الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة عمار ثليجي – الأغواط

كلية: العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

القسم: العلوم الاقتصادية

الميدان: العلوم الاقتصادية، التسيير وعلوم تجارية

الشعبة: العلوم الاقتصادية

التخصص: اقتصاد نقدي ومالي

مطبوعة (دروس)

موجهة لطلبة: السنة الثانية المستوى: ليسانس

الاحصاء_4_

من إعداد: الدكتور جدي العربي

أستاذ محاضر –أ–، جامعة الاغواط

السنة الجامعية: 2025/2024

الإيميل: l.djedi@lagh-univ.dz

اعتمدت هذه المطبوعة بعد مصادقة المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة الأغواط، بناء على محضر رقم: 2025/07، المنعقد بتاريخ: 2025/10/30، تحت رقم اعتماد: 09/م/2025.

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، له الحمد وشكر ونعمة وله الفضل وثناء الحسن، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين وبعد،

شهدت في الفترة الأخيرة عملية التعامل مع الإحصاء تطورا كبيرا، وكذلك اتسع نطاق التعامل مع النظريات الإحصائية، مما أدى إلى إعطاء الأهمية الكبيرة لموضوع الإحصاء، إذ أصبح له تطبيقات كثيرة ومتعددة في مختلف مجالات الحياة، وأصبح هذا الموضوع يدرس في مختلف أطوار العلم من مدارس ومعاهد وجامعات.

لذا يسرني أن أضع بين يدي طلبتي الاعزاء هذه المطبوعة الخاصة بمقياس الأحصاء4، التي اعتمدت في إعدادها على التبسيط من خلال تدعيم الدروس بالعديد من الأمثلة المتنوعة، حرصا مني على التوضيح وسهولة الفهم والاستيعاب الجيد للطلبة، وذلك لأن عملية توصيل العلم والمعرفة تحتاج إلى أفضل الطرق والأساليب ومنهجية تقديم وعرض الدروس.

جاء محتوى هذا المقياس وفق البرنامج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، حيث شملت هذه المطبوعة أربعة فصول هي:

- الفصل الأول: نظرية المعاينة.
- الفصل الثاني: نظرية التقدير.
- الفصل الثالث: اختبار الفرضيات.

ومن خلال هذا العمل المتواضع حاولت الالمام بالموضوع قدر المستطاع، لهذا أرجوا منكم إبداء ملاحظتكم وآرائكم حول كل خطأ أو نقص في هذه المطبوعة حتى نتمكن من معالجة ذلك وتحسين هذا العمل في المستقبل.

د. جدي العربي

الفهرس

الفصل الأول :توزيع المعاينة	

الفصل الثاني: التقدير	

الفصل الثالث: اختبار الفرضيات

الفصل الأول

توزيع المعاينة

1. توزيع المعاينة:

تمهيد:

تمثل البيانات الاحصائية المعلومات التي يجمعها الباحث عند القيام بدراسة حول ظاهرة معينة، وقد تجمع هذه البيانات اما باستخدام أسلوب الحصر الشامل الذي يتم فيه جمع البيانات عن كل أفراد المجتمع الاحصائي الذي يكون محل الدراسة، أو جمع البيانات باستخدام أسلوب المعاينة الذي يتم فيه جمع البيانات عن جزء فقط من أفراد المجتمع الذي يكون محل الدراسة، وقد يلجأ الباحث إلى أسلوب المعاينة لعدة أسباب كتجانس مفردات المجتمع أو الخوف من اتلافها أو الجهد المبذول أو الوقت اللازم أو التكلفة جمع البيانات إذا تم استهداف كل مفردات المجتمع.

إن اسلوب المعاينة هو ذلك الأسلوب الاحصائي الذي يستخدم لدراسة ظاهرة معينة عوض استخدام اسلوب الحصر الشامل، من هنا نجد أن نظرية المعاينة تهتم بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المأخوذة منه، وهذا ما يدخل ضمن الاحصاء الاستدلالي الذي يعرف على أنه الاستدلال عن معالم المجتمع عن طريق أو من خلال احصاءات العينة.

1.1.مفاهيم احصائية:

1.1.1. المجتمع الاحصائي والعينة الاحصائية:

- **المجتمع الاحصائي:** هو عبارة عن الاصل الكلي يتكون من مجموعة من المفردات، هذه المفردات سواء كانت (حيوان، انسان، نبات، جماد) المهم تجمع بينها صفة مشتركة، وقد يكون المجتمع محدود (نهائي، قابل للعد) او غير محدود (غير نهائي، غير قابل للعد).
- **العينة الاحصائية:** هي جزء من المجمع تتكون من مجموعة من المفردات، وينبغي للعينة ان تكون تمثل المجتمع أحسن تمثيل.

1.1. 2. المعلمة والاحصاءة:

- **المعلمة:** هي كل قيمة يتم حسابها من بيانات المجتمع.
- **الاحصاءة:** هي كل قيمة يتم حسابها من بيانات العينة.

1.1. 3. توزيع المعاينة:

نفترض أننا قمنا باختيار عينة حجمها n من مجتمع ما ثم قمنا بحساب بعض المقاييس الاحصائية مثل المتوسط الحسابي أو التباين أو الانحراف المعياري فإن كل مقياس من هذه المقاييس يمثل متغيرا عشوائيا قد تتغير قيمته من عينة لأخرى، حيث تكون لنا قيم هذا المتغير العشوائي مجتمعا أخرا عدد مفرداته يكون أكبر بكثير من مفردات المجتمع الأصلي الذي سحبت منه العينات، وبالتالي يكون لهذا المتغير العشوائي توزيع يسمى بتوزيع المعاينة.

- **تعريف توزيع المعاينة:**

يمكن تعريف توزيع المعاينة، كما يلي:

- هو ذلك التوزيع التكراري لأحد مقاييس الاحصائية المحسوبة من بيانات جميع العينات العشوائية ذات الحجم الواحد والتي يمكن سحبها من مجتمع الدراسة.
- هو التوزيع الاحتمالي لأي احصائية تحسب قيمتها من كل العينات العشوائية ذات المتساوي والممكن سحبها من المجمع.

- **بعض الرموز المستخدمة في توزيع المعاينة:**

المعالم	الاحصاءات	المقياس
μ	$\bar{X}$	المتوسط الحسابي
σ	S^2	التباين
σ^2	S	الانحراف المعياري
N	n	حجم

- **مراحل بناء توزيع المعاينة:**

من اجل بناء توزيع المعاينة يجب:

1. حساب المتوسط المجتمع(u) وتباينه σ^2.

2. سحب كافة العينات ذات حجم(n) من الارجاع او بدون ارجاع.

3. حساب الإحصائية ($\bar{x}$) لكل عينة.

4. تكوين جدول توزيع تكراري للقيم المختلفة للإحصائية ($\bar{}$) المحسوبة.

5. حساب متوسط المتوسطات($\bar{\bar{x}}$) وتباين المتوسطات($\sigma^2_{\bar{x}}$).

4.1.1. حساب عدد العينات التي يمكن تشكيلها:

- **في حالة السحب بالإرجاع:**

عدد العينات هو: N^n ترتيب مع الإعادة.

- **في حالة السحب بدون ارجاع:**

نميز حالتين:

- *بدون ترتيب (ترتيب غبر مهم)* $c_n^N = \frac{N!}{N!(N-n)!}$ ← *التوفية*
- *مع ترتيب (ترتيب مهم)* $A_n^N = \frac{N!}{(N-n)!}$ ← *التراتيب بدون إعادة.*

<u>**ملاحظة:**</u> غالبا ما يتم في استخدام الحالة السحب بدون ارجاع التوفيقة في حساب عدد العينات.

2.1. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي:

1. 2. 1. حالة السحب مع الإرجاع:

مثال رقم (01):

لدينا مجتمع احصائي مكون من المشاهدة التالية: 2 ,6,4 وسحبنا منه عينة عشوائية مع ارجاع ذات حجم 2 (مشاهدتين).

المطلوب قم بـ:

1. حساب المتوسط المجتمع (u) وتباينه($\sigma_{\bar{X}}^{2}$) .
2. حساب عدد العينات ذات حجم (2) الممكن تكوينها.
3. سحب كافة العينات ذات حجم (2) وتشكيلها مع الارجاع.
4. حساب الإحصائية ($\bar{X}$) لكل عينة.
5. تكوين جدول توزيع تكراري للقيم المختلفة للإحصائية ($\bar{}$) المحسوبة.
6. حساب متوسط المتوسطات ($\bar{x}$) وتباين المتوسطات($\sigma_{\bar{X}}^{2}$).
7. مقارنة إحصاءات العينة مع معالم المجتمع واستنتاج العلاقة بينهما.

الحل:

1. حساب المتوسط المجتمع (u) وتباينه($\sigma_{\bar{X}}^{2}$) .

$$u = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{3} (X-u)^{2} / _N$$

$$\sigma^2 = [(2-4)^2 + (4-4)^2_+ (6-4)^2] \,/\, 3$$

$$\sigma^2 = {}^{(4+0+4)}/_{3} = {}^{8}/_{3}$$

2. .عدد العينات ذات حجم (2) التي يمكن تشكيلها (مع الارجاع):

$$N^n = 3^2 = 9$$

3. تكوين هذه العينات:

	2	4	6
2	(2,2)	(2,4)	(2,6)
4	(4,2)	(4,4)	(4,6)
6	(6,2)	(6,4)	(6,6)

4. حساب المتوسط كل عينة $(\bar{X})$

2	3	4
3	4	5
4	5	6

5. تكوين جدول توزيع تكراري للقيم المختلفة للإحصاء $(\bar{X})$ المحسوبة.

$\bar{X}$	n_i	$\bar{X}.n_i$	$\mu_{\bar{X}}$	$\bar{X}-\mu_{\bar{X}}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2.n_i$
2	1	02	4	−2	4	4
3	2	06	4	−1	1	2
4	3	12	4	0	0	0
5	2	10	4	1	1	2
6	1	06	4	2	4	4
المجموع	**9**	**36**	**4**	/	/	**12**

حساب متوسط المتوسطات($\bar{X}$) وتباين المتوسطات($\sigma_{\bar{X}}^2$).

$$u_{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\bar{X}.n_i}{\sum_{i=1}^{5}n_i} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2.n_i}{\sum_{i=1}^{5}n_i} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma\frac{2}{x} \neq \sigma^2$$

ولكن:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

6. مقارنة إحصاءات العينة مع معالم المجتمع واستنتاج العلاقة بينهما.

- نلاحظ انه في حالة السحب بالإرجاع فان متوسط متوسطات العينة هو متوسط المجتمع أي:

$$u^- = u$$

- نلاحظ انه في حالة السحب بالإرجاع فان تباين متوسطات العينة يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة اي:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

النظرية (01):

إذا كان X متغير العشوائي يمثل مجتمع ما (يخضع لتوزيع ما)، متوسطه(u) .واخترت عينة عشوائية من هذا المجتمع بحجم (n) مع الارجاع، وكان المتغير العشوائي $(\bar{X})$ يمثل الوسط الحسابي للعينة فان:

1. متوسط متوسطات لعينة يساوي متوسط المجتمع، أي:

$$u^- = u$$

تباين متوسطات العينة يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة، أي:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

مثال رقم (02):

مجتمع احصائي متوسطه (85) وتباينه (64) واختيرت عشوائيا من هذا المجتمع عينة بحجم ($n=16$) بالإرجاع، وكان المتغير العشوائي$(\bar{X})$ يمثل الوسط الحسابي للعينة.

المطلوب:

1. احسب متوسط متوسطات العينة (u^{-}).
2. احيب تباين متوسطات العينة$(\sigma_{\bar{X}}^2)$
3. احسب الانحراف المعياري لمتوسطات العينة (σ^{-})

الحل:

من النظرية السابقة، نجد أن :

$$u_{\bar{X}} = u = 85$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{64}{16} = 4$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2} = \sqrt{4} = 2$$

<u>مثال رقم (03):</u>

مجتمع احصائي يخضع توزيع معين، متوسطه $(u = 12)$ وتباينه مجهول، اخترنا عينة عشوائية من هذا المجتمع بحجم $(n = 4)$ مشاهدات مع الارجاع، وتبين بان تباين الوسط الحسابي مساوي $\sigma_{\bar{X}}^2 = 4.5$

المطلوب: 1- اوجد متوسط متوسطات العينة $(u_{\bar{X}})$.

2- اوجد تباين المجتمع الاحصائي (σ^2).

