_w , respectivement). Une telle matrice est appelée tridiagonale.

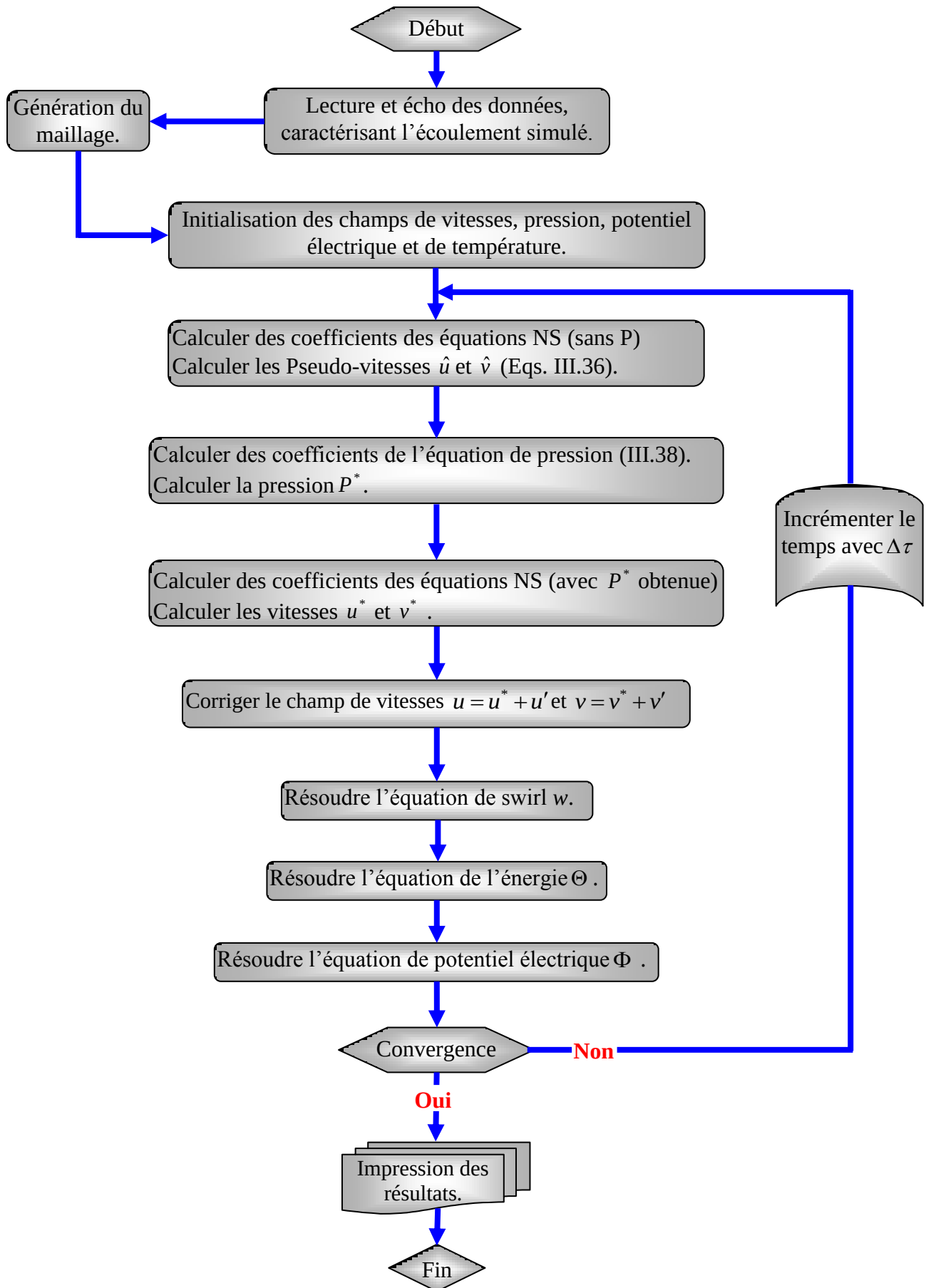


Figure III.3: Algorithme de calcul.

Les systèmes contenant matrices tridiagonales sont particulièrement faciles à résoudre. L'élimination de Gauss est particulièrement facile pour des systèmes tridiagonals: seulement un élément doit être éliminé de chaque rangée pendant le processus d'élimination en avant. Quand l'Algorithme a atteint la $i^{\text{ème}}$ rangée, seulement A_p^i doit être modifiée et sa nouvelle valeur devient :

$$A_p^i = A_p^i - \frac{A_w^i A_E^{i-1}}{A_p^{i-1}} \quad (\text{III.40})$$

Cette équation doit être comprise dans le sens de programmation, c-à-d le résultat est stocké en place de la valeur de A_p^i originale. Le terme de contrainte est aussi modifié :

$$Q_i^* = Q_i - \frac{A_w^i Q_{i-1}^*}{A_p^{i-1}} \quad (\text{III.41})$$

La substitution en arrière de la méthode est aussi simple. La $i^{\text{ème}}$ variable est calculée de :

$$\phi_i = \frac{Q_i^* - A_E^i \phi_{i+1}}{A_p^i} \quad (\text{III.42})$$

Dans le but de résoudre le système d'équations algébriques bidimensionnelles résultant on effectuera un double balayage qui consiste à déterminer les valeurs de la variable ϕ sur chaque ligne du domaine de calcul indépendamment des autres lignes, en conséquence, le système se transforme en un système unidimensionnel, et on considère les termes des autres dimensions comme des constantes en les ajoutant au terme source de la dimension dont on veut résoudre son système. Le système d'équations en vertu du balayage est constitué d'une matrice tridiagonale qui peut être résolu par l'Algorithme de TDMA qu'on a présenté les directives et les équations dans la présente section.

III.5 Critères de convergence

Les calculs sont effectués avec continuation jusqu'à la satisfaction des critères de convergence qui consiste à déterminer l'écart entre les nombres de Nusselt moyens aux deux parois (froide $\overline{Nu_f}$ et chaude $\overline{Nu_c}$), et signaler l'arrêt des calculs si cet écart ne dépassera pas une valeur de tolérance de 10^{-5}

$$|\overline{Nu_f} - \overline{Nu_c}| \leq 10^{-5}$$

III.6 Description du code de calcul Fluent

Fluent est un code de simulation numérique conçu pour résoudre des problèmes complexes liés au transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement dans des géométries bidimensionnelles et tridimensionnelles complexes, valables pour les écoulements stationnaires ou instationnaires, laminaires, ou turbulents. Il est largement utilisé pour des applications industrielles dans divers domaines notamment l'étude de l'aérodynamique autour d'une aile d'avion, la combustion dans un four, les colonnes à bulles pour plates-formes pétrolières, la circulation sanguine, la fabrication des semi-conducteurs, et les stations d'épuration.

Il traite aussi les problèmes de convection naturelle, forcée, mixte et thermocapillaire, avec ou sans changement de phase. Le logiciel Fluent est basé sur la méthode de modélisation numérique connue pour sa puissance de calcul et sa facilité de mise en œuvre, c'est la méthode des volumes finis.

III.6.1 Implémentation sous Fluent

La simulation numérique est réalisée sur les deux logiciels Gambit et Fluent qui permettent de réaliser des simulations bidimensionnelles ou tridimensionnelles en mécanique des fluides allant de la construction du maillage sur Gambit à la résolution des équations de conservation de masse, de chaleur et de quantité de mouvement et au traitement des résultats obtenus avec **Tecplot 10**, **Surfer 9** et **Origine 6**.

Ces logiciels ont déjà conquis l'industrie automobile, aéronautique et spatiale en raison des interfaces graphiques puissantes et des options disponibles, permettant de réaliser des simulations quasiment sur tous types de géométries même les plus complexes (fixes ou mobiles) associées à des maillage fixes ou adaptatifs et avec des modèles physiques variés (multiphasiques, turbulents, combustion, solidification ou fusion, etc.).

Fluent est un code de calcul **CFD** (Computational Fluid Dynamics) capable de simuler les problèmes des écoulements de fluide.

Gambit est un logiciel utilisé pour construire la géométrie, générer le maillage, et définir les frontières appropriées au système considéré (interfaces, parois rigides, fluide, etc.). Pour résoudre les problèmes thermiques ou dynamiques en mécanique des fluides, par les logiciels Fluent et Gambit, on doit d'une manière générale suivre les étapes montrées sur la [Figure III.4](#).

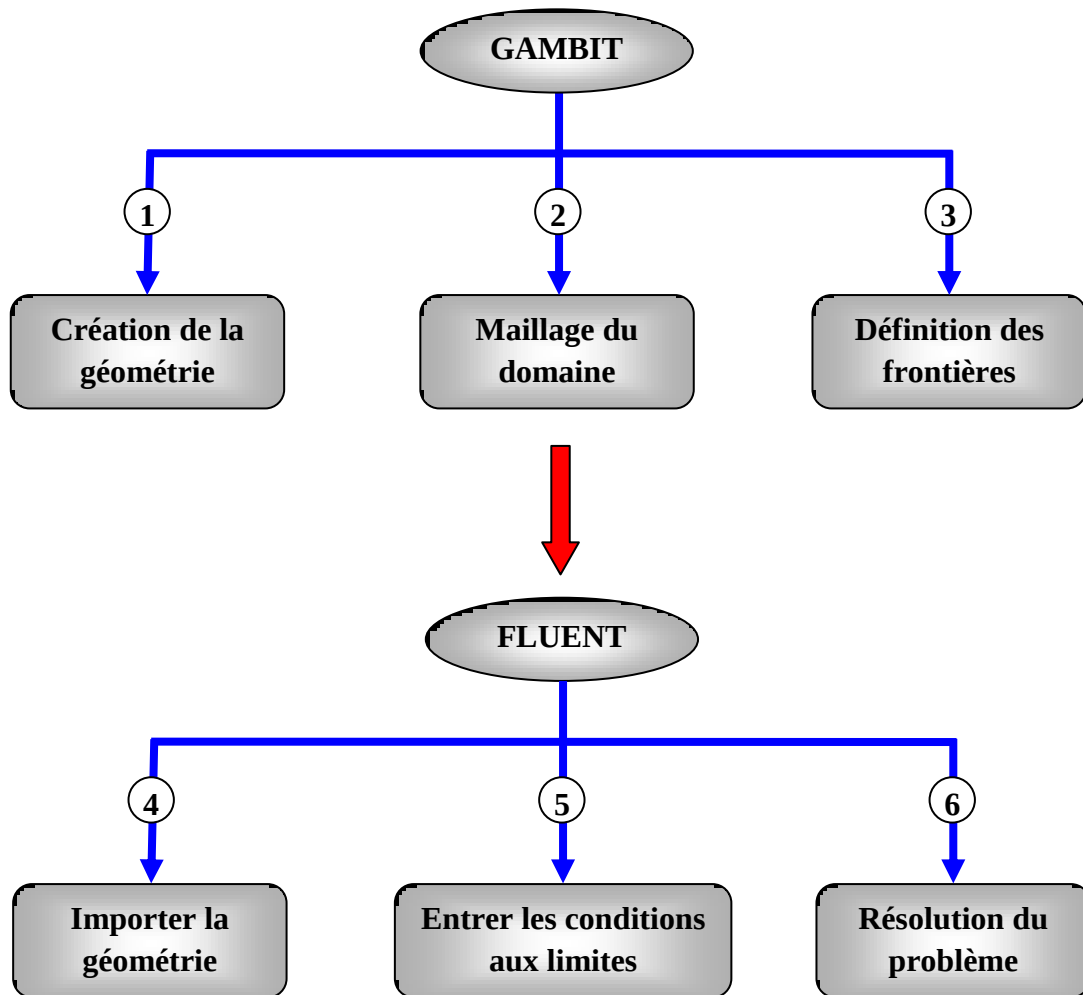


Figure III.4 : Schéma des étapes utilisées dans la simulation par Fluent.

Fluent est utilisé pour modéliser les écoulements des fluides et les transferts thermiques dans et autour des géométries complexes. Il peut résoudre des problèmes d'écoulement avec des mailles non structurées, qui peuvent être produites pour des géométries complexes, avec une facilité relative. Les types de mailles possibles sont des mailles en deux dimensions, triangulaires ou quadratiques, ou en trois dimensions tétraédriques, hexaédriques ou pyramidales ([Help Fluent](#)), et les mailles hybrides ou mixtes.

Fluent supporte le langage de programmation C, et utilise pleinement la flexibilité et la puissance offertes par ce langage (allocation de mémoire dynamique). En outre, il utilise une architecture qui permet une exécution simple ou parallèle en tant que plusieurs processus simultanés sur le même poste de travail ou sur des postes séparés pour une meilleure rapidité et donc efficacité.

Fluent s'utilise à travers une interface graphique. L'utilisateur avancé peut adapter ou augmenter, selon les besoins, l'interface en écrivant des macros et des fonctions de menu (UDF) afin d'automatiser certaines procédures.

Fluent peut modéliser les phénomènes suivants:

- Écoulement dans des géométries 2D ou 3D en utilisant des maillages adaptatifs non structurés.
- Écoulement incompressible ou compressible.
- Analyse stationnaire ou instationnaire.
- Écoulement non- visqueux, laminaire ou turbulent.
- Écoulement Newtonien ou non-Newtonien.
- Transferts de chaleur par convection, naturelle ou forcée.
- Transfert de chaleur couplé conduction/convection.
- Transfert de chaleur par rayonnement.
- Repère de référence inertielle (stationnaire) ou non- inertielle (en rotation).
- Multiples repères de référence en mouvement, incluant des interfaces glissantes et des plans de mélange.
- Mélange et réaction d'espèces chimiques, incluant des modèles de combustion et des réactions de surface.
- Source volumique arbitraire de chaleur, masse, quantité de mouvement, turbulence, et espèces chimiques.
- Calculs de trajectoires Lagrangiennes pour une phase dispersée de particules/gouttes/bulles, incluant le couplage avec la phase continue.
- Écoulement à travers les matériaux poreux.
- Modèles pour turbine 1D/échangeur de chaleur.
- Écoulements diphasique, incluant la cavitation.
- Écoulements à surface libre avec surfaces complexes.

III.6.2 Procédure sous Fluent

Au chargement de la géométrie sous Fluent, il s'agit, en premier lieu, de mettre la géométrie à l'échelle appropriée : mètres, centimètres, millimètres ou pouces. Ce logiciel permet aussi de réordonner les nœuds, les surfaces et les cellules en mémoire, de telle façon

qu'ils aient la même disposition dans la grille et dans la mémoire. Ceci permet d'améliorer les performances du calcul et l'efficacité de l'accès à la mémoire.

III.6.2.1 Précision des calculs

Selon la complexité du problème traité, deux versions sont disponibles sous Fluent, à savoir, « simple précision » et « double précision » ([Help Fluent](#)).

Dans le mode « double précision », les nombres à virgule flottante sont représentés en utilisant 64 bits, alors que le mode « simple précision » utilise une représentation à 32 bits. Le premier mode demande plus d'espace mémoire. Cependant, vu la complexité du phénomène de la croissance cristalline, la présence de différents modes de convection (convection naturelle, convection thermocapillaire de Marangoni, convection forcée,..) et le couplage des équations gouvernantes, on a opté pour le mode « double précision ».

III.6.2.2 Choix du solveur

FLUENT nous permettons de choisir l'une des deux méthodes numériques suivantes :

- Une méthode du solveur basée sur la pression.
- Une méthode de solveur basée sur la densité.

L'approche basée sur la pression a été développée pour les écoulements incompressibles à faible débit, alors que l'approche basée sur la densité a été principalement utilisée pour les écoulements compressibles à grande vitesse ([Help Fluent](#)).

Dans les deux méthodes le champ de vitesse est obtenu à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement. Dans l'approche basée sur la densité l'équation de continuité est utilisée pour obtenir le champ de densité alors que le champ de pression est déterminé à partir de l'équation d'état.

Dans l'approche basée sur la pression, le champ de pression est obtenu en résolvant l'équation de la pression ou l'équation de correction de la pression qui est obtenue par manipulation des équations de la continuité et de la conservation de la quantité de mouvement.

En utilisant l'une de ces méthodes, FLUENT permet de résoudre les équations intégrales de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et d'autres scalaires tels que la turbulence et des espèces chimiques. Dans les deux cas, une technique basée sur le volume de contrôle est utilisée qui se compose de:

- Division du domaine en volumes de contrôle.
- L'intégration des équations gouvernantes sur les volumes de contrôle individuellement pour construire des équations algébriques des variables dépendantes discrètes inconnues, tels que la vitesse, la pression et la température.
- Linéarisation des équations discrétisées et la résolution du système d'équations linéaires pour donner les nouvelles valeurs des variables dépendantes.

Dans notre cas, on a choisi l'approche numérique basée sur la pression car le fluide utilisé est un fluide incompressible. L'approche basée sur la pression utilise un Algorithme de résolution où les équations gouvernantes sont résolues de façon séquentielle (séparées les unes des autres). Puisque ces équations sont non linéaires et couplées, la boucle de résolution doit être itérative afin d'obtenir une solution convergente numériquement.

Cet Algorithme est efficace, puisque les équations discrétisées ne doivent pas être stockées en même temps dans la mémoire. Toutefois, la convergence de la solution est relativement lente, dans la mesure où les équations sont résolues de manière découplée (help Fluent).

Avec l'Algorithme «segregated», chaque itération comprend les étapes illustrées à la [Figure III.5](#) et décrites comme suite:

1. Mise à jour des propriétés du fluide (densité, viscosité, chaleur spécifique, etc...).
2. Résoudre les équations de la quantité de mouvement, l'une après l'autre, en utilisant les valeurs récemment mises à jour de la pression et des flux massiques aux faces.
3. Résoudre l'équation de correction de la pression en utilisant le champ de vitesse obtenu et le flux massique.
4. Corriger les flux massiques des faces, la pression et le champ de vitesse en utilisant la correction de pression obtenue à partir de l'étape 3.
5. Résoudre les équations des scalaires supplémentaires de l'énergie.
6. Mettre à jour les termes sources résultants de l'interaction entre les différentes phases.
7. Départ pour la convergence des équations.

Ces étapes sont répétées jusqu'à ce que les critères de convergence soient remplis.

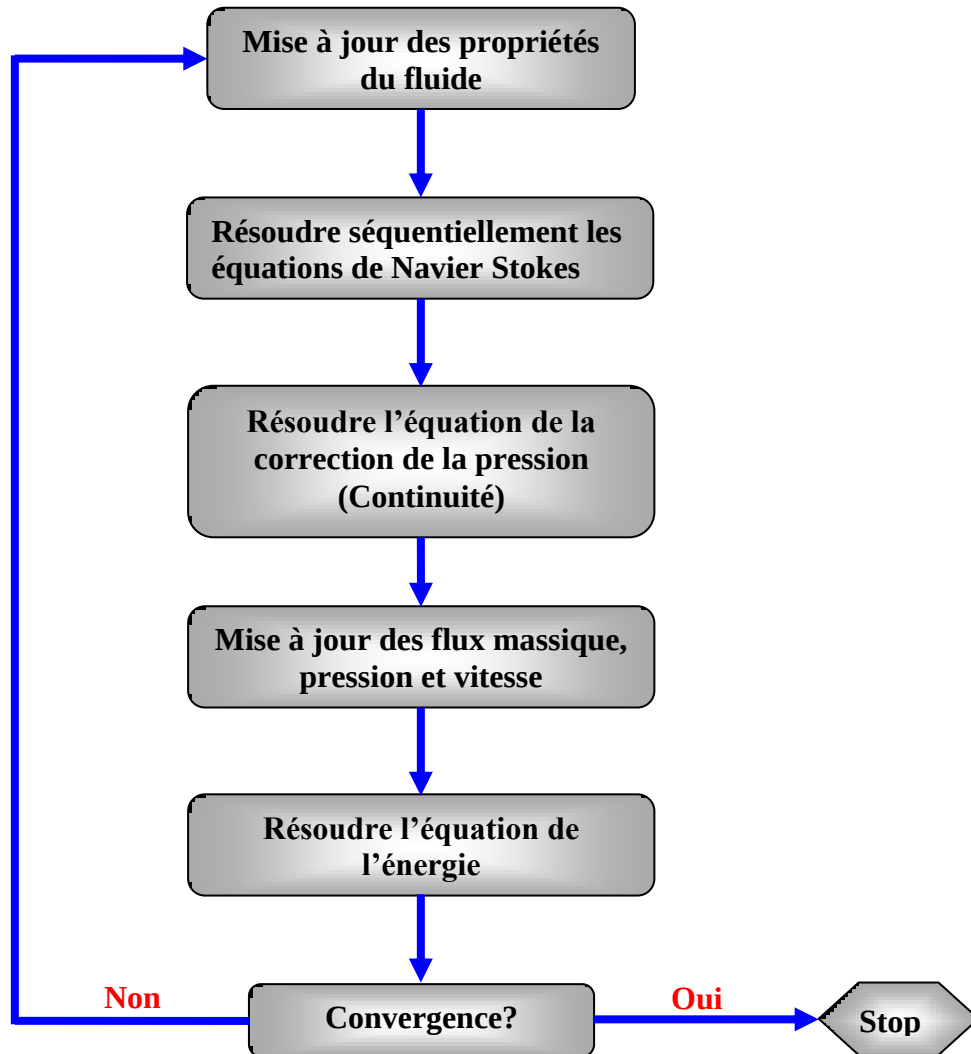


Figure III.5 : Organigramme de l'approche « segregated » basée sur la Pression.

III.6.2.3 Schémas de discrétisation

Par défaut, FLUENT emmagasine les valeurs des variables calculées dans les centres des cellules qui constituent le volume de contrôle. Toutefois, les valeurs de ces variables sont nécessaires aux faces des cellules, elles doivent être interpolées à partir des valeurs aux centres des cellules. Ceci est accompli en utilisant les schémas de discrétisation. Plusieurs schémas d'interpolation d'ordre de précision 1, 2 ou éventuellement 3 sont disponibles dans le logiciel Fluent. En [Figure III.6](#) on donne quelques exemples.

Les schémas de discrétisation sont appliqués aux termes convectifs des équations gouvernantes, tandis que pour les termes visqueux, une discrétisation de second ordre est

appliquée automatiquement pour avoir plus de précision. Pour avoir une meilleure précision on a utilisé le schéma du second ordre UPWIND.

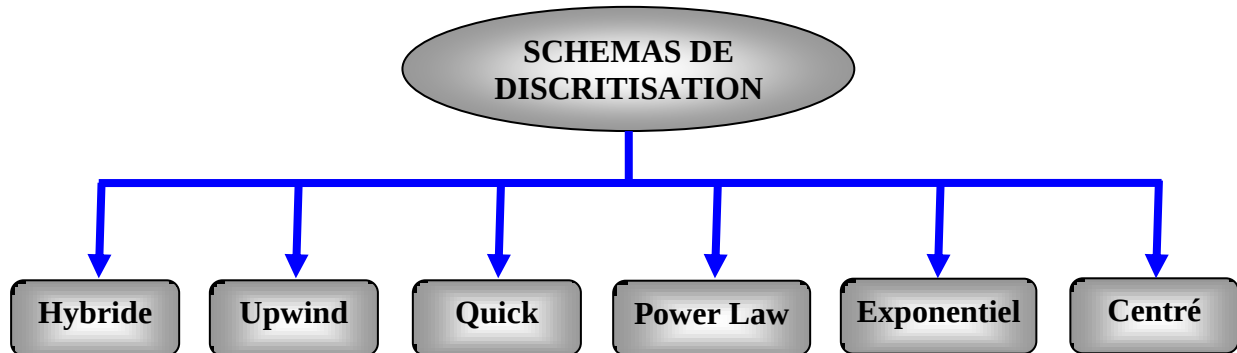


Figure III.6 : Schémas de discrétisation utilisés par Fluent.

III.6.2.4 Schémas d'interpolation de la pression

Ces schémas sont utilisés par Fluent pour calculer les valeurs de la pression aux faces à partir de celles qui sont estimées aux centres des cellules. Sur la [Figure III.7](#), on donne les différents schémas utilisés par le code de calcul Fluent.

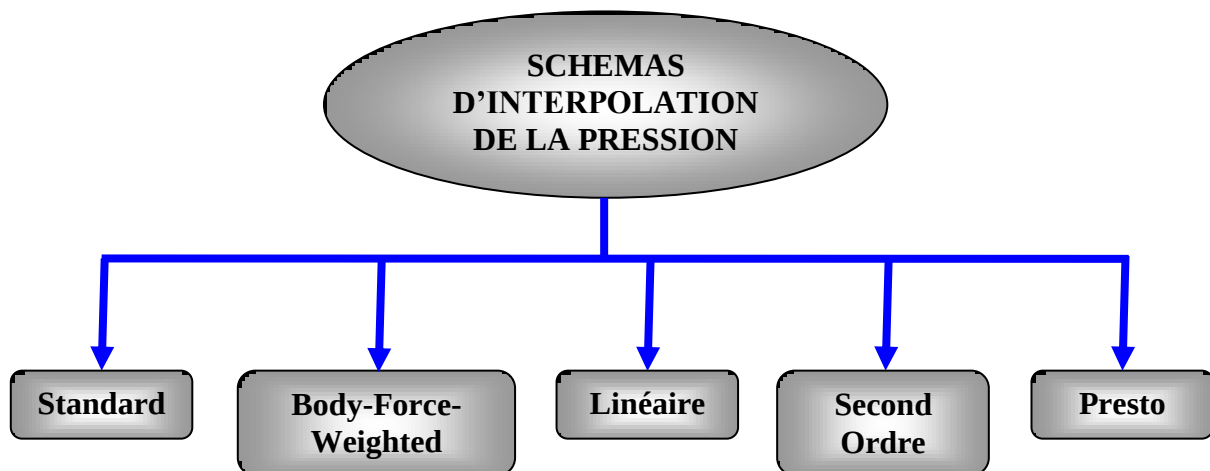


Figure III.7: Schémas d'interpolation de la Pression utilisés par Fluent.

- **Le schéma Standard:** Lorsque le gradient de pression entre les cellules est faible, le schéma « Standard » peut être utilisé. Quand il y a des sauts ou d'importantes variations, le profil de pression a un gradient élevé aux faces des cellules, et ne peuvent être interpolées à l'aide de ce schéma. Les écoulements pour lesquels le schéma standard d'interpolation de la pression ne s'applique pas sont les écoulements induits par des forces

de volumes importantes comme dans les écoulements fortement rotationnels, dans la convection naturelle à grands nombres de Rayleigh, etc.

D'autres méthodes sont disponibles pour les cas où le schéma standard n'est pas valide:

- **Le schéma linéaire** : calcule la pression de la face comme la moyenne des valeurs de la pression dans les cellules adjacentes.
- **Le Schéma second ordre** : est beaucoup plus précis que les deux premiers schémas : standard et linéaire, mais il n'est pas applicable pour les écoulements discontinus avec des gradients de pression dû à la présence d'un milieu poreux dans le domaine ou l'utilisation d'un modèle pour les écoulements multiphasiques.
- **Le schéma force de volume pondéré ou body-force-weighted** : calcule la pression de la face en supposant que la différence entre la pression et les forces de volume est constante. Ce schéma fonctionne bien si les forces de volume sont connues a priori dans les équations du mouvement telles qu'en régime de convection naturelle et les écoulements rotationnels.
- **Le schéma PRESTO** (PREssure STaggering Option) : est approprié pour les écoulements fortement tourbillonnaires à grande vitesse de rotation ou les écoulements dans des domaines fortement courbés. C'est le schéma qu'on a utilisé dans nos calculs vu ses avantages par rapport aux autres schémas.

III.6.2.5 Méthodes de couplage pression-vitesse

Quatre types d'Algorithmes distincts sont donnés par Fluent pour le solveur segregated : **SIMPLE**, **SIMPLEC**, **PISO**, et **FSM** valables pour les écoulements transitoires utilisant l'option Non-Iterative Time Advancement option (**NITA**).

Pour les calculs stationnaires les méthodes **SIMPLE** (Semi Implicit Method for a Pressure Linked Equation) ou **SIMPLEC** (SIMPLE Consistent) peuvent être utilisées. Cette dernière méthode (**SIMPLEC**) se distingue de la première (**SIMPLE**) par le fait qu'on peut lui assigner un facteur de relaxation (correction) de pression proche de 1. Ceci accélère la convergence dans la plupart des cas mais peut conduire à des instabilités de la solution.

PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) peut également être utile pour les écoulements stationnaire et transitoire ou pour les maillages contenant des cellules très obliques « highly skewed meshes », elle fait partie des Algorithmes de la famille **SIMPLE**.

III.6.2.6 Facteurs de relaxation

Dans les méthodes itératives, pour trouver la solution des systèmes d'équations algébriques linéaires, et lors de l'utilisation des schémas itératifs permettant d'appréhender les non-linéarités, on cherche souvent à ralentir ou accélérer, d'une itération à l'autre, la variation de la variable considérée. Ces processus sont appelés respectivement : Sous-relaxation (ralentissement) et Sur-relaxation (accélération).

- **La Sur-relaxation** est souvent utilisée avec la méthode de Gauss-Seidel, la méthode obtenue s'appelle alors SOR (Successive Over-Relaxation) et très peu utilisée avec la méthode ligne par ligne.

- **La Sous-relaxation** est très pratique pour les problèmes non linéaires car elle permet d'éviter la divergence des méthodes itératives utilisées pour la résolution. Afin de contrôler et de réduire le changement produit durant chaque itération d'une variable de l'écoulement, le logiciel Fluent permet d'agir sur les facteurs de sous-relaxations assignées à un nombre de variables.

Le code de calcul Fluent offre les meilleures valeurs des facteurs de relaxation pour une large gamme d'écoulements. Néanmoins, si on remarque qu'au cours du calcul les résidus commencent à s'amplifier, il est préférable de réduire ces derniers. Par contre, si on observe une convergence très lente, on pourra les augmenter prudemment, surtout le facteur de relaxation lié à l'équation de continuité.

Dans le [Tableau III.2](#) on donne les facteurs de sous-relaxation utilisés au cours des calculs.

Tableau III.2 : Facteurs de sous relaxation.

Variable	Facteur de sous relaxation
Densité	1
Pression	0.3
Force de volume	1
Quantité de mouvement	0.7

III.6.2.7 Intégration du module MHD sous Fluent

Pour introduire le champ magnétique dans le code Fluent, nous utilisons le module MHD. Module qui peut être chargé dans le logiciel à travers l'Interface Utilisateur-Texte ([Text User Interface, TUI](#)).

- Le processus se commence par l'importation du maillage construit dans Gambit, dont la lecture d'un « case » déjà fait, ensuite on écrit : **Define/Models/Addon-Module**. Le Fluent affiche l'activation du module ajouté par la liste au-dessous :

```
FLUENT Addon Modules:
  0. none
  1. MHD Model
  2. Fiber Model
  3. PEM Fuel Cell Model
  4. SOFC Fuel Cell Model
  5. Population Balance Model
Enter Module Number: [1] 1
```

- Ensuite, nous sélectionnons le modèle MHD, en entrant le numéro du module : module **1**.
- Pendant le processus de chargement, un message **Module Addon: mhd2.1 ... loaded!** est affiché à la fin du processus, ce message confirme l'intégration de MHD dans le Fluent.
- Le modèle MHD de Fluent nous a permet d'analyser le comportement de l'écoulement du fluide conducteur à l'électricité sous l'influence d'un champ électromagnétique constant (DC) ou oscillant (AC).
- Le champ magnétique imposé de l'extérieur peut être généré soit en sélectionnant simplement les fonctions intégrées, ou en utilisant un fichier de données qui est fourni par l'utilisateur programmé en C⁺⁺ (**User-Defined Function**).

III.7 Conclusion du chapitre III

Dans ce Chapitre, nous avons présenté la méthode numérique des volumes finis d'une façon détaillée pour la discrétisation des équations gouvernantes du problème axisymétrique, tel que :

- l'Algorithme SIMPLER de résolution du couplage vitesse-pression
- l'Algorithme TDMA pour la résolution des systèmes d'équations résultant de la discrétisation.
- Les schémas de discrétisation : schéma d'Euler du premier ordre, pour la discrétisation des termes temporels, et le schéma des différences centrées pour la discrétisation des termes spatiaux (convectifs et diffusifs).
- L'Algorithme du programme de calcul qui récapitule les différents boucles et séquences de calcul numérique.

Nous avons également présenté en bref le code commercial Fluent utilisé pour la résolution du problème tridimensionnelle.

Les résultats obtenus de la simulation seront présentés et discutés dans les chapitres [IV](#), [V](#) et [VI](#).

Chapitre IV

Convection Mixte Axisymétrique dans une Cavité Cylindrique Similaire à Celle de Czochralski

IV.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la présentation et la discussion des résultats concernant la convection mixte axisymétrique dans une cavité cylindrique similaire à celle de Czochralski. Les résultats figurant dans ce qui suit, sont obtenus pour un rapport d'aspect $Ar = 2$ et $Pr = 0.011$ (c'est le cas de Silicium liquide), et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre (des lignes de courant, iso-valeurs des vitesses, des isothermes ...etc.). Ce chapitre est divisé en deux parties : la première partie concerne la convection mixte en régime stationnaire avec et sans champ magnétique, appliqué en deux directions axiale et radiale séparément.

La deuxième partie présente le comportement de l'écoulement en régime instationnaire avec et sans champ magnétique axial et radial de diverses intensités via la variation du nombre de Hartmann Ha ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50).

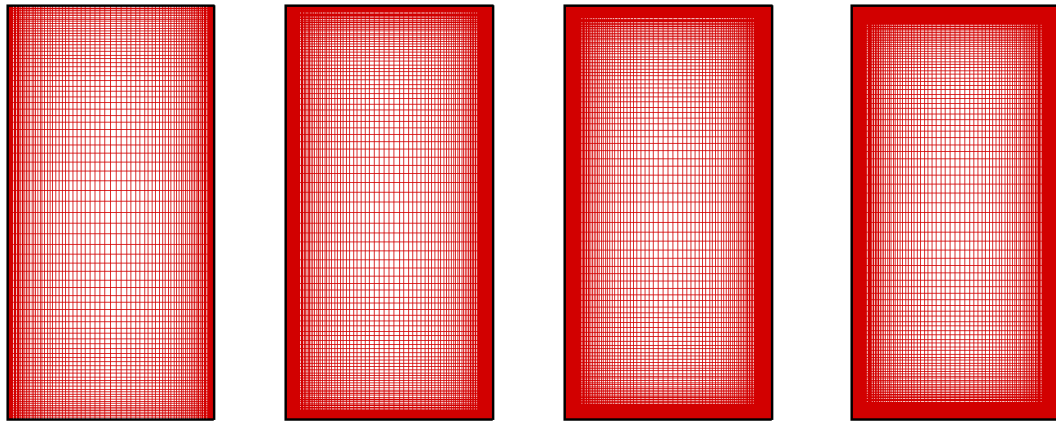
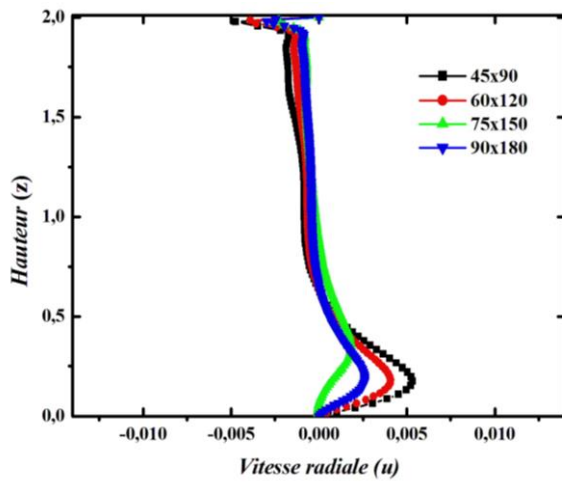
Dans le régime instationnaire, l'ultime objectif est la détermination des nombres de Reynolds critiques Re_{cr} (la transition d'un régime stable ou stationnaire à un régime oscillatoire) et leurs fréquences critiques correspondantes F_{cr} .

IV.2 Effet du maillage sur les solutions numériques

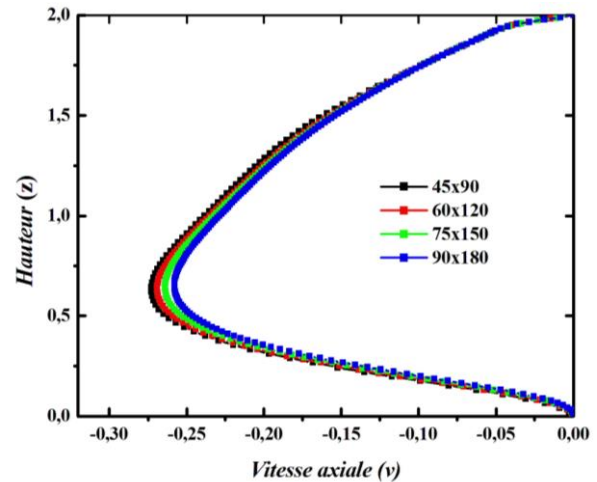
Avant de commencer les calculs paramétriques, l'indépendance de la solution numérique vis-à-vis de la grille de maillage utilisée, est vérifiée pour des valeurs représentatives de paramètres. Alors, plusieurs maillages de différentes intensités sont testés : 45×90 , 60×120 , 75×150 et 90×180 (Figure IV.1). L'existence des forts gradients de vitesses et de température près des parois de la cavité, nous incite à utiliser un maillage raffiné dans ces zones. Les résultats obtenus sont illustrés dans les Figures IV.2-3.

L'examen de ces courbes nous permet de conclure que c'est assurément les grilles (75×150) et (90×180) nous permettent d'avoir une meilleure présentation de la nature de l'écoulement. Alors, le choix du maillage définitif est dirigé vers la grille (75×150) ; parce

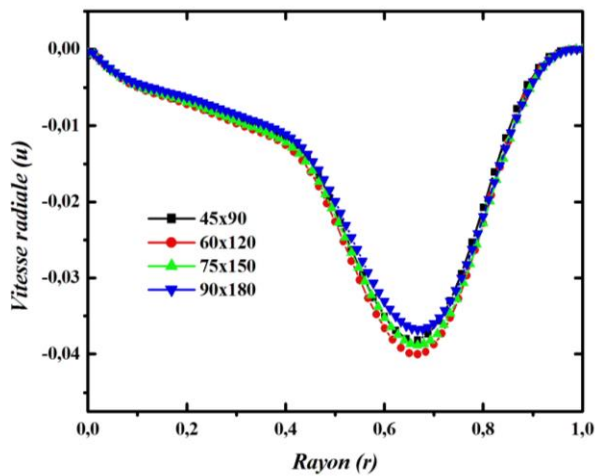
que le temps d'exécution du programme pour la grille (90×180) est plus grand que la grille choisie.

(a) Maillage : 45×90 (b) Maillage : 60×120 (c) Maillage : 75×150 (d) Maillage : 90×180 **Figure IV.1 :** Différentes densités de maillage.

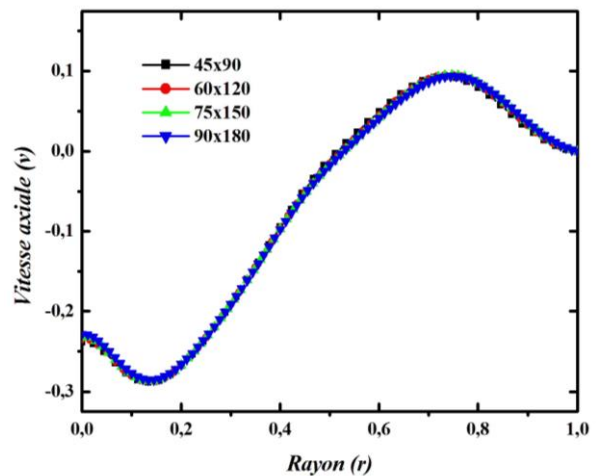
(a)



(b)

Figure IV.2 : Distributions de vitesse radiale (a) et axiale (b) obtenues pour différentes densités de maillage à $r = 0$, et pour $Ri = 0.1$.

(a)



(b)

Figure IV.3 : Distributions de vitesse radiale (a) et axiale (b) obtenues pour différentes densités de maillage à $z = 1$, et pour $Ri = 0.1$.

IV.3 Validation et comparaison des résultats

Dans le but d'attribuer plus de confiance aux résultats de nos simulations numériques trouvées par notre propre code de calcul, on a établi quelques comparaisons quantitatives et qualitatives avec d'autres investigations expérimentales et numériques disponibles dans la littérature.

La première comparaison est faite pour la distribution de la vitesse radiale u et azimutale w le long de $r = 0.60$ avec les mesures expérimentales obtenues par [Michelson \(1986\)](#). L'auteur a utilisé la technique LDA (Laser Doppler Anemometry) pour déterminer les distributions des vitesses radiales et azimutales dans une cavité cylindrique, dont le disque supérieur est en rotation, et cela pour $Re = 1800$ et $Ar = 1$ ([Figures IV.4a-b](#)). On constate aisément que les valeurs calculées sont en bon accord avec les mesures dans le champ d'écoulement entier à l'exception de la région près du fond de la cavité ; où des légères déviations peuvent être trouvées. La non-conformité peut-il en raison des incertitudes dans les mesures.

La deuxième comparaison est faite avec des mesures expérimentales obtenues par [Karcher et al. \(2002\)](#), concernant la convection naturelle d'un métal liquide ($Pr = 0.0203$) dans une cavité similaire à celle de Czochralski avec un rapport d'aspect $Ar = (R/H) = 4.125$. Les [Figures IV.5a-b](#), présentent la distribution de la vitesse radiale u à $r = 0.25$ et à $r = 0.375$ en absence du champ magnétique ($Ha = 0$). On constate aisément que les valeurs calculées sont en bon accord avec les mesures dans le champ d'écoulement entier à l'exception de la région $0 \leq z \leq 0.6$ où des légères déviations peuvent être trouvées. Une autre comparaison a été faite pour ce travail avec différents auteurs, [Kakarantzas et al. \(2009\)](#) et [Mahfoud et Bessaïh \(2012\)](#). La [Figure IV.6](#), présente la distribution de la température maximale en présence du champ magnétique, aussi on trouve un bon accord avec ces travaux.

Finalement, une comparaison est faite avec le travail numérique de [Bessaïh et al. \(2003\)](#). Ils ont étudié la stabilité de l'écoulement tournante par champ magnétique dans une cavité cylindrique de rapport d'aspect $Ar = 1.5$ remplie par un métal liquide ($Pr = 0.015$), avec le disque inférieur en rotation. Le champ des lignes de courant est présenté sur les [Figures IV.7a-b](#), tel que (a) est notre travail et (b) le travail de [Bessaïh et al. \(2003\)](#). On peut constater à partir de ces figures que nos résultats numériques sont en excellent accord avec ce travail. En conclusion, toutes ces comparaisons valident notre code de calcul en l'attribuant la confiance désirée pour l'utilisation.

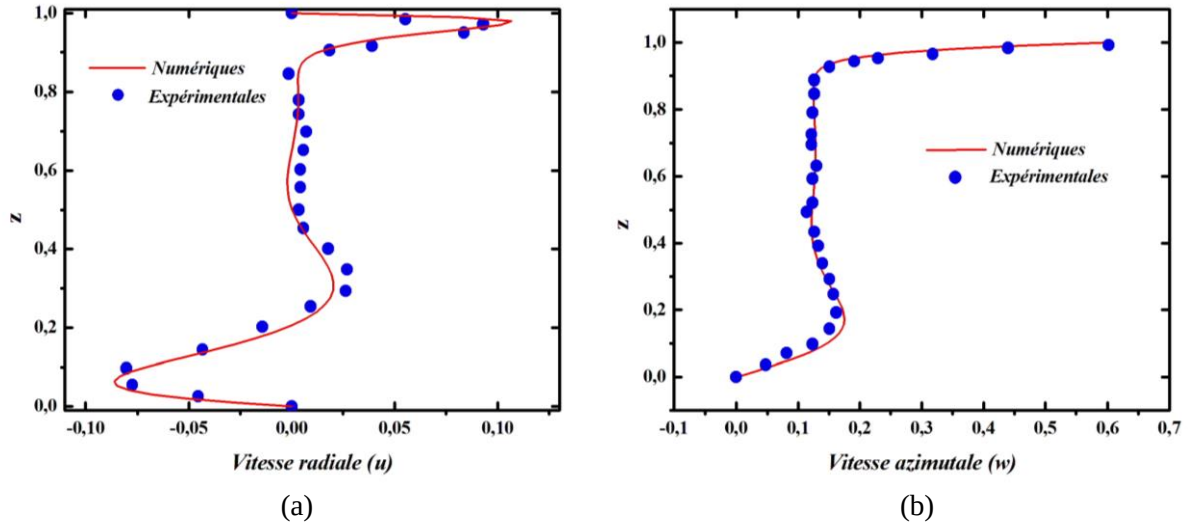


Figure IV.4 : Distribution de la vitesse radiale (a) et azimutale (b) à $r = 0.6$: comparaison avec des données expérimentales de [Michelson \(1986\)](#) pour $Re = 1800$ et $Ar = 1$.