الحل:

من نظرية السابقة نحصل على (u^-)، حيث أن:

$$u_{\bar{x}} = u = 12$$

من نظرية السابقة نحصل على (σ^2)، حيث أن:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow 4.5 = \frac{\sigma^2}{4} \Rightarrow \sigma^2 = (4)(4.5)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 18$$

1. 2.2. حالة السحب بدون ارجاع:

مثال رقم (04):

برجوع للمثال رقم (01) نفس المعطيات ونفس المطلوب، ولكن في هذا المثال نفترض أننا سحبنا من المجتمع عينة عشوائية بدون ارجاع ذات حجم 2 (مشاهدتين).

الحل:

1-عدد العينات الممكن سحبها هي: $C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$$= \frac{3!}{2!\,(1)} = 3$$

2- تشكيل العينات:

	2	4	6
2	~~2,2~~	2,4	2,6
4	~~4,2~~	~~4,4~~	4,6
6	~~6,2~~	~~6,4~~	~~6,6~~

3- حساب متوسط كل عينة $(\bar{X})$، نجد: 3,4,5

4- حساب متوسط متوسطات العينة:

$$u_{\bar{X}} = \frac{(3+4+5)}{3} = 4$$

5- حساب تباين متوسط متوسطات العينة (σ^2):

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{(\bar{x} - u_{\bar{x}})^2}{N}$$

$$= \frac{(3-4)^2 + (4-4)^z + (5-4)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

ومنه $\sigma_{\bar{X}}^2 \neq \sigma^2$

ولكن

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} . \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

$$= \left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)\left(\frac{3-2}{3-1}\right) = \left(\frac{8}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

6- مقارنة إحصاءات العينة مع معالم المجتمع واستنتاج العلاقة بينهما.

- نلاحظ انه في حالة السحب بدون ارجاع فان متوسط متوسطات العينة كذلك هو متوسط المجتمع، أي:

$$u_{\bar{x}} = u$$

- نلاحظ انه في حالة السحب بدون ارجاع فان تباين متوسطات العينة هو تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة ومضروبا في معامل التصحيح (أو معامل الارجاع) $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} . \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

النظرية (02):

إذا كان X متغير العشوائي يمثل مجتمع ما (يخضع لتوزيع ما)، متوسطه(u) .واخترت عينة عشوائية من هذا المجتمع بحجم (n) بدون ارجاع، وكان المتغير العشوائي $(\bar{X})$ يمثل الوسط الحسابي للعينة فان:

1. متوسط متوسطات لعينة يساوي متوسط المجتمع، أي:

$$u_{\bar{X}} = u$$

2. تباين متوسطات العينة يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة ومضروبا في معامل التصحيح (أو معامل الارجاع) $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أي:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} . \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

ملاحظة : بالنسبة لتباين متوسط العينة، لدينا:

$$\sigma_{\frac{2}{x}} = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{X} & \text{القانون الأول} \\ \frac{\sigma^2}{X}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) & \text{القانون الثاني} \end{cases}$$

:

حيث أن:

المقياس (التسمية)	الرمز
تباين المجتمع	σ^2
تباين متوسطات العينة	$\sigma_{\bar{x}}^2$
حجم المجتمع	N
حجم العينة	n

ونميز هنا مجموعة من الحالات التي نستخدم فيها القانون الأول أو القانون الثاني، كما يلي:

- الحالة الأولى: المجتمعات غير محدودة (القانون الأول)
- الحالة الثانية: المجتمعات محدودة لدينا
  - $\frac{n}{N} > 0.05 \leftarrow$ القانون الثاني
  - $\frac{n}{N} < 0.05 \leftarrow$ القانون الأول
- الحالة الثالثة:
  - السحب مع الارجاع (القانون الأول)
  - السحب بدون ارجاع (القانون الثاني)

<u>**ملاحظة:**</u> يهمل معامل التصحيح في الحالتين التاليتين:

1) إذا كان حجم N كبير جدا

2) $\frac{n}{N} \leq 5\%$

مثال رقم (05):

المجتمع تكون من 12000 فرد و$u = 100$، $\sigma = 60$ ، اوجد المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط $(\bar{x})$ عندما يكون حجم العينة أ) $n = 100$, ب) $n = 900$ ، وفي حالة $n = 100$ احسب احتمال ان تكون $\bar{x}$ محصورا بين 98و102

الحل:

لدينا: $u = 100; N = 12000; \sigma = 6$

1) المتوسط توزيع المعاينة للمتوسط $(u_{\bar{X}})$

$$u_{\bar{x}} = u = 100$$

2) انحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات $\sigma\bar{x}$

الحالة أ) $n = 100$

$$\frac{n}{N} ؟ 5\%$$

$$\frac{100}{12000} ؟ 5\%$$

$$0.008 < 0.05$$

اذن نستخدم القانون الأول، أي اهمال معامل الارجاع، ومنه:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{100}} = \frac{60}{10}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 6$$

الحالة ب) $n = 900$

$$\frac{n}{N} ؟ 5\ \%$$

$$\frac{900}{12000} ؟ 5\%$$

$$0.075 < 0.05$$

اذن نستخدم القانون الثاني، أي لا يمكن اهمال معامل الارجاع، ومنه:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{60}{\sqrt{900}}\sqrt{\frac{12000-\overline{900}}{12000\quad -1}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 1.85$$

2. في حالة $n = 100$ احسب احتمال ان تكون $\bar{x}$ محصورا بين 98 و102

$$\rho(98 < \bar{x} < 102) = P\left(\frac{98 - 100}{6} < z < \frac{102 - 100}{6}\right)$$

$$P = (-0.03 < z < 0.03) = \rho(z < 0.03) - p(z < -0.03)$$

$$= p(z < 0.03) - [1 - P(z < 0.03)]$$

$$= 0.51197 - 1 + 0.51197 = 0.02394$$

1. 2. 3.حالات خاصة لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي:

1) إذا كان σ^2 معلوم و$n > 30$ (توزيع المجتمع طبيعي او غير طبيعي)

$$z = \frac{x - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

2) إذا كان المجتمع له توزيع طبيعي وσ^2 مجهول و $n < 30$ فان

$$z = \frac{\bar{x} - u}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

3) إذا كان σ^2 مجهول و $n > 30$

$$z = \frac{x - u}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

مثال رقم (06):

إذا كان لدينا مجموع متوسط 9 والانحراف معياري 2 من مجتمع طبيعي، وسحبنا منه عينة عشوائية بحجم 25.

المطلوب: اوجد احتمال ان يزيد متوسط العينة عن 10

الحل:

$$4 = \sigma^2; n = 25 < 30$$

$$P\left(z \geq \frac{10-9}{\frac{2}{\sqrt{25}}}\right) = p(z \geq 2.5) = 0.0062$$

مثال رقم (07):

إذا كان لدينا علامات الطلبة في مادة الإحصاء في نخضع لتوزيع وسيطه 70 واخذت منه عينة عشوائية بحجم 16 طالب. ووجد ان الانحراف المعياري لها هو 8.

المطلوب: احسب احتمال ان يزيد وسط علامات العينة عن 74.

الحل:

$$\sigma^2 =?; \quad n = 16 < 30$$

$$p(\bar{x} \geq 74)$$

$$T = \frac{\bar{x}-70}{\sqrt{\frac{64}{16}}} \sim t = (16-1)$$

$$p(\bar{x} \geq 74) = p(T \geq 2) = 1 - p(T \leq 2)$$

$$=1-0.975=0.025$$

مثال رقم(08):

لدينا مجتمع يتبع توزيع الطبيعي متوسطه 7 سحبنا منه عينة عشوائية بحجم 36 فوجدنا ان تباينها هو 9.

المطلوب: احسب احتمال ان يقل متوسط العينة عن 8.

الحل:

$n > 30$; مجهول σ^2

$$p(\bar{x} < 8) = P\left(z < \frac{8-7}{\sqrt{\frac{9}{36}}}\right) = p(z < 2)$$

=0.9772

3.1. توزيع المعاينة للفروق والمجاميع:

ليكن لدينا مجتمعان مستقلان بمتوسطي (u_1, u_2) ، وتبايني σ_1^2, σ_2^2 ، وسحبنا من كل مجتمع عينة عشوائيا، فان توزيع المعاينة للفروق والمجاميع يكون وفق الحالات التالية:

1.3.1. الحالة الأولى (المجتمعات الاصلية معروفة التوزيع):

$$X \to N(u_1; {\sigma^2}_1)$$

$$Y \to N(u_2, {\sigma^2}_2)$$

$$\bar{X} \to N\left(u_1, \frac{{\sigma^2}_1}{n_1}\right)$$

$$\bar{Y} \to N\left(u_2, \frac{\sigma^2{}_2}{n_2}\right)$$

$$\bar{X} \mp \bar{Y} \to N\left(u_1 \mp u_2, \frac{\sigma^2{}_1}{n_1} \mp \frac{\sigma^2{}_2}{n_2}\right)$$

$$z = \frac{(\bar{X} \pm \bar{Y}) - (u_1 \pm u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to N(0,1)$$

2.3.1. الحالة الثانية (المجتمعات الاصلية غير معروفة التوزيع):

هنا نميز ثلاثة حالات:

أ- n_2, n_1 كبيرتان $\left(n_1 \text{ و} n_2 \geq 30\right)$ و σ_1^2, σ_2^2 معروفتان، فإن:

$$z = \frac{(\bar{X} \pm \bar{Y}) - (u_1 \pm u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to N(0,1)$$

ب- n_2, n_1 صغيرتان $\left(n_1 \text{ و} n_2 < 30\right)$ و σ_1^2, σ_2^2 مجهولتان في هذه الحالة نفرض ان $SP^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ وعليه فإن:

$$z = \frac{(\bar{X} \pm \bar{Y}) - (u_1 \pm u_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to t_{(n_1+n_2-2)}$$

$$z = \frac{(\bar{X} \pm \bar{Y}) - (u_1 \pm u_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{(n_1+n_2-2)}$$

ملاحظة: يمكن الحصول على SP من خلال التباين المشترك $(SP)^2$ من القانون التالي:

$$SP^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

حيث أن:

1) S^2: تباين العينة.

2) $SP = \sqrt{SP^2}$

ج) n_2 ; n_1 كبيرتان $\left(n_1 \text{ و } n_2 \geq 30\right)$، σ_1^2 . σ_2^2 مجهولتان، فإن:

$$z = \frac{(\bar{X} \pm \bar{Y}) - (u_1 \pm u_2)}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \rightarrow N(0; 1)$$

مثال رقم (09):

ليكن لدينا مجموعتان:

$$x = 8; 7; 3$$

$$y = 4 ; 2$$

احسب ما يلي:

1) $u_X ; u_Y$

2) $u_X \pm u_Y$

3) u_{X-Y}

4) u_{X+Y}

6) $\sigma_X^2 ; \sigma_Y^2$

7) $\sigma_X^2 \mp \sigma_Y^2$

8) σ_{X-Y}^2

9) σ_{X+Y}^2

5) ماذا تلاحظ

الحل:

u_X =(8+7+3) /3=6

$$u_Y = \frac{2+4}{2} = 3$$

$u_X + u_Y = 6 + 3 = 9$

$u_X - u_Y = 6 - 3 = 3$

σ_X^2 =[(3−6)²+(7−6)²+(8−6)] /3

= (9+1+4) /3 =14/3

σ_Y^2= [(2−3)²+(4−3)²] /2

= (1+1) /2 =1

لدينا:

		X		
	X−Y	3	7	8
Y	2	1	5	6
	4	−1	3	4

		X		
	X+Y	3	7	8
Y	2	5	9	10
	4	7	11	12

ومنه:

$u_{(X-Y)}$= (1+5+6−1+3+4) /6=18/6=3

$u_{(X+Y)} = (5 + 9 + 10 + 7 + 11 + 12)/6$=54/6=9

نلاحظ أن:

$$\mu_{(X\pm Y)} = \mu_X \pm \mu_Y$$

$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \frac{14}{3} + 1 = \frac{17}{3}$

$\sigma_X^2 - \sigma_Y^2 = \frac{14}{3} - 1 = \frac{11}{3}$

$\sigma^2_{(X+Y)}$= [(5−9) ²+(9−9) ²+(10−9) ²+(7−9) ²+(11−9) ²+(12−9) ²]/6

= (16+0+1+4+4+9) /6 =34/6 =17/3

$\sigma^2_{(X-Y)}$= [(1−3) ²+(5−3) ²+(6−3) ²+(−1−3) ²+(3−3) ²+(4−3) ²]/6

= (4+4+9+16+0+1) /6 =34/6 =17/3

نلاحظ ان:

$$\sigma^2_{(X\pm Y)} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

مثال رقم (10):

ليكن لدينا مصنعان Y و X ، بحيث ينتج المصنع الأول (X) بطاريات سيارة لما متوسط عمر 3.5 سنة وانحراف معياري 0.45 سنة، بينما ينتج المصنع الثاني (Y) نفس البطاريات متوسط عمر 3.3 سنة بانحراف معياري 0.3 سنة، اخذت من المصنع الأول عينة عشوائية مكونة من 30 بطارية، و اخذت من المصنع الأول عينة عشوائية مكونة من 36 بطارية.