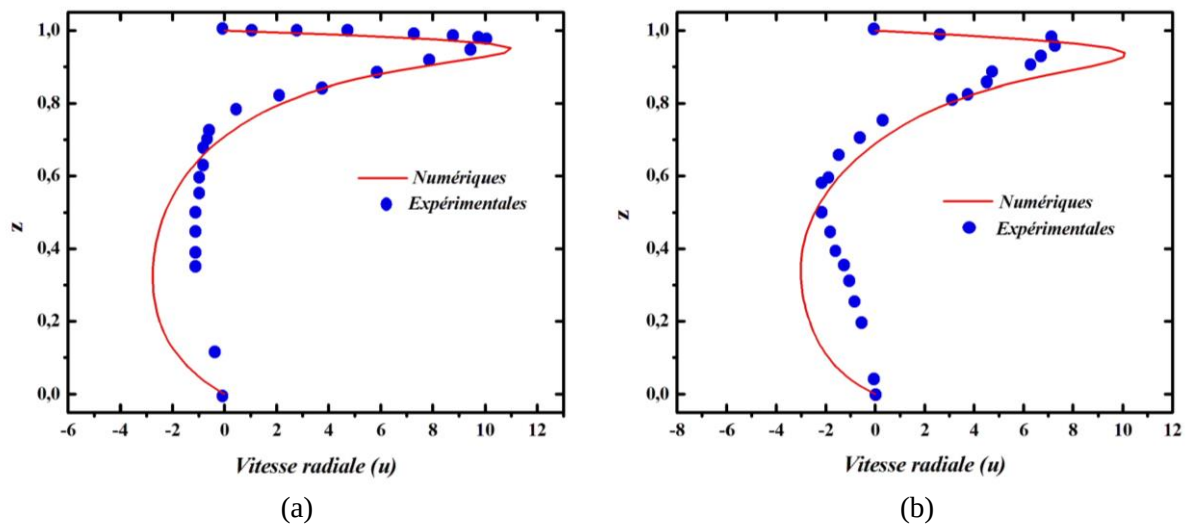


Figure IV.5 : Distribution de la vitesse radiale à $r = 0.25$ (a) et à $r = 0.375$ (b) : comparaison avec des données expérimentales de [Karcher et al. \(2002\)](#) pour $Ra = 0.825 \times 10^6$.

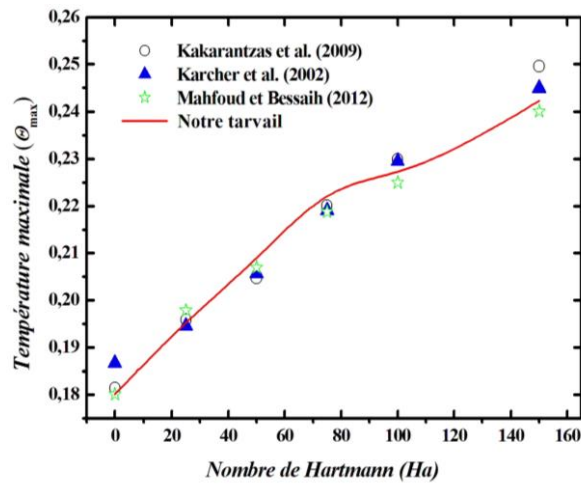


Figure IV.6 : Distribution de la température maximale pour différents nombres de Hartmann : comparaison avec des données expérimentales de [Karcher et al. \(2002\)](#).

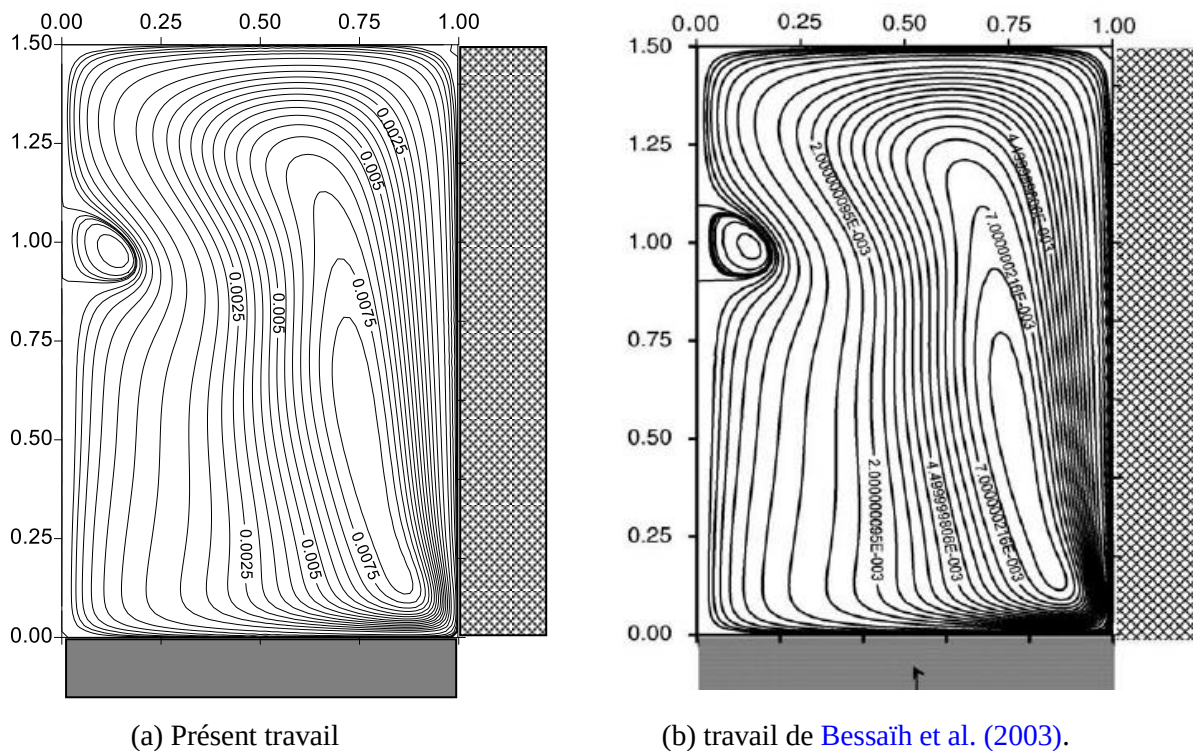


Figure IV.7 : Comparaison du champ des lignes de courant: (a) présent travail, (b) travail numérique de [Bessaïh et al. \(2003\)](#).

IV.4 Présentations des résultats

Dans cette partie, nous allons s'intéresser de voir l'effet de quelques paramètres adimensionnels sur le champ hydrodynamique et thermique lors de la convection mixte de Silicium liquide ($Pr = 0.011$) contenu dans une cavité cylindrique du rapport de forme $Ar = 2$. Parmi ces paramètres, on a choisi le nombre de Richardson variant dans l'intervalle ($0.1 \leq Ri \leq 2$), pour balayer les trois types de convection naturelle, forcée, et mixte. Le deuxième paramètre choisi est le rapport d'aspect, variant dans l'intervalle ($1/3 \leq Ar \leq 3$).

Ensuite, on s'intéresse à la détermination des instabilités physiques naissant au sein de l'écoulement de convection mixte. Alors la détermination des instabilités physiques se réduit à la détermination d'un nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement sous-jacent, à partir duquel l'écoulement devient instable (stationnaire).

De point de vue des systèmes dynamiques, quand un système rentre dans l'instabilité, il présente au début un caractère oscillatoire ou périodique, puis en raison du phénomène de bifurcation ce système deviendra apériodique, et enfin il rentre dans le chaos (ou la turbulence). Les nombres de Reynolds caractérisant les écoulements périodiques sont des nombres critiques, et par suite leurs correspondent des fréquences d'oscillation des particules fluides. Ces fréquences F_{cr} peuvent être aussi considérées critiques. Numériquement, pour détecter les instabilités physiques on effectuera une succession de calculs numériques, en augmentant le nombre de Reynolds dans des intervalles prédéterminés (à partir des faibles valeurs). Pour les valeurs du nombre de Hartmann Ha comprises dans l'intervalle (0, 10, 20, 30, 40, 50), et chaque nombre de Richardson Ri dans l'intervalle (0, 0.5, 1, 1.5, 2), on va trouver le nombre de Reynolds critique Re_{cr} marquant le début des instabilités.

Dans le but de vérifier que l'instabilité trouvée pour un pas du temps adimensionnel $\Delta\tau$ donné, est réellement physique, on recalcule la solution obtenue avec les mêmes paramètres de l'écoulement mais cette fois-ci avec un pas du temps de $\Delta\tau / 2$. Cette méthode éliminera bien les instabilités d'origines numériques qui peuvent naître durant les calculs. Si les amplitudes des oscillations restent les mêmes dans tous les sondes après réduction du pas de temps, cette instabilité sera physique. Avec un maillage de $n_r \times n_z = 75 \times 150$, les sondes utilisées pour capter les instabilités physiques sont illustrées sur la [Figure IV.8](#). Il y a neuf sondes : $S_1(15,20)$, $S_2(35,20)$, $S_3(60,20)$, $S_4(15,75)$, $S_5(35,75)$, $S_6(60,75)$, $S_7(15,130)$, $S_8(35,130)$ et $S_9(60,130)$, qui enregistrent simultanément l'évolution temporelle des trois composantes de vitesse adimensionnelles (u , v , w), la température adimensionnelle Θ et les valeurs du débit (fonctions de courant Ψ) dans le plan méridien ([Tableau IV.1](#)).

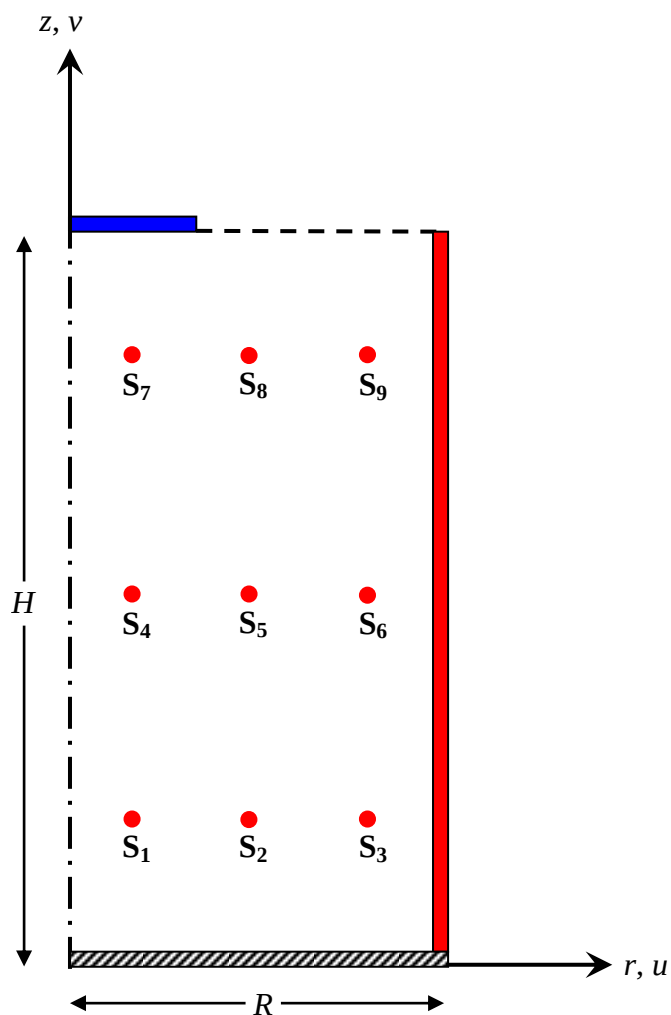


Figure IV.8 : Schéma présentant les positions des sondes utilisées dans les calculs numériques.

Tableau IV.1 : Coordonnées physiques et logiques des sondes pour le maillage ($n_r \times n_z = 75 \times 150$).

Sondes			S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉
Coordonnées	Physiques	r	0.200	0.466	0.800	0.200	0.466	0.800	0.200	0.466	0.800
		z	0.266	0.266	0.266	1.000	1.000	1.000	1.733	1.733	1.733
	Logiques		(15,20)	(35,20)	(60,20)	(15,75)	(35,75)	(60,75)	(15,130)	(35,130)	(60,130)

IV.5 Solution stationnaire

Pour $Ri = 0.5$, nous avons présenté sur la [Figure IV.9](#), les variations temporelles de la température adimensionnelle Θ en trois points S_1 , S_4 et S_7 , choisies arbitrairement dans la cavité (voir le [Tableau IV.1](#)). Nous constatons bien que ces courbes commencent par des faibles oscillations initiales amortissantes dues principalement aux conditions initiales qui sont prises $u = v = \Theta = 0$ au début du calcul, puis poursuivent par une partie qui tend vers une limite asymptotique et se stabilise après un temps adimensionnel de $\tau > 0.1$ ($\Theta = \text{constante}$). Alors que le régime d'écoulement est permanent. Notons que les conditions initiales choisies ont une influence sur le temps de l'atténuation de la limite asymptotique.

IV.5.1 Effet du nombre de Richardson

Pour voir l'effet du nombre de Richardson dans le régime stationnaire sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur nous avons fixé le nombre de Reynolds à $Re = 1500$ et le rapport d'aspect de la cavité à $Ar = 2$, et on fait varier le nombre de Richardson de $Ri = 0.1$, 0.5 , 1 , 1.5 à 2 , pour balayer tous les types de convection, forcée ($Ri < 1$), mixte ($Ri = 1$), et naturelle ($Ri > 1$).

Sur la [Figure IV.10](#), nous avons présenté dans le plan (r, z) , les lignes de courant pour différents nombres de Richardson. On remarque que pour $Ri \leq 0.5$, l'écoulement se manifeste monocellulaire par un vortex appelé (vortex primaire) tournant dans le sens contraire d'une aiguille d'une montre est situé au bas de la cavité ($0.5 \leq r \leq 0.8$). Ce phénomène est créé du fait que le fluide à côté de la paroi chaude reçoit de la chaleur et devient plus léger et ascendant du fait de la poussée d'Archimède, à proximité de la paroi froide (cristal) en rotation, le fluide se refroidit et devient plus lourd puis il descendant le long d'axe de symétrie.

Pour $Ri > 0.5$ on remarque la naissance d'une nouvelle cellule située à ($0.6 \leq r \leq 1$) qui tourne au sens inverse de la cellule principale. Ce processus peut être expliqué par l'augmentation de la vitesse, qui mène les particules à diminuer leurs parcours, et permet d'apparition des petites zones de recirculation. Au cours de l'augmentation du nombre de Richardson à $Ri = 2$, où la convection naturelle est dominée, cette cellule se décompose à des petites cellules, parce que la vitesse des particules de fluide dans la cavité augmente. Ceci est bien clair sur les [Figures IV.14a-b](#), qui présentent la variation de la vitesse radiale et axiale, respectivement, dans la cavité pour différents nombres de Richardson. On voit également que

l'augmentation du nombre de Richardson provoque l'augmentation de vitesse de particules fluides, ce qui montre que l'augmentation de ce nombre déstabilise l'écoulement convectif.

En suivant les lignes isothermes dans le plan (r, z) présenté sur les [Figures IV.11a-e](#), nous constatons bien que les forts gradients de température se manifestent dans la région sous-cristal avec la dominance du régime de transfert par conduction. En outre les lignes isothermes deviennent parallèles au cristal (couche limite thermique), ainsi qu'une déviation remarquable des isothermes dans la région des contacts fluide -paroi latérale. Ceci se développe lors l'augmentation du nombre de Richardson ([Figure IV.15a](#)).

Sur la [Figure IV.12](#), nous avons présenté les iso-valeurs de la vitesse azimutale w , pour différents nombres de Richardson ($Ri = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$). On peut remarquer qu'une couche limite (un fort gradient) a lieu sous le cristal tournant où la vitesse azimutale w est plus élevée dans cette région. Cette couche limite est caractérisée par un débit méridien important par rapport à celui dans les autres zones. Cette dernière s'élargisse avec l'augmentation du nombre de Richardson.

En ce qui concerne le champ de pression présenté sur la [Figure IV.13](#), on peut voir aisément la dépression qui règne dans la région inférieure de la cavité ($0 \leq z \leq 0.6$), ce qui nous permettra de constater qu'il y a un pompage du liquide passant par l'axe du cylindre en l'évacuant dans le sens des forces centrifuges c-à-d dans la direction radiale : ce phénomène de pompage est connu sous le nom du pompage d'Ekman ([Schlichting, 1986](#)), aussi il est toujours présent dans ce type d'écoulement conduit par rotation des parois du cylindre, quel que soit le régime d'écoulement : stable ou transitoire.

La variation du nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} pour différents nombres de Richardson est présentée sur la [Figure IV.15b](#). Nous constatons clairement que, l'augmentation du nombre de Richardson provoque une diminution du taux de transfert de chaleur (nombre de Nusselt), et que la forte réduction du taux de transfert de chaleur se trouve pour $Ri = 2$, correspond à $Nu_{moy} = 5.2$.

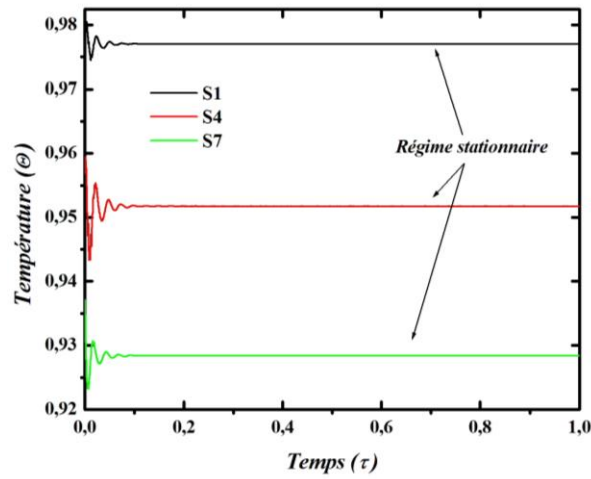


Figure IV.9 : Evolution temporelle de la température adimensionnelle Θ en régime stationnaire ($Ri = 0.5$).

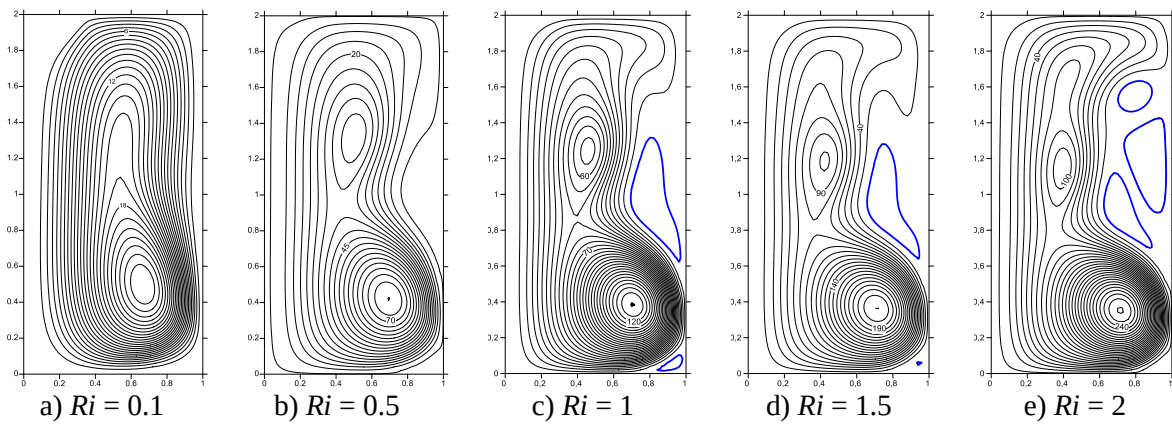
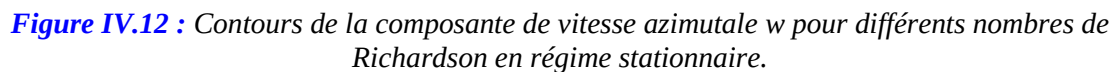
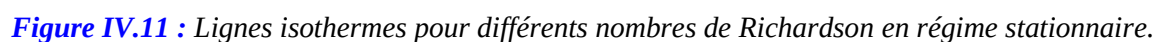


Figure IV.10 : Contours des lignes de courant pour différents nombres de Richardson en régime stationnaire.



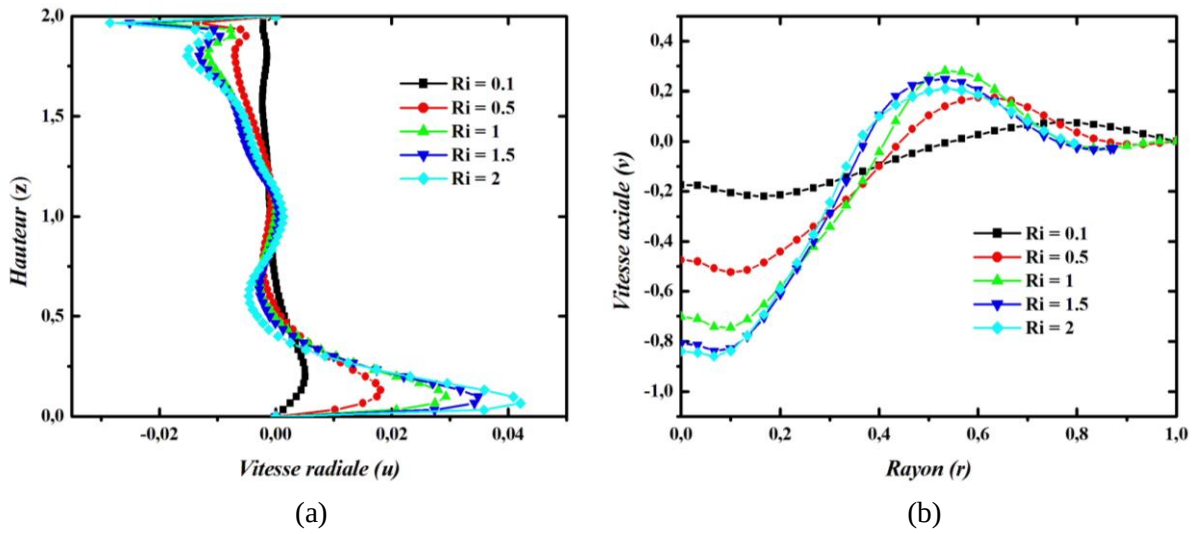


Figure IV.14 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0$ (a), et axiale v à $z = 1$ (b), pour différents nombres de Richardson.

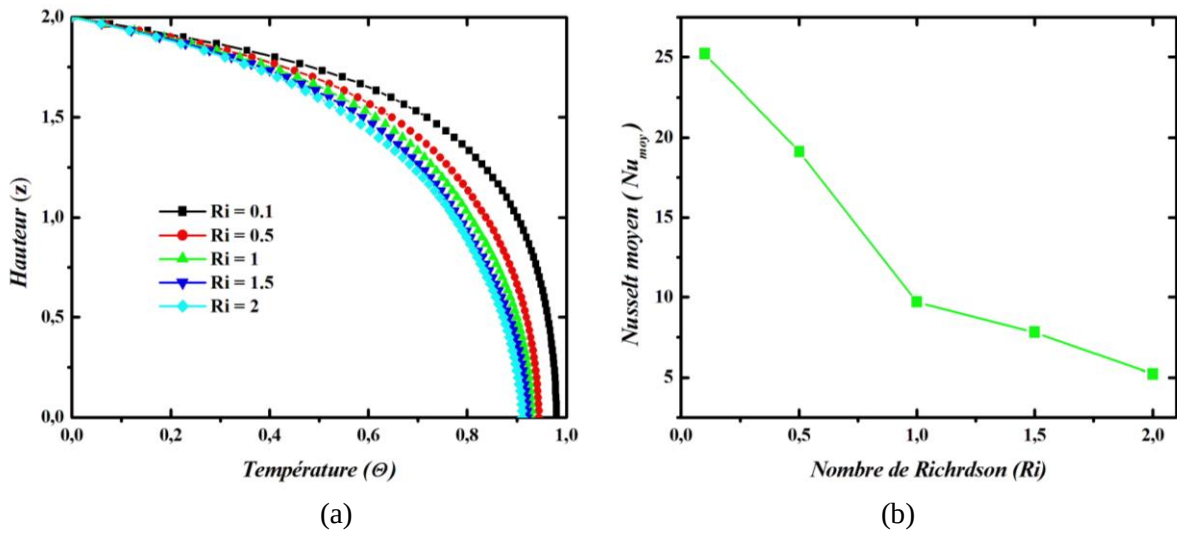


Figure IV.15 : Profils de température Θ à $r = 0$ (a), et nombre de Nusselt moyen (b), pour différents nombres de Richardson.

IV.5.2 Effet du rapport d'aspect

Dans cette partie, nous avons étudié l'effet du rapport d'aspect $Ar = H/R$ (H , R sont respectivement la hauteur et le rayon de la cavité), sur l'écoulement et le transfert de chaleur. Pour cela nous avons fixé le nombre de Richardson à $Ri = 0.5$, puis on fait varier le rapport d'aspect du $Ar = 1/3, 1/2, 1, 2$ au 3 (on fixe le rayon R et on change la hauteur H). Les cavités sont remplies par le Silicium liquide ($Pr = 0.011$) et soumises au même gradient de température.

Nous avons présenté sur la [Figure IV.16](#), le champ des isothermes pour différents rapports d'aspect Ar . Il est clair que l'allongement de la cavité a une influence considérable sur le champ de température ([Figure IV.18b](#)). On peut voir une allure similaire pour toutes les cavités. Une stratification thermique importante près du cristal (les isothermes parallèles à la paroi froide), et une déviation (courbure) remarquable dans le reste de la cavité. Ces remarques signifient que le transfert de chaleur se fait par conduction sous-cristal et par convection dans le reste de la cavité.

Pour les lignes de courant présentées sur les [Figures IV.17a-e](#), on remarque que, l'écoulement est monocellulaire, pour toutes les cavités, sauf pour $Ar = 3$, où l'écoulement se manifeste unicellulaire avec la présence des cellules secondaires. Ces cellules circulent suivant le sens inverse des aiguilles d'une montre. On peut remarquer également que, les lignes de courant allongent selon l'allongement de la cavité. Ce qui signifie que les parois de la cavité ont des effets sur la structure de circulation des particules fluides.

Le profil de la composante de vitesse axiale le long de $z = 1$ est présenté sur la [Figure IV.18a](#), pour différents rapports d'aspect. Nous pouvons voir que la variation du rapport d'aspect a un effet important sur le champ de vitesse, où l'augmentation de ce facteur stabilise la vitesse dans la cavité. On peut expliquer ces résultats que lors la variation du rapport d'aspect, la cavité devient allongé verticalement, alors le parcours des particules fluides devient long vers le haut, ce qui conduit à diminuer la vitesse dans la cavité, et la stabilisation importante est observée pour $Ar = 3$.

Le nombre de Nusselt moyen est tracé en fonction du rapport d'aspect Ar sur la [Figure IV.19](#), on peut voir que le nombre de Nusselt moyen est une fonction croissante avec le rapport d'aspect Ar de la cavité. On peut constater également que, la configuration qui supporte le transfert thermique est trouvée pour les cavités allongées verticalement ($Ar = 3$), où la surface d'échange est grande. Ainsi que, la configuration qui affaiblit le taux de transfert thermique est trouvée dans les petits rapports d'aspect (bon accord avec [Turan et al. 2011](#)).

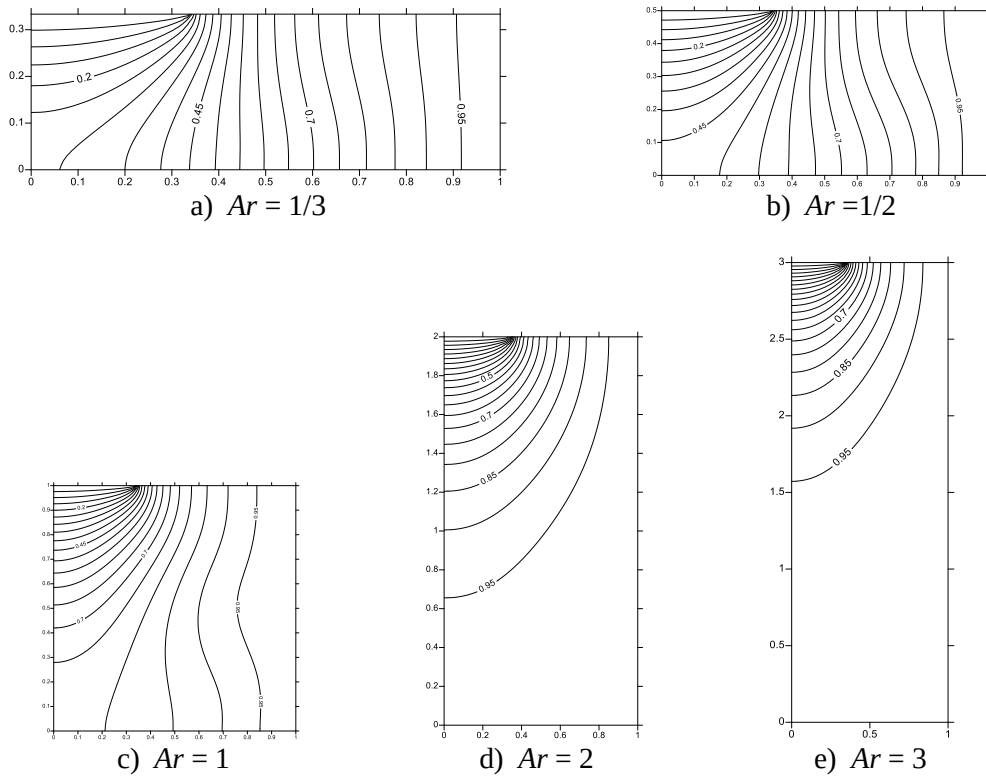


Figure IV.16 : Lignes isothermes pour différents rapports d'aspect en régime stationnaire.

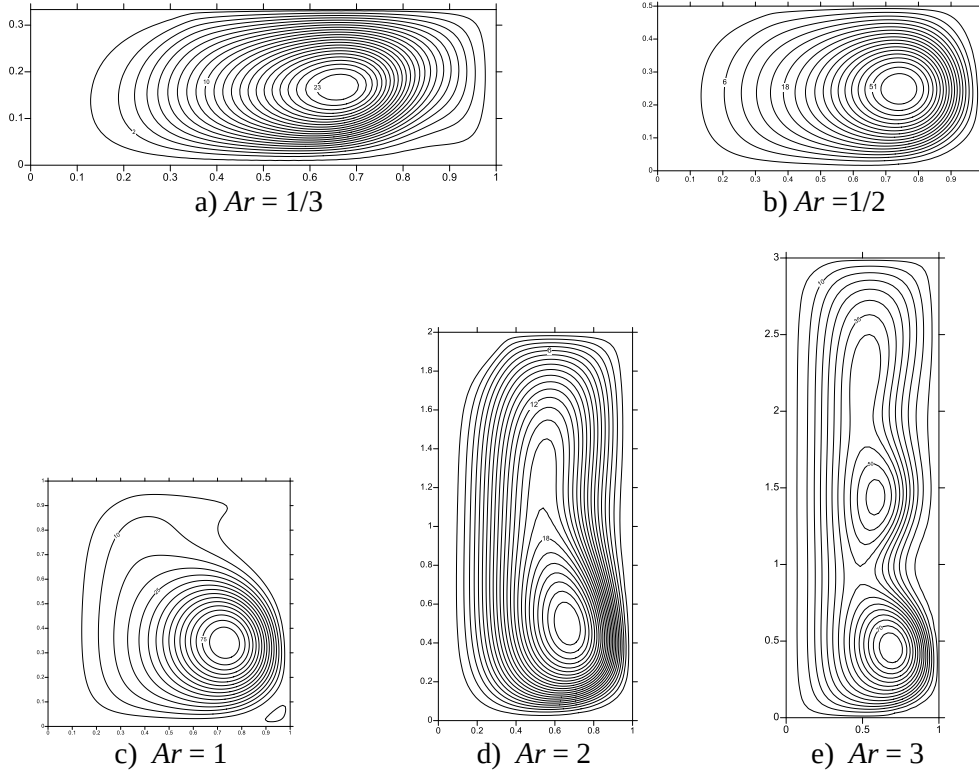


Figure IV.17 : Contours des lignes de courant pour différents rapports d'aspect en régime stationnaire.

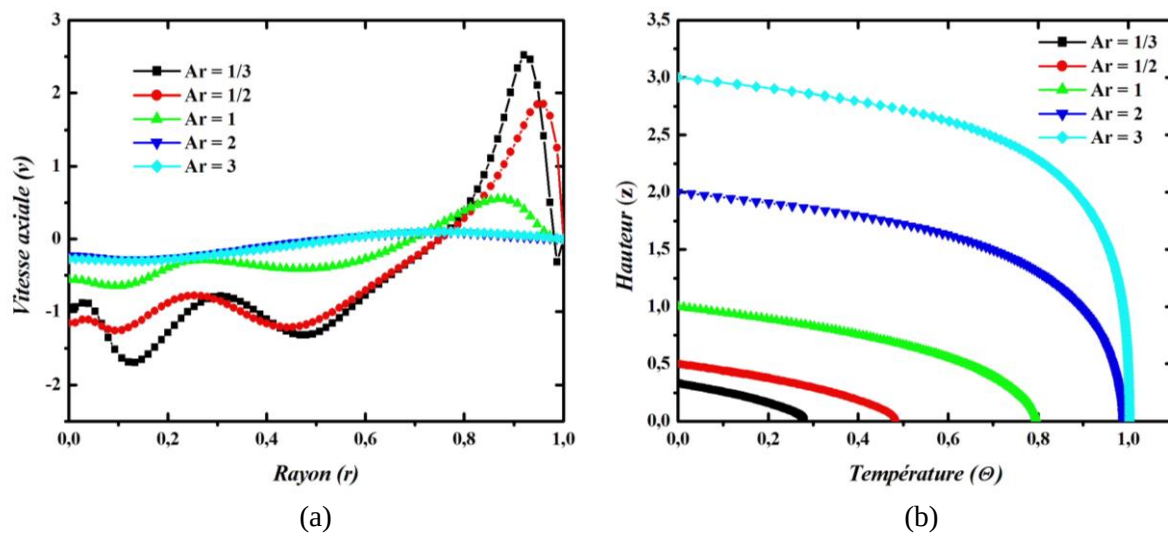


Figure IV.18 : Profils de la composante de vitesse axiale v à $z = 1$ (a), et de température Θ à $r = 0$ (b), pour différents rapports d'aspect.

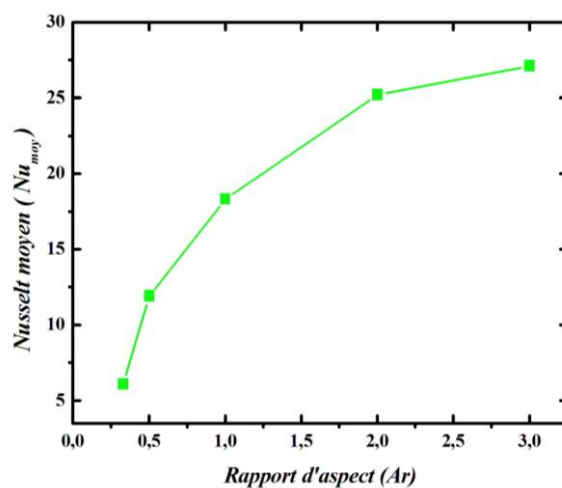
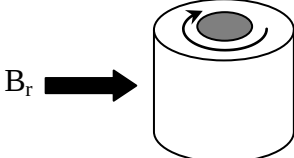
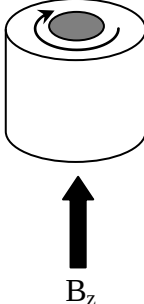


Figure IV.19 : Nombre de Nusselt moyen pour différents rapports d'aspect.

IV.5.3 Effet du champ magnétique

Dans cette session nous allons voir l'effet du champ magnétique dans le régime stationnaire sur l'écoulement et le transfert thermique. Pour cela, nous avons pris une cavité avec $Ar = 2$, et $Ri = 0.2$. Deux types de champ magnétique sont considérés, un champ magnétique appliqué suivant la direction axiale (B_z), et un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale (B_r) séparément, et ceci pour différents nombres de Hartmann, $Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50 . (Tableau IV.2).

Tableau IV.2 : Différentes orientations du champ magnétique.

a)- Champ magnétique radial (B_r)	b)- Champ magnétique Axial (B_z)
	

IV.5.3.1 Champ magnétique axial

En absence du champ magnétique ($Ha = 0$), c'est le cas de l'écoulement de convection forcée créé par la rotation du cristal. Cet écoulement se caractérise principalement par une grande cellule occupant entièrement la cavité et tourne dans le sens antihoraire. Ce phénomène est créé du fait que le fluide à côté de la paroi latérale chaude reçoit de la chaleur et devient plus léger et ascendant du fait de la poussée d'Archimède, à proximité du cristal froid le fluide se refroidit et devient plus lourd et descendant vers le bas suivant l'axe de symétrie. En outre cette cellule tourne autour d'un point situé à l'inférieur de la paroi chaude (partie droite de la cavité). D'autre part, les isothermes sont sensiblement comprimées au-dessous du cristal ce qui signifie que le transfert est intense dans cette région, et est orienté suivant la direction radiale.

En présence d'un champ magnétique axial ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50), on remarque un changement important sur la structure de l'écoulement et le champ thermique (Figures IV.20-21). Le sens de l'écoulement reste le même et la fonction de courant prend une forme uniforme dans la cavité, mais au cours d'augmentation d'intensité du champ magnétique le centre de rotation de la cellule principale se monte vers le haut de la cavité, où il y a la surface

libre. Ce changement est dû à la force de Lorentz radiale (lois de trois doigts) qui influe sur les particules fluides. Les valeurs des fonctions de courant (les lignes bleues) diminuent avec l'augmentation du nombre de Hartmann, ce qui justifie dans les [Figures IV.22a-b](#). Nous constatons également la diminution importante de la vitesse lorsque le nombre de Hartmann augmente.

Pour les isothermes on remarque que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique comprime les lignes isothermes vers le cristal, ceci peut être expliqué par la diminution du transfert thermique au cours de l'augmentation du nombre de Hartmann ([Figure IV.21](#)). Nous constatons également une diminution de taux de transfert thermique lorsque le nombre de Hartmann augmente. Ce qui montre l'effet stabilisant du champ magnétique ([Bouabdallah et Bessaïh, 2012](#)).

IV.5.3.2 Champ magnétique radial

En présence du champ magnétique radial ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50), on remarque un changement très important de la structure de l'écoulement et du champ thermique par rapport au champ magnétique axial ([Figures IV.23-24](#)). La cellule principale tourne dans le même sens antihoraire, et au cours de l'augmentation de l'intensité du champ magnétique la cellule principale monte entièrement vers le haut, sous l'effet de la force de Lorentz axiale qui pousse les particules de fluide vers le haut, aussi l'augmentation de l'intensité du champ magnétique radial ralentit le champ de vitesse mieux que le champ magnétique axial ([Figures IV.21a-b](#)). Les isothermes sont bien serrées que le champ axial ce qui indique que, il y a une diminution de transfert thermique ([Figure IV.24](#)).

Pour faire une comparaison entre les deux types de champ magnétique, nous avons présenté sur les [Figures IV.26a-b](#), la composante de vitesse axiale maximale et le nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Hartmann. Ces graphes montrent que l'application du champ magnétique radial peut stabiliser l'écoulement et le taux de transfert thermique mieux que le champ magnétique axial. Ces résultats sont en bon accord avec ceux de [Sankar et al. \(2006\)](#). Ceci peut être expliqué par la force de Lorentz axiale (lois de trois doigts) qui naissant lors l'application du champ magnétique radial, qui agit en opposition de la force de flottabilité et provoque une réduction de la vitesse de plusieurs couches de fluide mieux que la force de Lorentz axiale qui naissant lors l'application du champ magnétique axial.

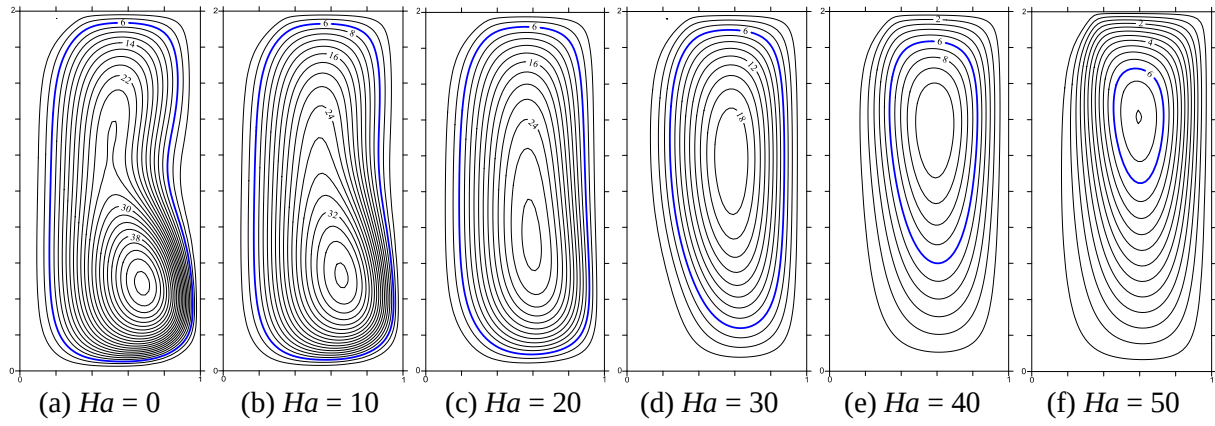


Figure IV.20 : Contours des lignes de courant pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique axial B_z).

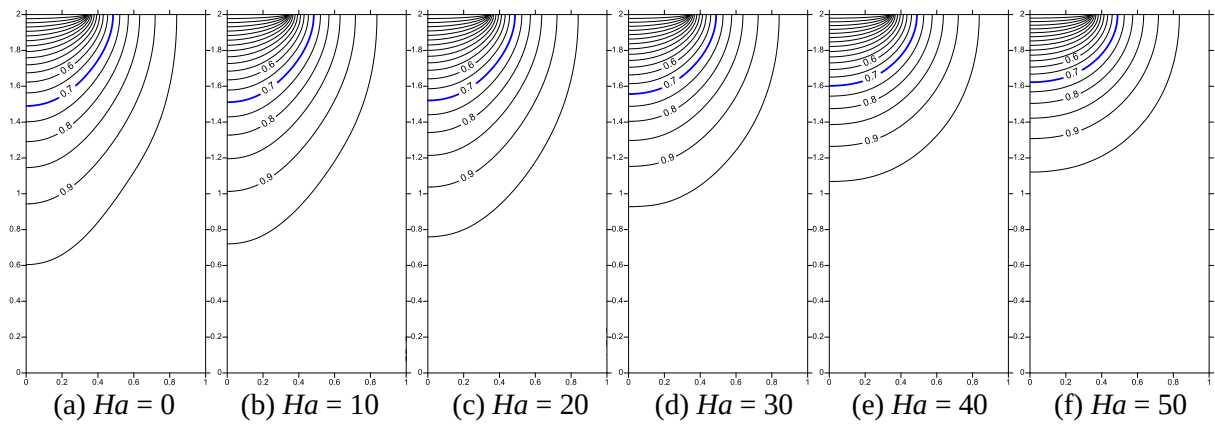


Figure IV.21 : Lignes isothermes pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique axial B_z).

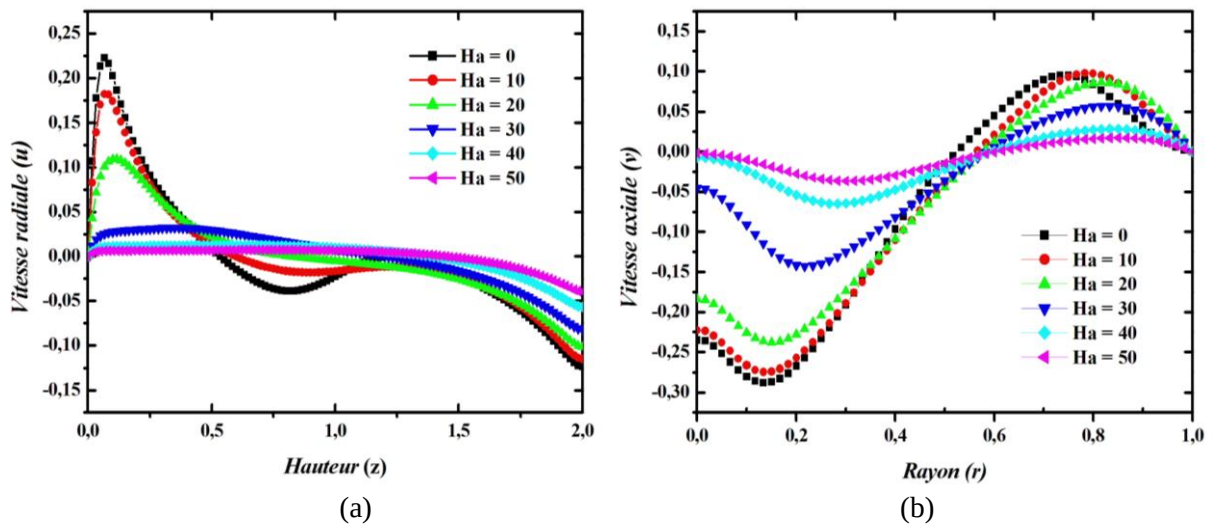


Figure IV.22 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0.50$ (a), et axiale v à $z = 1$ (b), pour différents nombres de Hartmann (champ magnétique axial B_z).