المطلوب:

ما هو احتمال ان يكون متوسط عمر العينة الأولى اقل او نريد 0.4 عن متوسط العينة الثانية؟.

الحل:

المصنع الثاني (Y)	المصنع الاول (X)
المجتمع (Y)	المجتمع (X)
$u_Y = 3.3$	$u_X = 3.5$
$\sigma_Y = 0 \cdot 3$	$\sigma_X = 0 \cdot 45$
$n_1 = 36$	$n_1 = 30$

المعطيات:

معروفتان اذن: $\sigma_Y^2 \cdot \sigma_X^2 \quad \cdot \quad n_2 \cdot n_1 \geq 30$

$\bar{X} \rightarrow N(3.5\,, 0.45)$

$\bar{Y} \rightarrow N(3.3\,, 0.3)$

$\bar{X} - \bar{Y} \rightarrow N\big((3.5 - 3.3)\,, (0.45) + (0.3)\big)$

$\bar{X} - \bar{Y} \rightarrow N(0.2\,, 0.15)$

$p(\bar{X} - \bar{Y} \geq 0.4) = ?$

$$P\left(\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (u_X - u_Y)}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n_1}} + \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n_2}}} \geq \frac{0.2 - 0 \cdot 4}{\frac{0.45}{\sqrt{30}} + \frac{0 \cdot 3}{\sqrt{36}}}\right)$$

$$P = (z \geq 2.08) = 1 - p(z \leq 2.08)$$

$$= 0.01876$$

مثال رقم (11):

اخذنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي $N_1(70,169)$ ، $N_2(67,100)$ على التوالي، فإذا حجم العينة الأولى 30 والثاني 40. وكان $\bar{X}$ يرمز لها الى متوسط العينة الثانية فأوجد:

1. احتمال ان يزيد متوسط العينة الأولى عن متوسط العينة الثانية
2. احتمال ان يزيد الفرق بين متوسط العينتين عن 8
3. احتمال يكون فرق بين متوسط العينتين أكبر من 8 ومن 10
4. $P(\overline{X_1} - 69 < 0)$
5. $P(\bar{X}_2 - 55 > 10)$
6. $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + 50 > 58)$

الحل:

المجتمع 1:

$$u_1 = 70$$
$$\sigma_1^2 = 169$$
$$n_1 = 30$$

المجتمع 2:

$$u_2 = 67$$
$$\sigma_2^2 = 100$$
$$n_1 = 40$$

- $P\ (\bar{X}_1 > \bar{X}_2) = p(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0)$

$$P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\frac{\sigma^2{}_1}{\sqrt{n_1}} + \frac{\sigma^2{}_2}{\sqrt{n_2}}} \geq \frac{0 - (70 - 67)}{\sqrt{\frac{169}{30} + \frac{100}{40}}}\right)$$

$$= P(Z > -1.05)$$

$$p(z < 1.05) = 0.85314$$

- $P\,(\bar{X}_1-\bar{X}_2\geq 8)=p\left(Z\geq\frac{8-3}{\sqrt{\frac{169}{30}+\frac{100}{40}}}\right)=P(\ Z\geq 1.75)$

$=1-0.95994=0.0401$

- $P(8<\bar{X}_1-\bar{X}_2<10)$

$=P\left(\frac{8-(70-67)}{\sqrt{\frac{169}{30}+\frac{100}{40}}}<Z<\frac{10-(70-67)}{\sqrt{\frac{169}{30}+\frac{100}{40}}}\right)$

$=P(1\cdot 75<z<2.45)=0.033$

$$P_{(\bar{X}_1-69<0)\ =\ p(\bar{X}_1<69)}=P\left(Z<\frac{69-70}{\frac{13}{\sqrt{30}}}\right)$$

$=P(Z<-0.42)=0.3372$

- $P(\bar{X}_2-55>10)=P\left(Z>\frac{65-67}{\frac{10}{\sqrt{40}}}\right)=P(Z>-1.26)$

$=0.8962$

- $P(\bar{X}_1-\bar{X}_2+50>58)=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2>58-50)$

$=P(\bar{X}_1-\bar{X}_2>8)=0.0401$

مثال رقم (12):

معمل ينتج 700 من طماطم كل يوم سحبت منه عينة عشوائية ذات حجم 40 يوما، فكان انجرافها 40 كلغ ومعمل اخر ينتج 500 كلغ كمعدل يومي سحبت منع عينة عشوائية بحجم 35 يوميا وكان انحرافها المعياري 20 كلغ.

المطلوب: اوجد احتمال ان يكون الفرق العينتين اقل من 210 وأكثر من 180

الحل:

المجتمع 1	المجتمع 2
$u_1 = 700$	$u_2 = 900$
$\sigma_1^2 = ?$	$\sigma_2^2 = ?$
$\sigma_{\bar{x}_1} = 40$	$\sigma_{\bar{x}_2} = 20$
$n_1 = 40$	$n_2 = 35$

نلاحظ ان$n_1 \cdot n_2 \geq 30$ لكن و $\sigma_1^2 ; \sigma_2^2$ مجهولتين، اذن:

$$P\left(\frac{180-(700-500)}{\frac{40}{\sqrt{40}}+\frac{20}{\sqrt{35}}} < Z < \frac{210-(700-500)}{\frac{40}{\sqrt{40}}+\frac{20}{\sqrt{35}}}\right)$$

$$=P(-2.79 < Z < 1.39) = 0.9151$$

مثال رقم (13):

سحبنا عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي متوسط 350 وتباين مجهول. فكان تباينها 7,8. وسحبنا عينة عشوائية أخرى حجمها 12 من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي متوسط 300 وتباين مجهول فكان تباينها 6,5.

المطلوب: اوجد احتمال ان لا يزيد فرق متوسط العينتين عن 53.

<u>الحل:</u>

المجتمع الأول:	المجتمع الثاني
$u_1 = 350$	$u_2 = 300$
$n_1 = 10$	$n_2 = 12$
$\sigma_1^2 = ?$	$\sigma_2^2 = ?$
${\sigma^2}_{\bar{x}_1} = 40$	${\sigma^2}_{\bar{x}_2} = 6.5$

اذن $n_2 ; n_1 < 30$; σ_1^2 , σ^2 مجهولتين

في هذه الحالة نفرض ان $SP = \sigma_2 = \sigma_1$ لهذا نحسب التباين المشترك $(SP)^2$

$$(SP)^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$(SP)^2 = \frac{(10-1)(7.8)+(12-1)(6.5)}{10+12-2}$$

$$(SP)^2 = 7.085$$

$$\Rightarrow SP = 2.6617$$

وبالتالي:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 53) = p\left(T < \frac{53-(350-300)}{2.6617\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}}\right)$$

$$=P(T < 2.63) = 0 \cdot 99$$

1. 4. توزيع المعاينة للنسبة:

لنفترض انه لدينا مجتمع معين وانه يوجد في هذا المجتمع بعض المفردات ذات صيغة معينة. ونسبة هذه المفردات للمجتمع هي ( ) حيث $P = \frac{X}{N}$ ، مع X (عدد المفردات التي تتوفر فيها هذه الصيغة). فاذا سحبنا عينة عشوائية ذات حجم (n) من هذا المجتمع، وكان عدد من تتوفر فيهم الصيغة المطلوبة من هذه العينة هو (X) فان $\hat{P} = \frac{X}{n}$ ونقول ان $\hat{P}$ تتمثل نسبة المفردات ذات الصيغة المطلوبة من العينة التابعة لنفس المجتمع، فنحصل على توزيع المعاينة للنسبة $\hat{P}$.

مثال رقم (14):

سحبنا عينة عشوائية حجمها 20 من نقاط الطلبة في امتحان لاحصاء3. وهي كالتالي:

7 , 6.5 , 9 , 14 , 13 , 18.5 , 19 , 02 ,40 ,20 ,17 ,16.5 ,15 , 14 ,12 , 11 ,
03 , 5 , 8.5 ,9.

المطلوب: أحسب نسبة الطلبة الحاصلين على المعدل في هذه العينة.

الحل:

لدينا:

$$\hat{P} = \frac{X}{n}$$

$$n = 20$$

$$X = 11$$

ومنه:

$$\hat{P} = \frac{11}{20}$$

$$\Rightarrow \hat{P} = 0.55$$

اذن 55% من نقاط في هذه العينة أكبر من 10 او تساويها.

إيجاد التوقع والتباين النسبة:

أولا- في حالة السحب بالإرجاع، لدينا:

$$E(\hat{P}) = u_{\hat{P}} = P$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n}$$

حيث ان:

q هي مكمل للنسبة p حيث: $q = 1 - p$

ثانيا- في حالة السحب بدون ارجاع، لدينا:

$$E(\hat{P}) = u_{\hat{P}} = P$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

مثال رقم (15):

لاحظت إدارة احدى الجامعات أنه في عينة مكونة من 100 طالب يوجد 40 منهم حصلوا أخيرا على شهادة، فاذا كانت نسبة الطلبة الذين يحصلون على تلك الشهادة لطور معين هو 0.9.

- اوجد متوسط وتباين النسبة

الحل:

$$u_{\hat{P}} = p = 0.9 \qquad \hat{P} = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{0.9(1 - 0 \cdot 9)}{100} = 0.009$$

مثال رقم (16):

انطلاقا من بيانات المثال (01)، أوجد نسبة الطلبة الحاصلين على المعدل من مجموع الطلبة الكلي (300). ثم أحسب خطا المعاينة إذا علمت ان نسبة الحاصلين على المعدل منهم هو 0.9

الحل:

$$u_{\hat{P}} = P = 0.9$$

$$\frac{n}{N} = \frac{31}{300} \geq 0.05 \rightarrow \text{(يمكن ادخال معامل الارجاع)}$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \left(\frac{pq}{n}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \left(\frac{(0.9)(1-0.9)}{31}\right)\left(\frac{300-31}{300-1}\right)$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = 0.0026$$

مثال رقم (17):

ليكن لدينا مجتمع مكون من المفردات التالية ليكن 3 , 7 ,5 وسحبنا منه عينة عشوائية ذات الحجم (2).

المطلوب:

1. إيجاد التوزيع المعاينة للإحصاء $\hat{P}$ والذي يمثل نسبة ظهور الوقم 3 في العينة في حالة السحب بالإرجاع وبدون ارجاع.
2. اثبات أن المتوسط والتباين للتوزيع المعاينة للإحصاء $\hat{P}$ هما على التوالي:

$$E(\hat{P}) = u_{\hat{P}} = P$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n}$$

الحل:

- **في حالة السحب بالإرجاع:**

عدد العينات هو $N^n = 3^2 = 9$

	3	7	5
3	(3,3)	(3,7)	(3,5)
7	(7,3)	(7,7)	(7,5)
5	(5,3)	(5,7)	(5,5)

رقم العينة	العينة	عدد مرات ظهور 3	نسبة ظهور رقم 3

1	(3,3)	2	1
2	(3,7)	1	0.5
3	(3,5)	1	0.5
4	(7,3)	1	0.5
5	(7,7)	0	0
6	(7,5)	0	0
7	(5,3)	1	0.5
8	(5,7)	0	0
9	(5,5)	0	0

يمكن تلخيص النتائج السابقة الخاصة بنسبة ظهور الرقم 3 في الجدول التوزيع التكرار كما يلي:

$(\hat{P}-u_{\hat{P}})^2 n_i$	$(\hat{P}-u_{\hat{P}})^2$	$\hat{P}-u_{\hat{P}}$	$\hat{P}n_i$	n_i	$\hat{P}$
0.4356	0.1089	−0.33	0	4	0
0.4498	0.4489	0.67	1	1	1
0,1156	0.0289	0.17	2	4	0.5
1.0001	/	/	3	9	المجموع

$$u_{\hat{P}}=\frac{\sum \hat{P}n_i}{\sum n_i}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=0\cdot 33$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2=\frac{\sum(\hat{P}-u_{\hat{P}})^2 n_i}{\sum n_i}=\frac{1.0001}{9}=0.111$$

الاثبات:

$$P=\frac{1}{3}=u_{\hat{P}}$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n} = \frac{(0.33)(1-0.33)}{2} = 0.111$$

- **السحب بدون ارجاع:**

رقم العينة	العينة	عدد مرات ظهور 3	نسبة ظهور رقم 3
1	(3,7)	1	0.5
2	(3,5)	1	0.5
3	(7,3)	1	0.5
4	(7,5)	0	0
5	(5,3)	1	0.5
6	(5,7)	0	0

نكون جدول التوزيع تكراري لنسبة ظهور رقم 3 في هذه الحالة

$\hat{P}$	n_i	$\hat{P}n_i$	$\hat{P}-u_{\hat{P}}$	$(\hat{P}-u_{\hat{P}})^2$	$(\hat{P}-u_{\hat{P}})^2 n_i$
0	2	0	-0.33	0.1089	02178
0.5	4	2	0.17	0.0289	0,1156
المجموع	6	3	/	/	0.3334

$$u_{\hat{P}} = \frac{\sum \hat{P}n_i}{\sum n_i} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0 \cdot 33$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{\sum (\hat{P}-u_{\hat{P}})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{0.3334}{6} = 0.0556$$

الاثبات:

$$P = \frac{1}{3} = u_{\hat{P}}$$

$$\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{(0.33)(1-0.33)}{2}\left(\frac{3-2}{3-1}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\hat{p}}^2 = 0.055$$

ملاحظة: يكون تعميم نتائج توزيع المعاينة ل $\overline{X}$ في توزيع المعاينة للنسبة $\widehat{\ }$

$$\hat{P} \backsim N\left(p, \frac{pa}{n}\right) \quad , \qquad n \geq 30$$

مثال رقم (18):

إذا كان احتمال نجاح الطلاب في أحد المقاييس هو 0.9 واخذت عينة حجمها 49 طالب.