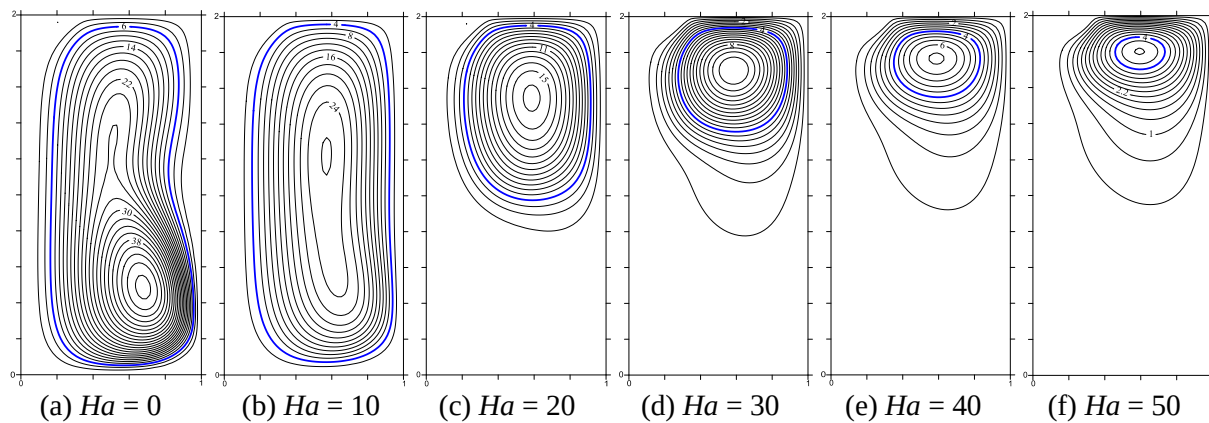


Figure IV.23 : Contours des lignes de courant pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique radial B_r).

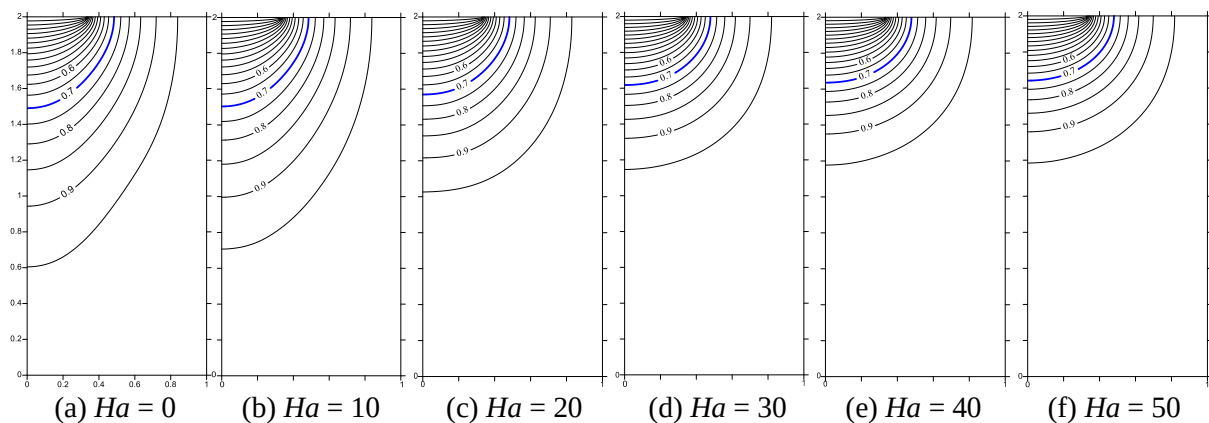


Figure IV.24 : Lignes isothermes pour différents nombres de Hartmann (Champ magnétique radial B_r).

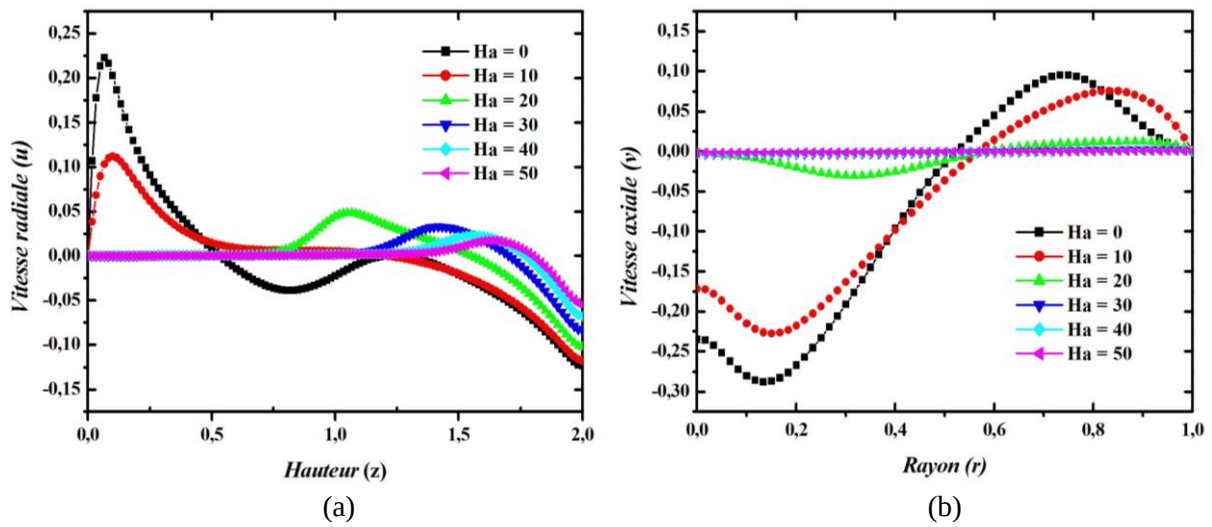


Figure IV.25 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0,50$ (a), et axiale v à $z = 1$ (b), pour différents nombres de Hartmann (champ magnétique radial B_r).

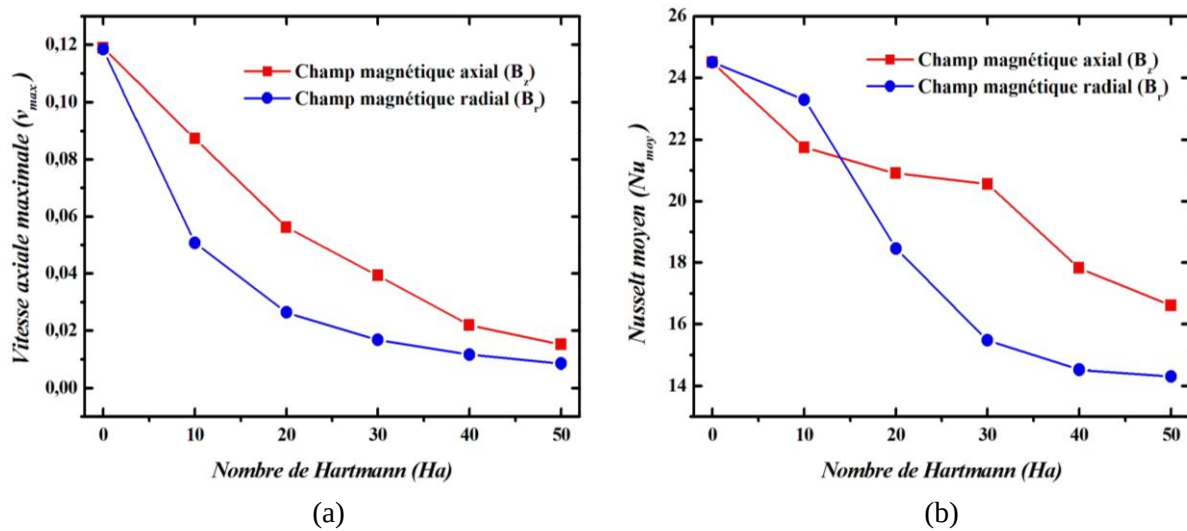


Figure IV.26 : Profils de la vitesse axiale maximale v_{max} (a), et le nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} (b), pour différents nombres de Hartmann. Comparaison entre le champ magnétique axial (B_z) et radial (B_r).

IV.6 Solution instationnaire

Le calcul de la solution instationnaire repose sur la détermination du nombre de Reynolds critique, Re_{cr} , pour lequel l'écoulement devient oscillatoire et périodique dans le temps, pour cela nous avons choisi un pas de temps adimensionnel de $\Delta\tau = 10^{-5}$.

Dans le but de vérifier que l'instabilité trouvée pour un pas du temps adimensionnel $\Delta\tau$ donné, est réellement physique, on recalcule la solution obtenue avec les mêmes paramètres de l'écoulement mais cette fois-ci avec un pas du temps de $\Delta\tau/2$. Cette méthode éliminera bien les instabilités d'origines numériques qui peuvent naître durant les calculs. Si les amplitudes et les fréquences des oscillations restent les mêmes dans tous les points après réduction du pas de temps, cette instabilité sera physique (Figure IV.27a).

Sur les Figures IV.24-25, nous avons présenté la variation temporelle de la composante de la température adimensionnelle Θ (Figure IV.27b), vitesse radiale adimensionnelle u (Figure IV.28a), et de la composante de vitesse axiale v (Figure IV.28b), aux différentes sondes choisies arbitrairement dans la cavité ($S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$ et S_9). Nous constatons que ces courbes évoluent d'une manière sinusoïdale autour des valeurs moyennes, et ont la même fréquence d'oscillation. Si on compare les amplitudes des paramètres en oscillation, on peut remarquer que ces amplitudes présentent des grandeurs différentes, pour les différents points d'enregistrement d'historique. Cela conduit à conclure que l'amplitude du signal sinusoïdale dépend fortement de la position des particules dans la cavité. Les particules les plus proches des parois actives (parois isothermes) ont des signaux de forte amplitude par rapport à celles situées loin des parois actives, tandis que les fréquences des oscillations sont les mêmes partout (dans le fluide). Ceci confirme de plus l'originalité physique du régime oscillatoire.

Sur les Figures IV.29a-b, nous avons présenté les portraits de phase de la vitesse axiale en fonction de la vitesse radiale aux points S_2 et S_8 , respectivement. Les portraits de phase traduisent le changement des paramètres hydrodynamiques, thermiques et massiques entre eux. Alors, pour un régime oscillatoire et périodique, en un point (sonde de mesure) considéré, ces changements constituent des cercles fermés traduisant la périodicité du régime de l'écoulement. Par ailleurs, pour un régime de l'écoulement qui n'est pas oscillatoire et périodique, les profils de changement des paramètres de l'écoulement constituent des points limites ou d'autres structures non ordonnées.

Les cercles fermés montrent que le régime périodique est bien établi pour $Re = Re_{cr}$, ce qui traduit la périodicité du régime de l'écoulement. Par contre, pour les valeurs du nombre de

Reynolds supérieures ou inférieures au nombre de Reynolds critique, les courbes ne forment pas des cercles fermés totalement ou mêmes des formes non ordonnées pour des valeurs inférieures. Cette technique a été utilisée, successivement, dans les travaux de [Bessaïh et Bouabdallah \(2008\)](#) et [Bouabdallah et al. \(2011\)](#).

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on a utilisé la transformée de Fourier rapide (**FFT**) ([Benisaad, 2003](#)) d'un nombre de puissance 2 de la valeur de la variation temporelle de la composante horizontale et verticale de vitesse. Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir l'énergie E en fonction des fréquences des oscillations F , définies par : $F = M / (N \times \Delta\tau)$, où $\Delta\tau$ l'incrément du temps et $M = 0, 1, \dots, N/2$. L'énergie est normalisée par N^2 . Les valeurs de $E(F)$ représentent plusieurs échelles de grandeur, dans ce cas on a utilisé son logarithme décimal ([Afrid et Zebib, 1989](#)). On dénote dans notre étude F_{cr} le pic du spectre d'énergie ($F, \text{Log}[E(F) / N^2]$) qui correspond à la fréquence dominante pour $N = 2^{16}$ et $\Delta\tau = 10^{-5}$ ([Figure IV.30a](#)). Les fréquences prédominantes adimensionnelles (les plus grands piques) sont considérées comme celles jouant le rôle principal dans l'oscillation de l'écoulement et donc l'échange de l'énergie cinétique et thermique. Notons que l'apparition de plusieurs pics d'une façon multiple de la fréquence dominante est entraînée par le phénomène de bifurcation de l'écoulement ([Gelfgat et Bar-Yosef, 2001](#)).

IV.6.1 Structure de l'écoulement pendant une période de temps

Dans le but de comprendre la nature du régime oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement dans la cavité, on a choisi l'évolution temporelle au cours d'une période de la vitesse verticale v au point S_2 ([Figure IV.30b](#)), pour le cas (pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$), et pour explorer la structure de l'écoulement, on a présenté les isothermes et lignes de courant pendant des laps de temps notés $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et τ_f .

La [Figure IV.31](#) montre les contours méridiens des lignes de courant hydrodynamiques. Au cours des temps adimensionnels ($\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$), on peut remarquer toujours la présence de la couche d'Eckman située dans la région sous le cristal tournant, et caractérisée par l'important débit massique. L'apparition du régime instable dans l'écoulement sous l'effet des forces de volume et des forces de flottabilité impose un écoulement multicellulaire (en bleu négatif et en noir positif). Les dimensions des cellules de base se changent au cours des temps, ($\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e, \tau_f$), en subissant un élargissement puis un rétrécissement pendant chaque période.

Nous présentons sur la [Figure IV.32](#), l'évolution temporelle au cours d'une période (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , τ_f), des lignes isothermes. On peut remarquer des isothermes parallèles sous le cristal tournant, et une plus courbure importante dans le reste de la cavité (ligne isotherme $\Theta = 0.95$). Ces formes des isothermes indiquent que, le transfert de chaleur se fait par conduction sous le cristal, et par convection dans le reste de la cavité.

La [Figure IV.33](#) expose les iso-valeurs de la vitesse azimutale w projetée dans le plan méridien (r - z), et on peut apprécier l'existence de la couche d'Eckman située sous le disque tournant pendant tous les instants de visualisation, et que les variations remarquables des valeurs de w résident sous le cristal au centre de la cavité. Ils sont subissent à un élargissement puis un rétrécissement pendant une période de temps.

A l'instant τ_f , la structure de ces paramètres (lignes de courant, isothermes et iso-valeurs de la vitesse azimutale) est parfaitement semblable à celle de l'instant τ_a , ce que signifie que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique.

IV.6.2 Diagrammes de stabilité

Dans les [Figures IV.34a-b](#), nous avons présenté les diagrammes de stabilité ($Re_{cr} - Ri$) et ($Fr_{cr} - Ri$), respectivement. Ces diagrammes présentent la dépendance du nombre de Reynolds critique et leur fréquence correspondante, pour différents nombres de Richardson. Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson Ri provoque la diminution du nombre de Reynolds critique Re_{cr} , c-à-d que l'augmentation des valeurs de Richardson déstabilise l'écoulement. Alors, la convection mixte atteinte au régime de transition rapidement (pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds). Ceci est en bon accord avec le travail de [Bessaïh et al. \(2009\)](#).

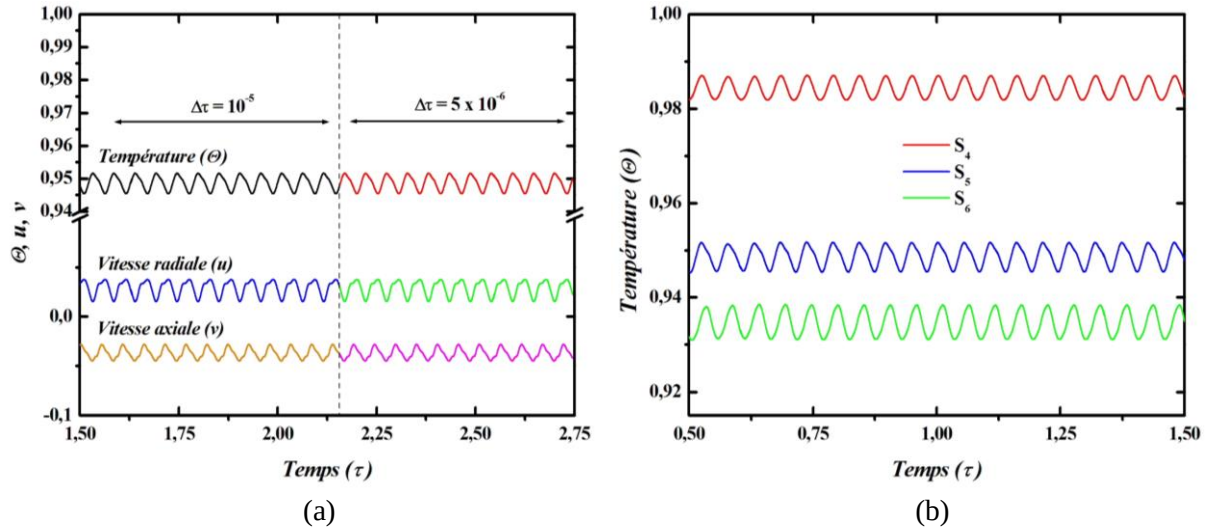


Figure IV.27 : Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale u , axiale v et de la température Θ , à la sonde S_5 , à deux pas de temps consécutifs $\Delta\tau$ et $\Delta\tau/2$ (a). Evolution temporelle de la température adimensionnelle Θ , aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité (b), pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$.

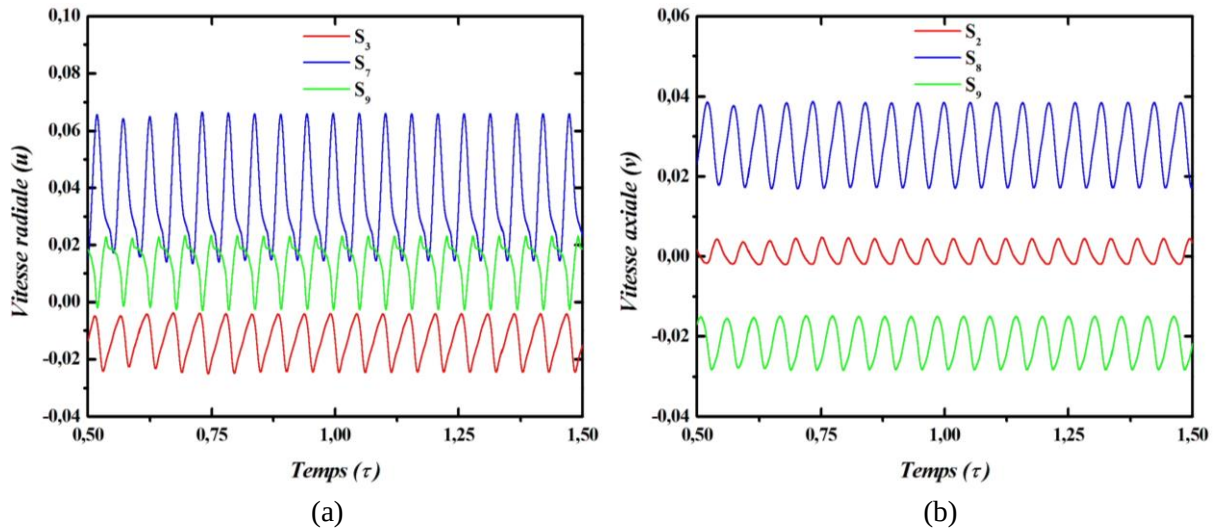


Figure IV.28 : Evolution temporelle de la composante de vitesse adimensionnelle radiale u (a), et axiale v (b), aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité, pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$.

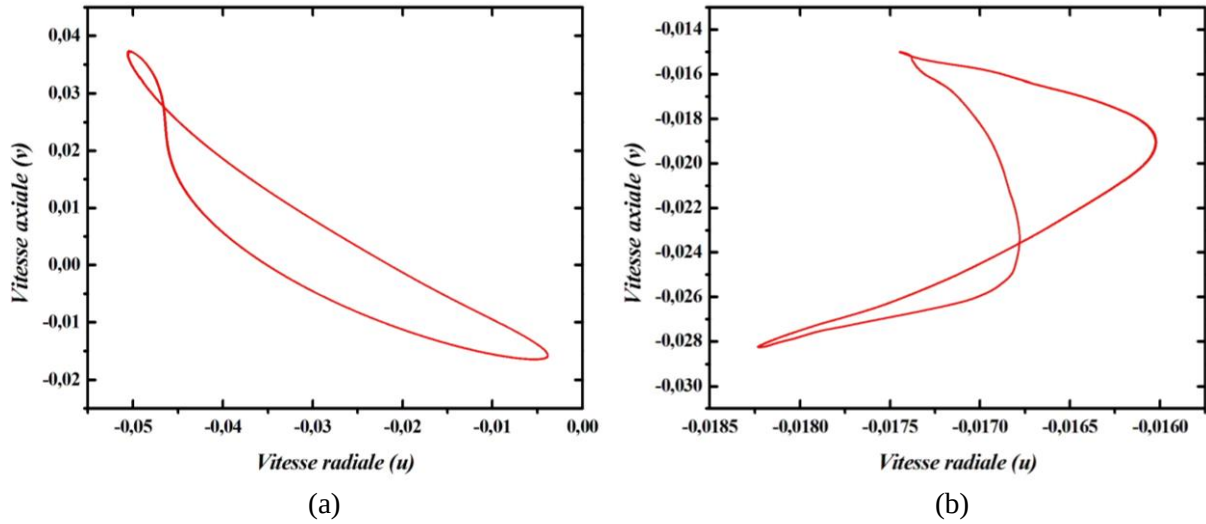


Figure IV.29 : Portraits de phase dans le plan (v, u) aux sondes S_2 (a) et S_8 (b), pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$ (régime oscillatoire).

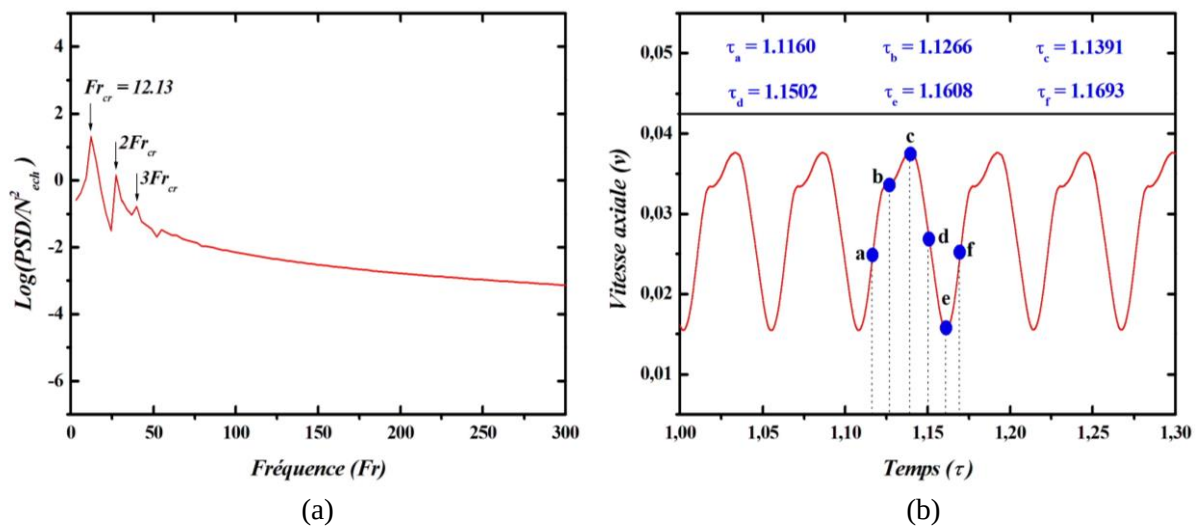


Figure IV.30 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_5 (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_5 (b), aux instants adimensionnels : $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e \text{ et } \tau_f)$ utilisés dans la visualisation des structures de l'écoulement, pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$ (régime oscillatoire).

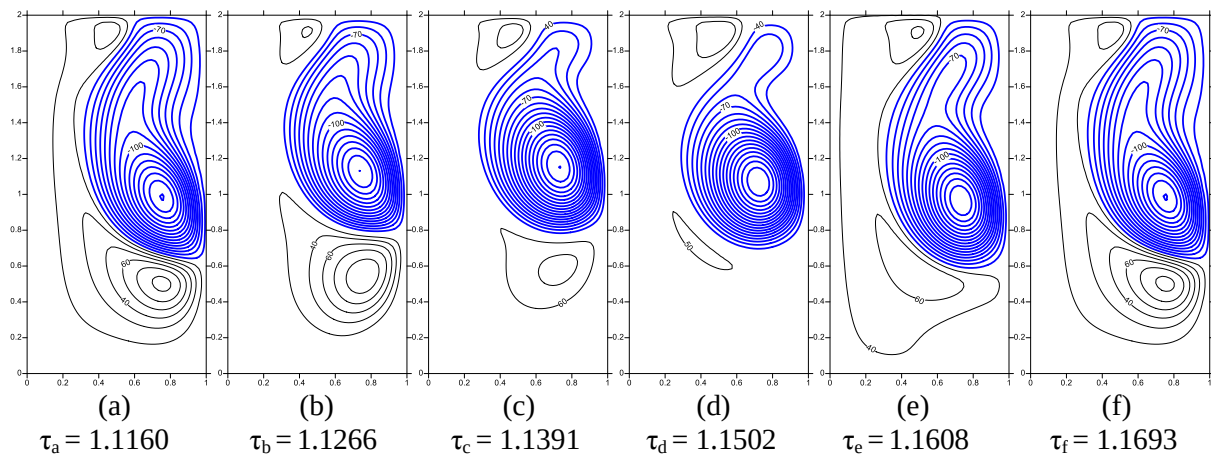


Figure IV.31 : Evolution temporelle des contours de la fonction de courant adimensionnelle Ψ aux instants indiqués par $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$. Tracées méridiennes pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$.

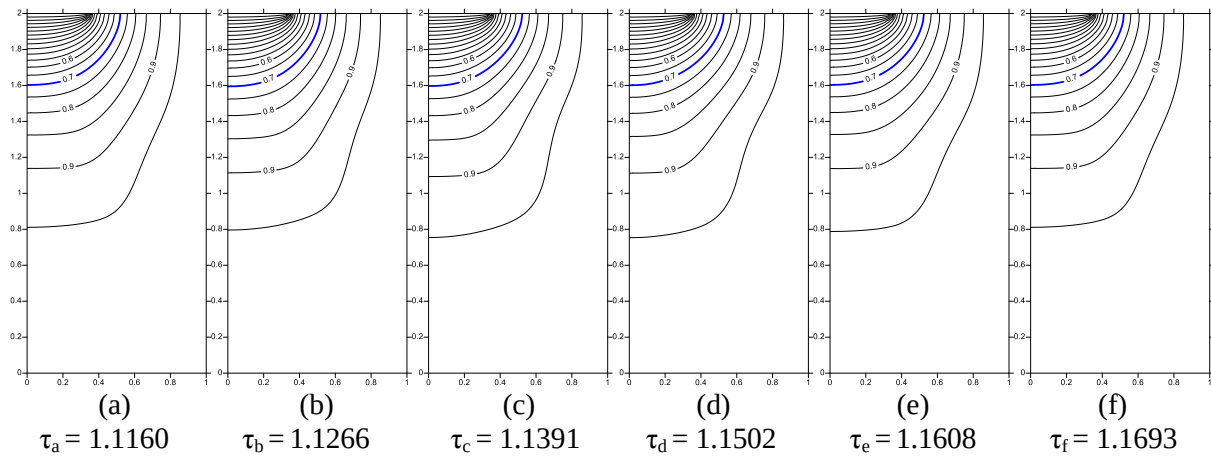


Figure IV.32 : Evolution temporelle des isothermes adimensionnelles aux instants indiqués par $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$. Tracées méridiennes pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$.

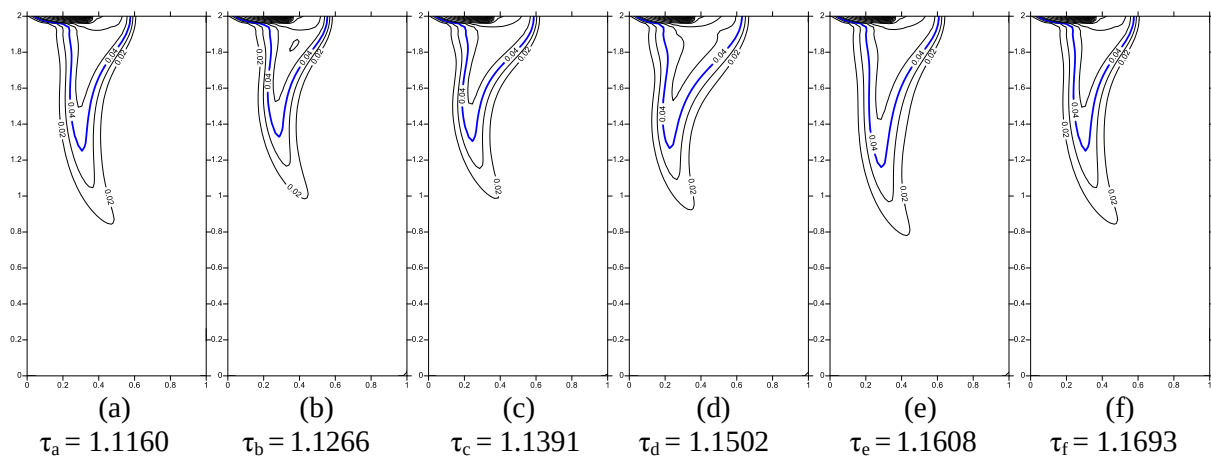


Figure IV.33 : Evolution temporelle des iso-valeurs de la vitesse azimutale adimensionnelle w aux instants indiqués par $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$. Tracées méridiennes pour $Re_{cr} = 2800$ et $Ri = 1$.

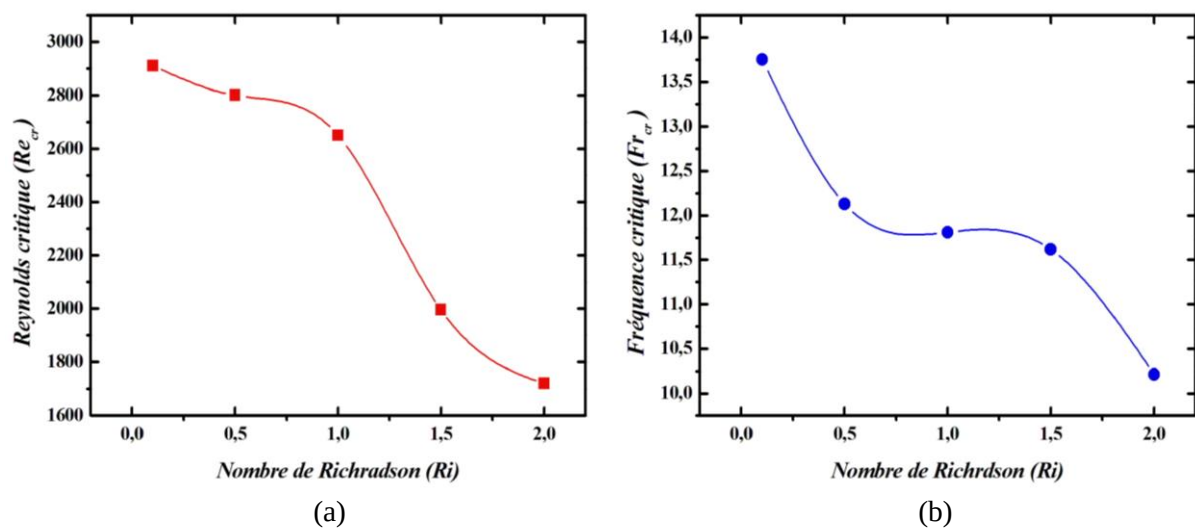


Figure IV.34 : Diagrammes de stabilité : (a) $Re_{cr} - Ri$, (b) $Fr_{cr} - Ri$.

IV.6.2 Effet du champ magnétique

Dans la présente partie, nous intéressons à la situation en présence du champ magnétique ($Ha \neq 0$) appliqué suivant les directions axiale et radiale séparément sur la configuration étudiée en régime transitoire. Donc on a résolu numériquement le système d'équations EDP figurant au deuxième chapitre, y compris l'équation du potentiel électrique.

De même que dans la partie précédente, l'écoulement secondaire est étudié au moyen des lignes de courant hydrodynamiques, ainsi que les lignes isothermes avec la représentation des iso-valeurs de la vitesse azimutale. Les résultats pour les diverses intensités du champ magnétique (donc différentes valeurs du nombre de Hartmann $Ha=10, 20, 30, 40$ et 50), et les différents valeurs du nombre de Richardson ($Ri = 0.1, 0.5, 1, 1.5$ et 2) sont récapitulés à la fin de cette partie avec des diagrammes paramétriques (en Ri) de dépendance ($Re_{cr} - Ha$).

Pour faire une comparaison de la structure de l'écoulement du métal liquide sans et avec champ magnétique, nous avons présenté sur les [Figures IV.35, IV.36 et IV.37](#) les lignes de courants, les isothermes et les iso-valeurs de la vitesse azimutale au temps adimensionnel $\tau = 1.15$ pour trois cas : sans champ magnétique, avec champ magnétique axial, et avec champ magnétique radial.

A partir de ces figures on peut voir l'effet considérable de champ magnétique et leur orientation sur la structure de l'écoulement et les isothermes. Pour les isothermes dans le cas sans champ magnétique ([Figure IV.35a](#)), se manifestant un peu déformés et est bien visualisé sur l'isotherme $\Theta = 0.95$. Par l'application du champ magnétique suivant la direction axiale ([Figure IV.35b](#)), ces déformations sont supprimées et les isothermes deviennent bien organisées sous l'effet des forces de Lorentz qui naissent dans le fluide. L'application du champ magnétique suivant la direction radiale influe bien sur l'écoulement de fluide ou il organise plus les isothermes par rapport le champ magnétique axial ([Figure IV.35c](#)). Ces changements montrent que l'application de champ magnétique améliore le transfert conductif, et devient plus important s'il est appliqué suivant la direction radiale.

Pour les lignes de courants on remarque dans le cas sans champ magnétique que l'écoulement manifeste multicellulaire ([Figure IV.36a](#)), une cellule principale (en bleu) tourne autour un point situé au milieu de la cavité, et deux secondaires contrarotatifs (en noir) au haut et bas de la cellule principale. Dans le cas du champ magnétique axial ([Figure IV.36b](#)) la structure de l'écoulement se change où la cellule principale se dilate et décompose en deux cellules qui tournent au haut et bas de la cavité sous l'effet des cellules secondaires qui faisant la pression sur la cellule principale de gauche et droite, on peut relier ce changement

directement aux forces de Lorentz radiales qui naissent dans le fluide lors l'application du champ magnétique axial. L'application de champ magnétique radial ([Figure IV.36c](#)) nous donne une structure différent et stable où tous les cellules secondaires sont supprimées et l'écoulement devient monocellulaire tournent autour un point près de la surface libre sous l'effet des forces de Lorentz axial qui influe sur les particules fluides où ils pousse ces particules vers le haut.

L'effet stabilisant du champ magnétique est bien visualisé sur les iso-valeurs de la vitesse azimutale ([Figure IV.37](#)). Il réduit la magnitude de la vitesse, et la forte réduction de la magnitude de vitesse se trouve pour B_r (champ magnétique appliqué suivant la direction radiale).

IV.6.3 Diagrammes de stabilité magnétique

Sur la [Figure IV.38](#), nous avons présenté les diagrammes de stabilisation magnétique. Diagrammes montrent la dépendance du nombre de Reynolds critique Re_{cr} et le nombre de Hartmann (intensité du champ magnétique). Le champ magnétique est appliqué suivant la direction axiale et radiale séparément. Le nombre de Richardson prend les valeurs : $Ri = 0.1, 0.5, 1, 1.5$ et 2 .

Nous constatons que l'augmentation du nombre de Hartmann provoque l'augmentation du nombre de Reynolds critique, c-à-d que l'augmentation des valeurs de Ha retard la transition du régime stationnaire-oscillatoire vers des valeurs élevés de Re_{cr} . Ainsi que la forte stabilisation magnétique se trouve pour un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale (B_r).

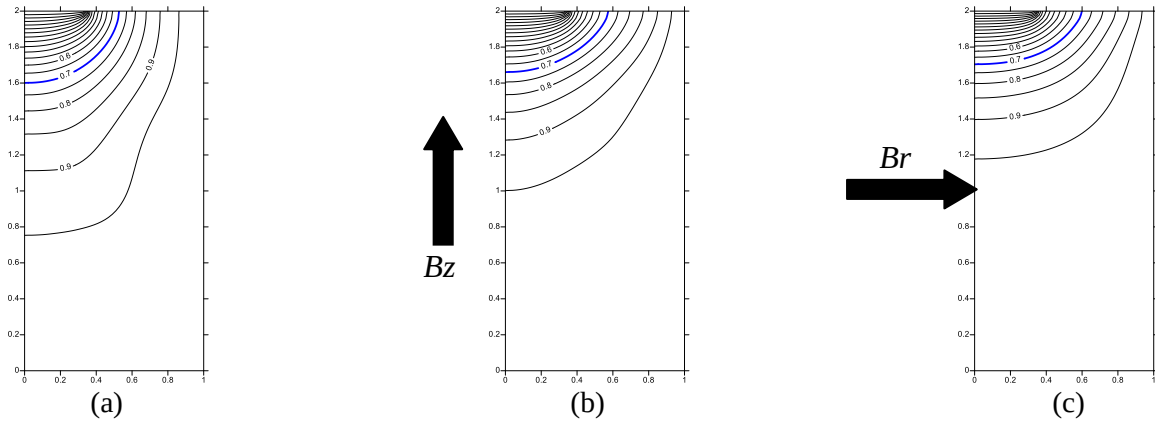


Figure IV.35 : Tracées méridiennes des isothermes adimensionnelles au $\tau = 1.15$: (a) sans champ magnétique pour $Re_{cr} = 2800$, $Ha = 0$ et $Ri = 1$, (b) avec champ magnétique axial pour $Re_{cr} = 3160$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$, (c) avec champ magnétique radial pour $Re_{cr} = 3300$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$.

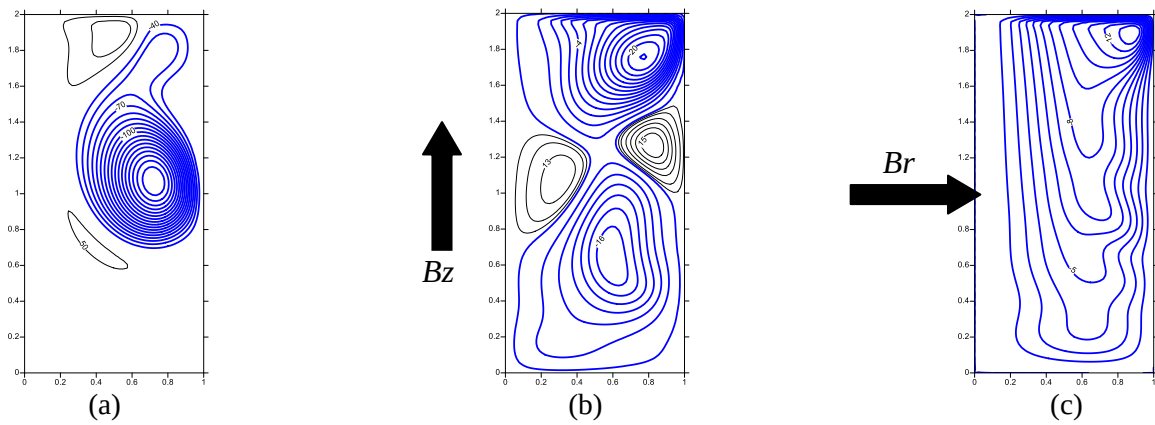


Figure IV.36 : Tracées méridiennes des fonctions de courants au $\tau = 1.15$: (a) sans champ magnétique pour $Re_{cr} = 2800$, $Ha = 0$ et $Ri = 1$, (b) avec champ magnétique axial pour $Re_{cr} = 3160$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$, (c) avec champ magnétique radial pour $Re_{cr} = 3300$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$.

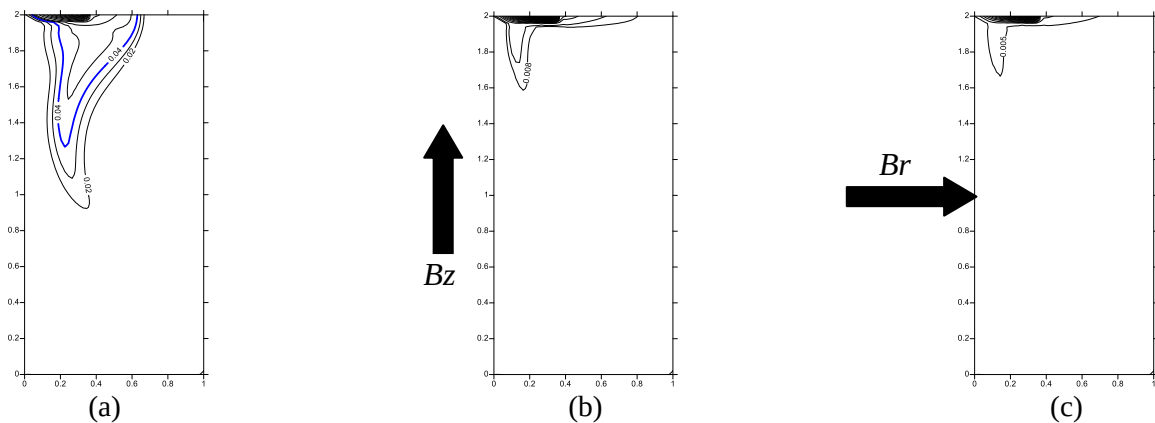
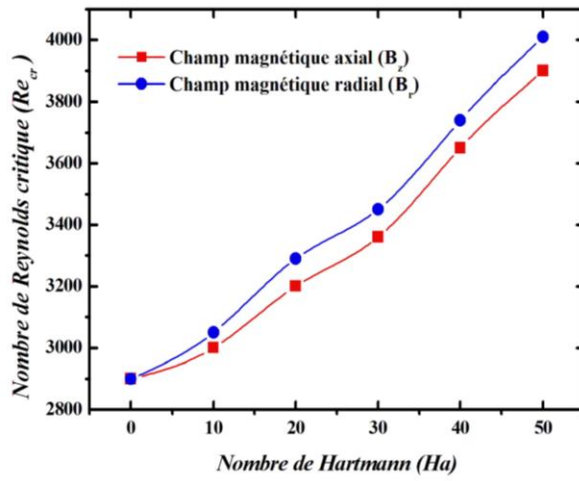
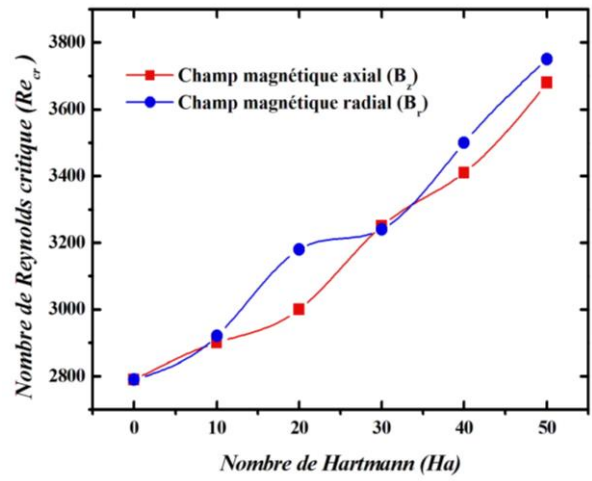
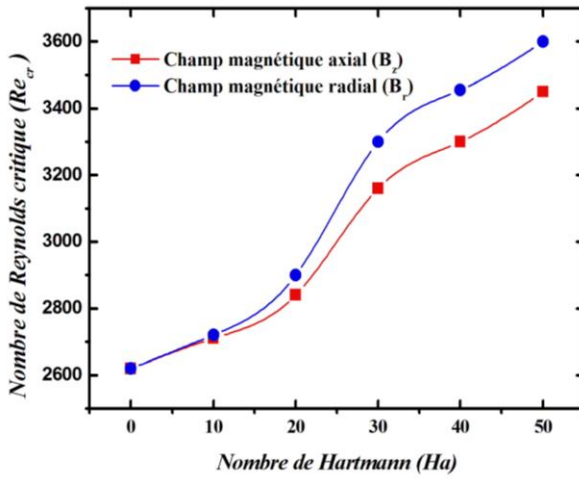
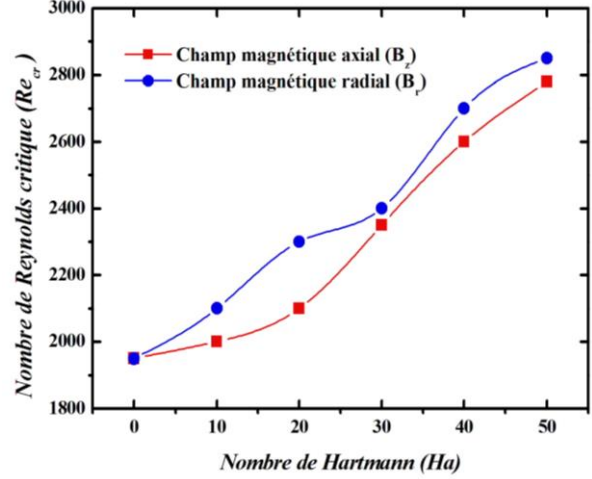
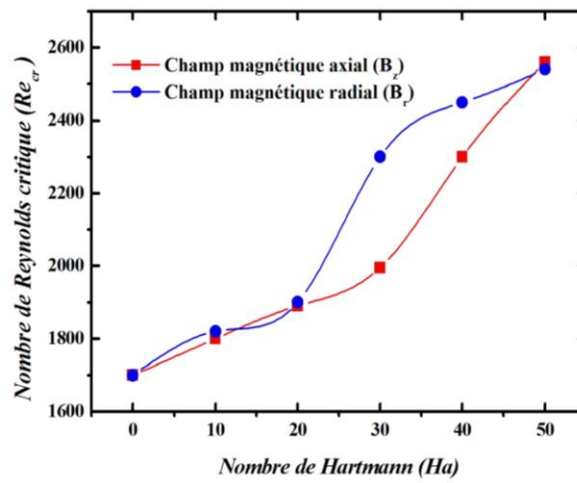


Figure IV.37 : Tracées méridiennes iso-valeurs de la vitesse azimutale adimensionnelle au $\tau = 1.15$: (a) sans champ magnétique pour $Re_{cr} = 2800$, $Ha = 0$ et $Ri = 1$, (b) avec champ magnétique axial pour $Re_{cr} = 3160$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$, (c) avec champ magnétique radial pour $Re_{cr} = 3300$, $Ha = 30$ et $Ri = 1$.