المطلوب: ما هو احتمال أن: $(\widehat{P} \geq 0.8)$ ؟

$$\hat{P} \backsim \left(0.9\,;\ \frac{(0.9)(0 \cdot 1)}{49}\right) \quad , \qquad n = 49 \geq 30$$

$$P\big(\hat{P} \geq 0 \cdot 8\big) = P\left(Z \geq \frac{0.8 - 0 \cdot 9}{\sqrt{\frac{(0 \cdot 9)(0.1)}{49}}}\right) = P(Z \geq -2.38)$$

$$= P(Z \leq 2.38) = 0.99134$$

مثال رقم (19):

إذا كانت نسبة الراسبين من الطلبة في جامعة ما هو 9%، اخذت عينة عشوائية مكونة من 1000 طالب.

المطلوب: ما هو احتمال ان نجد في هذه العينة 70 طالب على الأكثر راسبين؟

الحل:

$$\hat{P} \sim N\left(0.09\,,\frac{0.09(1-0.09)}{1000}\right)$$

$$P\left(\hat{P} \le \frac{70}{1000}\right) = P\left(\hat{P} \le 0 \cdot 07\right)$$

$$P\left(Z \le \frac{0.07-0.09}{0.00905}\right) = P(Z \le -2.21) = 1 - P(Z \le 2.21) = 0.0136$$

5.1. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين:

- إذا كان لدينا:

$\hat{P}_1$ نسبة عينة المجتمع الأول.

$\hat{P}_2$ نسبة عينة المجتمع الثاني.

P_1 نسبة المجتمع الأول

P_2 نسبة المجتمع الثاني

n_1 حجم العينة الأولى

n_2 حجم العينة الثانية

- في هذه الحالة تكون لدينا:

$$Z = \frac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

مثال رقم (*20*):

لدينا مصنعان ينتج المصنع الأول ما نسبته 8% من منتج معين، وينتج المصنع الثاني ما نسبته9% من نفس المنتج. سحبنا من انتاج المصنع الأول عينة حجمها 2200. وسحبنا عينة من انتاج المصنع الثاني عينة حجمها 2500.

المطلوب:

اوجد: 1) $P\left(\hat{P}_1 > 0.08\right)$

2) $P\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \le 0.07\right)$

3) $P\left(-0.05 \le \hat{P}_1 - \hat{P}_2 \le 0.05\right)$

الحل:

لدينا:

$$P_1 = 0.08 \quad P_2 = 0.09 \quad n_1 = 2200 \quad n_2 = 2500$$

1) $$\left(\hat{P}_1 > 0.08\right) = P\left(\frac{(\hat{P}-P)}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \ge \frac{0.08-0.08}{\sqrt{\frac{(0.08)(1-0.08)}{22\infty}}}\right) = p(Z \ge 0) = 0.5$$

2) $$P\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \le 0.07\right) = P\left(Z \le \frac{0.07-(0.08-0.09)}{\frac{0{\cdot}08(1-0.08)}{22OO} + \frac{0{\cdot}09(1-0.09)}{2500}}\right)$$

$$P(Z \le 9.83)$$

3)

$$P\left(\frac{-0.05-(0.08-0.09)}{\frac{0.08(1-0.08)}{2200}+\frac{0.09(1-0.09)}{2500}} < Z < \frac{0.05-(0.08-0.09)}{\frac{0.08(1-0.08)}{2200}+\frac{0.09(1-0.09)}{2500}}\right)$$

$$\Rightarrow P(-4.91 < y < 7.37) = 1$$

مثال رقم (21):

إذا علمت ان نسبة الذكور في المؤسسة A تبلغ 30% وفي المؤسسة B 20% فاذا سحبت عينتين عشوائيا الأولى من المؤسسة A حجمها 100 والثانية من المؤسسة B حجمها 200.

المطلوب: احسب احتمال ان يكون الفرق بين نسبتي الذكور في العينتين أكبر من 6%.

الحال:

$$p_A = 0.3 \quad p_B = 0.2 \quad n_A = 100 \quad n_B = 200$$

$$p(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0.06) = ?$$

$$p\left(\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_A-p_B)}{\frac{p_A(1-p_A)}{n_A}+\frac{p_B(1-p_B)}{n_B}} > \frac{0.06-(0.3-0.2)}{\frac{0.3(1-0.3)}{100}+\frac{0.2(1-0.2)}{200}}\right)$$

$$= p(y > -0\cdot 74) = 0.7704$$

6-1. توزيع المعاينة للتباين:

إذا كان لدينا مجتمع طبيعي حجمه N له متوسط μ وتباين σ^2، وسحبنا منه جميع العينات الممكنة ذات حجم n عشوائيا وقمنا بحساب تباين كل عينة من هذه العينات العشوائية المسحوبة ولتكن $S_1^2, S_2^2, \dots\dots\dots, S_K^2$ فنحصل على متغيرا عشوائيا جديدا S^2 يأخد قيم المختلفة لهذه التباينات المحسوبة، أي أن هذه التباينات العينات المحسوبة تشكل انا توزيعا تكراريا يطلق عليه توزيع المعاينة للتباينات.

فإن الاحصاءة المكونة من S^2 هي: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ توزيع كاي تربيع χ_v^2 بدرجات حرية: $v = n - 1$، أي: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_v^2$

مثال رقم (22):

ليكن لدينا مجتمع حجمه $N = 100$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $^{2} = 80$ ، سحبنا منه عينة عشوائية ذات حجم $n = 16$. ما هو احتمال أن يكون تباين العينة ^{2} يكون أقل أو يساوي 71.7، علما أن تباين المجتمع.

الحل:

لدينا:

$$n = 16\,, v = 16 - 1 = 15\,, \sigma^2 = 80$$

والمطلوب حساب: $P(S^2 \leq 10)$

إذن:

$$P(S^2 \leq 71.70) = P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \leq \frac{71.7(n-1)}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi_v^2 \leq \frac{71.7(15)}{80}\right)$$

$$= P(\chi_{15}^2 \leq 14.34) = 0.5$$

1. 7. توزيع المعاينة لنسبة بين تبايني:

إذا كان لدينا مجتمعين طبيعيين، حيث أن المجتمع الأول حجمه N_1 وتباينه σ_1^2 وسحبت منه عينات عشوائية حجم كل منها n_1 لها تباين S_1^2، والمجتمع الثاني مستقل عن المجتمع الأول حجمه حجمه N_2 وتباينه σ_2^2 وسحبت منه عينات عشوائية حجم كل منها n_2 لها تباين S_2^2، فإن الاحصاءة المكونة من نسبتي تبايني عينتين $S_1^2\,, S_2^2$ تقترب منتوزيع F، بحيث:

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi_{v_1}^2 \quad , \qquad \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{v_2}^2$$

وبالتالي:

$$\frac{\left.\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\right/(n_1-1)}{\left.\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\right/(n_2-1)} \sim F_{v_1, v_2}$$

حيث أن:

$$v_1 = n_1 - 1 \,, v_2 = n_2 - 1$$

وبعد تبسيط العلاقة السابقة: نجد:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$$

ملاحظة: إذا تساوى تبايني المجتمعين فإن:

$$F = \frac{S_1^2}{S_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$$

مثال رقم (23):

تخضع علامات الطلاب في مادة الرياضيات للتوزيع الطبيعي بمعدل 70 وانحراف معياري 20، سحبت منه عينة عشوائية حجمها 25 طالب.

المطلوب: أحسب ما يلي:

- احتمال أن يكون معدل العلامات أكبر من 56 وأصغر من 85.
- احتمال أن يكون تباين العلامات في العينة أكبر من 492.5.
- احتمال أن يكون تباين العلامات في العينة محصورا بين 260.9 و 332.4.

الحل:

لدينا:

$$\mu = 70\,,\sigma = 20\,,n = 25$$

$$P(56 \leq \bar{X} \leq 85)$$

$$= P\left(\frac{56-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{85-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\frac{56-70}{\frac{20}{\sqrt{25}}} \leq Z \leq \frac{85-70}{\frac{20}{\sqrt{25}}}\right)$$

$$= P(-3.5 \leq Z \leq 3.75) = P(Z \leq 3.75) - P(Z \leq -3.5)$$

$$= P(Z \leq 3.75) - [1 - P(Z \leq 3.5)] = 0.99 - 1 + 0.998 = 0.988$$

$$P(S^2 \geq 492.5) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \geq \frac{(n-1)492.5}{\sigma^2}\right)$$

$$= P\left(\chi^2_{25-1} \geq \frac{(25-1)492.5}{20^2}\right) = P(\chi^2_{24} \geq 29.5) \simeq 0.25$$

أي أن احتمال أن يكون تباين العينات أكبر من 492.5 هو 25%.

$$P(260.90 \leq S^2 \leq 332.40)$$
$$= P\left(\frac{(n-1)260.90}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)332.40}{\sigma^2}\right)$$

$$= P\left(\frac{(25-1)260.90}{20^2} \leq \chi^2_{25-1} \leq \frac{(25-1)332.40}{20^2}\right)$$

$$= P(15.65 \leq \chi^2_{24} \leq 19.94) = 0.15$$

مثال رقم (24):

سحبت عينة عشوائية حجمها 21من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي تباينه 36، وسحبت عينة عشوائية حجمها 25 من مجتمع بتبع التوزيع طبيعي مستقل عن المجتمع الأول تباينه 25.

المطلوب: أوجد احتمال أن النسبة بين التبايني العينتين أكبر من 3.95.

الحل:

$$n_1 = 21\,, n_2 = 25\,, \sigma_1^2 = 36\,, \sigma_2^2 = 25$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_1^2} \geq 3.95\right) = P\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \geq \left(\frac{25}{36}\right)3.95\right)$$

$$= P\left(F_{20\,,24} \geq 2.74\right) = 0.01$$

أي احتمالان يكون النسبة بين تبايني العينتين أكبر من 3.95 هو 1%

خلاصة الفصل:

العينة هي ذلك الجزء المسحوب من المجتمع وينبغي للعينة أن تمثل المجتمع المأخوذة منه أحسن تمثيل، وأسلوب المعاينة هو اختيار عينة من المفردات المكونة للمجتمع، وتوزيع المعاينة هو من أهم المفاهيم الاحصائية تمثل التوزيع التكراري لجميع القيم الممكنة لاحصاءة معينة (التي يتم حسابها من بيانات العينة) للاستدلال من خلالها عن معلمات المجتمع، فتوزيع المعاينة يوضح العلاقة بين القيم المحسوبة من بيانات العينة المسحوبة وسهولة الاستدلال عن معالم المجتمع الذي سحبة منه هذه العينة، وبالتالي فهي تمثل القاعدة الاساسية للإحصاء الاستدلالي المتمثل في تقدير معالم المجتمع المجهولة واختبار الفرضيات بشأن صحتها.

الفصل الثاني

التقدير

2. التقدير

تمهيد:

في الكثير من الأحيان لا نستطيع معرفة القيم الحقيقية لمعالم مجتمع ما يكون محل الدراسة، أو نجد صعوبة في تحديد هذه المعالم أو حسابها أو قياسها، وربما يرجع ذلك إلى حجم البيانات ومدى توفرها والمستخدمة في تحديد المعالم هذا المجتمع، أو ربما يرجع ذلك إلى الجهد المبذول أو الوقت اللازم أو إلى تكلفة الحصول على هذه البيانات أو فقدان أحد مفردات الخاصة ببيانات هذا المجتمع، لذا تسعى نظرية التقدير لتقدير معلمات المجتمع المجهولة.

إن التقدير هو أسلوب احصائي يستخدم لتقدير معلمات المجتمع الجهولة (μ ، δ^2 ، π ، ......) عن طريق استخدام مقاييس (نتائج) العينة المسحوبة منه ($\mu_{\bar{X}}$ ، s^2 ، p ، ....).

2. 1. مفهوم التقدير (Estimation):

هو عبارة عن طريقة إحصائية تستخدم لتقدير معالم مجتمع المراد دراسته عن طريق استخدام إحصاءات العينة.

2. 2. طرق تقدير معالم المجتمع:

يوجد طريقتين لتقدير معالم المجتمع، هما:

- التقدير بنقطة (بقيمة).
- التقدير بفترة (بمدى أو بمجال).

2.2. 1. التقدير بنقطة (بقيمة):

نستخدم في هذه الطريقة بيانات العينة لتقدي معالم المجتمع بنقطة (بقيمة) واحدة فقط، ونكتب:

- ✓ مقدر μ هو $\bar{X}$ ويرمز له بالرمز $\hat{\mu}$
- ✓ مقدر δ^2 هو S^2 ويرمز بالرمز $\widehat{\delta^2}$
- ✓ مقدر π هو P ويرمز له بالرمز $\hat{P}$

مثال (رقم 01):

إذا كان لدينا مجتمع ما، وسحبنا منه عينة عشوائية مكونة من المفردات التالية: 6 ، 5، 7

المطلوب: أوجد مقدر متوسط المجتمع ($\hat{\mu}$)

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{n} = \frac{6+5+7}{3} = 6$$

إذن نقول أن: $\hat{\mu} = \bar{X} = 6$

مثال (رقم 02):

اخذت عينة عشوائية من طلبة جامعة ما حجمها 30 طالبا فيها 5 الطلبة الأجانب وكانت علاماتهم كما يلي:

6	14	14	12	11	6	8	15	10	8
12	10	10	8	14	14	11	18	16	10
18	18	7	11	6	7	6	11	14	15

المطلوب:

1)- قدر متوسط المجتمع وتباينه.

2)- قدر نسبة الطلبة الأجانب.

الحل:

1)- مقدر μ هو $\bar{X}$، إذن:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i . n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{340}{30} = 11.33$$

ومنه:

نقول أن: $\hat{\mu} = \bar{X} = 11.33$

2)- مقدر σ^2 هو S^2، إذن:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2 \, n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i - 1} = \frac{4948.44}{29} = 170.64$$

ومنه:

نقول أن: $\hat{\delta}^2 = S^2 = 170.64$

3)- مقدر π هو P، إذن:

$$P = \frac{5}{30} = 0.17$$

ومنه:

نقول أن: $\hat{P} = \bar{P} = 0.17$

2. 2.2 التقدير بفترة (بمجال أو بمدى):

إن احتمالية الخطأ عند التقدير (بقيمة) تكون كبيرة ولذا نلجأ إلى التقدير بفترة، حيث تكون قيمة معلمة المجتمع تقع ضمن هذه الفترة، ولهذا تسمى هذه الفترة بفترة الثقة.

أولا- مصطلحات هامة تستخدم في التقدير بمجال:

- حدود المجال $[, b]$ حيث أن $\mu \in [a\,, b]$.
- مستوى الثقة وتسمى كذلك بـ (درجة الثقة أو درجة التأكد) ويرمز لها بالحرف C وهو إحتمال المرفق أن تقع القيمة داخل المجال، حيث أن $C = 1 - \alpha$.
- مستوى المعنوية وتسمى كذلك بـ (مستوى الخطأ أو درجة عدم التأكد) ويرمز لها بـ α وهي احتمال أن تكون القيمة تقع خارج المجال، حيث أن $C + \alpha = 1$.

والشكل التالي يوضح المصطلحات السابقة:

ثانيا- خطوات التقدير بمجال:

- تحديد مقدار التقدير النقطي المراد تقديره بالمجال.
- تحديد مستوى الثقة C.
- قراءة الاحتمال من الجدول.

- تحديد مجال الثقة.

2 .3. انشاء فترة الثقة لمتوسط مجتمع μ:

لإنشاء فترة الثقة لمتوسط مجتمع (μ) نميز ثلاثة حالات:

- **الحالة الأولى:** $n \geq 30$ و تباين المجتمع (σ^2) معلوم، فإن فترة الثقة حول المتوسط μ بإحتمال $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,\sigma_{\bar{X}}$$

مع

$$Avec \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} \\ \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

حيث أن:

الرمز	التسمية
$\bar{X}$	متوسط العينة
σ^2	تباين المجتمع
n	حجم العينة
$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	قيمة جدولية

وتكون حدود مجال الثقة هي:

$$\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \longrightarrow \text{الحد الأعلى} \\ \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \longrightarrow \text{الحد الأدنى} \end{cases}$$

وبالتالي نكتب:

$$\mu \in \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \; ; \; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] \text{ بمستوى الثقة } 1-\alpha.$$

بمعنى:

$$P\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 1-\alpha$$

مثال رقم (03):

نفترض أن عينة حجمها 100 من العائلات الجزائرية، وقمنا بحساب متوسط الدخل الشهري لهم فوجدناه يساوي 15549.63، وبافتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع هو 50000.

المطلوب: أوجد تقدير μ لمتوسط الدخل الشهري للجزائريين بمستوى الثقة 99%..

الحل:

لدينا:

$C = 99\%$

$n = 100$

$\sigma^2 = (5000)^2 = 25000000$

$\bar{X} = 15549.63$

نلاحظ من معطيات التمرين أن $n \geq 30$ ، وتباين المجتمع (σ^2) معلوم، ومنه نحن أمام الحالة الأولى إذن:

$$C = 0.99 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.99 = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.005 = 0.995$$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.995} = 2.58$$

$$\Rightarrow \mu \in \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \; ; \; \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

$$\Rightarrow \mu \in \left[15549.63 - (2.58)\frac{5000}{10} \; ; 15549.63 + (2.58)\frac{5000}{100}\right]$$

$$\Rightarrow \mu \in [15549.63 - (2.58)(500) \; ; 15549.63 + (2.58)(500)]$$

$$\Rightarrow \mu \in [14259.63 \; ; 16838.63]$$

الشرح:

لو كررنا التجربة 100 مرة نحصل على 99 مرة متوسط الدخل الشهري لهذه العائلات الجزائرية μ ينتمي للمجال [14259.63 ; 16838.63].

- **الحالة الثانية:** $n \geq 30$ و تباين المجتمع (σ^2) مجهول، فإن فترة الثقة حول المتوسط μ بإحتمال $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \; \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$Avec \quad \widehat{\sigma_{\bar{X}}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{S^2}{n}} \\ \sqrt{\dfrac{S^2}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

مع:

حيث أن:

التسمية	الرمز
متوسط العينة	$\bar{X}$
تباين العينة	S^2
حجم العينة	n
قيمة جدولية	$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

وتكون حدود مجال الثقة هي:

$$\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \longrightarrow \text{الحد الأعلى} \\ \bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \longrightarrow \text{الحد الأدنى} \end{cases}$$

وبالتالي نكتب:

$\mu \in \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\ ;\ \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$ بمستوى الثقة $1-\alpha$.

بمعنى:

$$P\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = 1-\alpha$$

مثال رقم (04):

مؤسسة مختصة في انتاج عجلات السيارات أرادت معرفة مدة تشغيل العجلة المصنوعة، فأخذت عينة عشوائية حجمها 50، وبناء عليها توصلت إلى النتائج التالية:

متوسط المسافة المقطوعة بواسطة العجلة هو 2346.15 كلم بانحراف معياري قدره 291.1 كلم.

المطلوب: أوجد مجال الثقة لمتوسط مسافة استعمال العجلات المصنوعة للمؤسسة مع مستوى الخطأ 10%.

الحل:

لدينا:

$\alpha = 10\%$

$n = 50$

$\sigma^2 = ?$

$\bar{X} = 2346.15$

$S_{\bar{X}} = 291.1$

نلاحظ أن $n \geq 30$ و تباين المجتمع (σ^2) مجهول، فإن فترة الثقة حول المتوسط μ بإحتمال $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\bar{X} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\, \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

إذن:

$$\alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 0.05 \quad \Rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - 0.05 = 0.95$$

ومنه:

$$Z_{1-\frac{1}{\alpha}} = Z_{0.95} = 1.65$$

وكذلك:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{291.1}{\sqrt{50}} = 41.16$$

وحسب العلاقة السابقة لدينا:

$$\mu \in \left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\ ;\ \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$$

$$\mu \in [2346.15 - 1.65(41.16)\ ;\ 2346.15 + 1.64(41.16)]$$

$$\mu \in [2296.09\ ;\ 2413.91]$$

الشرح:

لو كررنا التجربة 100 مرة نحصل على 90 مرة متوسط الدخل الشهري لهذه العائلات الجزائرية μ ينتمي للمجال [2296.09 ; 2413.91]

- **الحالة الثالثة:** $n < 30$ و تباين المجتمع (σ^2) مجهول، فإن فترة الثقة حول المتوسط μ بإحتمال $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\bar{X} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$Avec \quad \widehat{\sigma_{\bar{X}}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{S^2}{n}} \\ \sqrt{\dfrac{S^2}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

مع:

حيث أن:

التسمية	الرمز
متوسط العينة	$\bar{X}$
تباين العينة	S^2
حجم العينة	n
قيمة جدولية	$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

وتكون حدود مجال الثقة هي:

$$\bar{X} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \longrightarrow \text{الحد الأعلى} \\ \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \longrightarrow \text{الحد الأدنى} \end{cases}$$

وبالتالي نكتب:

$\mu \in \left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\ ;\ \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$ بمستوى الثقة $1-\alpha$.

بمعنى:

- $$P\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right] = 1-\alpha$$

مثال رقم (05):

إذا أخذنا عينة حجمها 25، فوجدنا متوسط هذه العينة 100 وانحرافها 5.

المطلوب: أوجد مجال الثقة لـ μ مع مستوى معنوية 10% .

الحل:

لدينا:

$\alpha = 10\%$

$n = 25$

$\sigma^2 = ?$

$\bar{X} = 100$

$S_{\bar{X}} = 5$

نلاحظ أن $n < 30$ و تباين المجتمع (σ^2) مجهول، فإن فترة الثقة حول المتوسط μ بإحتمال $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\bar{X} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

إذن:

$$\alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 0.05 \quad \Rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - 0.05 = 0.95$$

ومنه:

$$t_{\left(1-\frac{1}{\alpha} \quad , \; n-1\right)} = t_{(0.95 \;\; , \;\; 24)} = 1.71$$

وكذلك:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

وحسب العلاقة السابقة لدينا:

$$\mu \in \left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \; ; \; \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right]$$

$$\mu \in [100 - 1.71(1) \; ; \; 100 + 1.71(1)]$$

$$\mu \in [98.289 \; ; \; 101.711]$$

الشرح:

لو كررنا التجربة 100 مرة نحصل على 90 مرة متوسط الدخل الشهري لهذه العائلات الجزائرية μ ينتمي للمجال [98.289 ; 101.711]

2. 4. فترة ثقة لتقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين :

لايجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين لابد من مراعاة الحالات التالية :

- **الحالة الأولى:** اذا كان تباين مجتمعين σ_1^2, σ_2^2 معلومين وحجم العينة كبيرة $n_1, n_2 \geq 30$ لايهم اذا كان التوزيع طبيعي او غير طبيعي فان فترة الثقة للفرق بين متوسطين ($\mu_1 - \mu_2$) باحتمال % ($1-\alpha$) هو :

$$(\bar{x}_1 \mp \bar{x}_2) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال رقم (06):

من مجتمعين مستقلين سحبت عينة عشوائية من المجتمع الأول والذي يتبع التوزيع الطبيعي $(N(u_1,(\sigma)^2)$
وسحب عينة عشوائية من المجتمع الثاني الذي يتبع التوزيع الطبيعي ($N(u,(\sigma)^2$ مع العلم ان :

$$\mu_{\bar{X}_1} = 76 , \mu_{\bar{X}_2} = 82 , n_1 = 50 , n_2 = 75$$

المطلوب :إيجاد فترة الثقة بين متوسطي هذه البيانات باحتمال (96%)

الحل:

لدينا :

$$\mu_1 - \mu_2 \epsilon \left(\mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$u_1 - u_2 \in \left(76 - 82 \mp 2{,}06 \sqrt{\frac{36}{50} + \frac{64}{75}} \right) \qquad = 0{,}04$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} \quad = 0{,}98$$

$$u_1 - u_2 \epsilon - (8.58 ,\ 3.42) \qquad\qquad Z_{0,98} = 2{,}06$$

- **الحالة الثانية:** اذا كان تباين المجتمعينσ_2^2, σ_1^2 مجهولين و $n_1 , n_2 \geq 30$ فان فترة الثقة للفرق بين متوسطين $(u_1 - u_2)$ باحتمال $\% \ (1 - \alpha)$ هو :

$$\left(u_{\bar{x}_1} - u_{\bar{x}_2} \right) \mp z_{\frac{i-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_1}}$$

حيث ان : s_1^2 , s_2^2 هما تباين العينتين.