(a) $Ri = 0.1$ (b) $Ri = 0.5$ (c) $Ri = 1$ (d) $Ri = 1.5$ (e) $Ri = 2$ **Figure IV.38 :** Diagrammes de stabilité magnétique: $Re_{cr} - Ha$.

IV.7 Conclusion du chapitre IV

Une étude numérique de la convection mixte dans une cavité cylindrique axisymétrique similaire à celle de Czochralski, remplie d'un fluide à faible nombre de Prandtl (Silicium, $Pr = 0.011$) et soumise à un champ magnétique orienté dans les directions axiale et radiale, séparément avec différentes intensités ($Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50) a été faite.

- La simulation a été faite à l'aide d'un code de calculs propre basé sur la méthode des volumes finis pour résoudre numériquement les équations gouvernantes du phénomène étudié.
- Un bon accord est apprécié entre les mesures expérimentales et numériques et nos résultats numériques du code de calculs.
- En régime stationnaire, nous avons trouvé que l'augmentation du nombre de Richardson influe sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, et provoque une augmentation de la vitesse des particules de fluide, et une diminution considérable dans le taux de transfert thermique. Et que la forte stabilisation de l'écoulement se trouve pour un grand allongement de la cavité ($Ar = 3$).
- L'application d'un champ magnétique extérieur de différentes orientations et intensités fournit un effet de stabilisation de l'écoulement.
- En régime oscillatoire, l'augmentation du nombre de Hartmann Ha entraîne une augmentation du nombre de Reynolds critique Re_{cr} , et cause des changements remarquables dans la structure de l'écoulement et du champ thermique, ce qui permet de contrôler la convection.
- L'orientation du champ magnétique a un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement, et que la meilleure stabilisation se trouve pour un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale (B_r).
- Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'une publication internationale dans une revue renommée internationale intitulée, "Numerical Study of Mixed Convection in Cylindrical Czochralski Configuration for Crystal Growth of Silicon" *International Journal of Heat and Technology*. Vol.33, 2015 (1), pp.39-46.

Chapitre V

Convection Naturelle Axisymétrique dans une Cavité Cylindrique Similaire à Celle de Bridgman Vertical

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la présentation et discussion des résultats obtenus pour le cas d'un écoulement de convection naturelle axisymétrique dans une cavité cylindrique similaire à celle de Bridgman. La cavité est considérée pour différents angles d'inclinaison. Un champ magnétique externe et uniforme est appliqué sur la cavité pour différentes intensités et orientations (axial et radial). Les résultats figurant dans ce qui suit, concernant une cavité de un rapport d'aspect $Ar = 2$ remplie d'un fluide de nombre de Prandtl vaut 0.015 (métal liquide). Et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre (des lignes de courant, iso-valeurs des vitesses, des isothermes, ...etc.). Ce chapitre s'organise en deux parties : La première partie concerne l'effet de l'inclinaison du cylindre ($\varphi = 0^\circ, 30^\circ$ et 45°) en absence du champ magnétique, et la deuxième partie présente le comportement de l'écoulement avec l'application d'un champ magnétique de diverses intensités et orientations via la variation du nombre de Hartmann ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50).

Toutefois, dans les deux parties l'ultime objectif est la détermination des nombres de Grashof critiques Gr_{cr} (la transition d'un régime stationnaire à un régime oscillatoire) et leurs fréquences critiques Fr_{cr} correspondantes, pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50) à différentes orientations ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°), et pour différents inclinaisons du cylindre ($\varphi = 0^\circ, 30^\circ$ et 45°).

V.2 Effet du maillage sur les solutions numériques

Avant de passer aux calculs de notre étude, et dans le but de déterminer la taille appropriée de maillage (nombre de mailles), des tests de calcul de simulation ont été entrepris en utilisant différentes tailles de maillage. Dans ces tests, les champs de l'écoulement et de température sont déterminés pour un système de maillage: $n_r \times n_z = 60 \times 120, 70 \times 140, 80 \times 160$

et 90×180 nœuds, suivant les directions r et z , respectivement. Nous avons considéré, à cet effet le cas d'un écoulement de la convection naturelle dont le cylindre est incliné à $\varphi = 30^\circ$, pour $Gr = 10^5$, $Pr = 0.015$ et $Ha = 0$. L'existence de forts gradients de vitesses et de température près des disques inférieur et supérieur et les parois latérales, nous incite d'utiliser un maillage raffiné dans ces zones, pour cela nous avons utilisé un coefficient d'expansion géométrique vaut $\varepsilon = 1.05$ suivant les deux directions r et z (Figure V.1).

Nous avons calculé les valeurs de la fonction de courant maximale $|\Psi_{\max}|$ et le nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} pour le cas $Gr = 10^5$, $\varphi = 30^\circ$, $Pr = 0.015$ et $Ha = 0$ (régime permanent), et pour un pas de temps adimensionnel $\Delta\tau = 10^{-5}$. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau V.1.

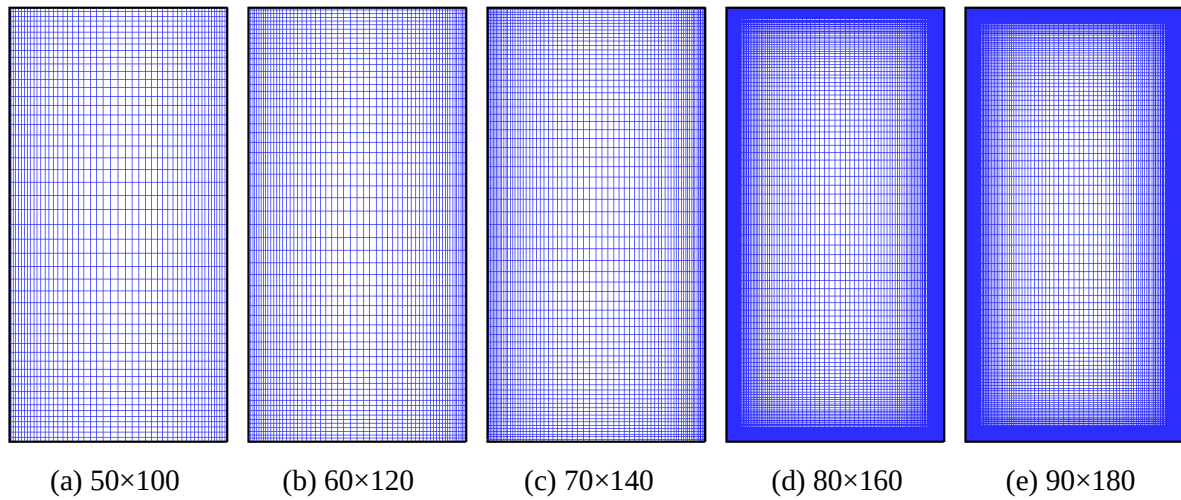


Figure V.1 : Différentes tailles de maillage.

En examinant le Tableau V.1 qui regroupe les valeurs maximales absolues de la fonction de courant Ψ et le nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} , on peut remarquer que l'erreur numérique relative entre tous les maillages est très faible, et ne dépasse pas 7%. On voit également que l'erreur relative faible se manifeste entre les deux maillages 80×160 et 90×180 . Il ne dépasse pas 1% ce qu'indique qu'il donne la même solution numérique du problème.

Tableau V.1 : Comparaison des solutions obtenues avec différentes grilles de maillage.

Grille ($n_r \times n_z$)	50×100	60×120	70×140	80×160	90×180
$ \Psi_{\max} $	34.028	34.022	34.004	34.00	34.001
Nu_{moy}	3.364	3.352	3.301	3.282	3.282

Les données du tableau précédent sont présentées graphiquement sur la [Figure V.2](#), qui nous informe sur la qualité de la solution approchée pour différentes grilles de maillage dans quelques régions du domaine de calcul.

En conclusion, le maillage choisi pour achever les calculs nécessaires de la résolution du problème considéré est celui avec un nombre moyen de points de discrétisation. C-à-d la grille de ($n_r \times n_z = 80 \times 160$) puisqu'elle donne un meilleur compromis entre le temps de calcul et la solution suffisante du problème. C'est le même domaine de calculs considéré dans les travaux de : [Bessaïh et al. \(2009\)](#) et [Mahfoud et Bessaïh \(2011\)](#).

Nos calculs de simulation sont effectués sur un ordinateur personnel avec CPU 2.8 GHz, et le temps de calcul moyen pour un cas typique était environ de 8 heures.

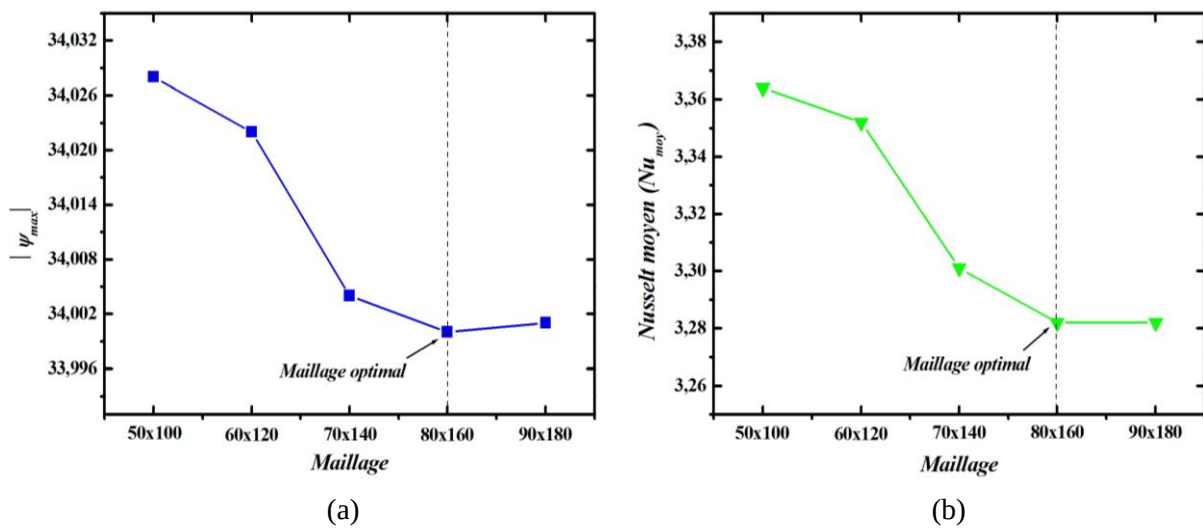


Figure V.2 : Effet du maillage sur la fonction de courant maximale (a) et sur le nombre de Nusselt moyen (b) pour $Gr = 10^5$ et $\varphi = 30^\circ$ (régime permanent).

V.3 Présentations des résultats

Dans cette section on essaye de déterminer les instabilités physiques naissant au sein de l'écoulement de convection naturelle d'un métal liquide ($Pr = 0.015$) contenu dans une cavité cylindrique similaire à celle de Bridgman vertical inclinée, et de rapport d'aspect $Ar = 2$, cet écoulement est soumis à un champ magnétique orienté arbitrairement. Alors la détermination des instabilités physiques se réduit à la détermination du nombre de Grashof caractérisant l'écoulement sous-jacent, à partir duquel l'écoulement devient instable (ne présente pas des solutions uniques quand les temps accroissent).

De la même manière procédée auparavant, pour trouver le nombre de Grashof critique, on effectuera une succession de calculs numériques, en augmentant le nombre de Grashof dans des intervalles prédéterminés. Pour les valeurs du nombre de Hartmann Ha comprises dans l'intervalle (0, 10, 20, 30, 40 et 50) pour différentes orientations ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°), et chaque inclinaison du cylindre φ dans ($0^\circ, 30^\circ$ et 45°).

Avec le maillage de ($n_r \times n_z = 80 \times 160$), les sondes utilisées pour capter les instabilités physiques sont illustrées dans le dessin schématique (Figure V.3): Il y a neuf sondes: $S_1(17, 57)$, $S_2(40, 57)$, $S_3(64, 57)$, $S_4(17, 80)$, $S_5(40, 80)$, $S_6(64, 80)$, $S_7(17, 104)$, $S_8(40, 104)$ et $S_9(64, 104)$, qui enregistrent simultanément l'évolution temporelle des deux composantes de vitesse adimensionnelles u et v , la température adimensionnelle Θ et les valeurs du débit (fonctions de courant Ψ) dans le plan méridien.

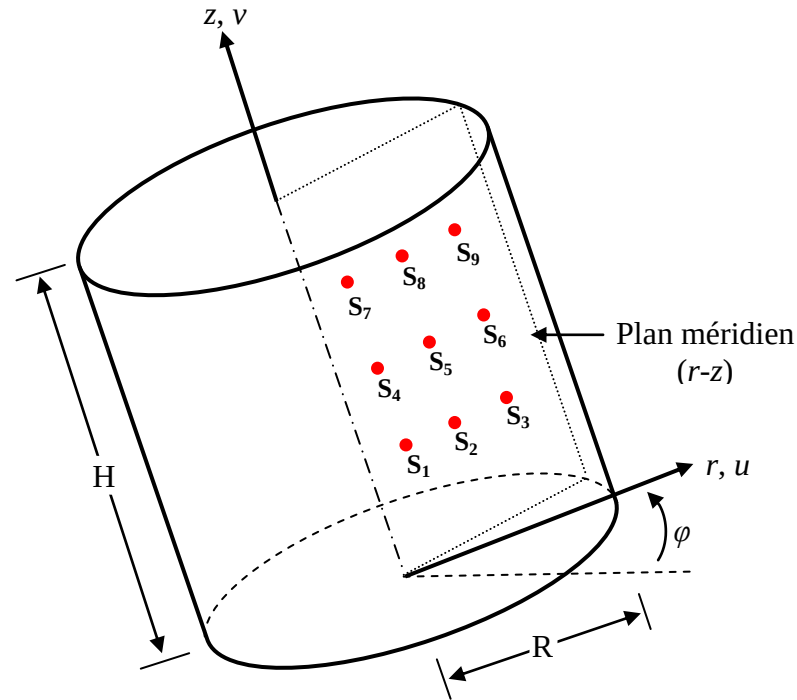


Figure V.3 : Les positions des sondes utilisées dans les calculs numériques.

Tableau V.2 : Coordonnées physiques et logiques des sondes pour le maillage ($n_r \times n_z = 80 \times 160$).

Sondes			S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	S ₉
Coordonnées	Physiques	r	0.099	0.486	0.900	0.099	0.486	0.900	0.099	0.486	0.900
		z	0.200	0.200	0.200	0.967	0.967	0.967	1.800	1.800	1.800
	Logiques		(17,57)	(40,57)	(64,57)	(17,80)	(40,80)	(64,80)	(17,104)	(40,104)	(64,104)

V.3.1 Solution stationnaire

On a présenté sur les [Figures V.4a-b](#) les variations temporelles des paramètres de l'écoulement (composante de vitesse radiale adimensionnelle u , composante de vitesse axiale adimensionnelle v , et de la température adimensionnelle Θ) en deux sondes S_3 et S_8 choisies arbitrairement dans la cavité (voir le [Tableau V.2](#)), pour $Gr = 8 \times 10^5$ et $\phi = 30^\circ$. Nous constatons bien que ces courbes commencent par des faibles oscillations initiales amortissantes dues principalement aux conditions initiales qui sont prises ($u = v = \Theta = 0$) au début du calcul, puis poursuivent par une partie qui tend vers une limite asymptotique et se

stabilise après un temps adimensionnel de $\tau > 0.3$ ($u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, $\Theta = \text{constante}$). Alors que le régime d'écoulement dans l'enceinte est permanent (stationnaire). Notons que les conditions initiales choisies ont une influence sur le temps de l'atténuation de la limite asymptotique.

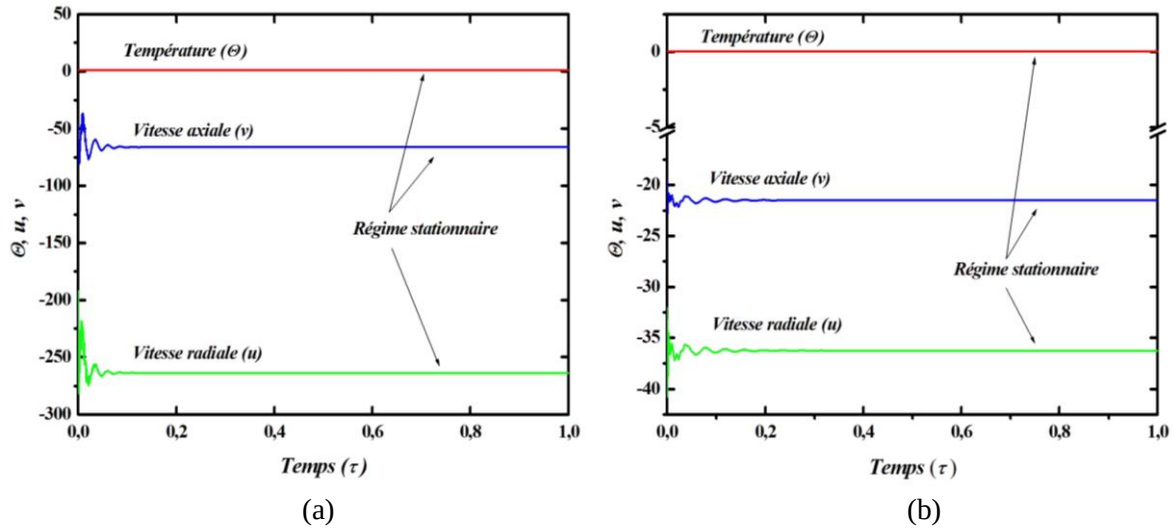


Figure V.4 : Evolutions temporelles des composantes de vitesse u , v et de température Θ dans deux sondes, (a) à la sonde S_3 , (b) à la sonde S_8 , pour $Gr = 8 \times 10^5$ et $\varphi = 30^\circ$ (cas stationnaire).

V.3.1.1 Effet du nombre de Grashof

Dans cette partie, nous voulons voir l'effet du nombre de Grashof dans le régime stationnaire sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur, dans une cavité cylindrique inclinée à $\varphi = 30^\circ$. Pour cela nous avons pris cinq nombres de Grashof, $Gr = 10^4$, 5×10^4 , 10^5 , 5×10^5 et 10^6 .

Sur les [Figures V.5-6](#), nous avons présenté les contours de fonction de courant et les isothermes pour différents nombres de Grashof. Pour les contours de fonction de courant, on remarque pour les faibles nombre de Grashof ($Gr = 10^4$, 5×10^4 et 10^5), que le structure de l'écoulement est constitué d'une cellule située dans l'intervalle $1.2 < z < 1.8$, et circulant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sous l'effet des forces de flottabilité qui agit du bas (disque chaud) vers le haut (disque froid). A partir de $Gr \geq 5 \times 10^5$, la séparation de la cellule principale se produit à côté de la paroi latérale du cylindre ($0.8 < z < 1.4$), et donne une cellule secondaire qui tourne dans le sens inverse. Ce processus peut être expliqué par l'augmentation des vitesses liée à l'augmentation du nombre de Grashof, qui mène les particules à diminuer leurs parcours, ce qui donne la naissance d'une deuxième zone de recirculation dans le sens opposé.

Les isothermes sont perpendiculaires aux parois horizontales (chaude et froide) pour des faibles nombres de Grashof, signifient que le transfert de chaleur par conduction est dominé. Lors de l'augmentation du nombre de Grashof $Gr \geq 10^5$, on voit clairement la courbure des isothermes au centre de la cavité. Nous pouvons relier cette déformation à l'augmentation de la vitesse axiale, ce qui engendre une forte intensité du débit de l'écoulement qui favorise l'aspect convectif dans cette région.

Pour mieux expliquer les phénomènes physiques qui se produisent dans la cavité, nous avons présenté sur les [Figures V.7a-b](#) la distribution axiale de la vitesse radiale $u(r, z = 1)$ et la distribution radiale de la vitesse axiale $v(r = 0.50, z)$ au centre de la cavité, pour différents nombres de Grashof. Il apparaît que ces profils présentent les mêmes allures. Nous remarquons que pour tous les nombres de Grashof, les composantes de vitesse radiale u et axiale v changent leurs directions.

La composante radiale u subit un fort changement que celle axiale v , ceci peut être expliqué par les gradients verticaux importants de température qui sont à l'origine des forces de gravité, qui engendrent des mouvements convectifs importants au sein du fluide. Ainsi, chaque courbe possède trois points où la vitesse est nulle $v = 0$. Par contre, u possède cinq points où la vitesse est nulle ($u = 0$). L'explication de ce fait, est due principalement à l'augmentation du taux de transfert de chaleur (convection naturelle) commandé par l'augmentation du nombre de Grashof.

La [Figure V.8](#) montre la variation du nombre de Nusselt moyen pour différentes valeurs du nombre de Grashof. Nous constatons pour les faibles nombres de Grashof à $Gr = 10^4$, le nombre de Nusselt moyen $Nu_{moy} < 1$, indique que la plupart de transfert de chaleur se fait par conduction. A partir de $Gr \geq 5 \times 10^4$, le transfert de chaleur par convection commence à dominer, et on peut remarquer cette dominance d'après le graphe. L'augmentation du nombre de Grashof provoque une augmentation dans le nombre de Nusselt, c-à-d que l'augmentation des valeurs de Grashof favorise le transfert convectif. On peut justifier cette augmentation par l'accélération de vitesse des particules de métal liquide dans la cavité.

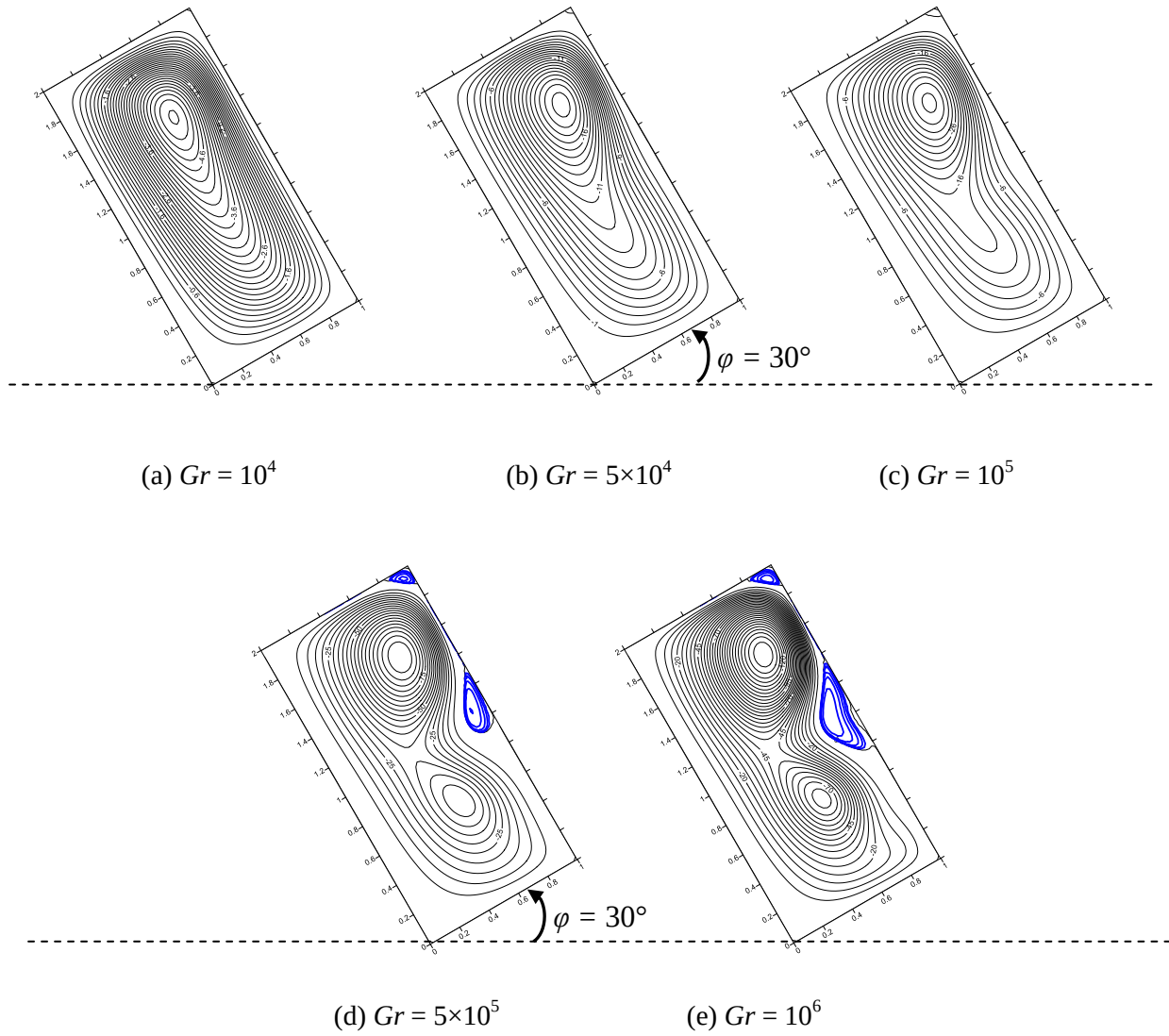


Figure V.5 : Contours de la fonction de courant pour $\varphi = 30^\circ$ et pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 5 \times 10^5$ et 10^6 .

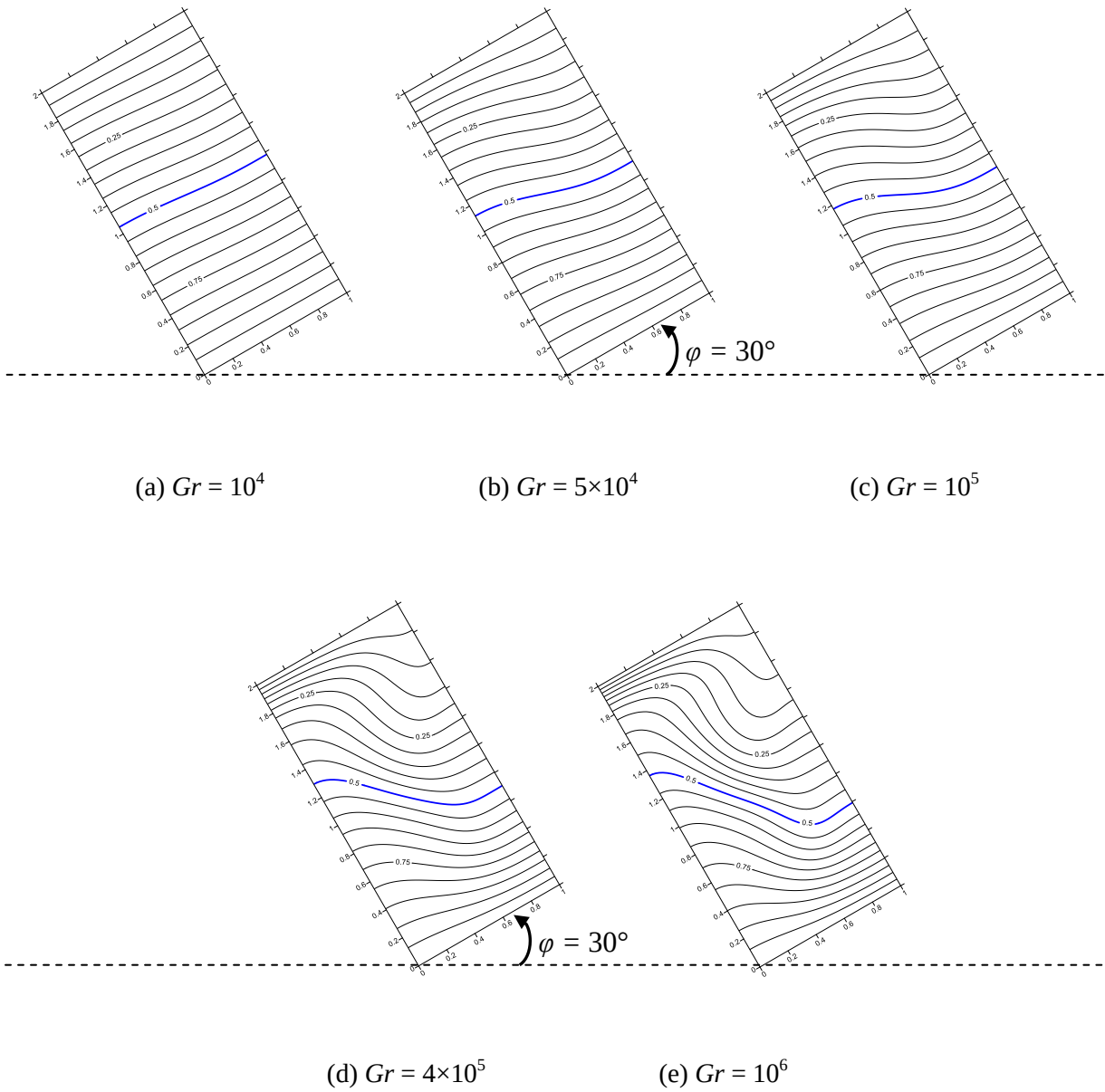


Figure V.6 : Contours des isothermes pour $\varphi = 30^\circ$ et pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4$, 5×10^4 , 10^5 , 5×10^5 et 10^6 .

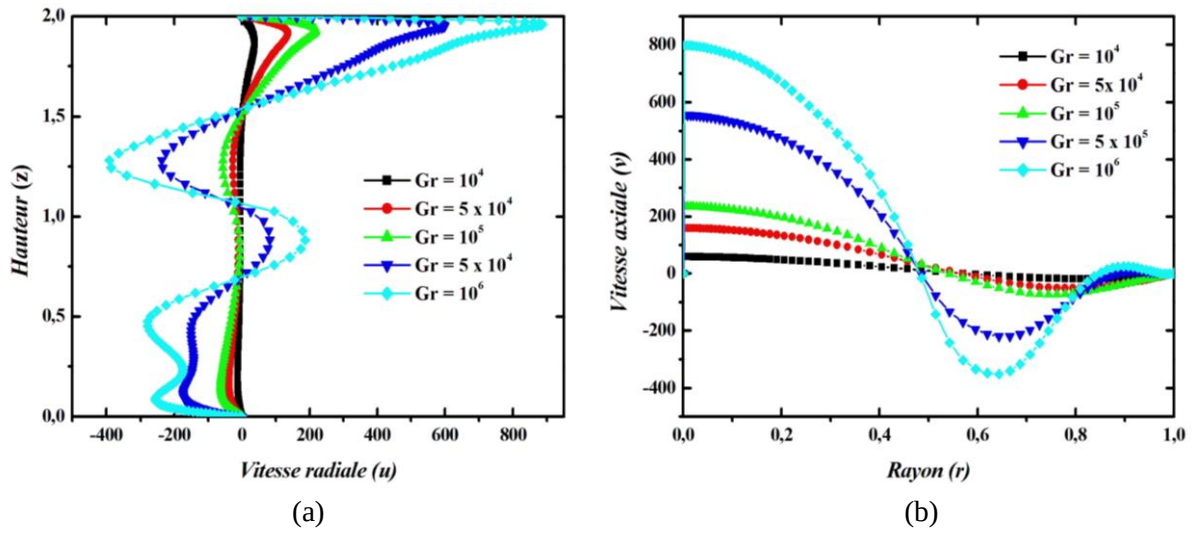


Figure V.7 : Profils de la vitesse radiale u à $z = 1$ (a), et axiale v à $r = 0.50$ (b), pour $\varphi = 30^\circ$ et pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 5 \times 10^5$ et 10^6 .

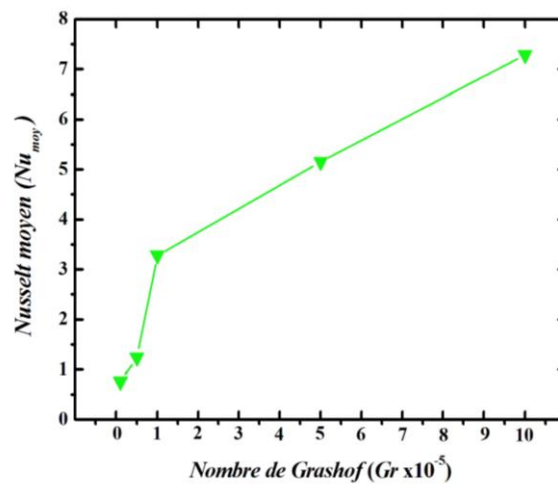


Figure V.8 : Variation du nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} pour différents nombres de Grashof : $Gr = 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 5 \times 10^5$ et 10^6 ($\varphi = 30^\circ$).

V.3.2 Solution instationnaire

Dans cette partie, nous intéressons à la situation en absence du champ magnétique ($Ha = 0$) de l'écoulement étudié en régime transitoire. Pour cette raison, seules les équations (Equations II.30-33) vont être résolues numériquement, sans prendre en compte des termes des forces électromagnétiques (de Lorentz F_{Lz} et F_{Lr}) ajoutés aux équations de Navier-Stokes. On va déterminer le point critique pour lequel l'écoulement devient instable (transitoire), pour cela nous faisons une série de calculs, en augmentant le nombre de Grashof pour un nombre de Prandtl fixe ($Pr = 0.015$). Pour chaque angle d'inclinaison ($\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 40^\circ$), nous détectons le nombre de Grashof critique Gr_{cr} .

V.3.2.1 Seuil des instabilités physiques

Généralement, le début des oscillations apparaît soudainement quand le nombre de Grashof Gr est légèrement augmenté de l'état stationnaire près de l'état critique. La valeur de Gr est prise en tant que critique, auquel l'amplitude d'oscillation des vitesses adimensionnelles est plus grande que 0.01 dans l'oscillation approximativement régulière (Figure V.9), (Wakitani, 2001).

L'aspect oscillatoire (et périodique) des évolutions temporelles des paramètres de l'écoulement (u , v et Θ) enregistré aux différentes sondes $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$, et S_9 (Figures V.10-11) indiquent que les instabilités oscillatoires commencent, et l'écoulement bifurque vers un régime instable. En comparant les amplitudes des paramètres en oscillation, on peut remarquer que ces amplitudes présentent des grandeurs différentes pour les différents points d'enregistrements d'historiques, donc le degré de l'instabilité dépend de la position des particules dans le cylindre. La raison de ces instabilités oscillatoires est étroitement liée au mécanisme de production des cellules secondaires (Figure V.14). Ceci est en bon accord avec le raisonnement de Gelfgat et Tansawa (1994), qui a supposé que l'instabilité est provoquée par l'interaction entre le vortex central et les vortex les plus petits. Ainsi les fréquences d'oscillation sont les mêmes partout (dans le fluide), ce qui justifie la périodicité ($1/F_{cr}$) régnant au sein de l'écoulement en global, cette définition de la périodicité a été utilisée par Lopez et Perry (1992).

Ce comportement oscillatoire des différents paramètres signale l'existence d'un changement continu des structures de l'écoulement (avec périodicité). Egalement, on remarque clairement que les amplitudes des oscillations de la température sont plus petites que celles des vitesses radiales et axiales ceci peut être interprété par la domination du régime

conductif du transfert de chaleur dans ce type d'écoulement de fluides à faible nombre de Prandtl.

Les tracées des composantes adimensionnelles de vitesse dans les plans de phase (selon la terminologie des systèmes dynamiques), sont présentées aux [Figures V.12a-b](#). Ces diagrammes s'appellent portraits de phase, sont des boucles fermées avec des harmoniques dominantes ce qui signifie que le régime d'écoulement périodique est atteint. Les portraits de phase sont utilisés pour inspecter d'une façon intuitive et fiable le régime d'un mouvement, puisqu'ils présentent un point limite lorsque le régime est permanent, ou un cycle limite (dans le cas d'un régime oscillatoire, ou par un tore si le mouvement est apériodique, et par un attracteur étrange (strange attractor) dans le cas du régime chaotique (pour plus de détails voir [Stevens et al. 1999](#)). Outre de cette utilité, on a utilisé les portraits de phase durant les calculs, pour s'assurer que les amplitudes sont uniformes ou en d'autres termes les évolutions temporelles ont le caractère sinusoïdal. Parfaitement, on peut apercevoir ce caractère périodique derrière les cycles limites.

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on a utilisé la transformée de Fourier rapide (**FFT**) ([Benisaad, 2003](#)) d'un nombre de puissance 2 de la valeur de la variation temporelle de la composante horizontale et verticale de vitesse. Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir l'énergie E en fonction des fréquences des oscillations F , définies par : $F = M / (N \times \Delta\tau)$, où $\Delta\tau$ l'incrément du temps et $M = 0, 1, \dots, N/2$. L'énergie est normalisée par N^2 . Les valeurs de $E(F)$ représentent plusieurs échelles de grandeur, dans ce cas on a utilisé son logarithme décimal ([Afrid et Zebib, 1989](#)). On dénote dans notre étude F_{cr} le pic du spectre d'énergie ($F, \text{Log}[E(F) / N^2]$) qui correspond à la fréquence dominante pour $N = 2^{16}$ et $\Delta\tau = 10^{-5}$ ([Figure V.13a](#)). Les fréquences prédominantes adimensionnelles (les plus grands piques) sont considérées comme celles jouant le rôle principal dans l'oscillation de l'écoulement et donc l'échange de l'énergie cinétique et thermique. Notons que l'apparition de plusieurs pics d'une façon multiple de la fréquence dominante est entraînée par le phénomène de bifurcation de l'écoulement ([Gelfgat et Bar-Yosef, 2001](#)).

V.3.2.2 Structure de l'écoulement pendant une période de temps

Dans le but de comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement, on a choisi l'évolution temporelle au cours d'une période de la vitesse radiale adimensionnelle u pour le cas où $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$, pour explorer la structure de

l'écoulement pendant des laps de temps adimensionnels notés par : τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f (Figure V.13b).

La Figure V.14 montre les contours méridiens des lignes de courant hydrodynamiques. Au cours des temps adimensionnels (τ_a , τ_b , τ_c ), on peut remarquer toujours un écoulement multicellulaire avec l'apparition d'une cellule de recirculation à côté de la paroi latérale en renferme un débit massique négatif (lignes de courant en bleu). Alors, les dimensions de cette cellule se changent au cours de temps, en subissant un élargissement puis un rétrécissement pendant chaque période. Le sens de recirculation des particules fluides confinées dans cette cellule est avec la rotation normale des aiguilles d'une montre. A l'instant τ_f , la structure de la fonction de courant est parfaitement semblable à celle de l'instant τ_a , ce que signifie que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique d'environ $1/30.72$ à 0.03255 .

La Figure V.15 illustre les changements des isothermes aux différents instants indiqués par τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f . Outre la périodicité du champ thermique qui règne pendant l'écoulement, on peut constater la courbure importante des isothermes dans la région centrale du domaine du calcul, ce qui indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région.

Nous présentons dans Tableau V.3, les résultats quantitatifs de la présente investigation numérique, qui sont les différentes valeurs des Grashof critique Gr_{cr} , et leurs correspondantes en fréquences critiques Fr_{cr} , pour différentes inclinaisons du cylindre ($\varphi = 0^\circ$, 30° , 45°). Ces valeurs sont bien visualisées graphiquement dans les plans $(Gr_{cr} - \varphi)$ et $(Fr_{cr} - \varphi)$, sous forme de courbes paramétriques (Figures V.16a-b).

Tableau V.3 : Valeurs critiques des paramètres des écoulements oscillatoires.

Inclinaison du cylindre (φ)	Grashof critique (Gr_{cr})	Fréquence critique (Fr_{cr})
0°	7.73×10^5	12.2
30°	4.1×10^6	89.18
45°	9×10^5	30.65

A partir des Figures V.16a-b, Nous remarquons que l'inclinaison du cylindre a un effet important sur la stabilisation de l'écoulement convectif où on trouve une stabilisation optimale pour une inclinaison du cylindre égale à $\varphi = 30^\circ$.

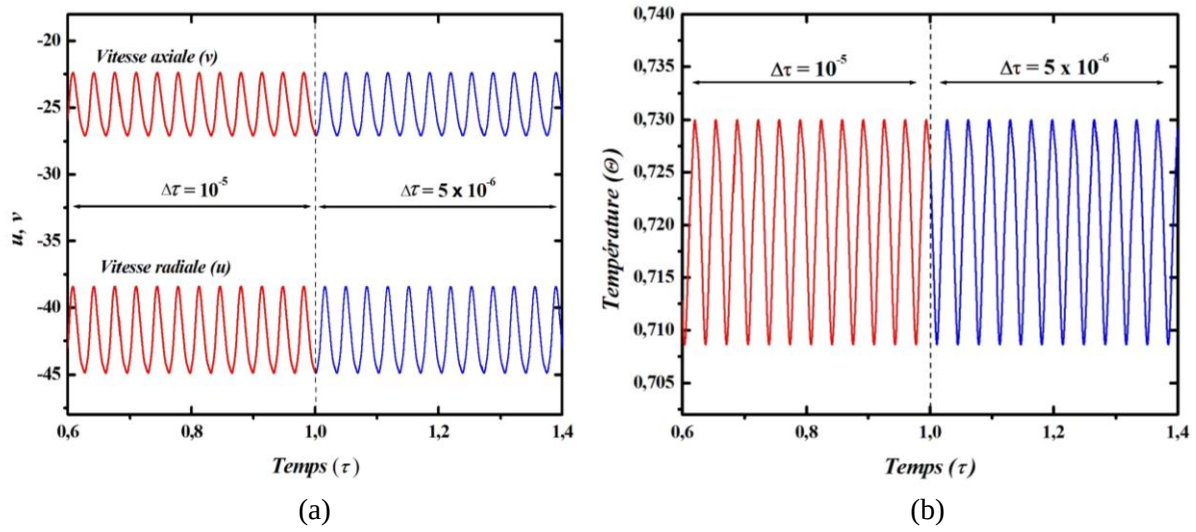


Figure V.9 : Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale u , axiale v (a) et de la température (b), au sonde S_8 , à deux pas de temps consécutifs $\Delta\tau$ et $\Delta\tau/2$, pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\phi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).

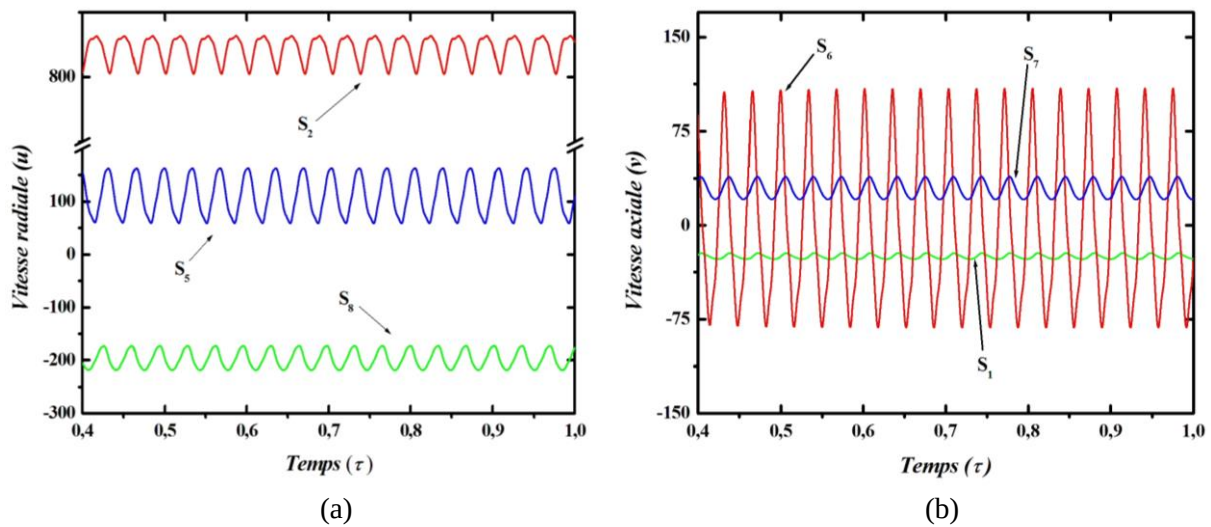


Figure V.10 : Evolution temporelle de la composante de la vitesse adimensionnelle radiale u (a), et axiale v (b), aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\phi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).