مثال رقم (07):

اوجد فترة ثقة 98% للفرق بين متوسطين مجتمعين طبيعيين مستقلين اذا علمت ان حجم العينة الأولى 160 ووسطها 81,2 وتباينها 7,6 وحجم العينة الثانية 90 ووسطها 76,4 وتباينها 8,2

الحل :

σ_1^2 , σ_2^2 مجهولتين ولكن $n_1 n_2 \geq 30$ اذا لدينا :

$$C = 0{,}98$$

$$\alpha = 1 - 0{,}98 = 0.02$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0\cdot 99} = 2{,}33$$

$$\left(u_{\bar{x}_1} - u_{\bar{x}_2}\right) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < u_1 - u_2 < u_{\bar{x}_1} - u_{\bar{x}_2} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$3.93 < u_1 - u_2 < 5.66$$

- **الحالة الثالثة:** اذا كان تباين المجتمعين σ_1^2, σ_2^2 مجهولتين و$n_1, n_2 < 30$ فان فترة الثقة للفرق بين متوسطين $(u_1 - u_2)$ باحتمال% $(1 - \alpha)$ هو :

$$u_{\bar{x}_1} - u_{\bar{x}} \mp t\left(\frac{\alpha}{2} n_1 + n_2 - 2\right) sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

مثال رقم (08):

تعطى مادة الإحصاء في كلية ما من قبل مدرسين B , A وفي نهاية الفصل كانت النتائج المتحصل عليها كما يلي :

$n_1 = 14$ $s_1 = 5$ $A, u_{\bar{x}_1} = 72$

$n_2 = 12$ $S_2 = 6$ $B, u_{\bar{x}_2} = 75$

المطلوب : إيجاد فترة الثقة للفرق بين المتوسطين مستوى الثقة 98%

الحل :

نلاحظ ان σ_2^2 , σ_1^2 مجهولتين و$n_{1,}n_2 < 30$ اذا :

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}} \ n_1 + n_2\text{-}2 = \ 2{,}4922$$

$$(sp)^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + S_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{25(14 - 1) + 36(12 - 1)}{12 + 14 - 2}$$

$$(sp)^2 = \sqrt{30.04}$$

$$sp = 5{,}48$$

$$p[(72 - 75) \mp (2.4922)(5{,}48)] = 0{,}98$$

$$u_1 - u_2 \epsilon[-8,37; 2,36] = 0,98$$

2. 5. فترة ثقة لتقدير النسبة $(1-\alpha)100\%$:

فترة ثقة لتقدير نسبة المجتمع هي :

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

حيث $\hat{p}$ تمثل نسبة العينة وn حجم العينة.

مثال رقم (09):

في مصنع لإنتاج الأحذية اخذت عينة عشوائية حجمها 500 حذاء ووجدت ان 100 حذاء منها معيبة , اوجد بدرجة ثقة 99% نسبة المعيب في الإنتاج كله .

الحل :

$(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لتقدير النسبة تكون :

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

حيث :

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{100}{500} = 0,2 \qquad n = 500$$

$$1-\alpha = 0,99 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0,01 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z\ 0.005 = 2,575$$

$$0,2 - 2,575\sqrt{\frac{0,2(1-0,1)}{500}} < p < 0,2 + 2,575\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{500}}$$

0,154<p<0,246

2. 6. فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين $100\%(1-\alpha)$:

فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين هي :

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$\hat{p}_2,\hat{p}_1$ نسبة عينة المجتمع الأول والثاني على التوالي n_2, n_1 حجم عينة المجتمع الأول والثاني على التوالي .

مثال رقم (10):

لمقارنة نسبة الطلاب الذين تقديرهم ممتاز في جامعتين , اخذت عينة من جامعة Aحجمها 600طالب فوجد من بينهم 300 طالب تقديرهم ممتاز, واخذت عينة من جامعةBحجمها1000 طالب فوجد من بينهم 600 طالب تقديرهم ممتاز, اوجد فترة 90% ثقة حول الفرق ما بين نسبتي الطلبة الممتازين في الجامعتين .

الحل :

$100\%(1-\alpha)$ فترة ثقة لتقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين هي :

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{300}{600} = 0,5 \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{600}{1000} = 0,6$$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$ فترة ثقة 90%

$$(0,5-0,6) - 1,645\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{600} + \frac{0,6(1-0,6)}{1000}} < p_1 - p_2 < (0,5-0,6) + 1,645\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{600} + \frac{0,6(1-0,6)}{1000}}$$

$$(0,5-0,6) - 0,042154 \le \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \le (0,5-0,6) + 0,042154 - 0,142154 \le p_1 - p_2 \le -0,057846$$

2. 7. تقدير فترة الثقة لتباين σ^2 وانحراف معياري σ لمجتمع طبيعي:

إذا كان لدينا عينة عشوائية $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن فترة الثقة $(1-\alpha)100\%$ حول تباين σ^2 وانحلااف معياري σ يمكن تقديرهم وفق الصيغة التالية:

2 .7. 1 . أولا – تقدير تباين لمجتمع:

يمكن تقدير σ^2 ضمن مجال الثقة الذي يعطى وفقا الصيغة التالية:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\,,\; n-1\right)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\,,\; n-1\right)}}$$

وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2}$$

حيث أن:

- التوزيع طبعي والعينة عشوائية ونوع البيانات كمية.
- S^2 تباين العينة.
- σ^2 تباين المجتمع.
- n حجم العينة.
- $\chi^2_{(n-1)}$ هو توزيع كآي تربيع بدرجة الحرية $n-1$ وهو غير سالب القيم ونعتمد على قيم α ودرجات الحرية $n-1$ في إيجاد قيمته.

2.7.2. ثانيا تقدير انحراف المعياري لمجتمع:

يمكن تقدير σ ضمن مجال الثقة الذي يعطى وفقا الصيغة التالية:

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},\ n-1\right)}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},\ n-1\right)}}}$$

معاملات الثقة $\left[\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}, \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}\right]$ لفترات الثقة $(90\%, 95\%, 99\%)$:

معامل الثقة $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$	معامل الثقة $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}$	فترة الثقة
$\chi^2_{(0.95\ ,n-1)}$	$\chi^2_{(0.05\ ,n-1)}$	90%
$\chi^2_{(0.975\ ,n-1)}$	$\chi^2_{(0.025\ ,n-1)}$	95%
$\chi^2_{(0.995\ ,n-1)}$	$\chi^2_{(0.005\ ,n-1)}$	99%

مثال رقم (11):

أوجد فترة الثقة 95% حول التباين والانحراف المعياري لمجتمع طبيعي إذا علمت أن حجم العينة هو 20 والانحراف المعياري للعينة يساوي 1.6.

الحل:

المعطيات:

$$n = 20$$

$$S = 1.6 \Rightarrow S^2 = 2.56$$

$$C = 0.95 \Rightarrow \alpha = 1 - C = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$$

$$n - 1 = 20 - 1 = 19$$

$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} = \chi^2_{(0.025\,,19)} = 32.852$$

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} = \chi^2_{(0.975\,,19)} = 8.907$$

1- إيجاد فترة الثقة 95% لتباين :

لدينا:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\,,\ n-1\right)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\,,\ n-1\right)}}$$

وبالتعويض نجد:

$$\frac{19(2.56)}{32.852} \leq \sigma^2 \leq \frac{19(2.56)}{8.907}$$

$$\Rightarrow 1.5 \leq \sigma^2 \leq 5.5$$

2- إيجاد فترة الثقة 95% للانحراف المعياري:

لدينا:

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\ ,\ n-1\right)}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},\ n-1\right)}}}$$

ومن خلال ما سبق نجد:

$$\sqrt{1.5} \leq \sigma \leq \sqrt{5.5}$$

$$\Rightarrow 1.2 \leq \sigma \leq 2.3$$

2. 8. تقدير فترة الثقة للنسبة بين تباينين لمجتمعين طبيعيين:

إذا كان لدينا عينة عشوائية $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 وعينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ_2فإن وتباينه σ_2^2، بحيث المحتمع الأول مستقل عن المجتمع الثاني فإن فترة الثقة $(1-\alpha)100\%$ حول نسبة تباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ يمكن تقديرهم وفق الصيغة التالية:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}}$$

حيث أن:

$\frac{S_1^2}{S_2^2}$: هي تقدير نقطة للمعلمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

ملاحظة: بمأن جداول (F) لا تحتوي على قيم (F) عند درجات الحرية المحددة و $(1-\alpha)$ لذلك فأنه يمكن استخدام الصيغة التالية:

$$F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)} = \frac{1}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)}}$$

مثال رقم (12):

سحبت عينتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين مختلفين، العينة الأولى حجمها 6 وتباينها 144، والعينة الثانية حجمها 10 وتباينها 49.

المطلوب: قدر فترة ثقة 90% **لنسبة التبايني** $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$.

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 6 \, , n_2 = 10 \, , S_1^2 = 144 \, , S_2^2 = 49$$

ومن خلال استخدام جداول (F) نجد:

- الحد الأعلى للثقة هو:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)} = \frac{144}{49}(4.87) = 14.32$$

- الحد الأدنى للثقة هو:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)}} = \frac{144}{49} \frac{1}{3.48} = 0.84$$

ومنه:

$084 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 14.32$ بدرجة ثقة 90%.

خلاصة الفصل:

التقدير فرع من فروع الاحصاء، فهو من أهم الأساليب المبنية على نظريات الاحصائية، ولنظرية التقدير أهمية كبيرة في الاحصاء وفي تحليل البيانات وفي مختلف المجالات، حيث يستخدم في تقدير معلمات المجتمع تكون محل الاهتمام عن طريق استخدام بيانات العينة، كما يساعد على اتخاذ القرارات من خلال الاستدلال عن أهم الخصائص الأساسية للمجتمعات بناء على دراسة وتحليل بيانات العينات، ويستخدم في تقدير القيم الغير قابلة للقياس.

وهناك أسلوبين يستخدمان في التقدير، فالأسلوب الأول يسمى التقدير النقطي أو التقدير بنقطة (التقدير بقيمة واحدة) وهو يستخدم لتقدير قيمة المعلمة المجهولة، أما الأسلوب الثاني يسمى التقدير بفترة (أو بمجال أو بمدى) حيث هذه الفترة تحتوي على القيمة الحقيقية للمعلمة بدرجة التأكد (مستوى الثقة) معينة.

الفصل الثالث

اختبار الفرضيات

3.اختبار الفرضيات

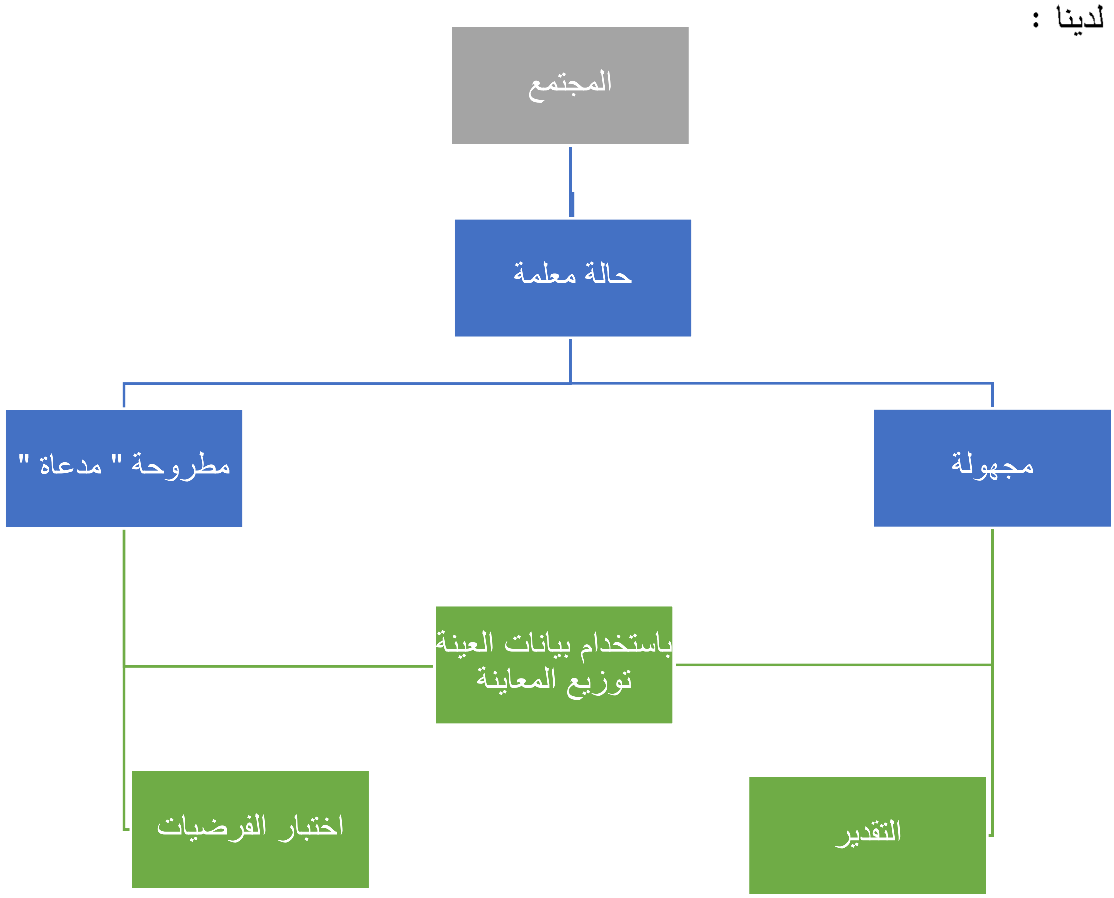
تمهيد:

إن في الكثير من الأحيان يحتاج متخذ القرار إلى اتخاذ القرار بناء على معلومات مقدمة، وفي بعض الأوقات يحتاج إلى اجراء إحصائي للتحقق من هذه معلومات مقدمة والمدعاة حتى يتخذ القرار المناسب وهذا ما يسمى باختبار الفرضيات ، فمثلا إذا ادعى أحد الباحثين أن متوسط أعمار الطلبة في إحدى الكليات هو 20 سنة، ولكن هذا مجرد ادعاء أو فرض أو زعم ولتحديد صحة هذا الادعاء أو الافتراض من عدمه سوف نستخدم أسلوب الحصر الشامل لحساب متوسط أعمار كل طلبة هذه الكلية التي تمثل في هذه الحالة مجتمعا، وهذا غير ممكن عمليا وقد يرجع ذلك إلى عدة أسباب كالجهد أو الوقت أو التكلفة اللازمة عند أخذ جميع طلبة الكلية إلى غيرها من الأسباب الأخرى، وكبديل لذلك سنتبع أسلوب العينة، فإذا كانت نتائج التي تم الحصول عليها من العينة تتناقض مع هذا الادعاء أو الافتراض فنرفض هذا الادعاء أو الافتراض وعكس صحيح، وهذا ما يدخل ضمن اختبار الفرضيات.

مما سبق نستنتج أن اختبار الفرضيات هو جزء من الاحصاء الاستدلالي الذي يعتبر فرع من فروع الاحصاء، واختبار الفرضيات حالة خاصة وأساسية تساعد على اتخاذ القرارات، وعلى هذا سنتناول في هذا الفصل ما يلي:

3. 1. تعريف الفرضية :

هي عبارة عن مقولة أو طرح يصاغ حول معلمة معينة. وتطرح للاختبار فإما أن تقبل أو ترفض ، وهي استنتاج أو تخمين مبني على المنطق وليس دقيقا لأننا نعتمد على بيانات ونتائج العينة للاستدلال عن معلمات المجتمع، لدينا :



3. 2. مفاهيم عامة :

1- تتكون الفرضيات الإحصائية من فرضية العدم (معدومة) والفرضية البديلة (مكملة).

2- يرمز الى العدم بالرمز H_0 ويرمز الى فرض البديل بالرمز H_1 .

3- فرض العدم هو الحالة التي يريد ان يرفضها الباحث الاحصائي، وهي الفرضية الأساسية المراد اختبارها.

4- فرض البديل هو الحالة التي يريد الباحث اثبات صحتها، وهي الفرضية التي ستقبل في حالة رفض فرضية العدم.

5- رفض فرض العدم وهو صحيح يسمى خطا من النوع الأول.

6- قبول فرض العدم وهو غير صحيح يسمى خطا من النوع الثاني.

7- احتمال الوقوع في خطا من النوع الاول يرمز له بالرمز $\propto$.

8- احتمال الوقوع في خطا من النوع الثاني يرمز له بالرمز β.

9- رفض H_0 عندما تكون H_0 خطا أي اتخاذ القرار الصحيح يسمى بقوة الاختبار ويرمز له بالرمز $1-\beta$

3.3. خطوات اجراء اختبار الفرضيات بشكل عام :

1) صياغة الفرضيات عموما، لدنيا فرضين فرضية العدم والفرضية المكملة أو البديلة حول معلمة المجتمع المدروس.

2) تحديد مستوى معنوية (α).

3) حساب إحصاءة الاختيار من بيانات العينة

4) تحديد القيمة الجدولية

5) مقارنة احصاءة الاختيار والقيمة الجدولية

6) نتخذ القرار برفض أو عدم رفض فرض العدم وفقا لنوع الفرضية البديلة (H_1).

4.3. اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي:

لنفترض أنه لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ( ) وتباين (σ^2)، وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها (n) $(X_n, \ldots\ldots X_2, X_1)$ متوسطها الحسابي $(\bar{X})$ وتباينها (S^2)، وكنا نريد اجراء اختبار الفرضيات حول المتوسط الحسابي سواءا كان هذا الاختبار من طرف واحد أو من طرفين للفرضية العدمية $(H_0\colon \mu = \mu_0)$ مقابل الفرضية البديلة، فهنا نميز الحالات التالية:

- **الحالة الأولى** : عندما يكون تباين المجتمع معلوم ، وحجم العينة $n \geq 30$ ، في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

أولا (صياغة الفرضيات):

- الفرضية العدمية (H_0) : وهو الذي يعبر عن صحة الادعاء.

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$

$$H_0\colon \mu \geq \mu_0$$

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

ملاحظة : لابد أن نذكر أكبر أو يساوي أو أصغر او يساوي ولا نقول أكبر تماما أو أصغر تماما

– الفرضية المكملة البديلة (H_1): وهو الذي يحدد نوع الاختبار اذا كان ذو طريقين" من جانبين" او من طريق واحد "جانب واحد" كما يلي:

اختيار ذو طريقين. $H_1: \mu \neq \mu_0$

اختيار ذو طريق واحد من اليمين. $H_1: \mu > \mu_0$

اختيار ذو طريق واحد من اليسار. $H_1: \mu < \mu_0$

ثانيا (تحديد مستوى المعنوية (α)).

ثالثا (حساب احصاءة (Z)) وفق الصيغة التالية :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

حيث أن : μ_0 : قيمة معطاة

$\bar{X}$: الوسط الحسابي للعينة

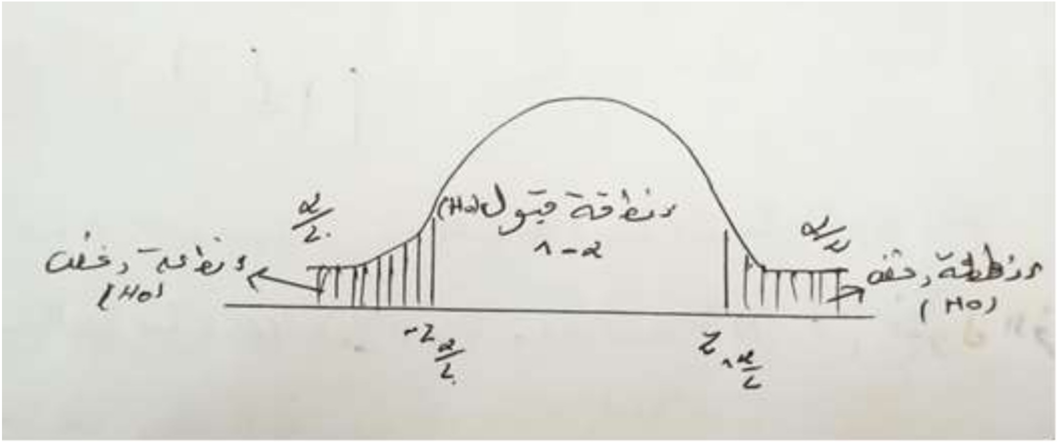
σ^2 : تباين المجاميع

رابعا (تحديد القيمة الجدولية): ويمكن ذلك من جداول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى معنوية (α) في حالة اختيار من جانب واحد أو $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ في حالة الاختيار من جانبين.

خامسا (تحديد مناطق رفض فرضية العدم): ويكون ذلك وفقا لنوع الفرضية البديلة على النحو التالي :

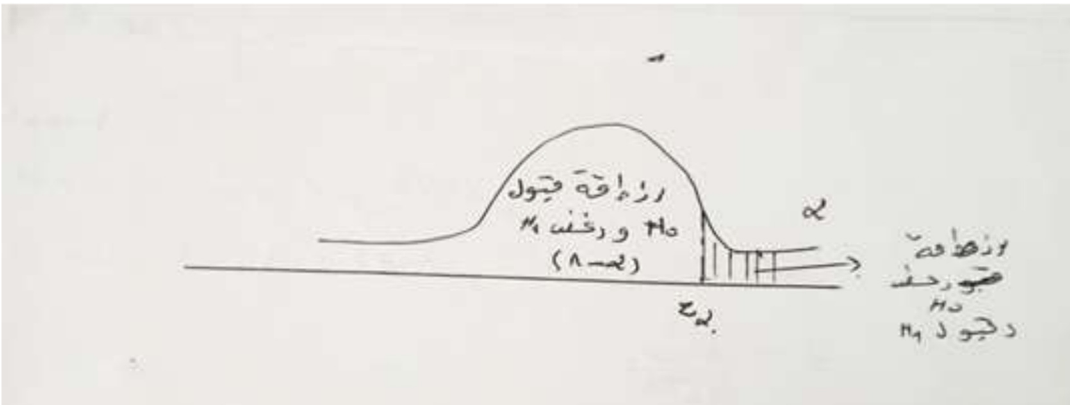
a) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$



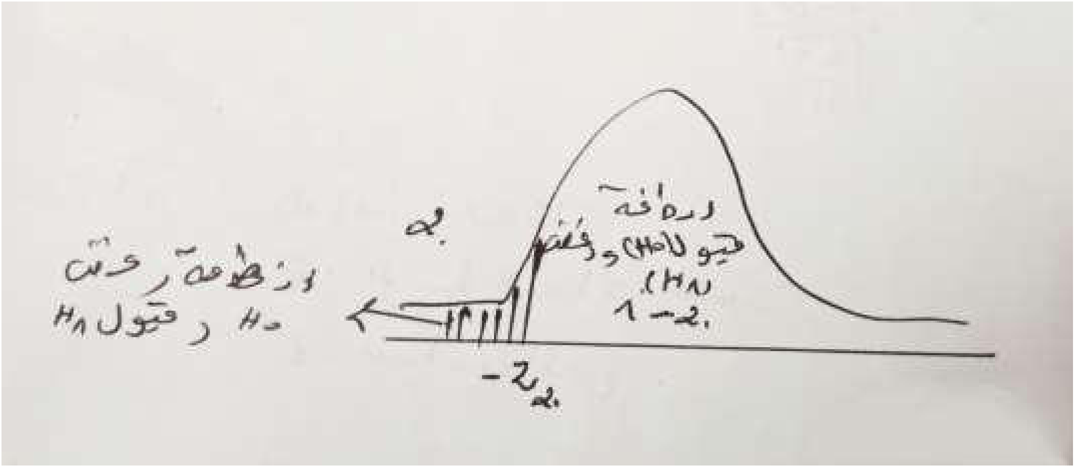
b) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$



c) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$



سادسا (القرار الإحصائي): تكون قاعدة القرار قائمة على ثلاث حالات :

أ) في حالة الفرضية البديلة من نوع $[H_1 : \mu \neq \mu_0]$: يتم رفض الفرضية العدمية عندما تكون إحصائية الاختبار المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية ، أي:

$$[|Z_{cal}| \geq Z_{tab}]$$

وهذا يدل على وجود فروق معنوية بين متوسط المجتمع (μ) والقيمة المفترضة(μ_0) عند مستوى المعنوية (α) أما في الحالة المعاكسة، فيتم قبول الفرضية العددية (H_0).