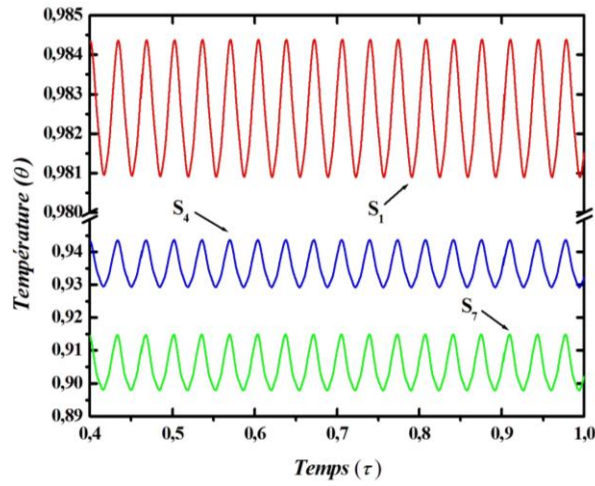


Figure V.11 : Evolution temporelle de la température adimensionnelle Θ , aux différents points choisis arbitrairement dans la cavité pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).

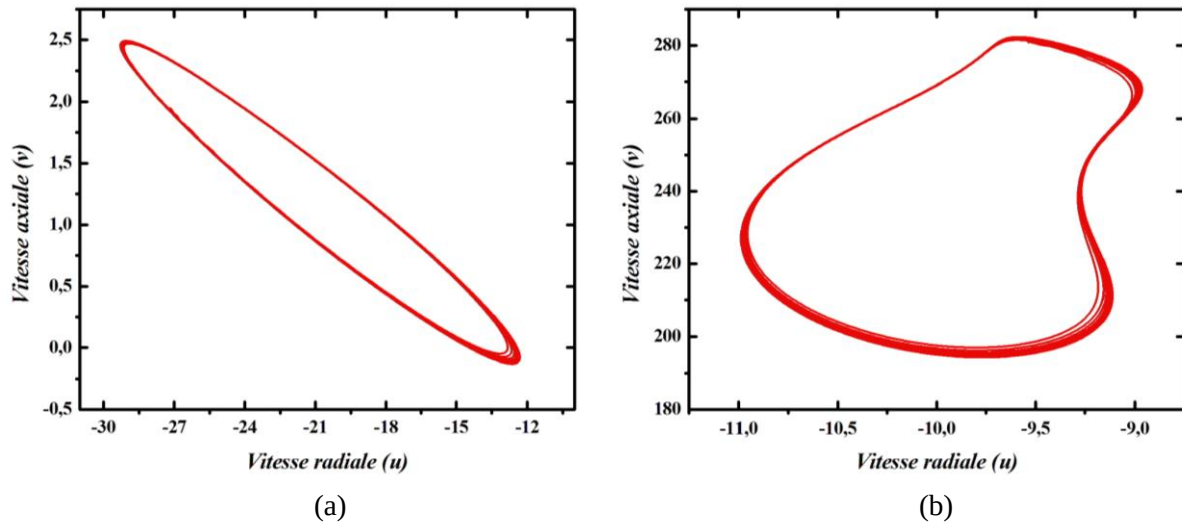


Figure V.12 : Portraits de phase dans le plan (v, u) aux sondes S_2 (a) et S_4 (b), pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (régime oscillatoire).

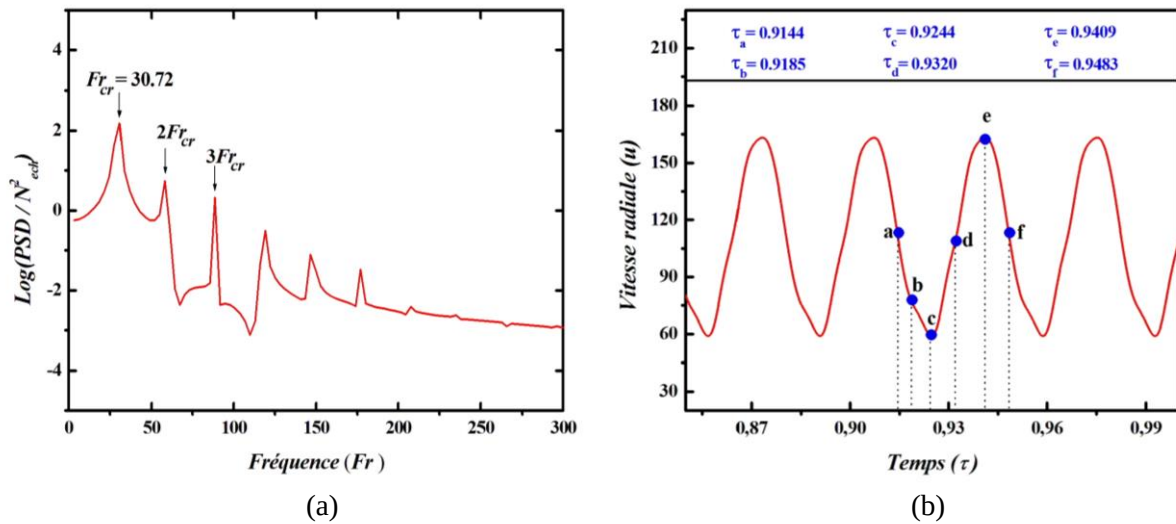


Figure V.13 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse radiale adimensionnelle u au sonde S_5 , pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale adimensionnelle u au sonde S_6 , en indication ; les instants adimensionnels (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f) sont utilisés pour la visualisation des structures de l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$ (b).

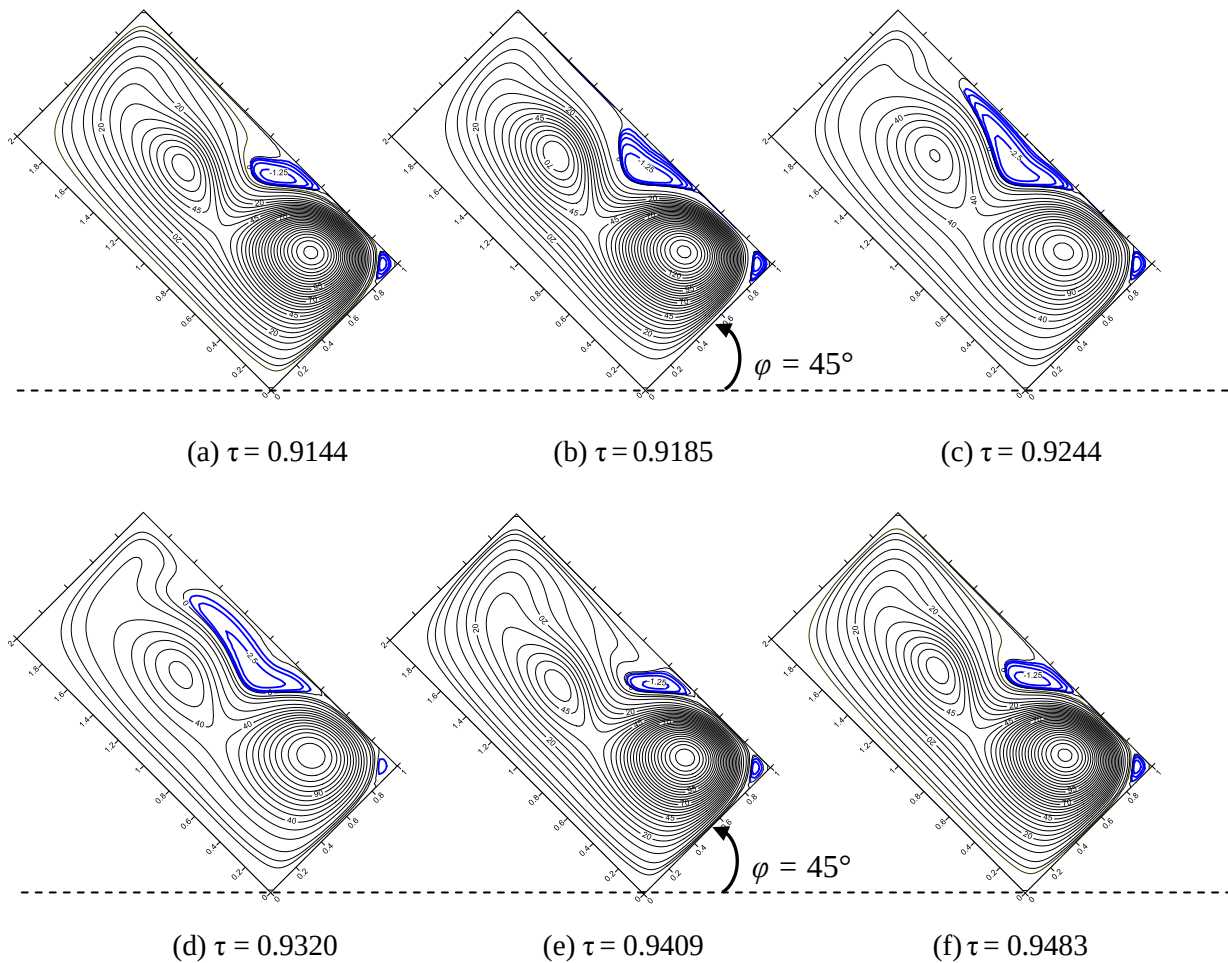


Figure V.14 : Evolution temporelle des contours de la fonction de courant adimensionnelle Ψ aux instants indiqués par (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f) pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$.

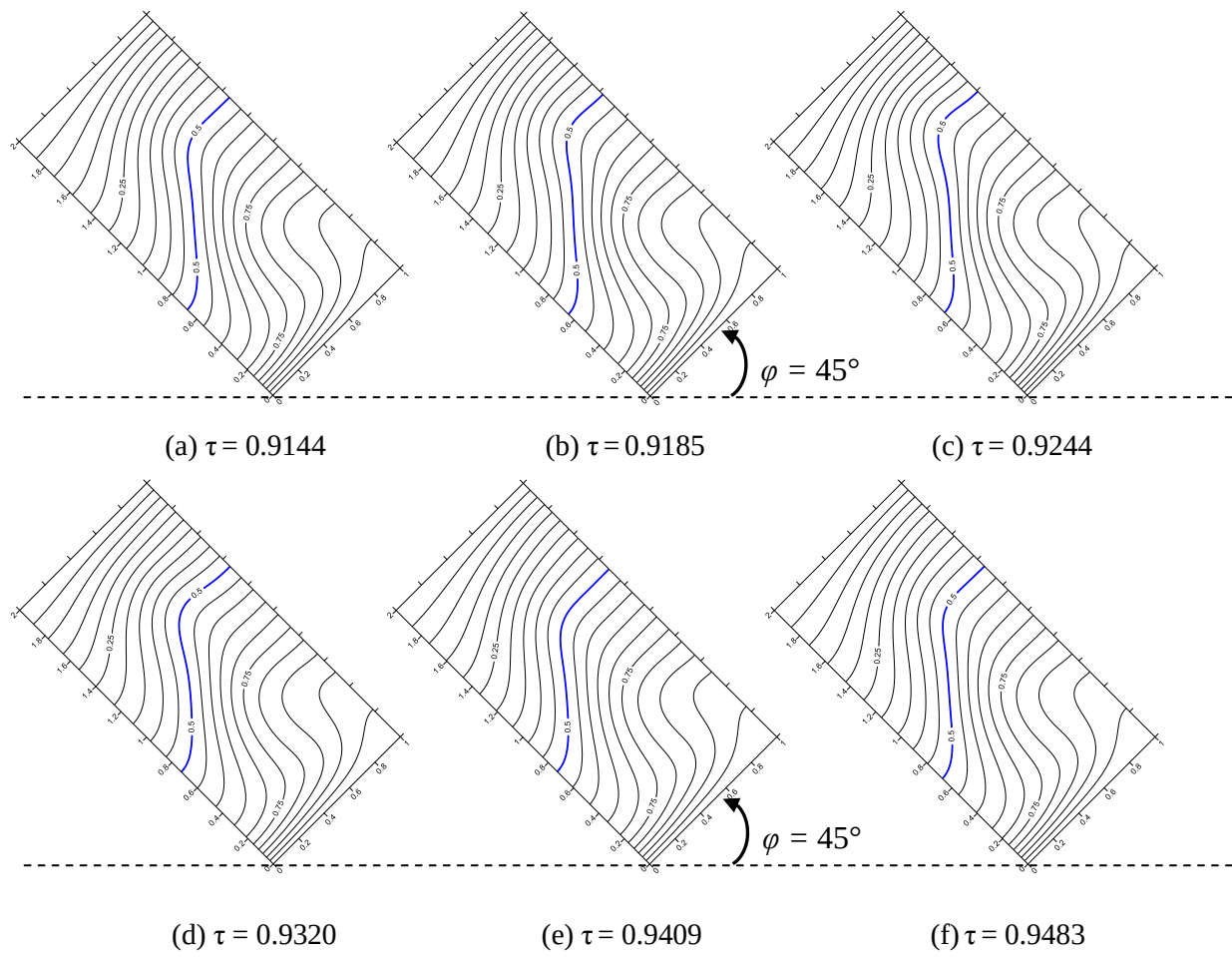


Figure V.15 : Variation temporelle des isothermes dans l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^5$ et $\varphi = 45^\circ$, représentée aux différents instants adimensionnels (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f).

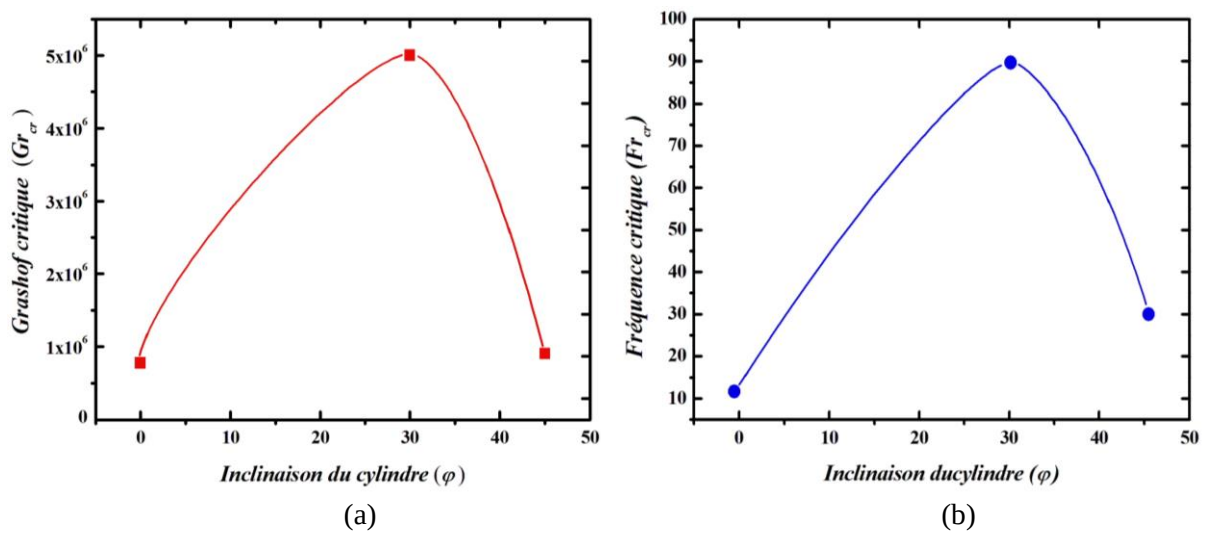


Figure V.16 : Nombre de Grashof critique Gr_{cr} en régime oscillatoire (a), et la fréquence correspondante Fr_{cr} (b) en fonction de l'inclinaison du cylindre φ

V.3.2.3 Effet du champ magnétique

Le champ magnétique est reconnu par l'effet stabilisant des écoulements convectifs qui sont les principaux responsables des distributions des inhomogénéités compositionnelles (conduisant à la macro-ségrégation). En outre, la capacité du champ magnétique à supprimer les écoulements convectifs avec ou sans changement de phase (phénomènes des instabilités des écoulements convectifs, bifurcation) est envisageable.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à étudier l'effet d'un champ magnétique externe sur un fluide conducteur de l'électricité. Pour cela, nous avons pris les mêmes propriétés du fluide que ceux du travail de [Bessaïh et al. \(2009\)](#).

Un champ magnétique externe sera appliqué pour différentes intensités et orientations en cherchant les meilleures conditions magnétohydrodynamiques de la production des cristaux de bonne qualité. Suivant la méthodologie de l'étude d'un écoulement exposé à un champ magnétique extérieur et uniforme ([Bessaïh et al. 2009](#); [Gelfgat et Yoseph 2001](#)), nous considérons dans ce travail les valeurs de Hartmann, $Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50 . Un champ magnétique d'intensité moyenne où faible est choisi, pour éviter le phénomène d'échauffement magnétique qui se manifeste lorsque le champ magnétique est d'intensité forte ([Dulikravich, 1999](#) ; [Bouabdallah et Bessaïh, 2012](#)). Alors que pour les métaux liquides et les semi-conducteurs avec une échelle de longueur de $0,01$ [m], utilisée dans des ampoules de croissance, le champ magnétique appliqué est de l'ordre de $0,1- 0,5$ Tesla. C'est un champ magnétique externe relativement faible qui a pour but de stabiliser l'écoulement conducteur d'électricité. Au-delà de ces valeurs de $Ha > 150$, on se trouve avec un phénomène inverse (déstabilisation de l'écoulement). Ce cas n'est pas pris en compte dans ce travail et le lecteur intéressé par les phénomènes de déstabilisation magnétique est invité à consulter le travail de [Kaneda et al. \(2006\)](#).

Dans la présente partie de cette thèse, nous intéressons à la situation en présence du champ magnétique orienté arbitrairement à la configuration étudiée en régime transitoire, donc on a résolu numériquement le système d'équations EDP figurant au deuxième chapitre, y compris l'équation du potentiel électrique.

Sur la [Figure V.17](#), nous avons présenté l'effet du champ magnétique radial (B_r) de différentes intensités ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50) sur les oscillations du temps de la vitesse axiale v , pour le cas $Gr = 2.1 \times 10^6$ et $\varphi = 0$. On remarque que l'application du champ magnétique a un effet important sur les oscillations, où l'accroissement de l'intensité du

champ magnétique entraîne une diminution de l'amplitude des perturbations associée à une augmentation de la période d'oscillation.

V.3.2.3a Structure de l'écoulement pendant une période de temps

Pour mieux comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement en présence du champ magnétique, on a choisi l'évolution temporelle de la fonction de courant adimensionnelle et les isothermes, au sonde S_6 pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$, $Ha = 30$ et $\varphi = 0$, et en suivant l'historique de la structure de l'écoulement aux instants adimensionnels choisis τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f (Figure V.17b).

A partir de la Figure V.18, on remarque pour tous les instants que l'écoulement est bicellulaire à cause de la force électromagnétique qui agit en opposition de la force de flottabilité. Ces cellules de recirculation sont opposées et subites des changements graduels dans ses dimensions, alors les particules fluides meuvent dans le sens horaire à côté du disque supérieure et sens antihoraire a côté u disque inferieur. Remarquons qu'au premier instant τ_a , la structure de la fonction de courant est parfaitement semblable à celle de l'instant τ_f , ce qui prouve que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique.

La Figure V.19 illustre aussi les changements des isothermes aux différents instants indiqués par: τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e , et τ_f . Outre la périodicité du champ thermique qui règne pendant l'écoulement. On peut constater une courbure importante des isothermes dans la région centrale du domaine de calcul, ce indique que le régime du transfert thermique est essentiellement convectif dans cette région.

V.3.2.3.b Diagrammes de stabilité magnétique

L'évolution du nombre de Grashof critique Gr_{cr} et la fréquence correspondante Fr_{cr} , pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50), est illustrée sur le Tableau V.4. Le champ magnétique est appliqué suivant la direction radiale. On constate que plus le nombre de Hartmann augmente, plus le nombre de Grashof critique et la fréquence correspondante augmentent. La dépendance de ces nombres est présentée sur les Figures V.20a-b. Ces figures représentent les diagrammes de stabilité magnétique ($Gr_{cr} - Ha$) et ($Fr_{cr} - Ha$). Cette dépendance montre l'évolution du nombre de Grashof critique Gr_{cr} avec l'augmentation du nombre de Hartmann Ha , associé à l'augmentation de l'intensité de la force électromagnétique (force de Lorentz). Notons que pour des nombres de $Ha > 30$,

l'écoulement présente une ralentisse totale à cause de la forte dominance de l'effet magnétique par rapport aux d'autres forces de volume. Cette conclusion, se conforme avec celle mentionnée dans le travail de [Gonçalves et al. \(2005\)](#). En conséquence, un champ magnétique plus fort est nécessaire pour garder l'écoulement stable pour des valeurs élevées du nombre de Grashof critique.

L'évolution du taux de transfert thermique Nu_{moy} pour différents nombres de Hartmann est présentée sur la [Figure V. 21](#). On constate que plus le nombre de Hartmann augmente, plus le taux de transfert de chaleur diminue. Le nombre de Nusselt passe de 9.45 pour $Ha = 0$ à une valeur proche de 2 pour $Ha = 50$, ce que signifie que la convection thermique se stabilise. Donc le champ magnétique permet de stabiliser l'écoulement de la convection naturelle.

Tableau V.4 : Variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , avec l'augmentation du champ magnétique ($Ha = 0 - 50$).

Ha	Gr_{cr}	Fr_{cr}
0	7.73×10^5	12.2
10	$2,6 \times 10^6$	70,08
20	$4,08 \times 10^6$	116,35
30	9×10^6	216,09
40	$3,7 \times 10^7$	436,11
50	$6,3 \times 10^7$	634,25

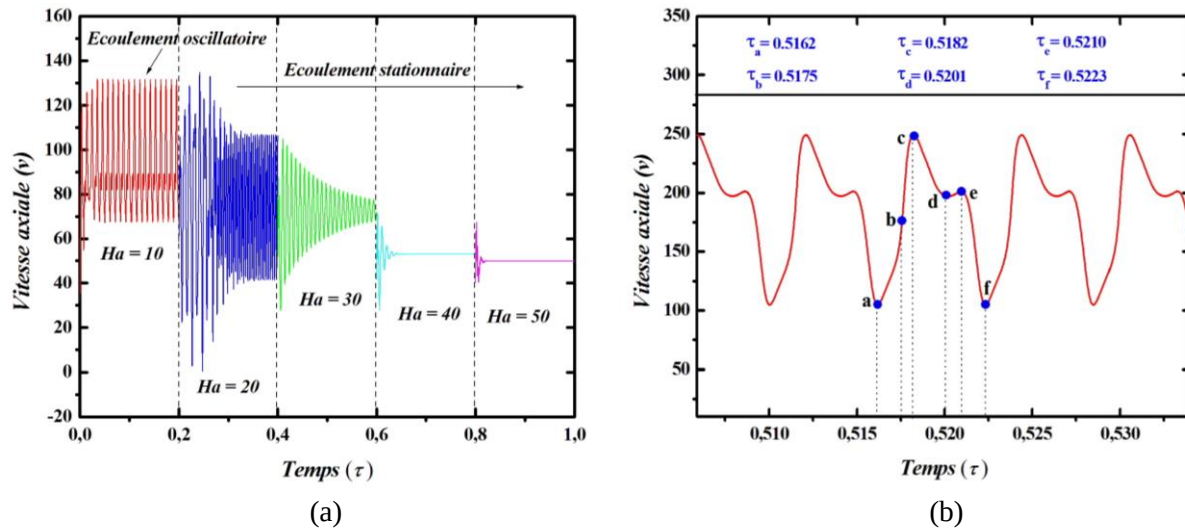
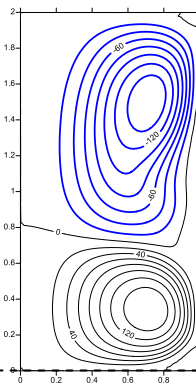
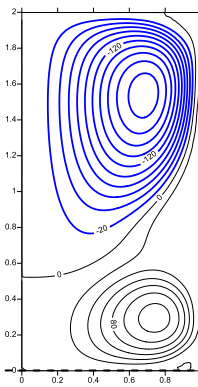


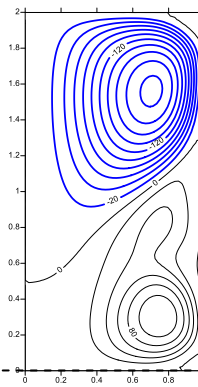
Figure V.17: Atténuation de la variation temporelle de la vitesse axiale v par un champ magnétique radial au sonde S_7 , pour $Gr = 2.1 \times 10^6$ et $\phi = 0$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_8 , en indication ; les instants adimensionnels (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d , τ_e et τ_f) sont utilisés pour la visualisation des structures de l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$, $\phi = 0$ et $Ha = 30$ (b).



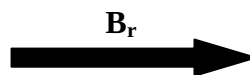
(a) $\tau = 0.5162$



(b) $\tau = 0.5175$



(c) $\tau = 0.5182$



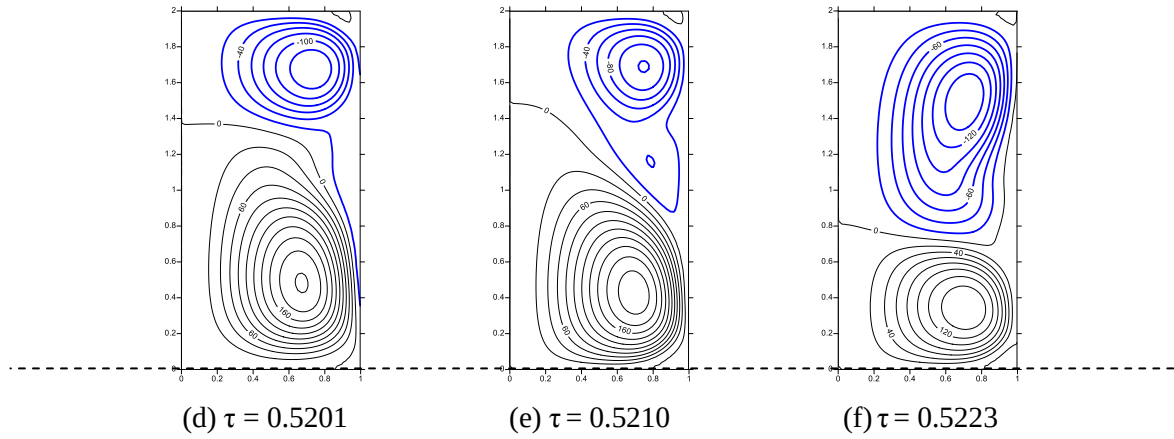


Figure V.18 : Evolution temporelle des contours de la fonction de courant adimensionnelle Ψ aux instants indiqués par $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$, pour $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$, $\varphi = 0$ et $Ha = 30$.

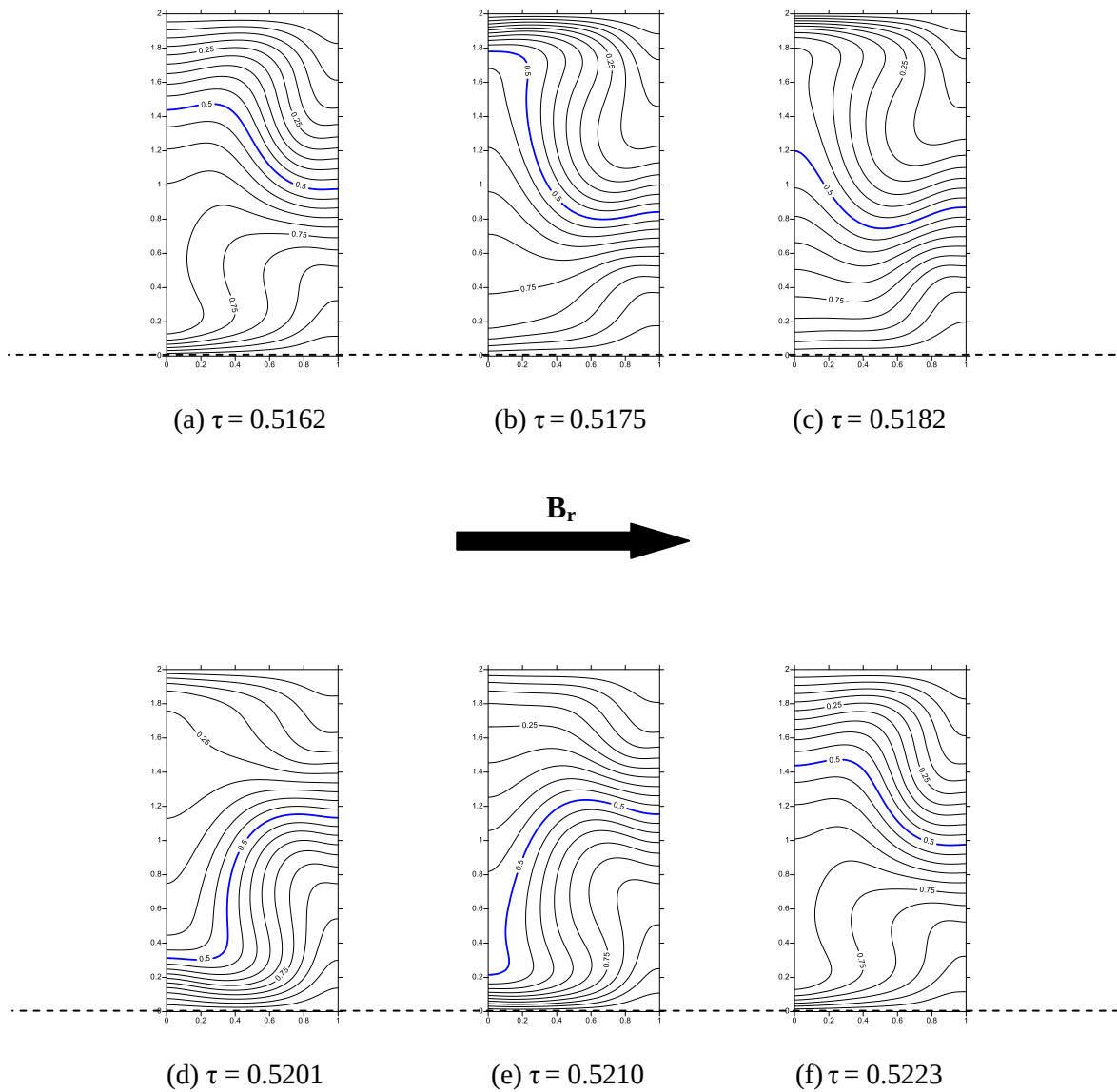


Figure V.19 : Variation temporelle des isothermes dans l'écoulement à $Gr_{cr} = 9 \times 10^6$ et $\varphi = 0$, représentée aux différents instants adimensionnels $(\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_d, \tau_e$ et $\tau_f)$.

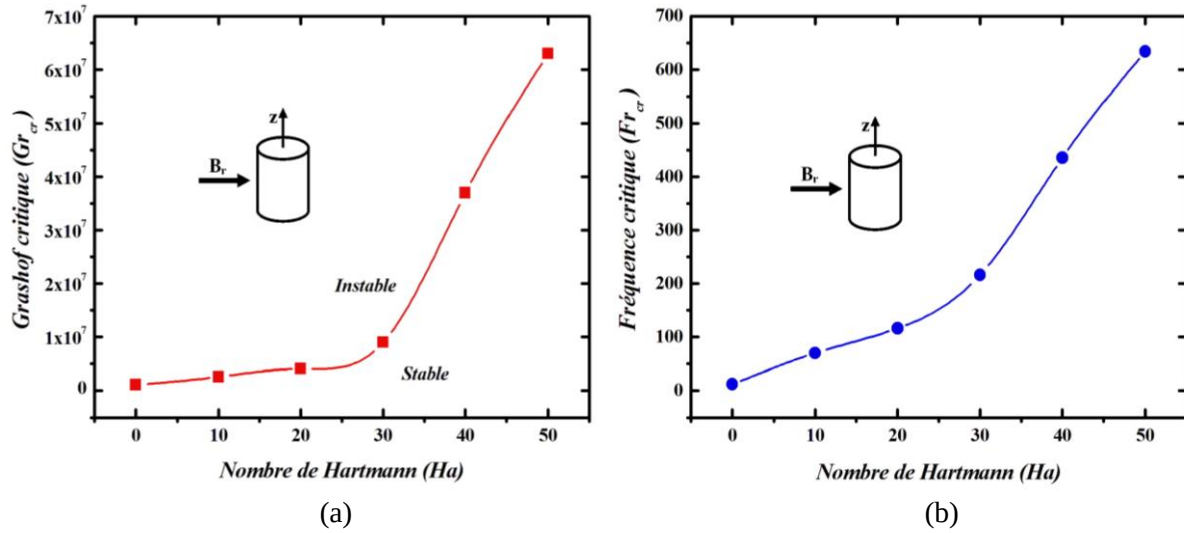


Figure V.20 : Diagrammes de stabilité magnétique: (Gr_{cr} - Ha) (a) et (Fr_{cr} - Ha) (b).

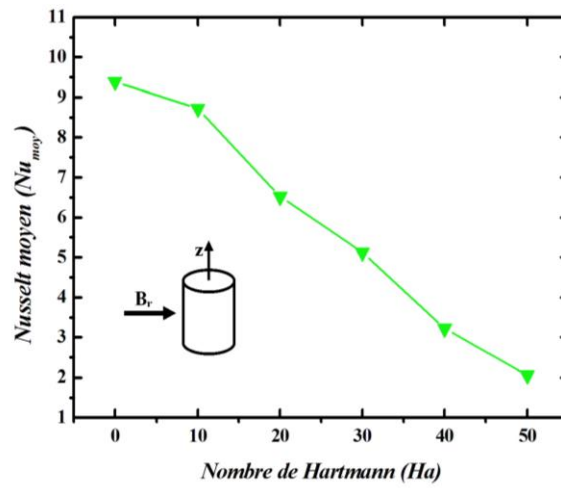


Figure V.21 : Variation du nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} pour différents nombres de Hartmann : $Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50 . ($\varphi = 0^\circ$).

V.3.2.4 Effet d'orientation du champ magnétique

Pour présenter l'effet de l'orientation du champ magnétique sur le champ de l'écoulement et le champ thermique, on fixe l'inclinaison du cylindre à $\varphi = 0$, et on fait varier l'angle d'orientation du champ magnétique dans l'intervalle $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$.

Selon le travail de [Gelfgat et Yoseph \(2001\)](#), nous rapportons seulement les résultats pour les angles positifs, et notons que pour les angles négatifs ($-\delta$) les résultats du calcul sont les mêmes comme dans l'intervalle $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$.

Les nombres de Grashof critiques Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , pour différentes intensités du champ magnétique ($Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50), et différentes orientations ($\delta = 0^\circ, 30^\circ$ et 45°), associés au caractère oscillatoire (périodique) du champ de l'écoulement et du champ thermique, sont récapitulés dans [Tableau V.5](#).

Ces résultats sont illustrés schématiquement sur les [Figures V.22a-b](#), qui représentent les diagrammes de stabilité magnétique ($Gr_{cr}-Ha$) et ($Fr_{cr}-Ha$). Ces courbes montrent l'augmentation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} en fonction du nombre de Hartmann Ha , et de même pour les fréquences correspondantes Fr_{cr} , à l'exception du cas de $Ha = 30$ et $\delta = 90^\circ$, où il y'a une légère diminution du nombre de Gr_{cr} (ce cas a été aussi obtenu par [Gelfgat et al. 1999](#)).

On peut avoir également que, l'orientation du champ magnétique a un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement convectif, où la meilleure stabilisation est trouvée pour le champ magnétique orienté suivant la direction radiale ($\delta = 0$). Ce résultat peut justifier que, lors de l'application du champ magnétique radiale, il y a des forces électromagnétiques naissant selon la direction axiale du cylindre qui sont parallèles et à l'inverse du gradient de température c-à-d agies en opposition de la force de flottabilité et provoque une réduction de la vitesse des particules fluides. Egalemt, des fortes intensités du champ magnétique sont nécessaires pour retarder le régime d'écoulement à des valeurs de nombre de Grashof élevées.

Tableau V.5 : Variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , avec l'augmentation du champ magnétique ($Ha = 0 - 50$), et pour $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$.

Ha	δ	Gr_{cr}	Fr_{cr}
0	---	7.73×10^5	12.2
10	0°	$2,6 \times 10^6$	70,08
	30°	$2,3 \times 10^6$	49,08
	45°	$1,1 \times 10^6$	40,21
	90°	$1,2 \times 10^6$	16,01
20	0°	$4,08 \times 10^6$	116,35
	30°	$3,3 \times 10^6$	71,15
	45°	$3,1 \times 10^6$	60,85
	90°	$2,11 \times 10^6$	39,88
30	0°	9×10^6	216,09
	30°	$4,2 \times 10^6$	128,09
	45°	$3,7 \times 10^6$	101,44
	90°	$1,82 \times 10^6$	46,07
40	0°	$3,7 \times 10^7$	436,11
	30°	8×10^6	185,35
	45°	$4,4 \times 10^6$	112,98
	90°	$3,2 \times 10^6$	54,51
50	0°	$6,3 \times 10^7$	634,25
	30°	$1,8 \times 10^7$	208,21
	45°	$6,1 \times 10^6$	121,96
	90°	$5,3 \times 10^6$	66,2

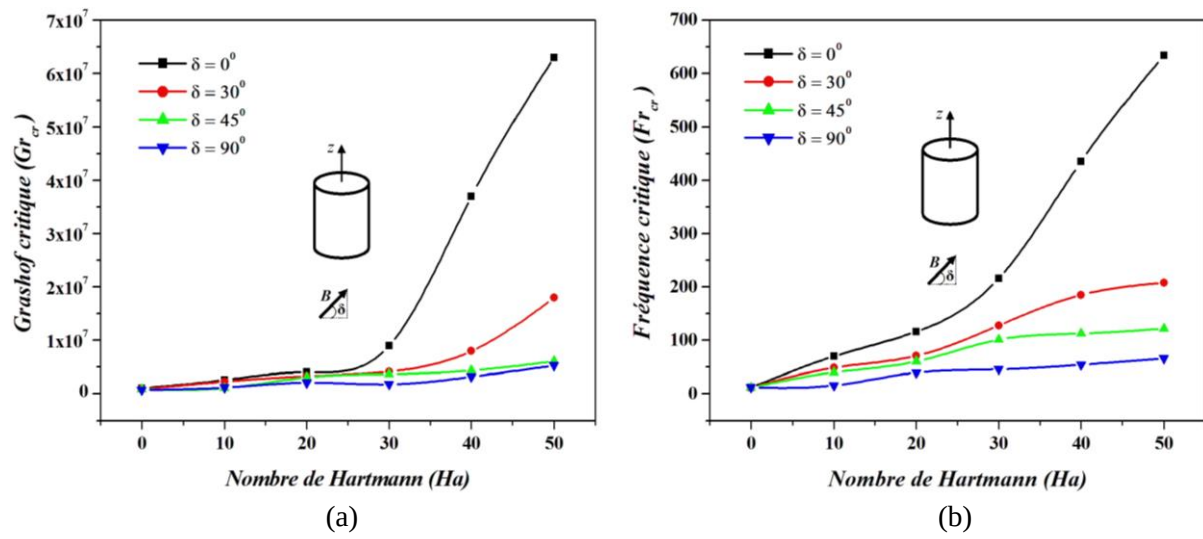


Figure V. 22 : Diagrammes de stabilité magnétique (Gr_{cr} - Ha) (a) et (Fr_{cr} - Ha) (b), pour différentes orientations du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°).

V.3.2.5 Combinaison entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique

Dans cette partie nous voulons voir l'effet de la combinaison entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique sur la stabilisation de la convection. Pour cela nous avons varié l'orientation du champ magnétique de $\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ à 90° pour chaque inclinaison du cylindre ($\varphi = 30^\circ$ et 45°), les résultats obtenus sont illustrés dans le [Tableau V.6](#).

Tableau V.6 : Evolution du nombre de Grashof critique Gr_{cr} , et les fréquences critiques correspondantes Fr_{cr} , avec l'augmentation du champ magnétique dans le cas de combinaison entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique.

Ha	δ	$\varphi = 30^\circ$		$\varphi = 45^\circ$	
		Gr_{cr}	Fr_{cr}	Gr_{cr}	Fr_{cr}
0	---	$4,1 \times 10^6$	89,18	9×10^5	30,65
10	0°	$8,2 \times 10^6$	120,08	3×10^6	65,08
	30°	6×10^6	108,08	2×10^6	44,08
	45°	$5,6 \times 10^6$	100,21	$1,2 \times 10^6$	51,21
	90°	6×10^6	92,01	2×10^6	55,01
20	0°	$9,3 \times 10^6$	160,35	$5,2 \times 10^6$	100,35
	30°	$7,5 \times 10^6$	121,15	5×10^6	66,15
	45°	$6,3 \times 10^6$	130,85	$4,1 \times 10^6$	62,85
	90°	$5,3 \times 10^6$	100,88	$2,86 \times 10^6$	61,88
30	0°	$3,2 \times 10^7$	240,09	$8,6 \times 10^6$	150,09
	30°	$2,2 \times 10^7$	198,09	$6,9 \times 10^6$	120,09
	45°	$1,3 \times 10^7$	199,44	$7,3 \times 10^6$	110,44
	90°	$8,43 \times 10^6$	122,07	$4,11 \times 10^6$	102,07
40	0°	$5,4 \times 10^7$	466,11	$1,8 \times 10^7$	208,11
	30°	$4,4 \times 10^7$	385,35	1×10^7	185,35
	45°	$4,5 \times 10^7$	280,98	$9,6 \times 10^6$	162,98
	90°	$1,6 \times 10^7$	200,51	6×10^6	154,51
50	0°	$9,2 \times 10^7$	680,25	3×10^7	263,25
	30°	$7,8 \times 10^7$	670,21	$2,8 \times 10^7$	258,21
	45°	7×10^7	520,96	$2,4 \times 10^7$	208,96
	90°	$3,85 \times 10^7$	468,2	10^7	189,2

La dépendance du nombre de Grashof critique Gr_{cr} et la fréquence correspondante Fr_{cr} pour différents nombres de Hartmann correspond à différentes orientations du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°) et différentes inclinaisons du cylindre ($\varphi = 30^\circ$ et 45°) est présentée sur les [Figures V. 23-24](#). Il est clair que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique (Ha) provoque une augmentation du nombre de Grashof critique, et que cette augmentation devient très importante à partir de $Ha > 30$. La combinaison entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique montre que la meilleure stabilisation est trouvée dans le cas où le cylindre incliné à $\varphi = 30^\circ$, et avec un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale ($\delta = 0^\circ$). Aussi, on peut constater une nouvelle information concernant la combinaison entre l'orientation du champ magnétique et l'inclinaison du cylindre, qui nous donne la possibilité stabilisation de l'écoulement par différentes méthodes, soit par l'inclinaison du cylindre, soit par l'orientation du champ magnétique, ou soit par la combinaison entre les deux.

Sur les [Figures V. 23-24](#), nous avons présenté les diagrammes de stabilité pour $\varphi = 30^\circ$ et 45° respectivement et pour différentes orientations du champ magnétique. La ligne discontinue tracé sur les [Figures V. 23a, V.24a](#), qui correspond à la valeur du Gr_{cr} pour une inclinaison du cylindre $\varphi = 30^\circ$ et sans champ magnétique (inclinaison correspond à une meilleure stabilisation), nous a permet de trouver une relation entre l'inclinaison du cylindre et l'orientation du champ magnétique. Par exemple on peut trouver le nombre de Grashof critique $Gr_{cr} = 4.1 \times 10^6$ par différentes méthodes (les points d'intersection entre la ligne discontinue et les graphes):

- Inclinaison du cylindre à $\varphi = 30^\circ$ sans champ magnétique ($Ha = 0$).
- Inclinaison du cylindre à $\varphi = 45^\circ$ avec $Ha = 20$ orienté suivant $\delta = 45^\circ$.
- Inclinaison du cylindre à $\varphi = 45^\circ$ avec $Ha = 30$ orienté suivant $\delta = 90^\circ$.
- Inclinaison du cylindre à $\varphi = 45^\circ$ avec $Ha = 17.47$ orienté suivant $\delta = 30^\circ$.
- Inclinaison du cylindre à $\varphi = 45^\circ$ avec $Ha = 15.14$ orienté suivant $\delta = 0^\circ$.

Ces résultats permettront aux expérimentateurs et industriels de connaître les régimes oscillatoires naissants durant les écoulements des métaux liquides, par différentes méthodes selon les moyens disponibles, afin de faciliter le traitement et d'améliorer la qualité des semi-conducteurs obtenus.

La [Figure V. 25](#) représente la variation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} en fonction du nombre de Hartmann, dans le cas où les angles d'inclinaison du cylindre et d'orientation du champ magnétique sont égaux $\varphi = \delta = 0^\circ = 30^\circ = 45^\circ$. La comparaison entre ces courbes

permet de conclure que le cas $\varphi = \delta = 30^\circ$, c'est l'orientation et l'inclinaison provoquant la meilleure stabilisation de l'écoulement. C-à-d le nombre de Grashof critique Gr_{cr} se retarde à des valeurs élevées par rapport aux autres cas.

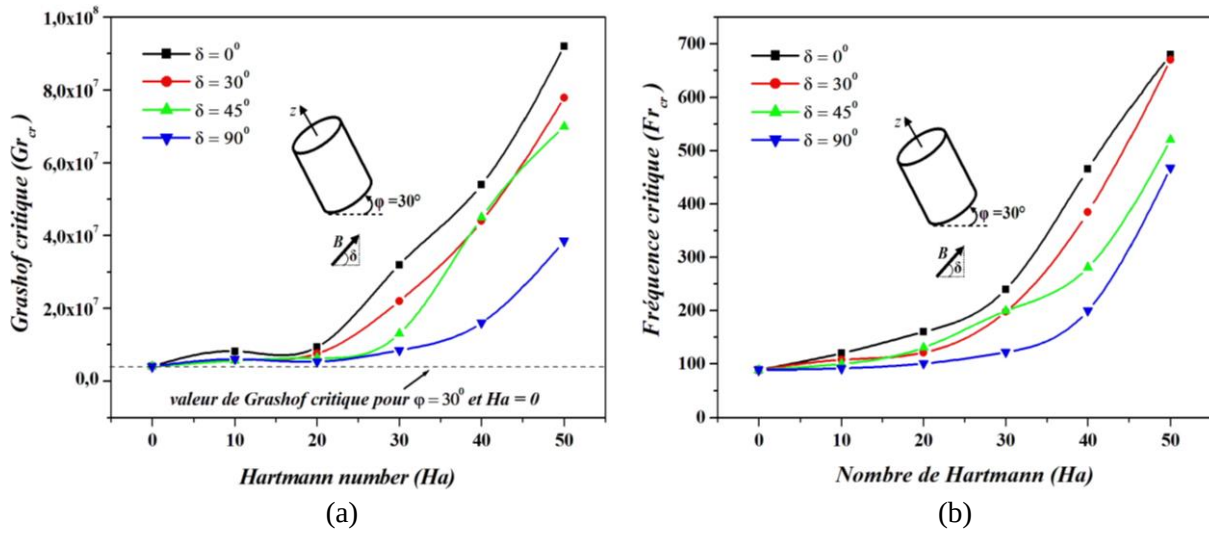


Figure V. 23 : Diagrammes de stabilité magnétique ($Gr_{cr} - Ha$) (a) et ($Fr_{cr} - Ha$) (b), pour $\varphi = 30^\circ$ et différentes orientations du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°).

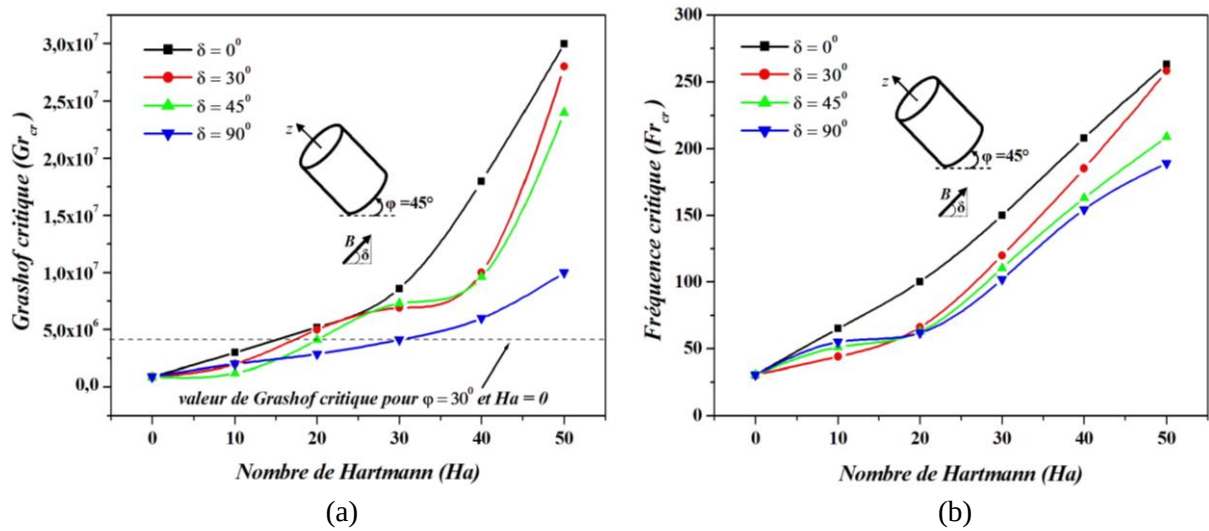


Figure V. 24 : Diagrammes de stabilité magnétique ($Gr_{cr} - Ha$) (a) et ($Fr_{cr} - Ha$) (b), pour $\varphi = 45^\circ$ et différentes orientations du champ magnétique ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°).

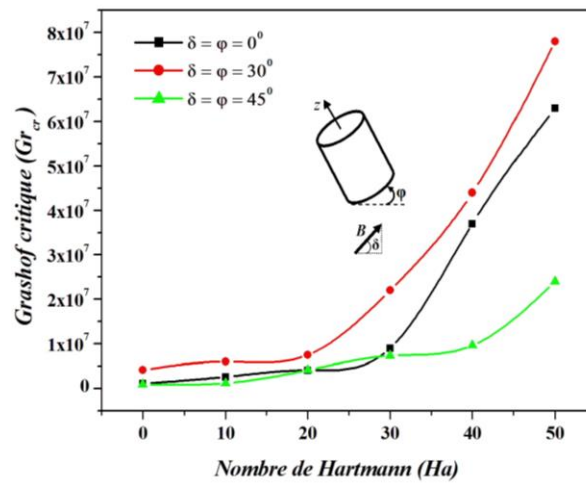


Figure V.25 : Diagrammes de stabilité magnétique (Gr_{cr} - Ha), dans le cas $\varphi = \delta$.

V.4 Conclusion du chapitre V

Une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité cylindrique similaire à celle de Bridgman vertical a été présentée. L'étude est menée pour un fluide de faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.015$), et différents inclinaisons du cylindre ($\varphi = 0^\circ, 30^\circ$ et 45°). Le champ magnétique est appliqué pour différentes intensités ($Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50) et orientations ($\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90°). Nos résultats montrent que :

- En régime stationnaire, le nombre de Grashof influe sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, et que leur augmentation provoque une augmentation de la vitesse des particules de fluide qui résulte une augmentation considérable dans le taux de transfert thermique.
- L'inclinaison du cylindre a un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement et que la meilleure stabilisation se trouve pour l'inclinaison $\varphi = 30^\circ$.
- L'application d'un champ magnétique extérieur de différentes orientations et intensités fournit un effet de stabilisation de l'écoulement. L'augmentation du nombre de Hartmann Ha entraîne une augmentation du nombre de Grashof critique Gr_{cr} et la fréquence critique Fr_{cr} , et cause des changements remarquable sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, ce qui permet de contrôler la convection naturelle.
- L'orientation du champ magnétique est aussi a un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement, et la meilleure stabilisation se trouve avec un champ magnétique radial ($\delta = 0$).
- La combinaison entre l'inclinaison du cylindre φ et l'orientation du champ magnétique δ , donne des résultats importants sur le contrôle de la convection naturelle et facilite la stabilisation de l'écoulement soit par l'inclinaison du cylindre, soit par l'orientation du champ magnétique, soit par la combinaison entre les deux.
- Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'une publication nationale intitulée, " Convection naturelle d'un métal liquide dans une cavité cylindrique inclinée en présence d'un champ magnétique" *Second International Conference on Applied Energetics and Pollution*, Volume 1, ISBN 978-9931-9229-0-2, Décembre 2014, Université de Constantine 1.

Chapitre VI

Convection Mixte Tridimensionnelle dans une Cavité Cylindrique de Type Czochralski

VI.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques concernant la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski. Ces résultats numériques sont obtenus à l'aide du code commercial Fluent version 6.3.23, basé sur la méthode des volumes finis. Cette méthode est exposée dans le [Chapitre III](#). Les résultats figurant dans ce qui suit, concerne une cavité de rapport d'aspect $Ar = 1$ et un fluide de faible nombre de Prandtl $Pr = 0.011$ (Silicium liquide), et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre (des trajectoires, des isothermes...etc.).

Ce chapitre est divisé en deux parties : la première partie concerne l'étude de l'écoulement tridimensionnel de convection mixte en régime stationnaire avec et sans champ magnétique. L'étude est menée pour les valeurs du nombre de Richardson, $Ri = 0.1, 0.5, 1, 1.5$ et 2 , et le nombre de Hartmann, $Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50 . Nous examinons l'effet du nombre de Richardson et de Hartmann sur la structure de l'écoulement.

La deuxième partie concernant l'écoulement tridimensionnel oscillatoire. Alors, nous intéressons à la détermination des nombres de Reynolds critiques Re_{cr} caractérisant la transition d'un régime d'écoulement de convection mixte du régime stationnaire (stable) au régime instationnaire oscillatoire (instable). Et ceci pour différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri = 0.1, 0.5, 1, 1.5$ et 2), et pour différentes intensités du champ magnétique appliqué suivant la direction axiale ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50).

VI.2 Effet du maillage sur les solutions numériques

Le maillage de notre problème tridimensionnel est réalisé par le logiciel GAMBIT version 2.2.30. A cause de la complicité de construction d'un maillage structuré dans les géométries cylindriques tridimensionnelles, nous avons partagé les géométries en huit éléments sans passer par le centre du cristal ([Mokhtari, 2010](#)).

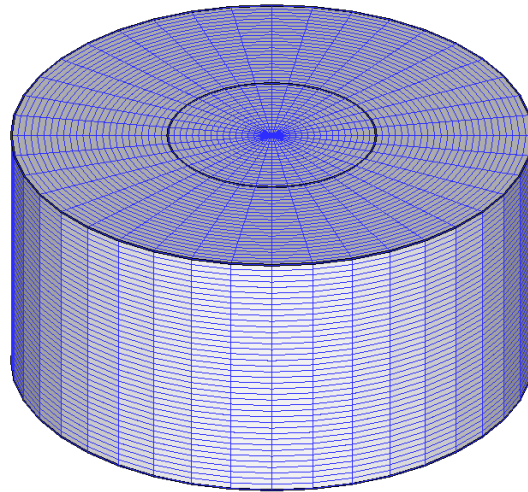
Pour examiner l'effet de l'espacement du maillage sur la solution numérique, trois maillages uniformes sont considérés : $(n_r \times n_\theta \times n_z) = (40 \times 40 \times 40)$, $(60 \times 60 \times 60)$ et $(80 \times 80 \times 80)$ nœuds (Figure VI.1).

Sur les Figures VI.2-3, nous avons présenté respectivement les profils des composantes de vitesse adimensionnelles u , v , w et la température adimensionnelle Θ , pour différentes tailles du maillage, et pour un nombre de Richardson $Ri = 0.5$. Le changement enregistré dans ces valeurs est inférieur de 7%. Sur le Tableau VI.1, nous avons présenté l'estimation du temps de calcul, pour nos outils de calcul pour chaque test. Il est clair que le temps de calcul dépend fortement du nombre de nœuds du maillage. Cependant, dans le but de bien capter les paramètres de l'écoulement en fonction de nos moyens de calculs, nous avons adapté le maillage $(n_r \times n_\theta \times n_z) = (60 \times 60 \times 60)$ nœuds dans ce chapitre.

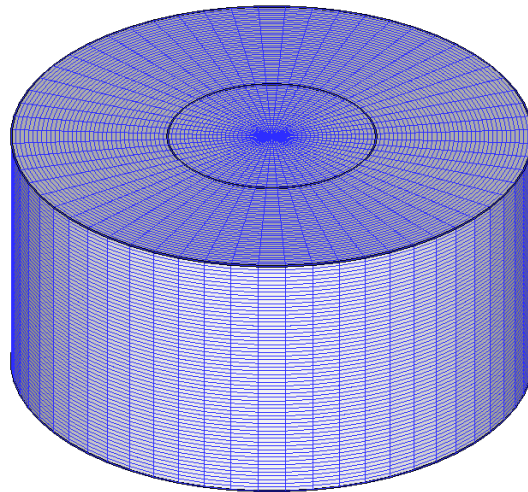
Sur la Figure VI.4, nous avons présenté les positions des points choisis arbitrairement dans la cavité pour enregistrer les paramètres hydrodynamiques et thermiques intervenant. Sur le Tableau VI.2, nous avons donné les positions logiques et physiques des points d'enregistrements pour le maillage adapté au calcul $(n_r \times n_\theta \times n_z) = (60 \times 60 \times 60)$ nœuds.

Tableau VI.1 : Estimation du temps de calcul, pour un test typique pour différents maillages.

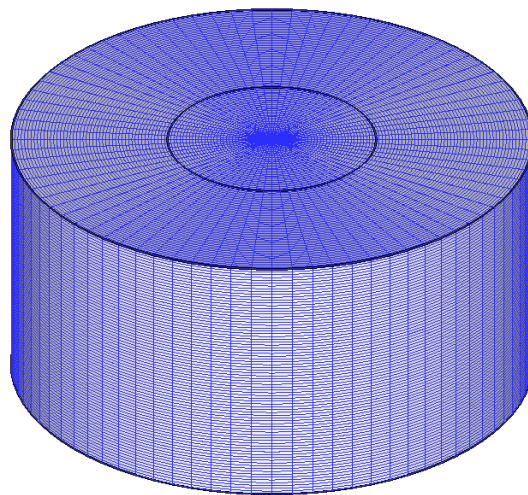
Maillage ($n_r \times n_\theta \times n_z$)	Nombre de cellules	Nombre de faces	Nombre de nœuds	Temps nécessaire de calcul
40×40×40	68000	206500	70561	06 heures 29 min
60×60×60	229500	694125	235216	17 heures 56 min
80×80×80	544000	1642000	550000	41 heures 26 min



(a) $(n_r \times n_\theta \times n_z = 40 \times 40 \times 40)$



(b) $(n_r \times n_\theta \times n_z = 60 \times 60 \times 60)$



(c) $(n_r \times n_\theta \times n_z = 80 \times 80 \times 80)$

Figure VI.1 : *Domaine de calculs de différentes tailles de maillage.*

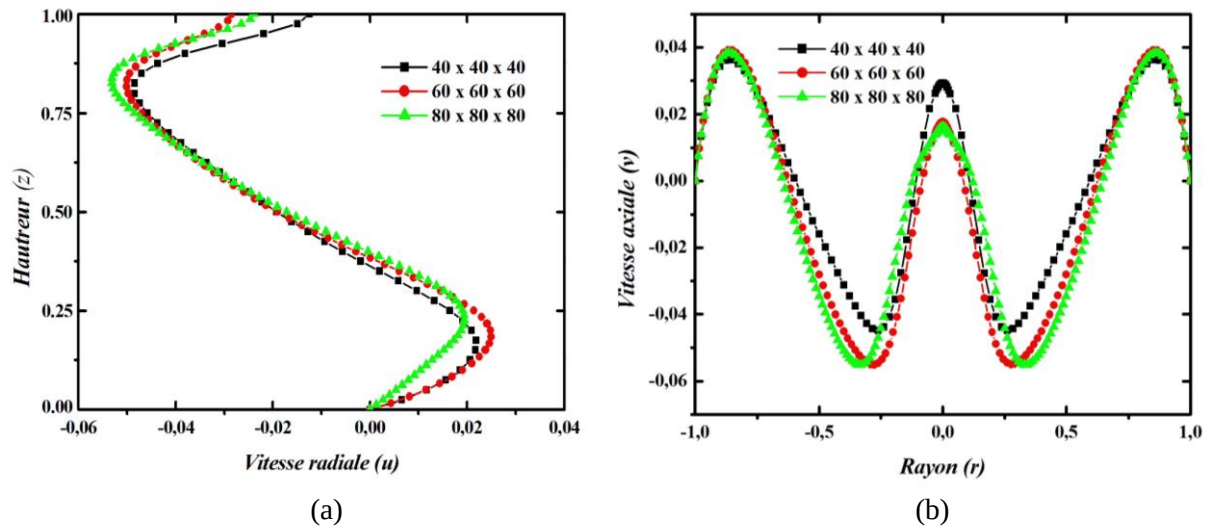


Figure VI.2 : Profils de la composante de vitesse radiale u à $r = 0.5$ (a), et axiale v à $z = 0.5$ (b), pour différentes tailles de maillage.

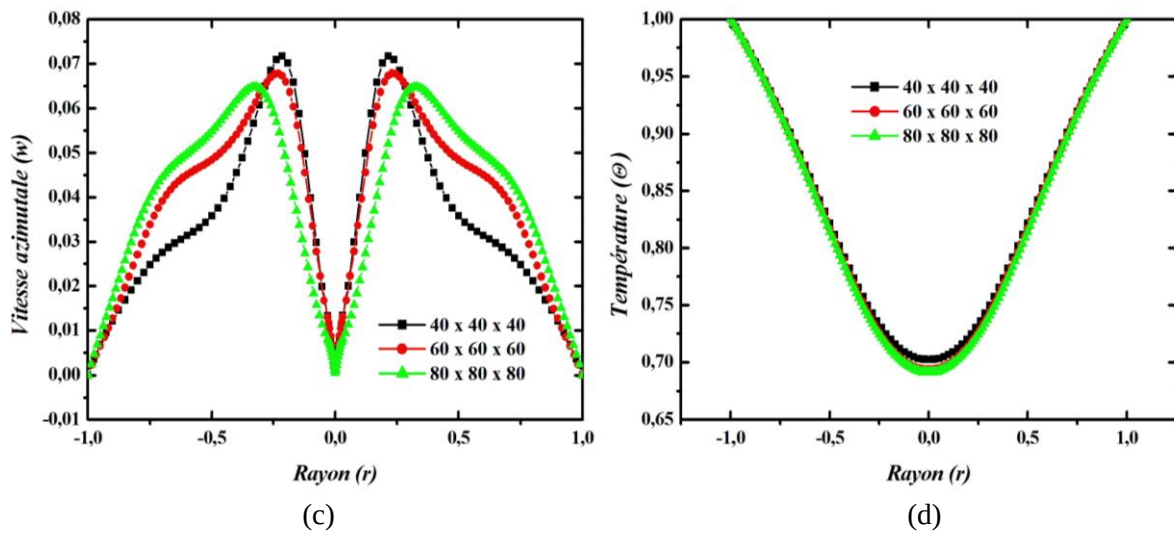


Figure VI.3 : Profils de la composante de vitesse azimutale w à $z = 0.5$ (a), et profils de la température adimensionnelle Θ à $z = 0.5$ (b), pour différentes tailles de maillage.

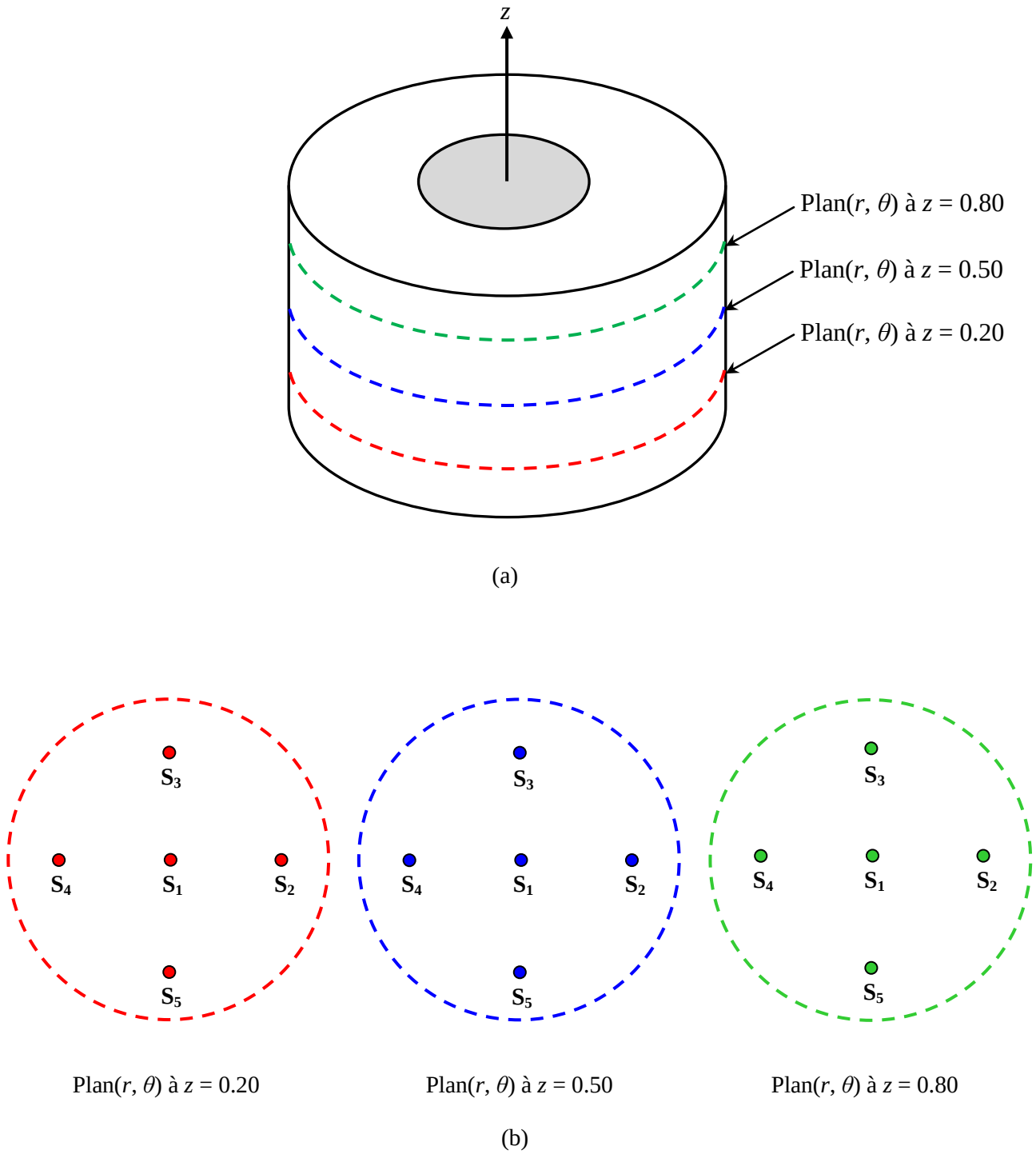


Figure VI.4 : (a) Position des plans dans la cavité, (b) vue de dessus de la position des sondes de mesures (paramètres hydrodynamiques et thermiques) dans la cavité tridimensionnelle ($Ar = 1$).

Tableau VI.2: Position des sondes (r, θ, z) utilisées pour la détection du champ hydrodynamique et thermique dans la cavité tridimensionnelle, avec un maillage $(n_r \times n_\theta \times n_z = 60 \times 60 \times 60)$.

Sondes		Plan(r, θ) à $z = 0.20$	Plan(r, θ) à $z = 0.50$	Plan(r, θ) à $z = 0.80$
S_1	Position logique	(0, 0, 12)	(0, 0, 30)	(0, 0, 48)
	Position physique	(0, 0°, 0.20)	(0, 0°, 0.50)	(0, 0°, 0.80)
S_2	Position logique	(45, 0, 12)	(45, 0, 30)	(45, 0, 48)
	Position physique	(0.75, 0°, 0.20)	(0.75, 0°, 0.50)	(0.75, 0°, 0.80)
S_3	Position logique	(45, 15, 12)	(45, 15, 30)	(45, 15, 48)
	Position physique	(0.75, 90°, 0.20)	(0.75, 90°, 0.50)	(0.75, 90°, 0.80)
S_4	Position logique	(45, 30, 12)	(45, 30, 30)	(45, 30, 48)
	Position physique	(0.75, 180°, 0.20)	(0.75, 180°, 0.50)	(0.75, 180°, 0.80)
S_5	Position logique	(45, 45, 12)	(45, 45, 30)	(45, 45, 48)
	Position physique	(0.75, 270°, 0.20)	(0.75, 270°, 0.50)	(0.75, 270°, 0.80)

VI.3 Solution stationnaire

VI.3.1 Effet du nombre de Richardson

Dans cette partie, nous voulons voir l'effet du nombre de Richardson en régime stationnaire sur la structure de l'écoulement et de transfert de chaleur, dans une cavité cylindrique tridimensionnelle (3D) de type Czochralski, de rapport d'aspect $Ar = 1$, et remplie de Silicium liquide ($Pr = 0.011$). Pour cela nous avons pris cinq nombres de Richardson : $Ri = 0.1, 0.5, 1, 1.5$ et 2 .

Sur la [Figure VI.5](#), nous avons présenté le champ de température par cinq iso-surfaces de température dans la cavité : $\Theta = 0.1, 0.5, 0.7$ et 0.9 (points grises), pour différents nombres de Richardson. En suivant l'iso-surface $\Theta = 0.9$, on remarque que leur position par rapport le rayon r augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson, par exemple la surface isotherme $\Theta = 0.9$ est située à distance $r = 0.545$ de bas de la cavité ($z = 0$) pour $Ri = 0.1$, et pour $Ri = 0.5$ cette distance augmente à $r = 0.651$ (points bleus), et la même remarque pour les autres nombres de Richardson ($Ri = 1, 1.5$ et 2 correspond à $r = 0.696, 0.731$ et 0.747 , respectivement). On remarque à partir de $Ri \geq 1$, que les iso-surfaces présentent une distorsion importante dans la mi-hauteur de la cavité (à $z = 0.5$). Cela est dû principalement à la dominance de convection naturelle de paroi latérale au cristal sous l'effet des forces de flottabilité (buoyancy). On peut remarquer également, des iso-surfaces parallèles non inclinées dans la surface libre et le bas du cylindre (plan (r, θ)), où le gradient de température est nulle (paroi adiabatique), et aucun développement vu suivant la troisième direction. Alors que le champ de température se développe dans le plan (r, z) avec l'augmentation du nombre de Richardson est indépendant de la troisième dimension. Ce que signifie que l'approximation bidimensionnelle du champ thermique est suffisante.

Afin de suivre les trajectoires des particules fluides en mouvement dans la cavité, nous avons présenté sur la [Figure VI.6](#), les trajectoires de quelques particules fluides. On remarque que pour $Ri < 1$, le comportement de l'écoulement montre un écoulement régulier dû à la convection forcée qui domine dans cette intervalle, où les particules fluides se déplace de la paroi latérale chaude vers le cristal froid sous l'effet de flottabilité, puis ce cristal pousse ces particules vers le centre à cause des forces centrifuges créées par la rotation du cristal. A partir de $Ri \geq 1$, on remarque une irrégularité de l'écoulement, ce changement causé par la dominance de la convection naturelle, qui augmente la vitesse des particules fluides dans la cavité. On peut remarquer également pour $Ri = 1.5$ et 2 , un léger développement des trajectoires suivant la troisième dimension.

Dans les Figure VI.7, nous avons présenté les profils des trois composantes de vitesse u , v et w pour différents nombres de Richardson. Ces figures montrent la dépendance de l'intensité des composantes de vitesse avec le nombre de Richardson, où la vitesse augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson. Alors, on peut conclure que la variation du nombre de Richardson a un effet très important sur l'écoulement de convection mixte, et déstabilise l'écoulement par l'augmentation de la vitesse des particules fluides.

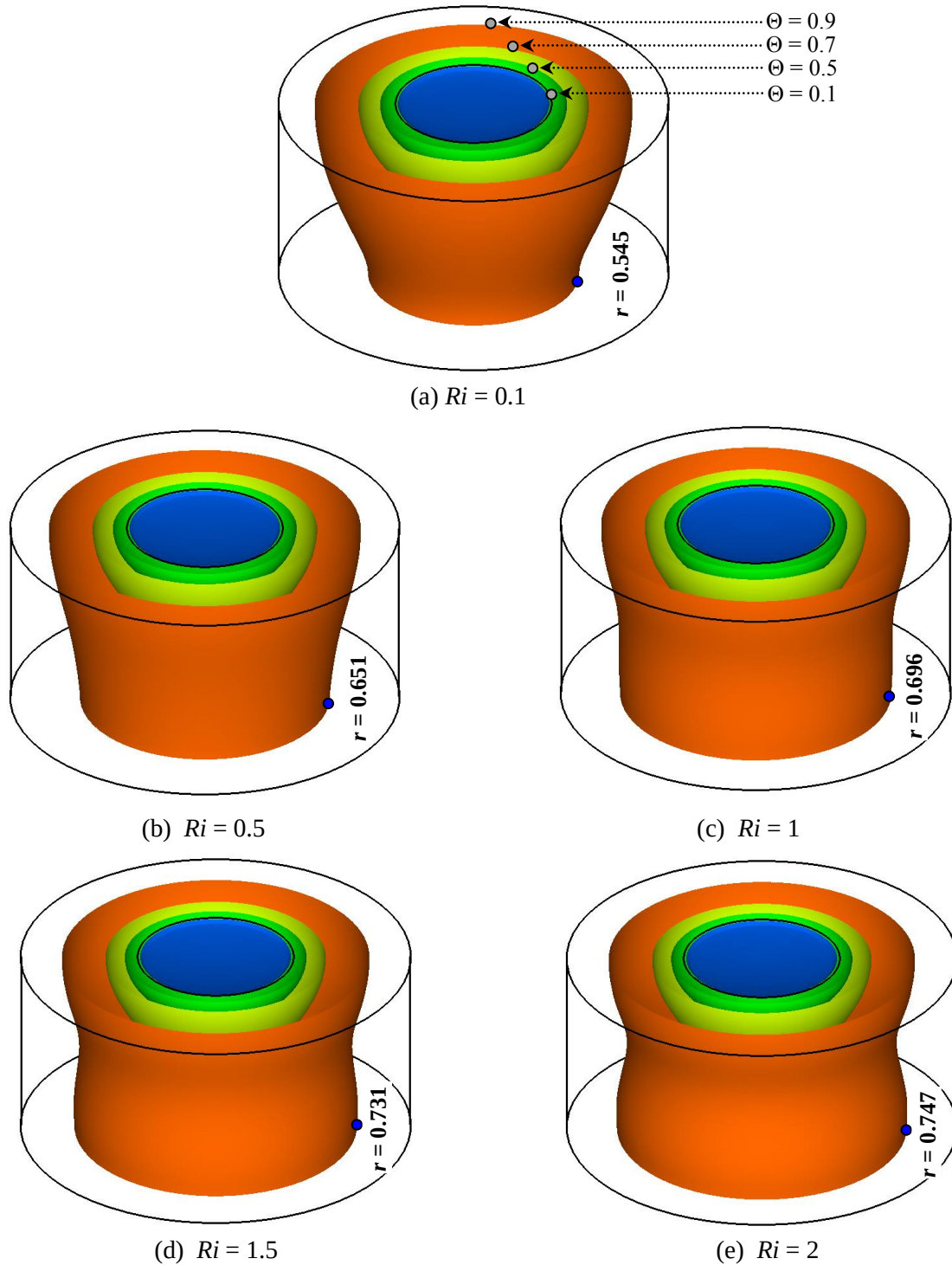


Figure VI.5 : Iso-surfaces de température, pour différents nombres de Richardson

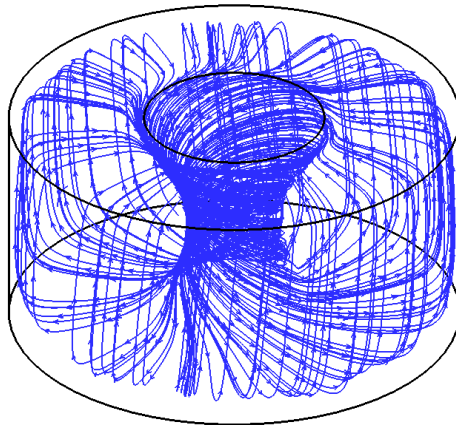
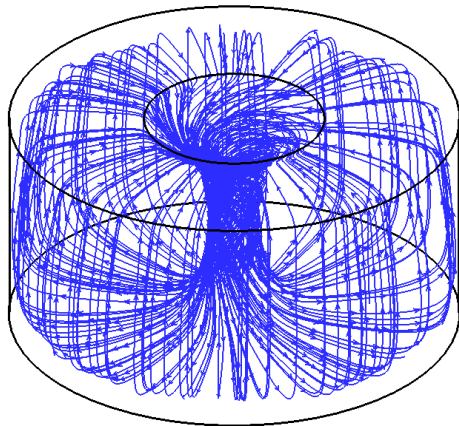
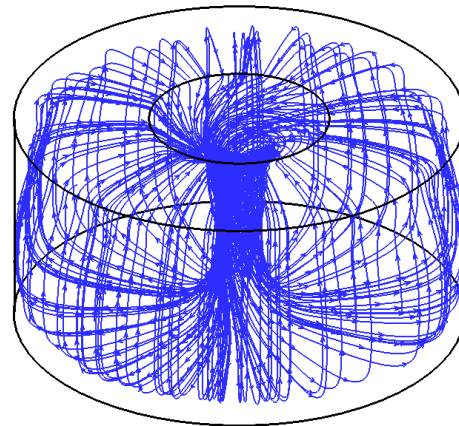
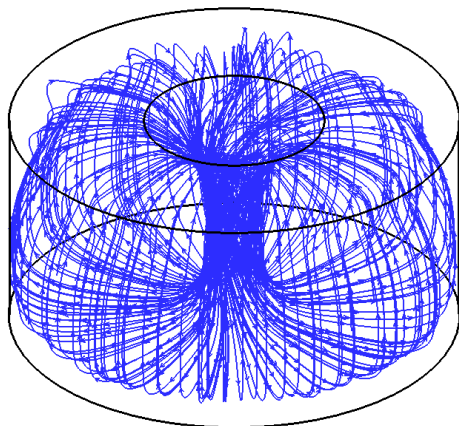
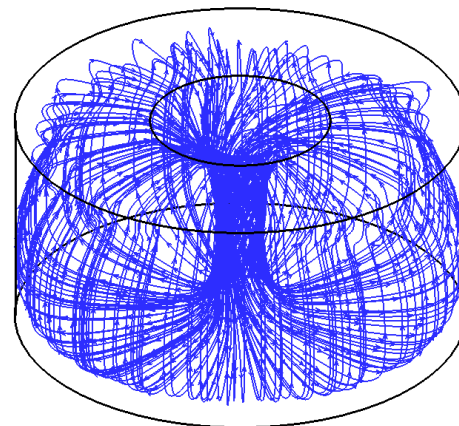
(a) $Ri = 0.1$ (b) $Ri = 0.5$ (c) $Ri = 1$ (d) $Ri = 1.5$ (e) $Ri = 2$

Figure VI.6 : Trajectoires de quelques particules fluides, pour différents nombres de Richardson.

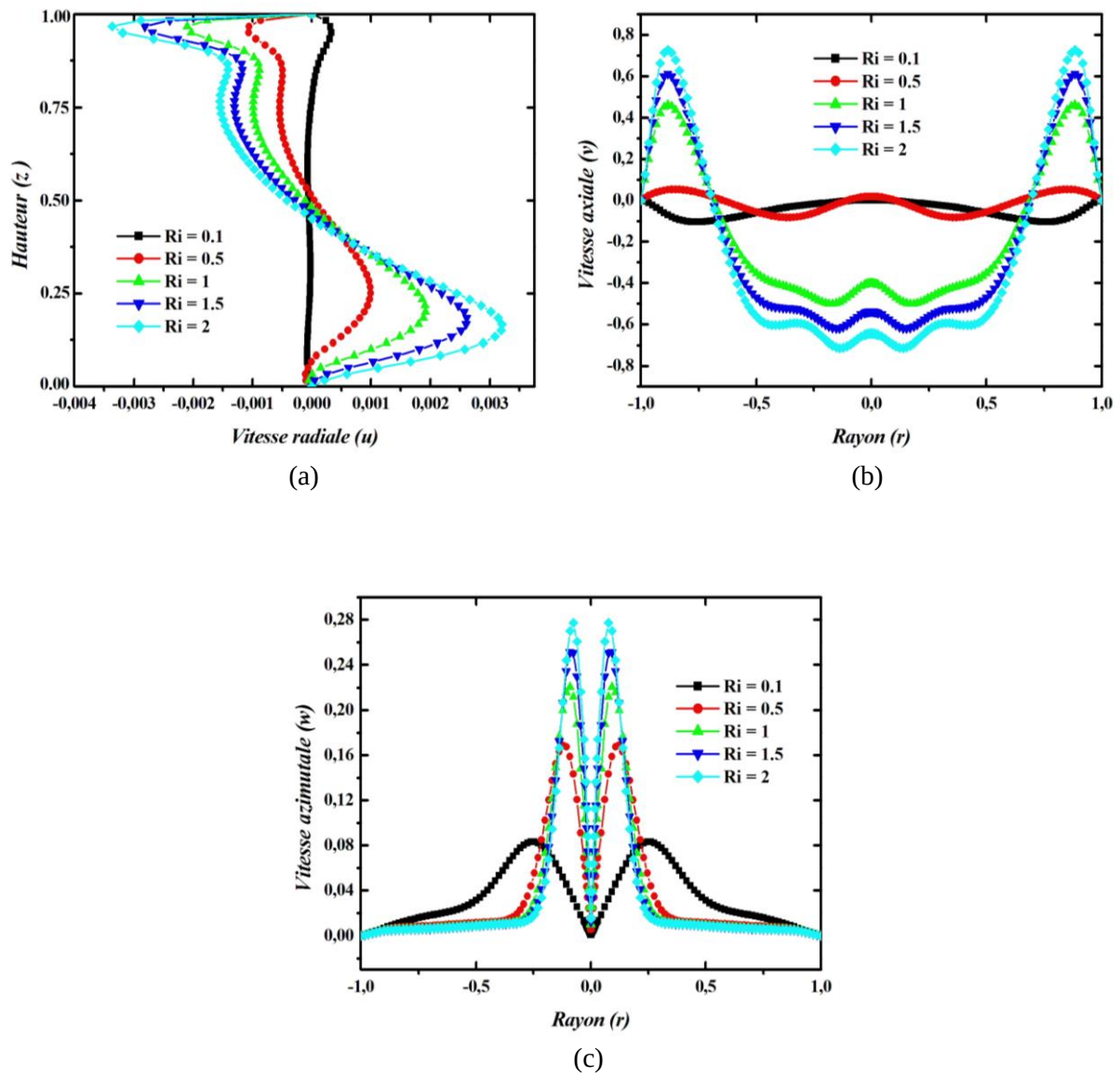


Figure VI.7 : Profils de la composante de vitesse radiale à $r = 0$ (a), axiale à $z = 0.5$ (b) et azimutale à $z = 0.5$ (c), pour différents nombres de Richardson.

VI.3.2 Effet du champ magnétique

Nous allons voir l'effet du champ magnétique orienté suivant la direction axiale sur le champ d'écoulement et de température. Pour cela nous avons choisi le cas de $Ri = 2$, et on applique un champ magnétique de différentes intensités ($Ha = 10, 20, 30, 40$ et 50).

Sur la [Figure VI.8](#), nous avons présenté les iso-surfaces de température pour différents nombres de Hartmann. On peut voir clairement l'effet du champ magnétique sur le champ de température. L'augmentation du champ magnétique supprime les distorsions des iso-surfaces de température et réduit leur position par rapport à l'axe r . Par exemple, la surface isotherme $\Theta = 0.9$ située à $r = 0.747$ pour $Ha = 0$, cette surface isotherme se stabilise et se décale à $r = 0.741$ pour $Ha = 10$ ($Ha = 20, 30, 40$ et 50 correspond à $r = 0.714, 0.662, 0.612$ et 0.583 , respectivement). La distorsion de cette iso-surface ($\Theta = 0.9$) est complètement éliminée à $Ha = 50$ à cause des forces électromagnétiques (forces de Lorentz) et leurs effets de suppression de l'écoulement de la convection naturelle qui domine dans ce cas.

Afin de suivre les trajectoires des particules fluides, nous avons présenté sur la [Figure VI.9](#), les trajectoires de quelques particules fluides dans la cavité, pour différents nombres de Hartmann. Pour le cas sans champ magnétique ($Ha = 0$), le comportement de l'écoulement montre un écoulement tridimensionnel (3D) irrégulier. Cette irrégularité s'intense au cœur de la cavité où la vitesse des particules fluides est importante. L'application du champ magnétique stabilise cet écoulement, où on constate que pour $Ha = 50$, les trajectoires de particules fluides deviennent plus régulières dans la cavité (suppression de l'effet de la tridimensionnalité sur le champ d'écoulement). Ce qui confirme bien que le champ magnétique provoque la stabilité du champ d'écoulement. Ceci est en bon accord avec le travail de [Bouabdallah et Bessaih \(2012\)](#) concernant la convection naturelle au cours de changement de phase lors de la croissance dans un creuset de type Bridgman horizontal.

Les profils de vitesse axiale et radiale pour différents nombres de Hartmann sont présentés sur la [Figure VI.10](#). Ces figures montrent la dépendance de la vitesse de l'écoulement avec le nombre de Hartmann. On peut voir que l'augmentation de ce nombre stabilise l'écoulement et réduit les magnitudes de vitesse. Une augmentation supplémentaire de l'intensité de champ magnétique appliqué, conduit à un écoulement de plus en plus stable dans la cavité.

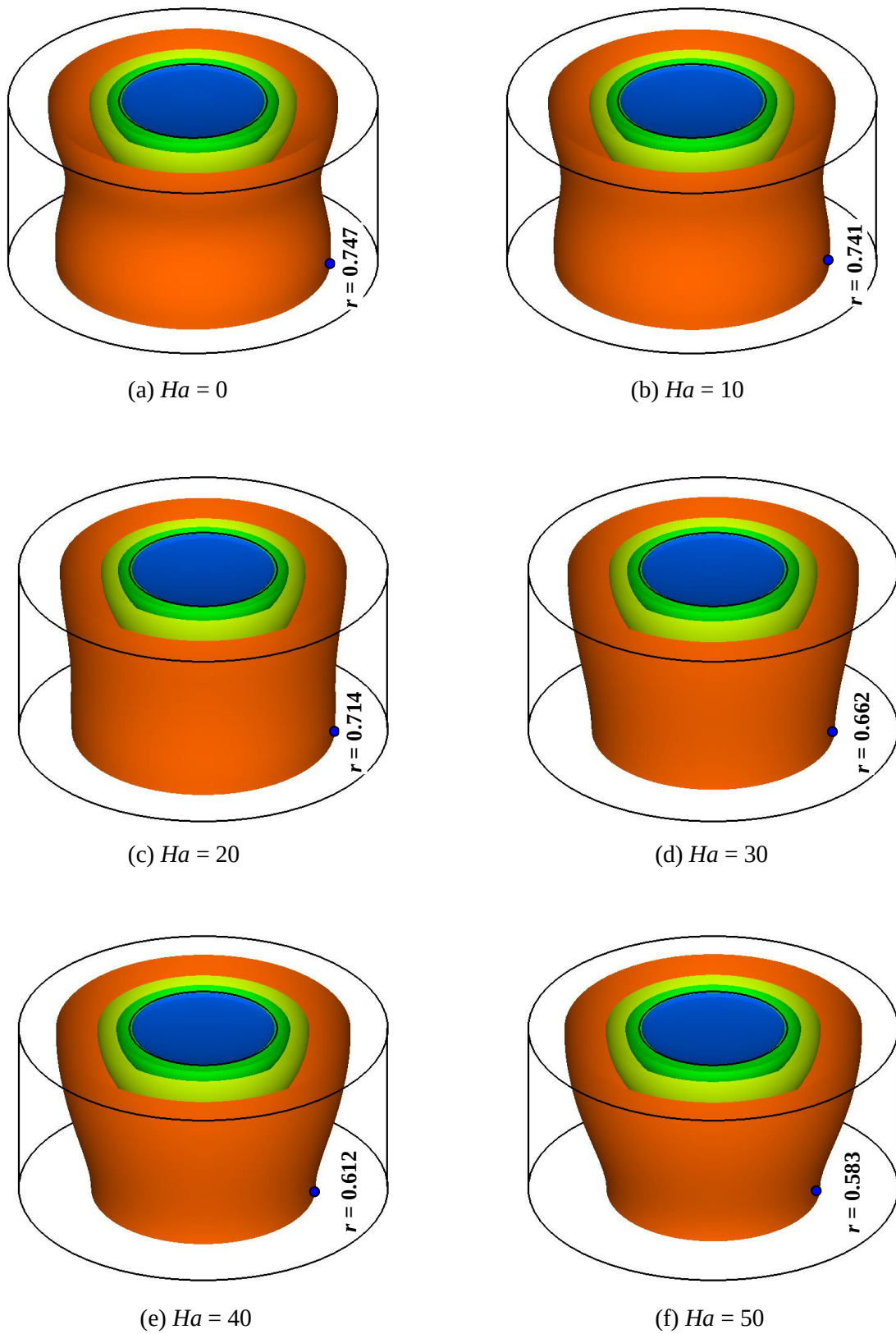


Figure VI.8 : Iso-surfaces de température, pour différents nombres de Hartmann.

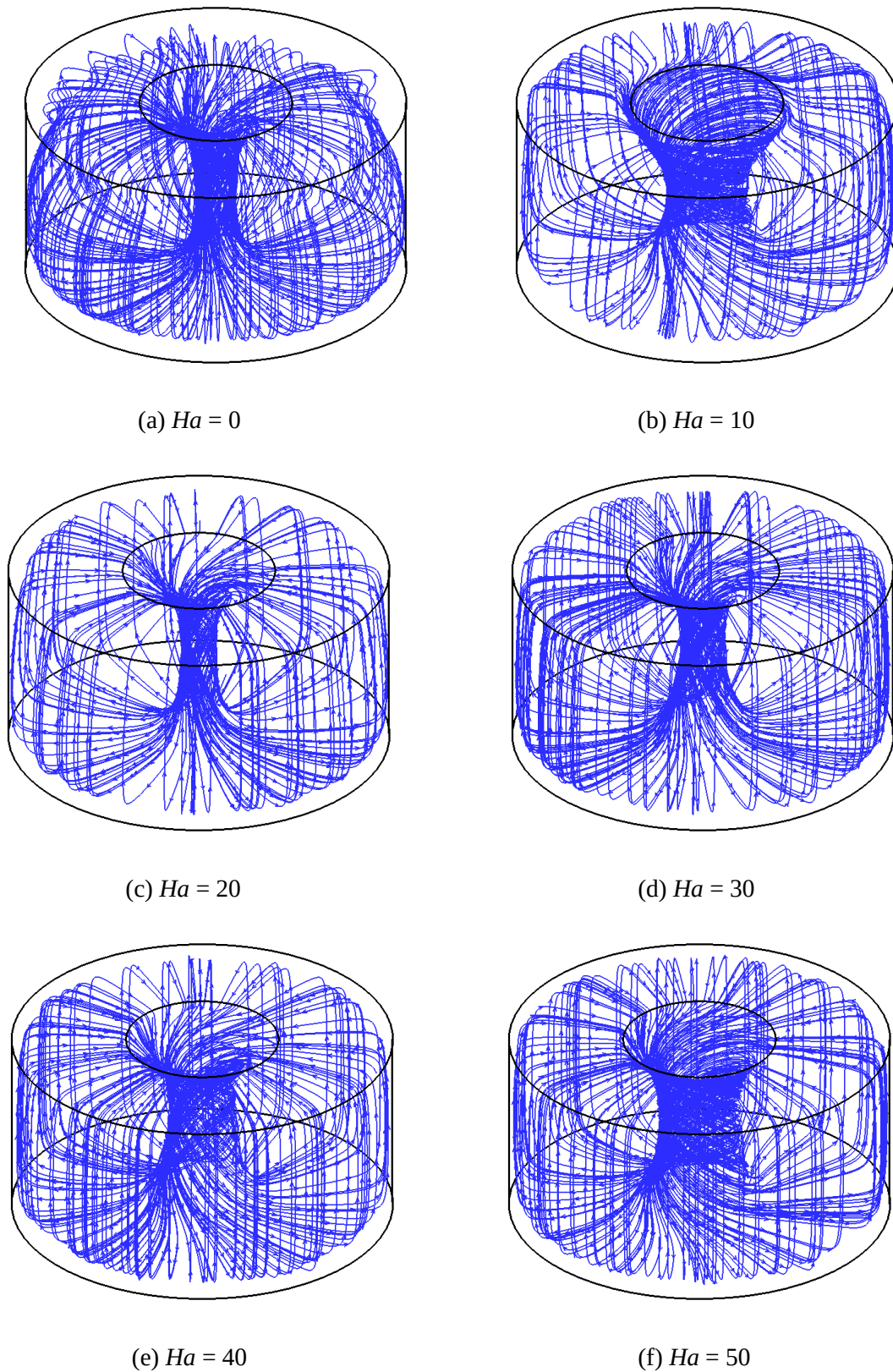


Figure VI.9 : Trajectoires de quelques particules fluides, pour différents nombres de Hartmann.

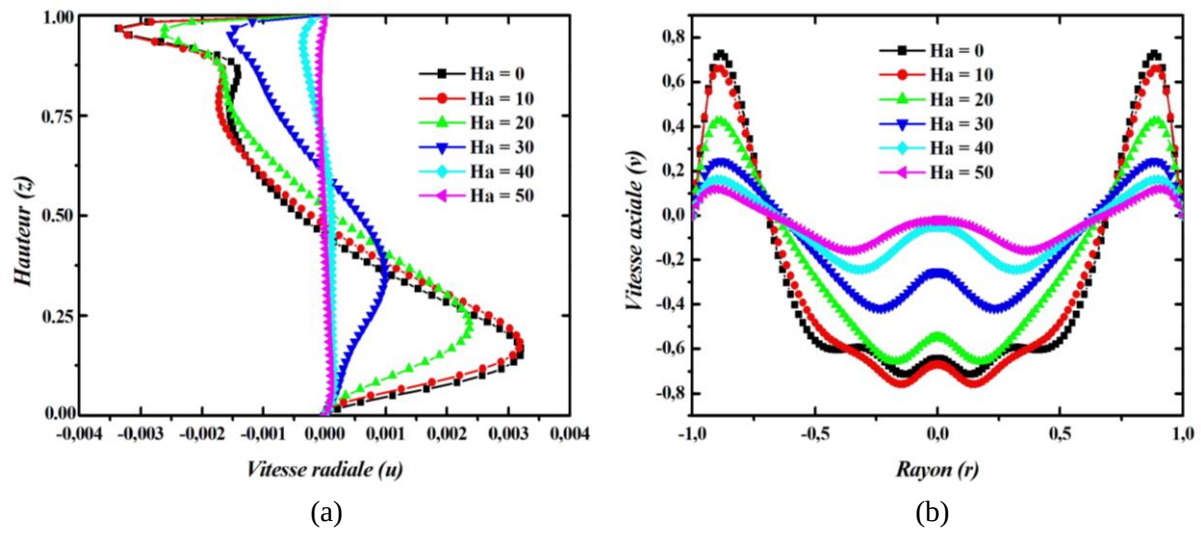


Figure VI.10 : Profils de la composante de vitesse radiale à $r = 0$ (a) et axiale à $z = 0.5$ (b), pour différents nombres de Hartmann.

VI.4 Solution instationnaire

Dans cette section, nous nous intéressons à la solution oscillatoire (instationnaire) de l'écoulement de convection mixte dans une cavité tridimensionnelle. Le calcul de la solution instationnaire repose sur la détermination du nombre de Reynolds critique Re_{cr} , pour lequel l'écoulement devient oscillatoire et périodique dans le temps. Une légère augmentation du nombre de Reynolds à partir d'une valeur modérée qui correspond au régime stationnaire permet d'atteindre le régime oscillatoire (Figures VI.11-12), qui correspond au seuil des instabilités hydrodynamiques et thermiques (Zhou et Zebib, 1992 ; Bessaïh et Bouabdallah, 2008). Le pas du temps adimensionnel est fixé à $\Delta\tau = 10^{-5}$.

Sur les Figures VI.13-14, nous avons présenté l'évolution temporelle des composantes de vitesse adimensionnelles et de la température adimensionnelle à différentes sondes choisies arbitrairement dans la cavité tridimensionnelle (voir le Tableau VI.2), pour le cas de $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$. Nous remarquons que ces courbes évoluent d'une manière oscillatoire autour des valeurs moyennes. On comparant les amplitudes des paramètres en oscillation, on peut remarquer que leurs amplitudes présentent des grandeurs différentes pour les différentes sondes d'enregistrements historiques. Ceci conduit à conclure que les amplitudes des oscillations dépendent de la position des particules fluides dans la cavité.

La Figure IV.15a-b représente le diagramme de phase de la composante de vitesse u en fonction de la composante v , et la composante de vitesse w en fonction de la température Θ au point S_2 , qui décrit le comportement dynamique du système. Ces diagrammes sont des boucles fermées que l'on appelle un tore avec des harmoniques dominantes ce qui signifie que le régime d'écoulement apériodique est atteint. Il est distingué du régime turbulent où il est caractérisé par un mouvement chaotique. Le portrait de phase est représenté par un point limite dans le cas du régime permanent, ou par cycle limite dans le cas du régime oscillatoire (périodique), ou par un tore si l'écoulement est apériodique. Finalement par attracteur étranger (strange attractor) dans le cas de l'écoulement chaotique. Le début de ce dernier est suivi par une fenêtre de périodicité, qui est soulignée une complication dynamique du système (D'Orazio et al. 2004).

Le spectre d'énergie des oscillations de la vitesse axiale v est présenté sur la Figure IV.16a. On remarque l'aspect périodique de l'écoulement, ce qui correspond à une fréquence dominante. Les fréquences prédominantes adimensionnelles (les plus grands pics) sont considérées comme celles jouant le rôle principal dans l'oscillation dès l'écoulement et donc l'échange de l'énergie cinétique et thermique. Notons que l'apparition de plusieurs pics d'une

façon multiple de la fréquence dominante est entraînée par le phénomène de bifurcation de l'écoulement (Benisaad, 2003).

VI.4.1 Structure de l'écoulement pendant une période de temps

Dans le but de comprendre la nature oscillatoire des différents paramètres de l'écoulement, nous présentons l'évolution temporelle des iso-surfaces de température, de la vitesse axiale ($v = 0.109$), et les trajectoires de quelques particules fluides dans la cavité tridimensionnelle, au point S_2 dans le plan $z = 0.50$, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

En suivant l'historique de la structure de l'écoulement aux instants adimensionnels dans une période du temps : τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e (Figure IV.16b). L'aspect périodique de l'écoulement est bien traduit par le changement des iso-surfaces (température et vitesse axiale) et les trajectoires des particules fluides avec le temps qui représentent dans les Figures IV.17-18. Les iso-surfaces de température changent leurs positions par rapport le rayon r , et les iso-surfaces de la vitesse axiale changent leur rotation sous cristal au cours du temps (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e). Les trajectoires forment une cellule toroïdale sous l'effet des forces de flottabilité au cœur de la cavité, cette cellule change avec des intensités différentes pendant le temps. Aussi, on peut voir clairement l'effet de la tridimensionnalité sur le champ d'écoulement dans tous les instants, due à l'accélération des particules fluides dans la cavité. On peut constater également que, les structures des iso-surfaces de température et de la vitesse axiale avec les trajectoires dans les instants τ_a et τ_e sont presque identiques, ce qui traduit que la structure de l'écoulement est renouvelé dans chaque période de temps.

VI.4.2 Diagrammes de stabilité

Les diagrammes de stabilité sont présenté aux Figures IV.19a-b, mettent en évidence la variation du nombre de Reynolds critique Re_{cr} et la fréquence critique Fr_{cr} en fonction du nombre de Richardson Ri . Nous constatons que l'augmentation du nombre de Richardson provoque la diminution des nombres de Reynolds critiques et les fréquences critiques correspondantes, c-à-d que l'augmentation des valeurs de Ri déstabilise l'écoulement convectif dans la cavité.

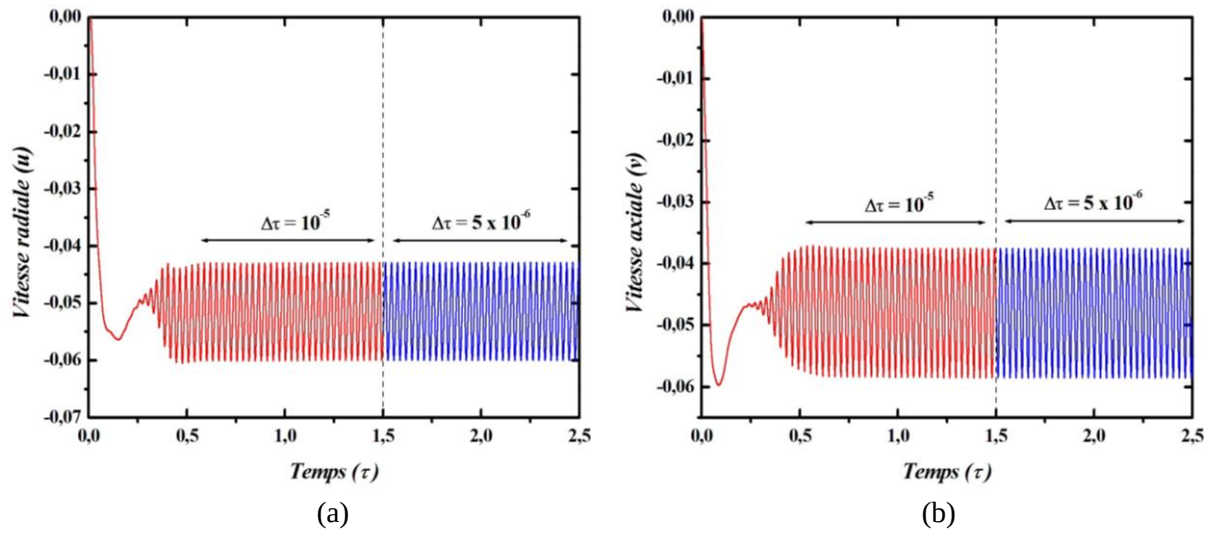


Figure VI.11 : Evolution temporelle des vitesses adimensionnelles au point S_2 , (a) vitesse radiale u , (b) vitesse axiale v dans le plan $(z = 0.5)$, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

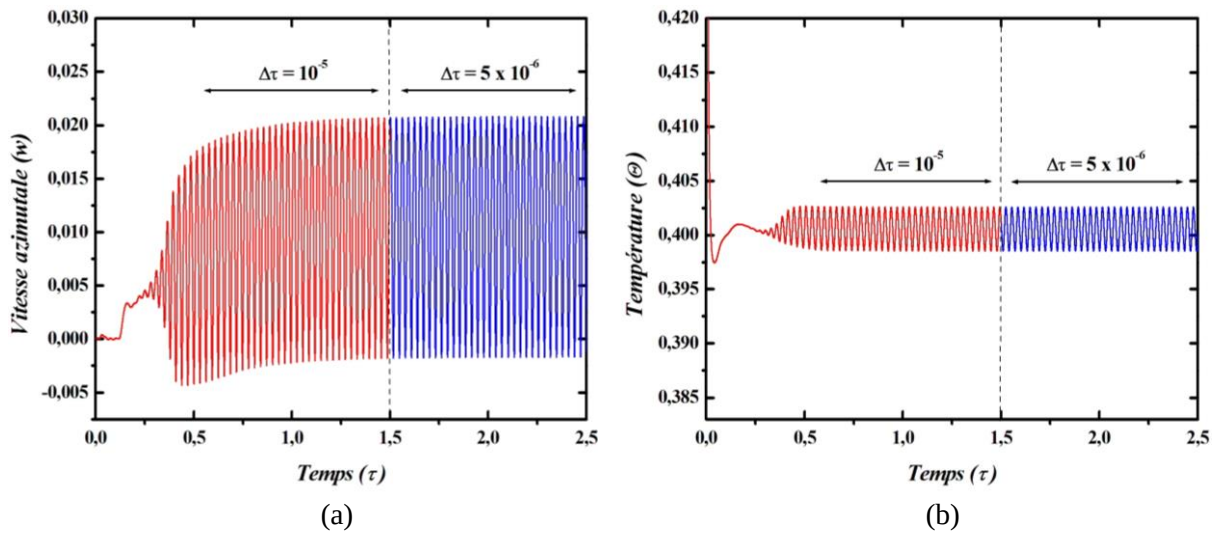


Figure VI.12 : Evolution temporelle au point S_2 , (a) vitesse azimutale w , (b) température adimensionnelle Θ dans le plan $(z = 0.5)$, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

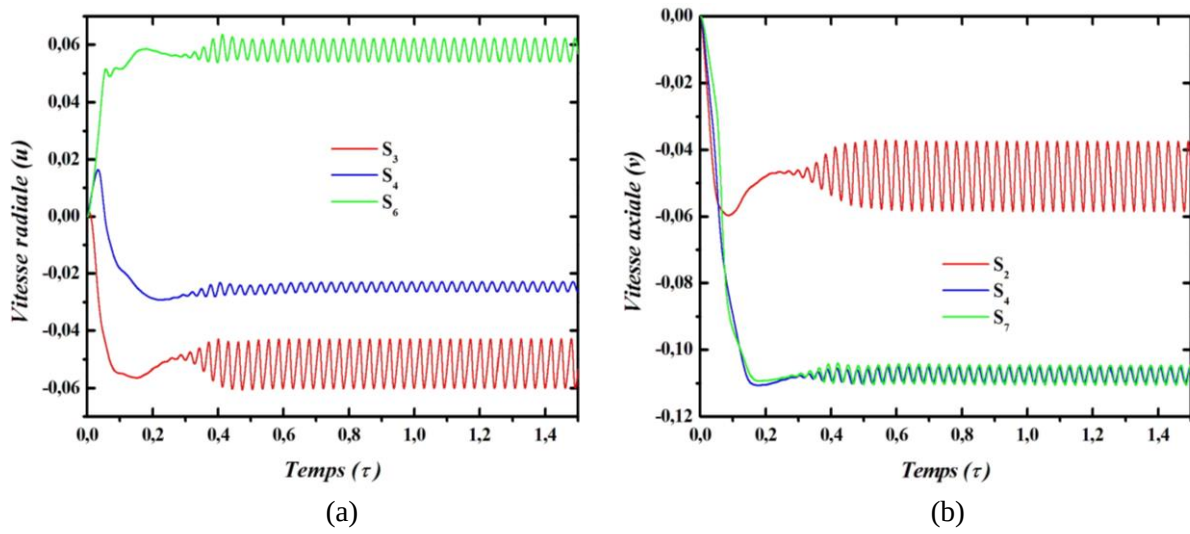


Figure VI.13 : Evolution temporelle de la vitesse radiale adimensionnelle u aux points S_3 , S_4 et S_6 dans le plan ($z = 0.20$) (a), et la vitesse axiale adimensionnelle v aux points S_2 , S_4 et S_7 dans le plan ($z = 0.50$) (b), pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

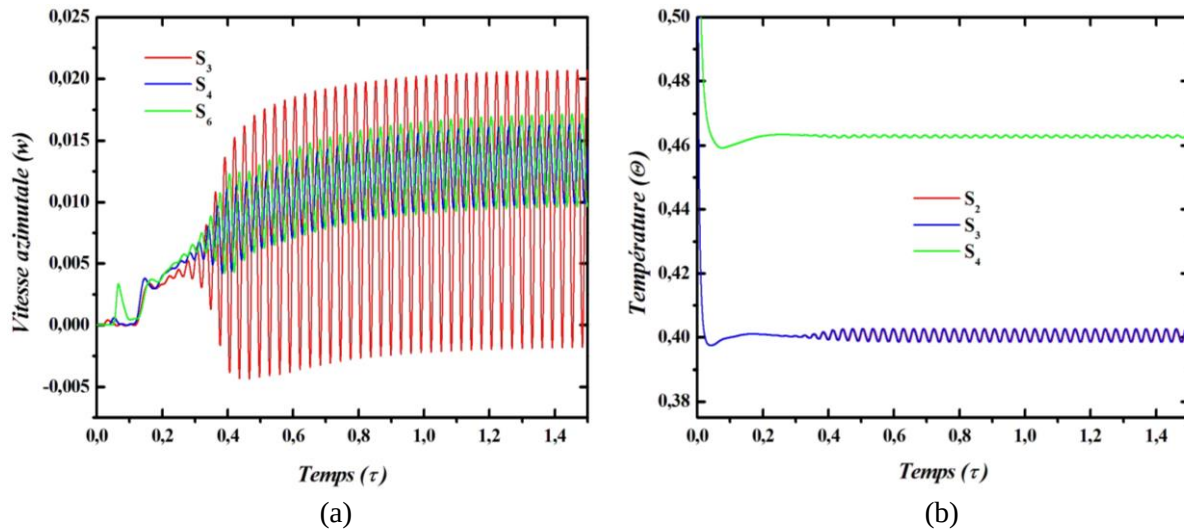


Figure VI.14 : Evolution temporelle de la vitesse azimuthale adimensionnelle w aux points S_3 , S_4 et S_6 dans le plan ($z = 0.80$) (a), et de la température adimensionnelle Θ aux points S_2 , S_3 et S_4 dans le plan ($z = 0.50$) (b), pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

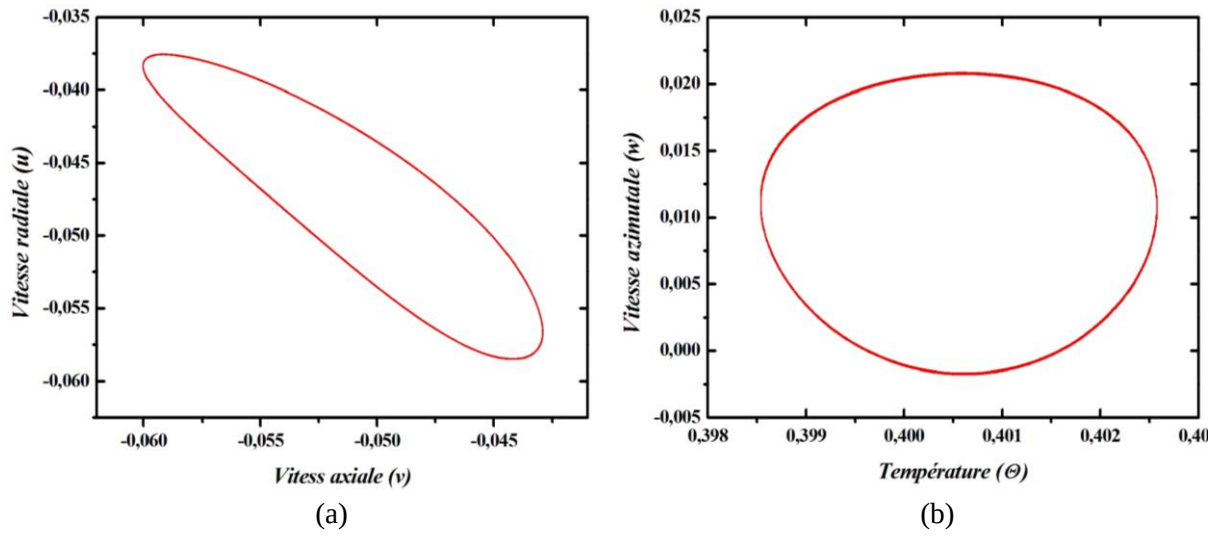


Figure VI.15 : Portraits de phase dans le plan (u, v) (a), et dans le plan (w, Θ) (b) au sonde S_2 , pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

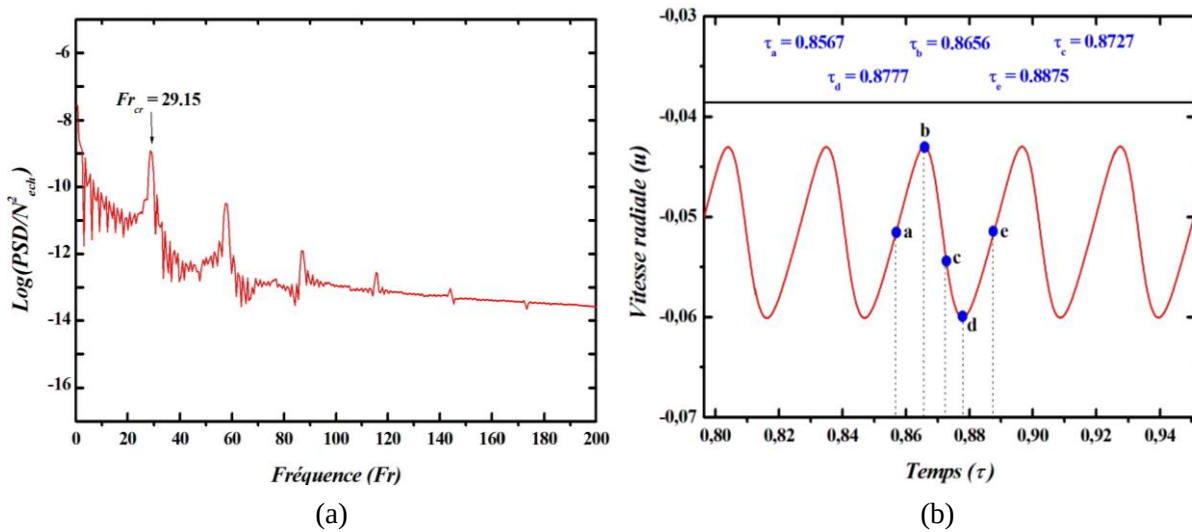


Figure VI.16 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_2 de plan $z = 0.50$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale adimensionnelle u au sonde S_2 (plan $z = 0.50$), en indication ; les instants adimensionnels (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) sont utilisés pour la visualisation des structures de l'écoulement à $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

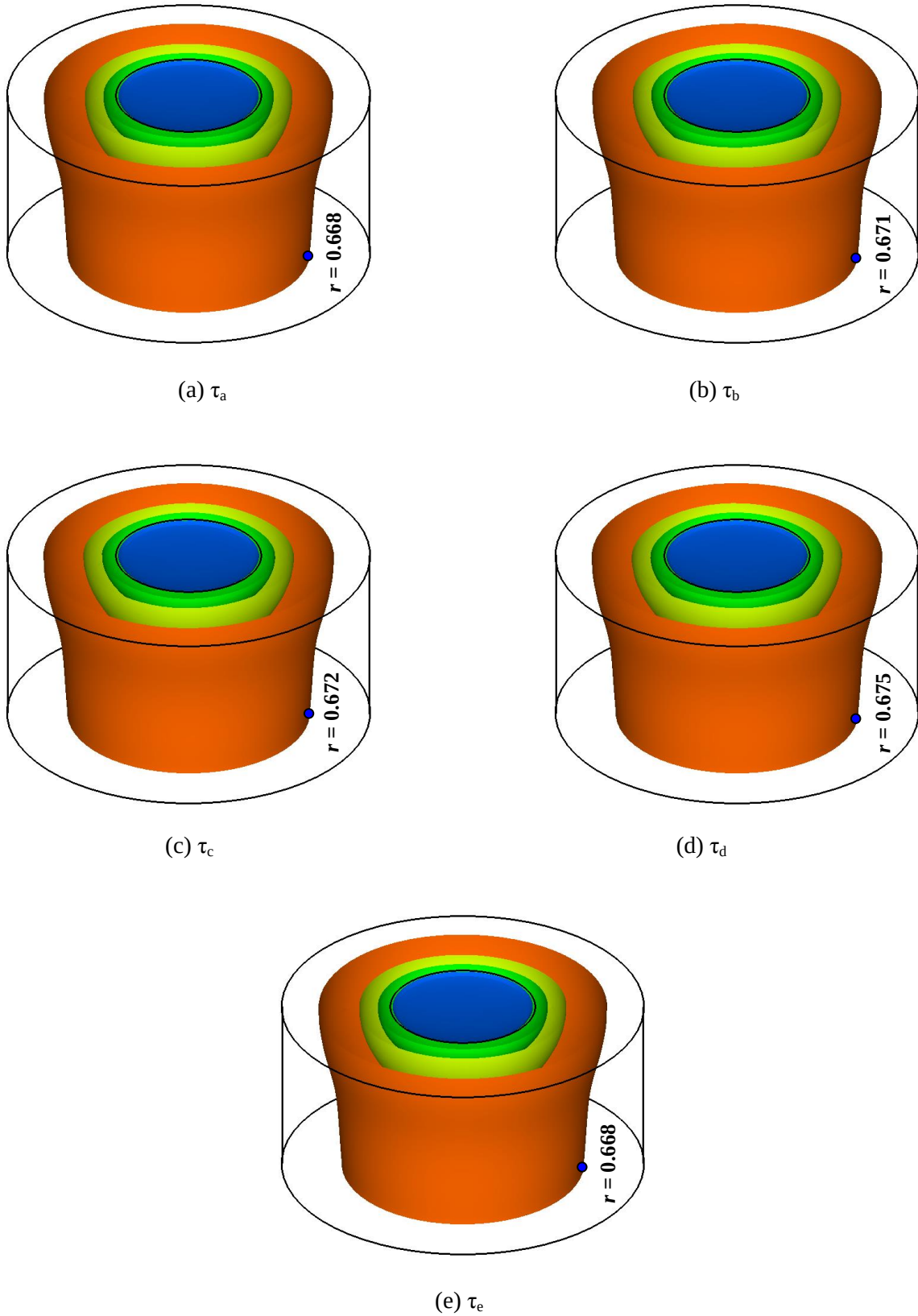


Figure VI.17 : Iso-surfaces de la température dans la cavité aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

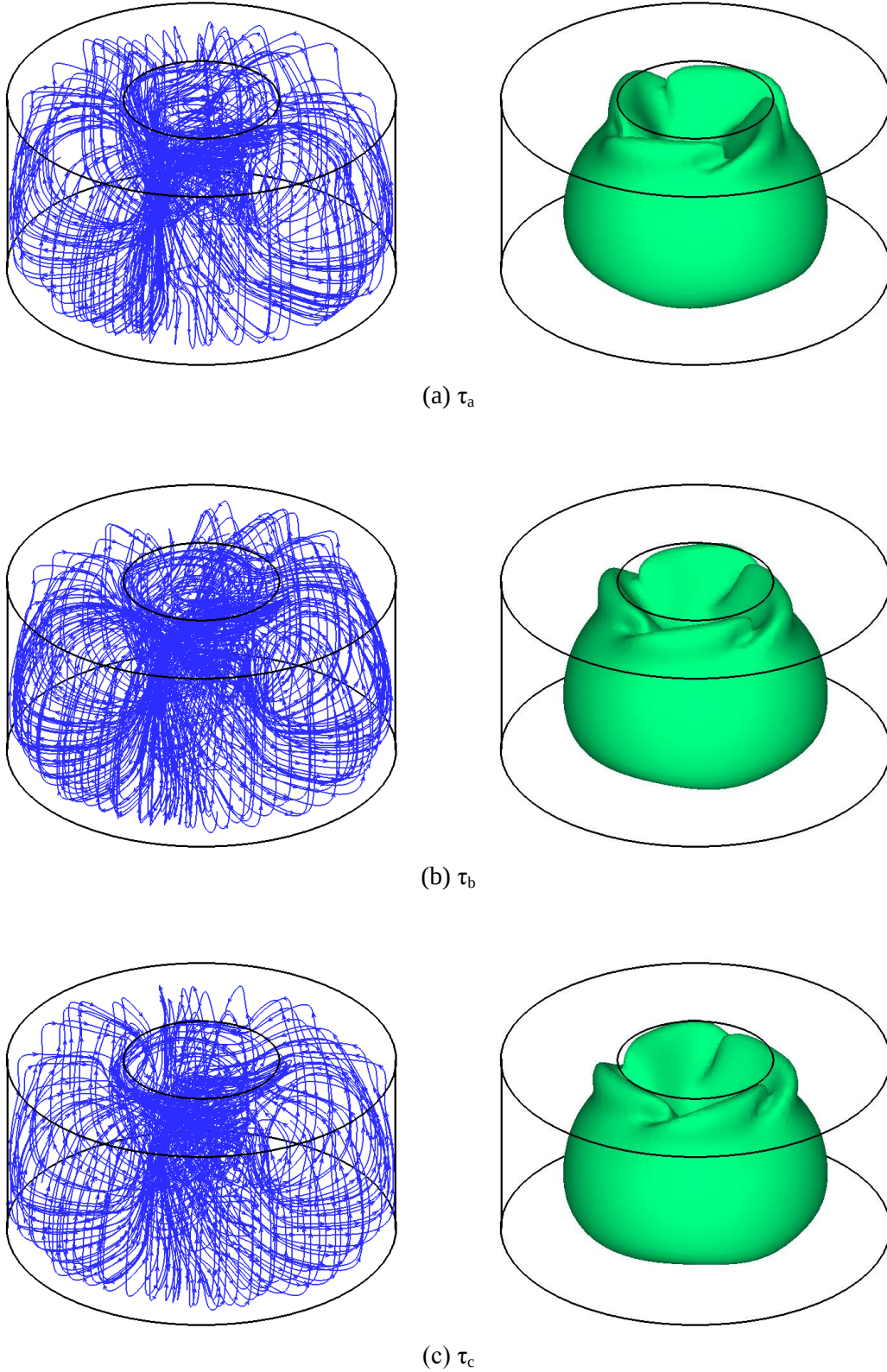
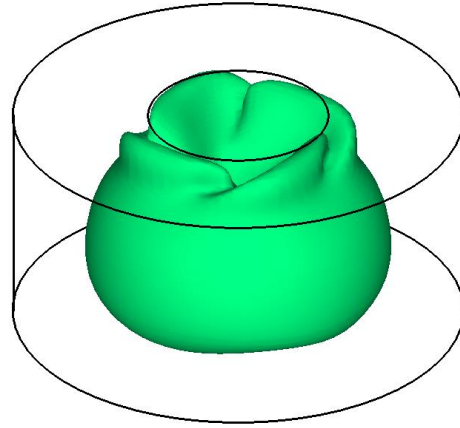
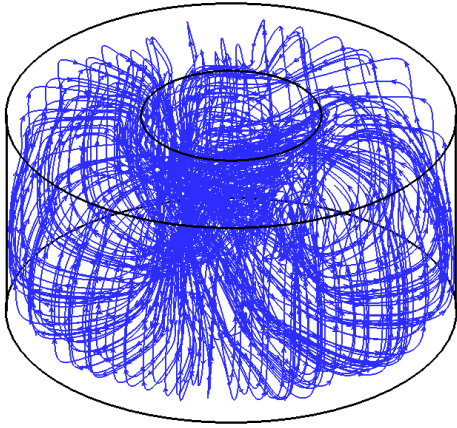
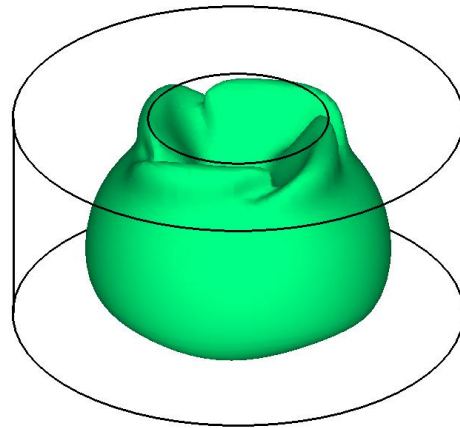
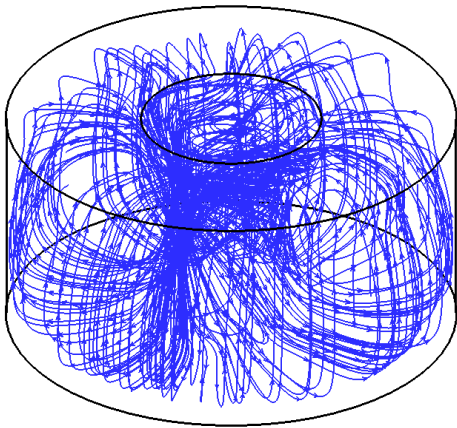
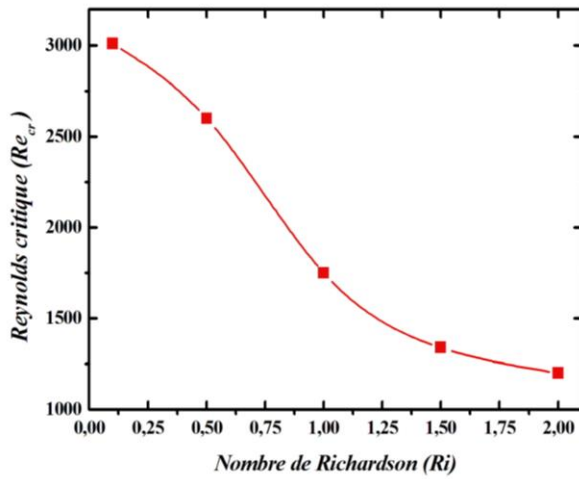
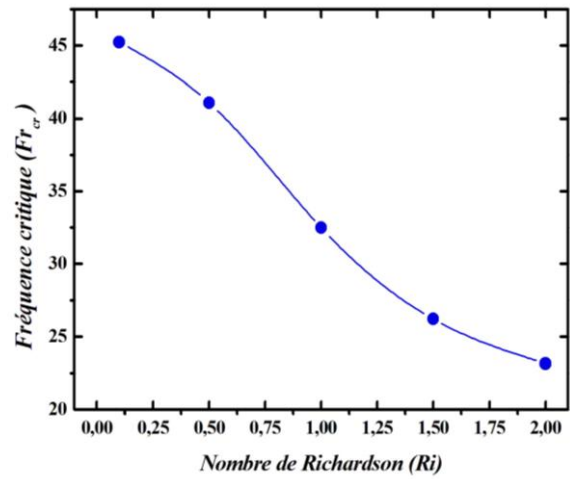


Figure VI.18 : Iso-surfaces de la vitesse axiale à $v = 0.109$ (droite), et trajectoires de quelques particules fluides dans la cavité (gauche) aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c et τ_d) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 1750$ et $Ri = 1$.

(d) τ_d (e) τ_e **Figure VI.18 :** (suite).

(a)



(b)

Figure VI.19: Diagrammes de stabilité: Re_{cr} – Ri (a), et de Fr_{cr} – Ri (b).

VI.4.3 Effet du champ magnétique

Dans cette partie, nous intéressons à la situation en présence du champ magnétique appliqué verticalement à la configuration (champ magnétique axial) étudiée en régime transitoire, donc on a résolu numériquement le système d'équations EDP figurant au deuxième chapitre, y compris l'équation du potentiel électrique. Le but est de trouver le nombre de Reynolds critique correspondant à la transition du régime laminaire à un régime turbulent pour chaque nombre de Hartmann et de Richardson.

Sur les [Figures VI.20a-b](#), nous avons présenté les évolutions temporelles des paramètres de l'écoulement enregistrés aux différentes sondes (voir le [Tableau VI.2](#)). Alors, en remarquant le comportement oscillatoire des différents historiques. On peut constater l'établissement d'un régime instable au sein de l'écoulement. Cette instabilité peut être interprétée physiquement par l'interaction des forces de volume (force de Lorentz) et des forces de buoyancy ce qui donne naissance à un écoulement multicellulaire ([Mittal, 2005](#)). Aussi, la dépendance entre les amplitudes des oscillations et les positions des particules dans le cylindre est évidente, mais les fréquences d'oscillations sont les mêmes partout dans le fluide ([Lopez, 1992](#)). Ce caractère oscillatoire régnant dans l'écoulement de fluide est la cause de changement périodique des structures de l'écoulement de fluide périodique instable.

Le spectre d'énergie des oscillations de la vitesse axiale au point S_2 de plan $z = 0.50$ en fonction des fréquences adimensionnelles, est présenté sur la [Figure VI.21a](#), ce spectre est présenté par plusieurs piques et un pic dominant (critique).

VI.4.3.1 Structure de l'écoulement pendant une période de temps

Dans le but de comprendre la nature oscillatoire des paramètres de l'écoulement, nous avons représenté les structures historiques des iso-surfaces de température, de la vitesse axiale ($v = 0.109$) et les trajectoires de quelques particules fluides, pour le cas de $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$, au cours des laps des temps indiqués par τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e , au point S_3 dans le plan $z = 0.50$ ([Figure IV.21b](#)).

En suivant l'historique, on remarque un grand changement par rapport au cas sans champ magnétique ([Figures IV.22-23](#)). Les iso-surfaces de température et deviennent plus serrés au bas du cylindre où leurs positions par rapport au rayon r sont réduites, et les iso-surfaces de la vitesse axiale ($v = 0.109$) se décomposent en quarts iso-surfaces identiques. Les trajectoires de quelques particules fluides deviennent plus régulières (suppression de l'effet de la troisième dimension d'espace sur le champ de l'écoulement). Ces changements

sont dus aux forces électromagnétiques (Lorentz radial) naissant dans le fluide qui influe sur les particules fluides. Donc on peut dire que l'application du champ magnétique axial stabilise et retarde la transition du régime de l'écoulement convectif. Aussi on remarque que la structure de l'écoulement à l'instant τ_a est parfaitement semblable à celle de l'instant τ_e , ce que signifie que l'écoulement s'effectue d'une manière périodique.

VI.4.3.2 Diagrammes de stabilité magnétique

Dans les Figures IV.24a-b, nous avons présenté les diagrammes de stabilité magnétique, qui représentant la variation des nombres de Reynolds critiques et leur fréquences correspondantes, pour différents nombres de Hartmann. Ces courbes donnent les limites de stabilité, c-à-d que pour des valeurs du nombre de Reynolds et de Hartmann, situées sous la courbe l'écoulement reste laminaire et stable. La croissance de Re_{cr} et de Fr_{cr} avec l'augmentation de Ha , est clairement vue dans les courbes de stabilité ($Re_{cr}-Ha$) et ($Fr_{cr}-Ha$). Cette croissance est monotone, sauf dans deux cas où il y a une légère diminution dans le nombre de Reynolds critique à $Ha = 30$, $Ri = 1$ et dans la fréquence critique à $Ha = 20$, $Ri = 2$. Ceci est probablement relié au mode dominant de la perturbation (même résultat a été obtenu par Gelfgat, 2004, Bessaïh et al. 2009, Bessaïh et Bouabdallah, 2008). Cette croissance est expliquée par l'interaction du champ magnétique axial sur l'écoulement de convection, celle-ci est produite avec la composante radiale de la vitesse. En conséquence le champ magnétique amortit le mouvement du métal liquide. Un champ magnétique plus fort est nécessaire pour garder l'écoulement stable pour certaines valeurs élevées du nombre de Reynolds.

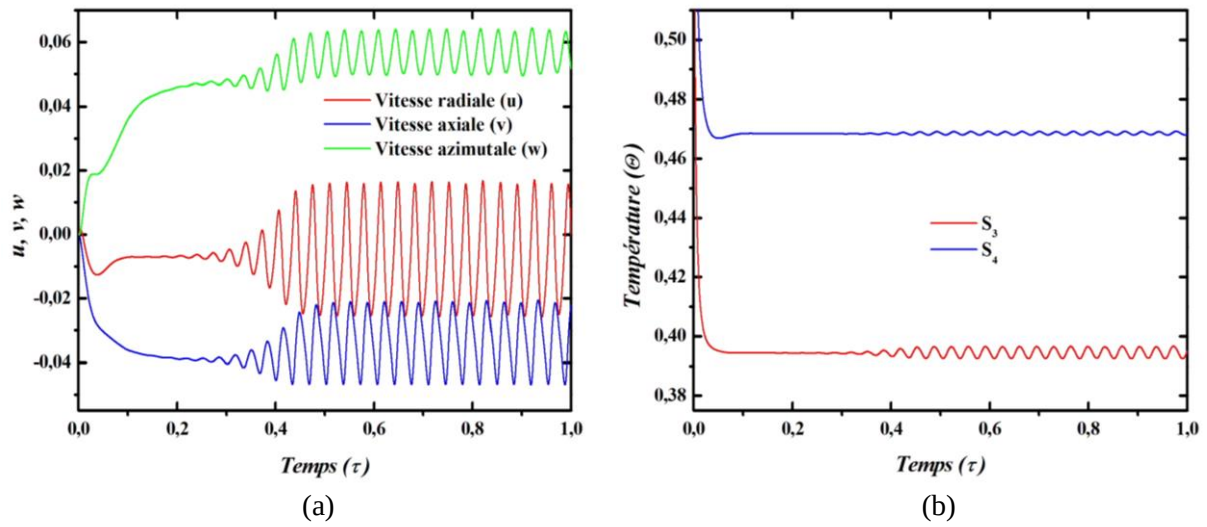


Figure VI.20 : Evolution temporelle de la composante de vitesse radiale, axiale et azimutale u, v et w au point S_2 , dans le plan $(z = 0.50)$ (a), et de la température adimensionnelle Θ aux points S_3 et S_4 , dans le plan $(z = 0.20)$, pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$.

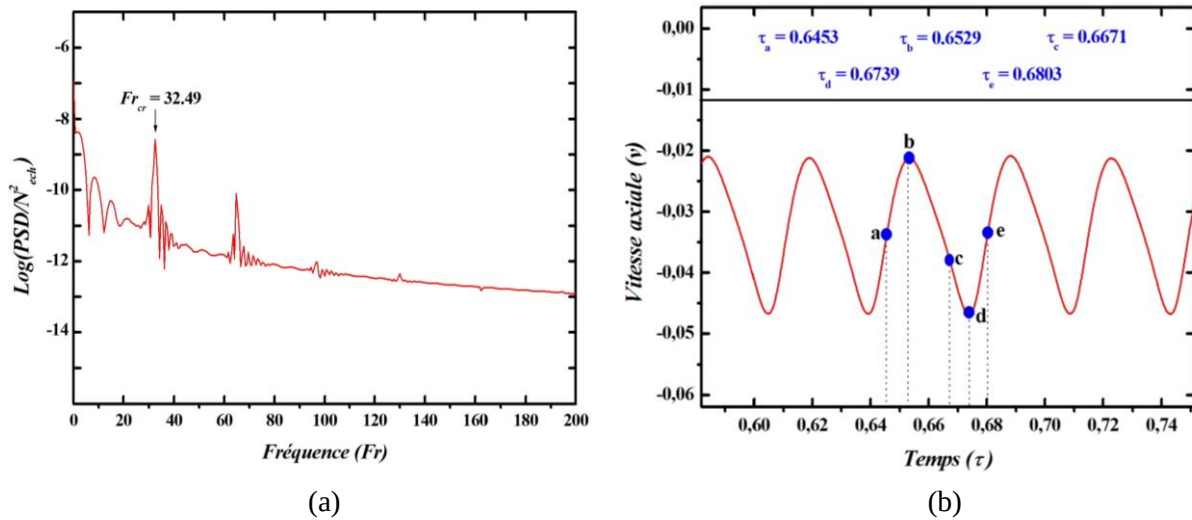


Figure VI.21 : Spectre d'énergie obtenu par la transformée rapide de Fourier (FFT) de l'évolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_2 de plan $(z = 0.50)$ (a). Evolution temporelle de la composante de vitesse axiale adimensionnelle v au sonde S_3 (plan $z = 0.50$) (b), pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$.

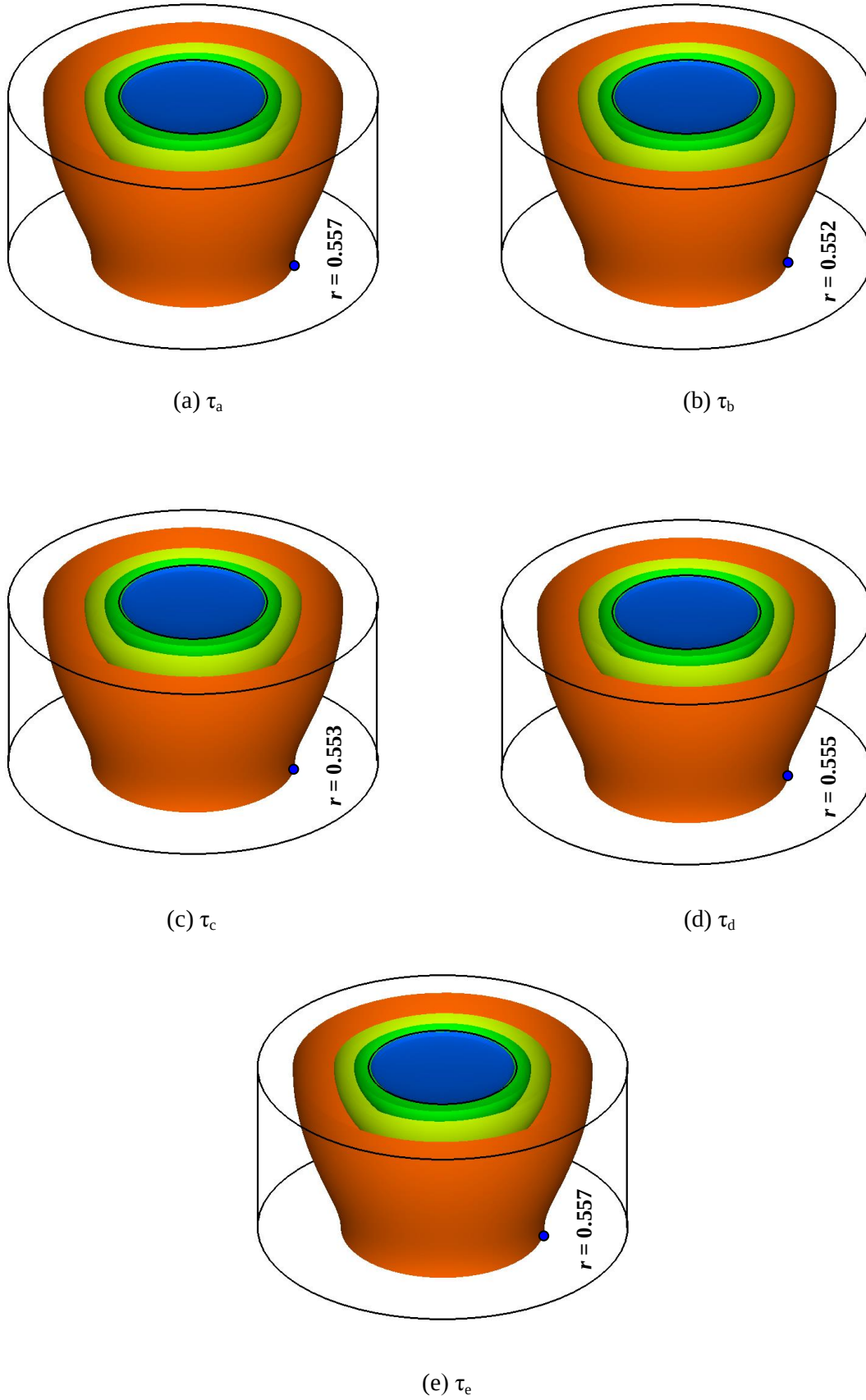


Figure VI.22 : Iso-surfaces de la température dans la cavité aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$.

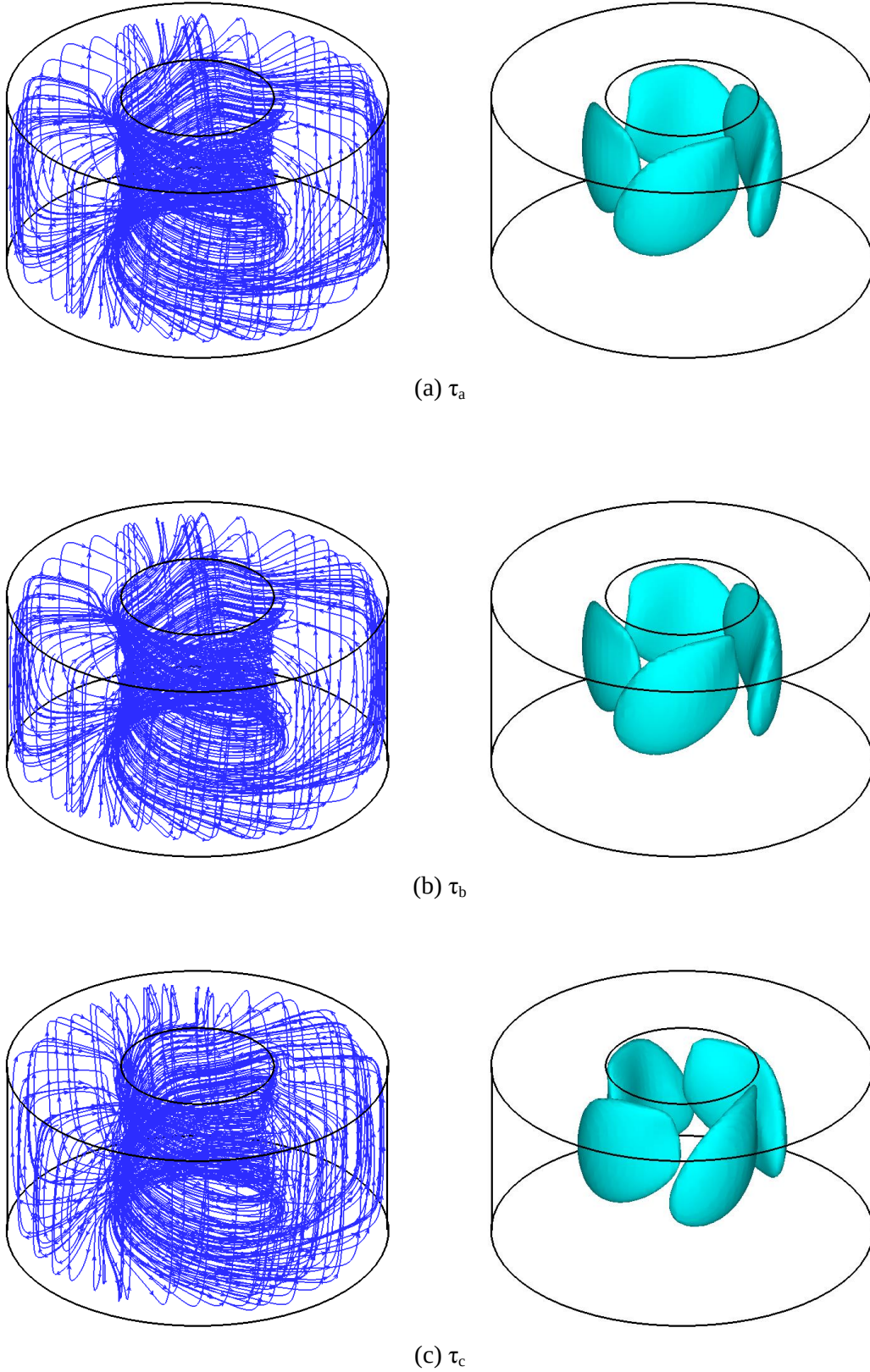
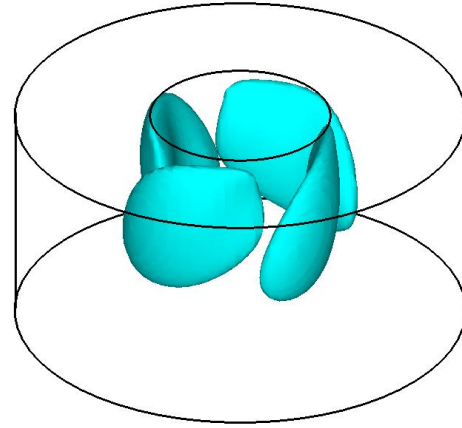
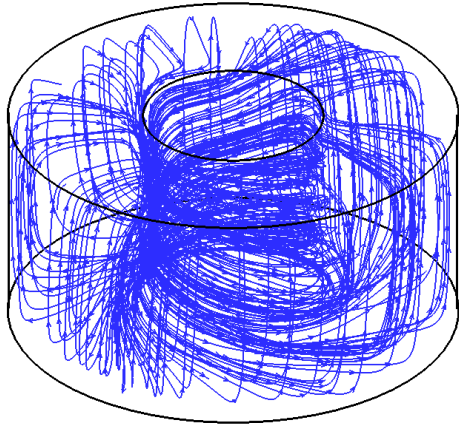
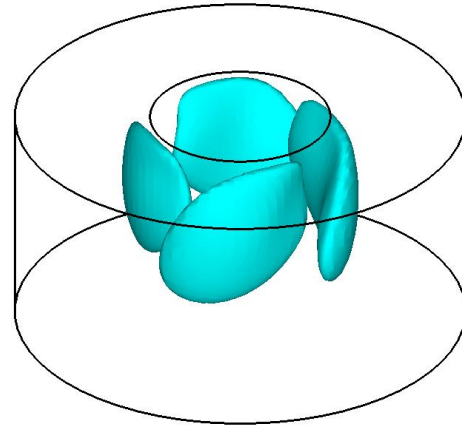
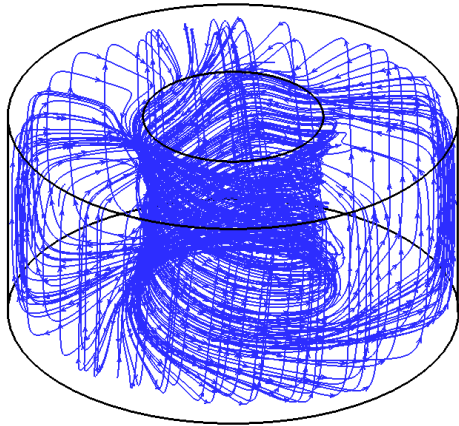
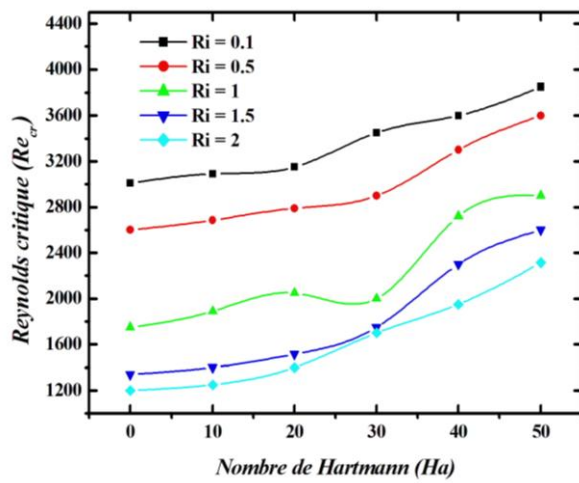
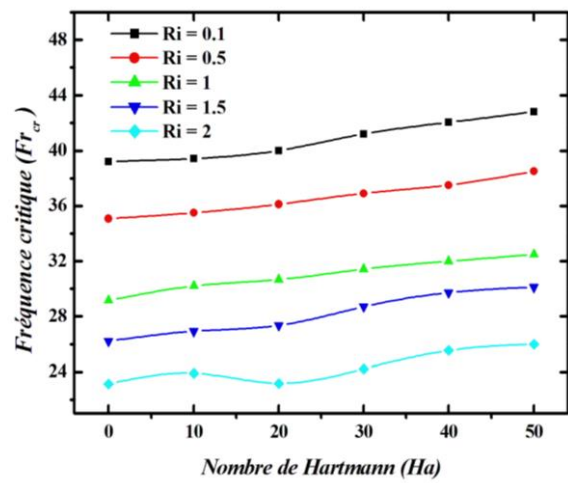


Figure VI.23 : Iso-surfaces de la vitesse axiale à $v = 0.109$ (droite), et trajectoires de quelques particules fluides dans la cavité (gauche) aux différents instants choisis arbitrairement (τ_a , τ_b , τ_c , τ_d et τ_e) dans une période de temps, pour $Re_{cr} = 2960$, $Ri = 1$ et $Ha = 50$.

(d) τ_d (e) τ_e **Figure VI.23 :** (suite).

(a)



(b)

Figure VI.24: Diagrammes de stabilité magnétique: Re_{cr} - Ha (a), et Fr_{cr} - Ha (b).

IV.5 Conclusion du chapitre VI

Nous avons présenté dans ce chapitre, une étude numérique de la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité cylindrique de type Czochralski. Un champ magnétique extérieur uniforme est appliqué suivant la direction axiale (B_z). Les résultats obtenus sont :

- L'intensité du champ d'écoulement et du transfert thermique dépende fortement du nombre de Richardson (Ri), dans lequel leur augmentation provoque la déstabilisation de l'écoulement convectif.
- En régime stationnaire le champ thermique se développe en deux dimensions. Ce qui confirme que l'approximation bidimensionnelle est suffisante.
- Pour les faibles valeurs du nombre de Richardson, la troisième dimension n'a pas d'influence sur le champ hydrodynamique. Par contre, pour les valeurs élevées du nombre de Richardson ($Ri \geq 1.5$), un léger développement selon la troisième dimension est observé sur les trajectoires des particules fluides.
- L'application du champ magnétique axial provoque un changement remarquable sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, où il supprime l'effet de la troisième dimension d'espace, et ralentisse la transition. Par conséquent, il stabilise l'écoulement convectif.
- La dépendance du nombre de Reynolds critique Re_{cr} , et la fréquence critique correspondante Fr_{cr} , pour différents nombres de Hartmann et Richardson est récapitulée dans les diagrammes de stabilité magnétiques ($Re_{cr} - Ha$) et ($Fr_{cr} - Ha$).

Conclusion Générale

Dans cette thèse, une étude numérique de la convection thermique d'un métal liquide au cours de la croissance cristalline a été présentée. Trois modèles physiques sont considérés dans cette thèse : la convection mixte axisymétrique dans une cavité similaire à celle de Czochralski, la convection naturelle axisymétrique dans une cavité similaire à celle de Bridgman vertical, et dernièrement la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité de type Czochralski. Un champ magnétique extérieur uniforme pour différentes intensités et orientations est introduit pour la stabilisation de l'écoulement de convection. La méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations de transports gouvernants du phénomène étudié. La convection axisymétrique est résolue à l'aide d'un code de calcul propre développé en langage Fortran, et la convection mixte tridimensionnelle est résolue à l'aide du code commercial Fluent. Nos résultats obtenus sont en bon accord avec les données expérimentales et numériques disponibles dans la littérature. Les résultats obtenus sont donnés comme suit :

- Pour la convection mixte, l'augmentation du nombre de Richardson influe sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, et provoque l'augmentation de la vitesse des particules fluides, et une diminution considérable dans le taux de transfert thermique.
- Le rapport d'aspect de la cavité a un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement, et la meilleure stabilisation se trouve pour un grand allongement de la cavité ($Ar = 3$).
- Pour la convection naturelle, l'augmentation du nombre de Grashof influe sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, et provoque une augmentation de la vitesse des particules fluides, et augmente considérablement le taux de transfert thermique.
- L'inclinaison du cylindre a un effet important sur l'écoulement de convection naturelle, et la meilleure stabilisation se trouve pour une inclinaison de $\varphi = 30^\circ$.
- L'application d'un champ magnétique extérieur de différentes intensités et orientations cause des changements remarquables dans la structure de l'écoulement et du champ thermique.

- L'application d'un champ magnétique réduit l'intensité de l'écoulement et de taux de transfert de chaleur. Alors, il stabilise l'écoulement de convection.
- L'augmentation du nombre de Hartmann Ha entraîne une augmentation de nombre de Grashof critique Gr_{cr} , Reynolds critique Re_{cr} et la fréquence correspondante Fr_{cr} . Alors, il ralentisse la transition du régime et élimine les instabilités convectives.
- L'orientation du champ magnétique est aussi à un effet très important sur la stabilité de l'écoulement, et que la meilleure stabilisation se trouve pour un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale ($\delta = 0^\circ$).
- La combinaison entre l'inclinaison de cylindre φ et l'orientation du champ magnétique δ , donne des résultats importants sur le contrôle de la convection naturelle et facilite la stabilisation de l'écoulement soit par l'inclinaison du cylindre, soit par l'orientation du champ magnétique, soit par la combinaison entre les deux.
- En régime stationnaire le champ thermique se développe en deux dimensions. Ce qui confirme que l'approximation bidimensionnelle est suffisante.
- Pour les faibles valeurs du nombre de Richardson, la troisième dimension n'a pas d'influence sur le champ hydrodynamique. Par contre, pour les valeurs élevées du nombre de Richardson ($Ri \geq 1.5$), un léger développement selon la troisième dimension est observé sur les trajectoires des particules fluides.
- L'application du champ magnétique axial provoque un changement remarquable sur la structure de l'écoulement et du champ thermique, où il supprime l'effet de la troisième dimension d'espace, et ralentisse la transition. Par conséquent, il stabilise l'écoulement convectif.

D'autre part, les résultats obtenus permettent de guider les expérimentateurs à savoir le seuil de la transition du régime d'écoulement de convection thermique en présence ou non du champ magnétique afin d'améliorer les conditions de croissance.

Il serait intéressant d'étudier les instabilités de l'écoulement tridimensionnel sous différents types de champ magnétique en utilisant la théorie de la stabilité linéaire et déterminer les modes propres des perturbations. Ceci est un point à recommander dans les futurs travaux.

Références bibliographiques

- ABBASOGLU, S., SEZAI, I., (2007). "Three-dimensional modeling of melt flow and segregation during Czochralski growth of $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}$ single crystals". *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 46, pp. 561-572.
- AFRID, M., ZEBIB, A., (1990). "Oscillatory three-dimensional convection in rectangular cavities and enclosures". *Physics of Fluids*, vol. 2, pp.1318-1327.
- ALBOUSSIÈRE, T., GARANDET, J., MOREAU, R., (1993). "Buoyancy-driven convection with a uniform magnetic field. Part 1. Asymptotic analysis". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 253, pp. 545-563.
- ALBOUSSIÈRE, T., GARANDET, J., MOREAU, R., (1996). "Asymptotic analysis and symmetry in MHD convection". *Physics of Fluids*, vol. 8, pp. 2215-2226.
- BASU, B., ENGER, S., BREUER, M., DURST, F., (2001). "Effect of crystal rotation on the three-dimensional mixed convection in the oxide melt for Czochralski growth". *Journal of Crystal Growth*, vol. 230, pp.148-154.
- BAUMGARTL, I., MULLER, G., (1992). "Calculation of the effect of the magnetic field damping on fluid flow. Comparison of Magnetohydrodynamic models of different complexity". 8th *European Symposium on Material and Fluid Sciences in Microgravity*, Brussels, Belgium.
- BEN HADID, H., HENRY, D., (1996). "Numerical simulations of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a constant magnetic field". *Journal of Crystal Growth*, vol. 166, pp. 436-445.
- BEN HADID, H., HENRY, D., TOUIHRI, R., (1997). "Unsteady three-dimensional buoyancy-driven convection in a circular cylindrical cavity and its damping by magnetic field". *Journal of Crystal Growth*, vol. 180, pp. 433-441.
- BENISAAD, S., (2003). "Stabilité de la convection naturelle à double diffusion", Thèse de Doctorat d'Etat, département de génie mécanique, université Mentouri- Constantine.
- BERRAHIL, F., BESSAIH, R., (2008). "Magnetohydrodynamique stability of oscillatory natural convection in a cylindrical enclosure filled with a liquid metal". *World Journal of Engineering*, vol. 5, pp.1-9.

- BESSAIH ,R., BOUKHARI, A., MARTY, PH., (2009).** “Magnetohydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer”. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 36, pp. 893- 901.
- BESSAIH, R., KADJA, M., ECKERT, K., MARTY, PH., (2003).** “Numerical and analytical study of rotating flow in an enclosed cylinder under an axial magnetic field”. *Acta Mechanica*, vol. 164, pp. 175-188.
- BESSAIH, R., MARTY PH., KADJA, M., (1999).** “Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure”. *Acta Mechanica*, vol. 135, pp. 153-167.
- BESSAIH, R., MARTY, PH., KADJA, M., (2003).** “Hydrodynamics and heat transfer in disk driven rotating flow under axial magnetic field”. *International Journal of Transport Phenomena*, vol. 5, pp. 259-278.
- BONTOUX, P., SMUTEK, C., RANDRIAMAMPIANINA, A., ROUX, B., EXTREMET, G.P., HURFORD, A.C., ROSENBERGER, F., DE VAHL DAVIS, G., (1986).** “Numerical solutions and experimental results for three-dimensional buoyancy driven flows in tilted cylinder”. *Advances in Space Research*, vol. 6, pp. 155-160.
- BORDJA, L., (2010).** “Etude de la stabilité thermo-convectif des écoulements tournants par application d’un champ magnétique”. Thèse de Doctorat, université Mentouri – Constantine.
- BOTTARO, A., ZEBIB, A., (1988).** “Bifurcation in axisymmetric Czochralski natural convection”. *Physics of Fluids*, vol. 31, pp. 495.
- BOUABDALLAH, S., BESSAIH, R., (2010).** “Stability magnetohydrodynamics of natural convection in molten gallium during phase change in three-dimensional enclosure”. *Fluids Dynamics and Materials Processing*, vol. 6, pp. 251-275.
- BOUABDALLAH, S., BESSAIH, R., (2012).** “Effect of magnetic field on 3D flow and heat transfer during solidification from a melt”. *Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 37, pp. 154-166.
- CHANDRASEKHAR, S., (1961).** “Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability”. *Clarendon Press Oxford*.
- CHARLSON, G.S., SANI, R.L., (1975).** “Finite amplitude axisymmetric thermoconductive flows in a bounded cylindrical fluid layer”. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 71, pp. 209.
- CHOI, J., KIM, S., SUNG, H.J., NAKANO, A., KOYAMA, H.S., (1997).** “Transition flow modes in Czochralski convection”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 180, pp. 305-314.
- CROCHET, M.J., WOUTTERS, P., GEYLING, F.T., JORDAN, A.S., (1983).** “Finite-element simulation of Czochralski bulk flow”. *Journal of Crystal Growth*, vol. 65, pp. 153-165.

- D'ORAZIO, M.C., CIANFRINI, C., CORCIONE, M., (2004). "Rayleigh-Benard convection in tall rectangular enclosures". *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 43, pp. 135-144.
- DELGADO-BUSCALIONI, R., CRESPO DEL ARCO, E., (2001). "Flow and heat transfer regimes in inclined differentially heated cavities". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, pp. 1947-1962.
- DHANARAJ, G., BYRAPPA, K., PRASAD, V., DUDLEY, M., (2010). "*Springer Handbook of Crystal Growth*". Springer-Verlag Berlin Heidelberg .
- DULIKRAVICH, G.S., (1999). "Electro-Magneto-Hydrodynamics and Solidification". *Advances in the Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids, Rheology Series*, vol. 8, pp. 677-716.
- ENGER, S., GRABNER, O., MULLER, G., BREUER, M., DURST, F., (2001). "Comparison of measurements and numerical simulations of melt convection in Czochralski crystal growth of silicon". *Journal of Crystal Growth*, vol. 230, pp. 135-142.
- GALAZKA, Z., SCHWABE, D., WILKE, H., (2003). "Influence of internal radiation on the heat transfer during growth of YAG single crystals by the Czochralski method". *Crystal Research and Technology*, vol.38, pp.859-867.
- GANAPATHYSUBRAMANIAN, B., ZABARAS, N., (2004). "Using magnetic field gradients to control the directional solidification of alloys and the growth of single crystals". *Journal of Crystal Growth*, vol. 270, pp. 255-272.
- GARANDET, J., ALBOUSSIÈRE, T., (1992). "Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 35, pp. 741-748.
- GELFGAT, A.YU., BAR-YOSEPH, P.Z., (2001). "The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity". *Physics of fluids*, vol. 13, pp. 2269-2279.
- GELFGAT, A.YU., BAR-YOSEPH, P.Z., SOLAN, A., (2000). "Axisymmetry breaking instabilities of natural convection in a vertical Bridgman growth configuration". *Journal of Crystal Growth*, vol. 220, pp. 316-325.
- GELFGAT, A.YU., BAR-YOSEPH, P.Z., SOLAN, A., (2001). "Effect of axial magnetic field on three-dimensional instability of natural convection in a vertical Bridgman configuration". *Journal of Crystal Growth*, vol. 230, pp. 63-72.
- GELFGAT, A.YU., GORBUNOV, L.A., KOLEVZON, V., (1993). "Liquid metal in a finite-length cylinder with a rotating magnetic field". *Experiments in Fluids*, vol. 15, pp. 411-416.

- GELFGAT, A.YU., TANASAWA, I., (1994). "Numerical analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method". *Numerical Heat transfer, Part (A)*, vol. 25, pp. 627-648.
- GELFGAT, YU.M., GELFGAT, A.YU., (2004). "Experimental and numerical study of rotating magnetic field driven flow in cylindrical enclosures with different aspect ratios". *Magnetohydrodynamics*, vol. 40, pp. 147-160.
- GONÇALVES, E., FAGHRI, M., ASAKO, Y., CHARAMCHI, M., (2005). "Numerical solution of melting in side-heated rectangular enclosure under electromagnetically simulation low gravity". *Numerical Heat Transfer, Part (A)*, vol. 47, pp. 315-332.
- JUEL, A., MULLIN, T., BEN HADID, H., HENRY, D., (1999). "Magnetohydrodynamic convection in molten gallium". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 378, pp. 97-118.
- JUEL, A., MULLIN, T., BEN HADID, H., HENRY, D., (2001). "Three-dimensional free convection in molten gallium". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 436, pp. 267-281.
- KAKARANTZAS, S.C., SARRIS, I.E., GRECOS, A.P., VLACHOS, N.S., (2009). "Magnetohydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, pp.250-259.
- KAKIMOTO, K., LIU, L., (2003). "Numerical study of the effects of cusp - shaped magnetic fields and thermal conductivity on the melt - crystal interface in CZ crystal growth". *Crystal Research and Technology*, vol. 38, pp.716-725.
- KALAEV, V.V., (2007). "Combined effect of DC magnetic fields and free surface stresses on the melt flow and crystallization front formation during 400mm diameter Si Cz crystal growth". *Journal of Crystal Growth*, vol. 303, pp. 203-210.
- KANEDA, M., TAGAWA, T., OZOE, H., (2006). "Natural Convection of Liquid Metal under a Uniform Magnetic with an Electric Current Supplied from Outside". *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 30, pp.243-252.
- KARCHER, C., KOLESNIKOV, Y., ANDREEV, O., THESS, A., (2002). "Natural convection in a liquid metal heated from above and influenced by a magnetic field". *European Journal of Mechanics- B/ Fluids*, vol. 21, pp. 75-90.
- KHARICHA, A., ALEMANY, A., BORNAS, D., (2004). "Influence of the magnetic field and the conductance ratio on the mass transfer rotating lid driven flow". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 1997-2014.

- KHARICHA, A., ALEMANY, A., BORNAS, D., (2005). "Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound Doppler shift method". *International Journal of Engineering Science*, vol. 43, pp. 589-615.
- KIM, K.M., WITT, A.F., GATOS, H.C., (1972). "Crystal growth from the melt under destabilizing thermal gradients". *Journal of the Electrochemical Society*, vol. 119, pp. 1218-1226.
- KOBAYASHI, N., (1978). "Computational simulation of the melt flow during Czochralski growth". *Journal of Crystal Growth*, vol. 43, pp. 357-763.
- KOLKER, H., (1980). "The behavior of nonrotational striations in silicon", *Journal of Crystal Growth*, vol. 50, pp. 852-858.
- KURIAN, V., VARMA, M.N., KANNAN, A., (2009). "Numerical studies on laminar natural convection inside inclined cylinders of unity aspect ratio". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, pp. 822-838.
- LANGLOIS, W.E., (1977). "Digital simulation of Czochralski bulk flow in a parameter range appropriate for liquid semiconductors". *Journal of Crystal Growth*, vol. 42, pp. 386-399.
- LANGLOIS, W.E., (1979). "Effect of the buoyancy parameter on Czochralski bulk flow in garnet growth". *Journal of Crystal Growth*, vol. 46, pp. 743-746.
- LIENHARD J. H. IV, J. LIENHARD H. V, (2005). "A Heat Transfer Textbook". 3rd Ed., Cambridge, MA: Phlogiston Press.
- LIPCHIN, A., BROWN, R.A., (1999). "Comparison of three turbulence models for simulation of melt convection in Czochralski crystal growth of silicon". *Journal of Crystal Growth*, vol. 205, pp. 71-91.
- LIU, L., KAKIMOTO, K., (2005). "3D global analysis of CZ-Si growth in a transverse magnetic field with various crystal growth rates". *Journal of Crystal Growth*, vol. 275, pp.1521-1526.
- LOPEZ, J.M., PERRY, A.D., (1992). "Axisymmetric vortex breakdown. Part 3: Onset of periodic flow and chaotic advection". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 234, pp. 449-471.
- MA, N., ZHANG, R.H., LARSON, D. J., MANDAI, K.C., (2004). "Dynamics of melt-crystal interface and thermal stresses in rotational Bridgman crystal growth process". *Journal of Crystal Growth*, vol. 266, pp. 216-223.
- MA, N., WALKER, J. S., WITKOWSKI, L. M., (2004). "Combined effects of rotating magnetic field and rotating system on the thermocapillary instability in the floating zone crystal growth process". *Journal of Heat Transfer (ASME)*, vol.126, pp.230-235.

- MAHFOUD, B., BESSAIH, R., (2011). "Oscillatory swirling flows in a cylindrical enclosure with co-/counter-rotating end disks submitted to a vertical temperature gradient". *Fluids Dynamics and Materials Processing*, vol.8, pp.1-26.
- MAHFOUD, B., BESSAIH, R., (2012). "Stability of swirling flows with heat transfer in a cylindrical enclosure with CO/Counter-rotating end disks under an axial magnetic field". *Numerical Heat Transfer, Part (A)*, vol. 61, pp. 463-482.
- MARKHAM, B.L., ROSENBERGER, F., (1984). "Diffusive-convective vapor transport across horizontal and inclined rectangular enclosures". *Journal of Crystal Growth*, vol. 67, pp. 241-254.
- MARTY, PH., WITKOWSKI, L. M., TROMBETTA, P., TOMASINO, T., (1999). "On The Stability of Rotating MHD Flows". *Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamic and Electroconducting Flows*, pp. 327-343.
- MICHELSON, J.A., (1986). "Modeling of laminar incompressible rotating fluid flow", AFM 86-05, Department of Fluid Mechanics, Technical University of Denmark.
- MILHELICIC, C., WINGERATH, K., (1985). "Numerical simulations of the Czochralski bulk flow in an axial magnetic field: Effect on the flow and temperature oscillations in the melt". *Journal of Crystal Growth*, vol. 71, pp.163-168.
- MILHELICIC, M., SCHROECK-PAULI, C., WINGERATH, K., WENZL, H., UELHOFF, W., (1982). "Numerical simulation of free and forced convection in the classical Czochralski method and in CACRT". *Journal of Crystal Growth*, vol. 57, pp. 300-317.
- MITTAL, V., BAIG, M. F., KANT KHAN, B., (2005). "Buoyancy-driven convection in liquid metals subjected to transverse magnetic fields". *Journal of Indian Institute of Science*, vol. 85, pp. 119–129.
- MOKHTARI, F., (2010). "Effet du facteur d'aspect géométrique sur la croissance cristalline dans le procédé de Czochralski modifié". Thèse de Doctorat, USTHB.
- MÖSSNER, R., (1996). Doctorate Thesis, Karlsruhe Research Center, Germany.
- MULLER, G., (1993). "Convective instabilities in melt growth configurations". *Journal of Crystal Growth*, vol. 128, pp.26-36.
- MULLER, G., NEUMANN, G., WEBER, W., (1984). "Natural convection in vertical Bridgman configuration". *Journal of Crystal Growth*, vol. 70, pp. 78-93.
- NEUMANN, G., (1990). "Three dimensional numerical simulation of buoyancy driven convection in vertical cylinders heated from below". *Journal of Fluid Mechanics*, vol.214, pp. 559-578.
- PATANKAR, S. V., (1980). "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". McGraw-Hill.

- POLEZHAEV, V.I., BESSONOV, O.A., NIKITIN, N.V., NIKITIN, S.A., (2001). "Convective interaction and instabilities in GaAs Czochralski model". *Journal of Crystal Growth*, vol. 230, pp. 40-47.
- SCHNEIDER, S., STRAUB, J., (1992). "Laminar natural convection in a cylindrical enclosure with different end temperatures". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 35, pp. 545-557.
- SERIES, R.W., HURLE, D.T.J., (1991). "The use of magnetic fields in semiconductor crystal growth". *Journal of Crystal Growth*, vol. 13, pp. 305-328.
- SORENSEN, J.N., TA PHUOC LOC, (1989). "High-order axisymmetric Navier–Stokes code: description and evaluation of boundary conditions". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 9, pp. 1517-1537.
- STEVENS, J.L., LOPEZ, J.M., CANTWELL, B.J., (1999). "Oscillatory flow states in an enclosed cylinder with a rotating end wall". *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 389, pp.101-118.
- TALMAGE, G., SHYU, S.-H., LOPEZ, J. M., WALKER, J. S., (2000). "Inertial effects in the rotationally driven melt motion during the Czochralski growth of silicon crystals with a strong axial magnetic field". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, vol. 51, pp. 267-289.
- TOUIHRI, R., (1998). "Stabilité des écoulements dans une cavité cylindrique chauffée par le bas en présence d'un champ magnétique". Thèse de doctorat, école centrale de Lyon.
- TOUIHRI, R., BEN HADID, H., HENRY, D., (1999). "On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. II. Effect of magnetic field". *Physics of Fluids*, vol. 11, pp. 2089-2100.
- TURAN, O., POOLE, R.J., CHAKRABORTY, N., (2011). "Aspect Ratio Effects in Laminar Natural Convection of Bingham fluids in Rectangular Enclosures with Differentially Heated Side Walls". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 166, pp. 208-230.
- VERNEUIL, A., (1904). "*Annales de Chimie et de Physique*". Huitième Série, tome III, vol. 20.
- WAGNER, C., FRIEDRICH, R., (2004). "Direct numerical simulation of momentum and heat transport in idealized Czochralski crystal growth configurations". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 25, pp. 431-443.
- WAGNER, C., FRIEDRICH, R., NARAYANAN, R., (1994). "Comments on the numerical investigation of Rayleigh and Marangoni convection in a vertical circular cylinder". *Physics of Fluids*, vol. 6, pp. 1425-1433.

- WAKITANI, S., (2001). "Numerical study of three-dimensional oscillatory natural convection at low Prandtl number in rectangular enclosures", *Journal of Heat Transfer*, vol. 123, pp.77-83.
- WANSCHURA, M., SHEVTSOVA, V.M., KUHLMANN, H.C., RATH, H.J. (1995). "Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges". *Physics of Fluids*, vol. 7, pp. 912.
- WU, X., KAKIMOTO, K., OZOE, H., GUO, Z., (1998). "Numerical study of natural convection in Czochralski crystallization". *Chemical Engineering Journal*, vol. 71, pp. 183-189.
- ZHOU, H., ZEBIB, A., (1992). "Oscillatory convection in solidifying pure metals". *Numerical Heat Transfer, Part A*, vol. 22, pp. 435-468.

Résumé de la Thèse

Etude numérique de la convection thermique lors de la croissance cristalline

Dans cette thèse, une étude numérique de la convection thermique d'un métal liquide au cours de la croissance cristalline a été présentée. Trois modèles physiques sont considérés : une cavité similaire à celle de Czochralski, pour la convection mixte axisymétrique, une autre similaire à celle de Bridgman vertical pour la convection naturelle axisymétrique, et une tridimensionnelle pour la convection mixte dans une cavité de type Czochralski. Un champ magnétique externe uniforme de différentes intensités et orientations est appliqué sur les modèles physiques afin de stabiliser l'écoulement et éliminer les instabilités convectives. Un code de calculs propre basé sur la méthode des volumes finis est utilisé pour la résolution des équations de conservation des problèmes axisymétriques, et pour la convection mixte tridimensionnelle, le code commercial FLUENT est utilisé dans les simulations. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec ceux des travaux numériques et expérimentaux. Pour la convection mixte axisymétrique dans une cavité de type Czochralski, l'effet du nombre de Richardson (Ri), du rapport d'aspect (Ar) et du champ magnétique (Ha) sur le champ d'écoulement sont présentés et discutés. Nous avons trouvé que l'augmentation du Ri déstabilise l'écoulement et provoque la diminution du taux de transfert thermique, et que la forte stabilisation de l'écoulement se manifeste pour un grand allongement de la cavité ($Ar = 3$). Nous avons trouvé également, que l'augmentation du Ha entraîne une augmentation du nombre de Reynolds critique (Re_{cr}), et cause des changements remarquables sur la structure de l'écoulement, et que la forte stabilisation magnétique se trouve pour un champ magnétique appliqué suivant la direction radiale. Pour la convection naturelle dans une cavité de type Bridgman vertical, l'effet du nombre de Grashof (Gr), l'inclinaison du cylindre (φ) et le champ magnétique Ha sur le champ d'écoulement sont présentés et discutés. Nous avons trouvé que l'augmentation du Gr déstabilise l'écoulement et augmente considérablement le taux de transfert thermique. Nous avons trouvé aussi que l'inclinaison du cylindre à un effet très important sur la stabilisation de l'écoulement et que la forte stabilisation se trouve pour l'angle d'inclinaison $\varphi = 30^\circ$. Le champ magnétique à un effet très important dans la direction radiale $\delta = 0^\circ$, et la combinaison entre l'inclinaison du cylindre φ et l'orientation du champ magnétique δ , donne des résultats importants sur le contrôle de la convection naturelle. Alors, il facilite la stabilisation de l'écoulement par plusieurs méthodes, soit par l'inclinaison du cylindre, soit par l'orientation du champ magnétique, soit par la combinaison entre les deux. Pour la convection mixte tridimensionnelle dans une cavité de type Czochralski. Nous avons trouvé que l'intensité du champ d'écoulement dépend fortement du Ri . Et que l'application du champ magnétique provoque un changement remarquable sur la structure d'écoulement et ralentisse la transition par conséquent, stabilise l'écoulement convectif.

Mots clés : Convection thermique, Métal liquide, Croissance cristalline, Champ magnétique, Stabilité, Méthode des volumes finis.

Abstract of thesis

Numerical study of the thermal convection during crystal growth

In this thesis, a numerical study of thermal convection of liquid metal during crystal growth has been presented. Three physical models are considered: a cavity similar to that of Czochralski, for the axisymmetric mixed convection, another similar to the vertical Bridgman for natural convection axisymmetric, and a three-dimensional for the mixed convection in Czochralski enclosure. A uniform external magnetic field of different intensities and directions is applied to the physical models in order to stabilize the flow and eliminate the convective instabilities. A clean computer code based on the finite volume method is used for solving the conservation equations of axisymmetric problems, and for three-dimensional mixed convection, the commercial code FLUENT is used in simulations. The obtained results show a good agreement with those numerical and experimental works. For the axisymmetric mixed convection in a Czochralski cavity, the effect of the Richardson number (Ri), the aspect ratio (Ar) and magnetic field (Ha) on the flow field are presented and discussed. We found that the increasing of the Richardson number destabilizes the flow and causes a decrease in the heat transfer rate, and that the strong stabilization of the flow is manifested for a large elongation of the cavity ($Ar = 3$). We found also that the increase of Ha increases the critical Reynolds number (Re_{cr}) and causes a remarkable changes in the structure of the flow, and that the strong magnetic stabilization is located for the magnetic field applied in the radial direction. For the natural convection in a vertical Bridgman cavity, the effect of the Grashof number (Gr), the inclination of the cylinder (φ) and the magnetic field Ha in the flow field are presented and discussed. We found that the increase of Gr destabilize the flow and significantly increases the heat transfer rate. We have also found that the inclination of the cylinder has a very significant effect on the flow stabilization, and the strongest stabilization located for the angle of inclination $\varphi = 30^\circ$. The magnetic field has a very important effect in the radial direction $\delta = 0^\circ$, and the combination between the inclination of the cylinder φ and the orientation of the magnetic field δ gives a significant results on the control of natural convection. So, it facilitates the flow stabilization by several methods, by inclination of the cylinder, or by the orientation of the magnetic field, or by a combination between the two. For the three-dimensional mixed convection in Czochralski cavity. We found that the intensity of the flow field depends strongly on Ri . And that the application of the magnetic field causes a remarkable change in the flow structure and slows the transition therefore, stabilizes the convective flow.

Keywords: Thermal convection, Crystal growth, Liquid metal, Magnetic field, Stability, Finite volume method.

ملخص الأطروحة

دراسة عددية للحمل الحراري خلال النمو البلوري

في هذه الأطروحة، دراسة عددية للحمل الحراري لسائل معدني خلال النمو البلوري قد قدمت. ثلاثة نماذج فيزيائية درست: تجويف مشابه لشوخرالسكي (Czochralski)، للحمل الحراري المختلط المتناظر بالنسبة لمحور الدوران، وآخر مشابه لبريدجمان (Bridgman) العمودي، للحمل الحراري الطبيعي المتناظر بالنسبة لمحور الدوران، و ثلاثي الأبعاد من نوع شوخرالسكي، للحمل الحراري المختلط. مجال مغناطيسي خارجي مختلف الشدات و الاتجاهات طبق على النماذج الفيزيائية لإخماد السيلان و إلغاء الاضطرابات. برنامج حسابات مطور يعتمد على طريقة الحجوم المنتهية لحل معادلات الحفظ استعمل للمسائل المتناظرة بالنسبة لمحور الدوران، و بالنسبة للحمل المختلط ثلاثي الأبعاد، البرنامج التجاري فلوينت استعمل في المحاكاة. النتائج المحصل عليها في اتفاق جيد مع نتائج التقريبات العددية والنتائج التجريبية. بالنسبة للحمل الحراري المختلط المتناظر بالنسبة لمحور الدوران في التجويف المشابه لشوخرالسكي، تأثير عدد ريتشاردسون (Ri)، معامل الشكل (Ar)، والمجال المغناطيسي (Ha) على حقل السيلان قدم ونوقش. وجدنا بأن زيادة عدد ريتشاردسون يعمل على اضطراب السيلان ويحدث نقصان لمعدل الانتقال الحراري، و الإخماد المهم للسيلان وجد في الاستطالة الكبيرة للتجويف ($Ar = 3$). كما وجدنا بأن زيادة عدد هارتمان يحدث في عدد رينولدس المضطرب، و يحدث تغيرات في شكل السيلان، بحيث الإخماد الأقوى يوجد عندما يطبق المجال المغناطيسي في الاتجاه القطري. بالنسبة للحمل الحراري الطبيعي المتناظر بالنسبة لمحور الدوران في التجويف المشابه لبريدجمان العمودي، تأثير عدد غراشوف (Gr)، ميلان التجويف (φ)، والمجال المغناطيسي (Ha) على شكل السيلان قدم ونوقش. وجدنا أن زيادة عدد غراشوف يعمل على اضطراب السيلان و يحدث ارتفاع مهم لمعدل الانتقال الحراري. وجدنا أيضا بأن ميلان التجويف عامل مهم جدا لإخماد السيلان، بحيث الإخماد المهم وجد عندما يميل التجويف بزاوية $\varphi = 30^\circ$. كما وجدنا أن المجال المغناطيسي قوي عندما يطبق في الاتجاه القطري، و أن الربط بين ميلان التجويف واتجاه المجال المغناطيسي يعطي لنا نتائج مهمة لمراقبة الحمل الطبيعي بحيث يسهل لنا عملية إخماد السيلان بعدة طرق، إما بإمالة التجويف، أو بتوجيه المجال المغناطيسي أو بالربط بينها. بالنسبة للحمل الحراري المختلط ثلاثي الأبعاد في التجويف المشابه لشوخرالسكي، وجدنا أن شدة السيلان مرتبطة بعدد ريتشاردسون، بحيث زيادته تحدث اضطرابات للسيلان. كما وجدنا أيضا أن تطبيق المجال المغناطيسي في الاتجاه المحوري يحدث تغيرات ملحوظة في شكل السيلان كما يبطئ الانتقال وبالتالي يخمد السيلان.

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري، نمو البلورات، سائل معدني، مجال مغناطيسي، الإخماد، طريقة الحجوم المنتهية.