ب) في حالة الفرضية البديلة من نوع [$H_1: \mu > \mu_0$] : يتم رفض الفرضية العدمية عندما تكون قيمة الإحصائية الاختبار المحسوبة أكبر من أو تساوي القيمة الجدولية، أي:

$$[Z_{cal} \geq Z_{tab}]$$

وهذا يدل على وجود فروق معنوية بين متوسط المجتمع(μ) والقيمة المفترضة(μ_0) عند (α) وبعكس ذلك يتم قبول الفرضية العدمية (H_0).

ج) في حالة الفرضية البديلة من نوع [$H_1: \mu < \mu_0$] : يتم رفض الفرضية العدمية عندما تكون قيمة الإحصائية الاختبار المحسوبة أقل أو تساوي سالب القيمة المجدولة ، أي :

$$Z_{cal} \leq -Z_{tab}$$

مما يدل على وجود فروق معنوية بين متوسط المجتمع(μ) والقيمة المفترضة(μ_0) عند (α) وبعكس ذلك يتم قبول الفرضية العدمية (H_0).

مثال رقم (01):

يعتقد صاحب مصنع الإسمنت أن المتوسط العام لوزن الكيس هو 50 كلغ ، ولتأكد من ذلك قام باختبار عينة مكونة من 100 كيس إسمنت فوجد أن متوسط وزن الكيس هو 49.5 كلغ.

المطلوب : هل يمكن أن نستنتج أن متوسط هذه العينة يتماشى مع المتوسط العام لوزن الكيس الذي يعتقده صاحب المصنع. إذا علم أن الانحراف المعياري هو 5 بدرجة ثقة 95%؟.

الحل:

$$n = 100 \qquad \mu = 50$$
$$\sigma = 5 \qquad \bar{X} = 49.5 \qquad C = 95$$

- صياغة فرضية:

$$H_0: \mu = 50$$
$$H_1: \mu \neq 50$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 1 - C$$
$$= 1 - 0.95$$
$$= 0.05$$

- تحديد القيمة المجدولة:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

- تحديد القيمة المحسوبة:

$$Z_{cal} = \frac{49.5 - 50}{\sqrt{\frac{5^2}{100}}} = -1$$

- المقارنة Z_{cal} مع Z_{tab}:

$$|Z_{cal}| < Z_{tab}$$

أي:

$$|-1| < 1.96$$

- القرار:

إذا نقبل (H_0) ويعني ذلك أنه لا يوجد فروق معنوية (بمعنى ذات أهمية) بين متوسط وزن الكيس المسحوب من العينة ومتوسط العام للكيس في المصنع .

مثال رقم (02):

اختبرت عينة عشوائية مكونة من 64 مشاهدة من مجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي وسطه µ وتباينه 25 ، وقد لوحظ أن متوسط مشاهدات العينة بلغ 20.

المطلوب: هل تعتقد أن متوسط المجتمع يقل عن 23 عند مستوى المعنوية 1% ؟.

الحل:

$$n = 100 \qquad \mu = 50$$
$$\sigma = 5 \qquad \bar{X} = 49.5 \qquad C = 95$$

- صياغة فرضية:

$$H_0: \mu = 23$$
$$H_1: \mu < 23$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.01$$

- تحديد القيمة المجدولة:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 2.326$$

- تحديد القيمة المحسوبة:

$$Z_{cal} = \frac{20-23}{\sqrt{\frac{25}{64}}} = -4.8$$

- المقارنة Z_{cal} مع Z_{tab}:

$$Z_{cal} < -Z_{tab}$$

أي:

$$-4.8 < -2.326$$

- القرار :

إذا نرفض (H_0) ونقبل (H_1)،. أي نعم يمكن الاعتقاد بأن متوسط المجتمع يقل عن 23 عند مستوى المعنوية1%.

- **الحالة الثانية:** عندما يكون تباين المجتمع غير معلوم ، وحجم العينة $n \geq 30$ ، في هذه الحالة يمكن استخدام نفس خطوات الحالة الأولى باستثناء قيمة (Z) في هذه الحالة تحسب (Z) حسب العلاقة التالية:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حيث أن: S هو الانحراف المعياري للعينة.

مثال رقم (03):

اختيرت عينة عشوائية عددها 81 من مصابيح كهربائية من إنتاج أحد المصانع، وتبين أن متوسط عمر المصابيح هو 1500 ساعة وتباينها 11664 ، علما بأن عمر المصابيح يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط (μ)غير معلوم وتباين (σ^2) غير معلوم.

المطلوب: هل ترى أن متوسط عمر المصابيح يزيد عن 1600 ساعة عند مستوى الدلالة 5%.

حل :

$$n = 81 \qquad \mu_0 = 1600$$
$$\sigma^2 = ? \qquad \bar{X} = 1500 \qquad \alpha = 5\% \qquad S^2 = 11664$$

- صياغة فرضية:

$$H_0: \mu = 1600$$
$$H_1: \mu > 1600$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- تحديد القيمة المجدولة:

$$Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$$

- تحديد القيمة المحسوبة:

$$Z_{cal} = \frac{20 - 23}{\sqrt{\frac{11664}{81}}} = -8.333$$

- المقارنة Z_{cal} مع Z_{tab}:

$$Z_{cal} < Z_{tab}$$

أي:

$$-8.333 < 1.645$$

- القرار: إذا نقبل (H_0) نرفض (H_1)، مما يدل على أن متوسط عمر المصابيح لا يزيد عن 1600 عند مستوى المعنوية5%.

- **الحالة الثالثة :** عندما يكون تباين المجتمع غير معلوم ، وحجم العينة $(n < 30)$ وتوزيع طبيعي اذا في هذه الحالة نتبع نفس الخطوات الحالة الأولى والثانية باستثناء القيمة الإحصائية المحسوبة ، في هذه الحالة نستخدم قيمة الاختبار T حيث:

$$T = \frac{\bar{x} - U0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

مثال رقم (04):

أ جريت دراسة أكاديمية على طلبة قسم العلوم الاقتصادية بهدف دفع المستوى العلمي للطلبة وقد كان متوسط علامات الطلبة في الامتحان الأول هو 55 ، وبعد اعتماد بعض التقنيات التعليمية الحديثة على عينة عشوائية من الطلبة حجمها 41 طالبا فتبين أن متوسط علامات الطلبة بلغ 76 بانحراف معياري 32.6 .

المطلوب: هل تعتقد أن استخدام التقنيات التعليمية الحديثة له أثر معنوي في رفع متوسط علامات الطلبة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

الحل:

نلاحظ أن $n < 30$ و $\sigma^2 = 2$ توزيع طبيعي إذا .

$$n = 41 \qquad \mu_0 = 55$$

$$\sigma^2 = ? \qquad \bar{X} = 76 \qquad \alpha = 5\% \qquad S = 32.6$$

- صياغة فرضية:

$$H_0: \mu = 55$$
$$H_1: \mu > 55$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- تحديد القيمة المجدولة:

$$t_{40,0.05} = 1.684$$

- تحديد القيمة المحسوبة:

$$t_{cal} = \frac{76 - 55}{\sqrt{\frac{32.4^2}{41}}} = 4.125$$

- المقارنة t_{cal} مع t_{tab}:

$$t_{cal} > t_{tab}$$

أي:

$$4.125 < 1.684$$

القرار: بما أن قيمة (t) المحسوبة أكبر من قيمة (t) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما يدل على أن استخدام التقنيات التعليمية الحديثة له أثر معنوي في رفع متوسط علامات الطلبة أي أن $\mu > 55$ عند مستوى المعنوية5%. ونستنتج بأن نعم إن استخدام التقنيات التعليمية الحديثة له أثر معنوي في رفع علامات الطلبة.

3. 5. اختبار الفرضيات والفروق بين الوسطين:

- **الحالة الأولى:** إذا كان تباين المجتمعين (σ_1^2, σ_2^2) معلومتين ، وكان حجم العينتين كبير $n_1; n_2 \geq 30$ ،يمكن توضيح اختبار الفرضيات الفرق بين وسطين من خلال النظرية التالية:

إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها (n_1)ووسطها$(\bar{X}_1)$ تتوزع توزيع طبيعيا $N(\mu_1 , \sigma_1^2)$ ، ثم أخذنا عينة عشوائية أخرى حجمها (n_2) ووسطها$(\bar{X}_2)$ من توزيع طبيعي $N(\mu_2 , \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول وكانت $(\sigma_1^2 , \sigma_2^2)$
معلومتين وأردنا اختبار $[H_0 : \mu_1 = \mu_2]$ أو $[H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0]$ مقابل H_1 التي نميز فيها ثلاث حالات :

- إذا كانت $[H_1 : \mu_1 \neq \mu_2]$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى دلالة α إذا كانت :

$$|Z_{cal}| > Z_{tab}$$

حيث أن :

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- إذا كانت $[H_1 : \mu_1 > \mu_2]$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى دلالة α إذا كانت :

$$Z_{cal} > Z_{tab}$$

- إذا كانت $[H_1 : \mu_1 < \mu_2]$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى دلالة α إذا كانت :

$$Z_{cal} < -Z_{tab}$$

مثال رقم (05):

مقارنة بين الأجور اليومية للعمال في مستويين (B و A) في مدينة ما ، والتي تخضع الأجور فيها للتوزيع الطبيعي$N(\mu_1.16)$ و$N(\mu_2.9)$ على الترتيب اخترنا عينة عشوائية من عمال مؤسسة (A) بحجم (64) عامل، وتبين أن متوسط أجورهم بلغ (5) دنانير اخترنا عينة عشوائية من عمال المؤسسة (B) بحجم (36) عامل، وتبين أن متوسط أجورهم بلغ (3) دنانير.

هل يمكن الاستنتاج بأن متوسط الأجور اليومية للعمال في المؤسسة (A) يختلف عن متوسط الأجور اليومية للعمال في الشركة (B) عند مستوى المعنوية 5%.

الحل :

$$n = 41 \qquad \mu_0 = 55$$

$$\sigma^2 = ? \qquad \bar{X} = 76 \qquad \alpha = 5\% \qquad S = 32.6$$

- صياغة فرضيات:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- تحديد القيمة الاحصاءة المجدولة:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{0.025} = 1.96$$

- تحديد القيمة الاحصاءة المحسوبة:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{5 - 3}{\sqrt{\frac{16}{64} + \frac{9}{39}}} = 2.829$$

- المقارنة t_{cal} مع t_{tab}:

$$Z_{cal} > Z_{tab}$$

أي:

$$|2.829| > 1.96$$

القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من قيمة (Z) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما يدل على أن متوسط الأجور اليومية للعمال في المؤسسة (A) يختلف عن متوسط الأجور اليومية للعمال في الشركة (B) عند مستوى المعنوية 5%.

- **الحالة الثانية** : إذا كان تباين المجتمعين $\sigma_1{}^2; \sigma_2{}^2$ مجهولين، وكان حجم العينتين كبير $n_1; n_2 \geq 30$ ، فان الإحصاءة المحسوبة هي :

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1{}^2}{n_1} + \frac{S_2{}^2}{n_1}}}$$

وفي هذه الحالة نتتبع نفس الخطوات الحالة السابقة باستثناء قيمة Z_{cal} .

- **الحالة الثالثة:** إذا كان تباين المجتمعين $\sigma_1{}^2; \sigma_2{}^2$ مجهولين و متساويين وكان $(n_1; n_2 < 30)$ والمجتمعين طبيعيين فان الإحصائية المحسوبة هي :

$$t_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}}}$$

وفي هذه الحالة نتبع نفس الخطوات الحالة السابقة باستثناء القيمة المحسوبة.

مثال رقم (06):

أخذت عينتين من مجتمعين طبيعيين مستقلين ، والجدول التالي يبين بعض إحصاءاتهما :

	حجم العينة	متوسط العينة	الانحراف المعياري للعينة
المجتمع I	50	57.5	6.2
المجتمع II	60	54.4	10.6

يدعي أحد الباحثين أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني . اختبر صحة هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 5%.

الحل :

نلاحظ $n_1, n_2 \geq 30$ ، σ_1^2, σ_1^2 مجهولتين:

$$n_1 = 50 \quad n_2 = 60$$
$$\sigma_1^2, \sigma_2^2 = ? \quad \bar{X}_1 = 57.5 \quad \bar{X}_2 = 54.4 \quad \alpha = 5\% \quad S_1 = 6.2 \quad S_2 = 10.6$$

- صياغة فرضية:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- تحديد القيمة الاحصاءة المجدولة:

$$Z_{tab} = 1.96$$

- تحديد القيمة الاحصاءة المحسوبة:

$$Z_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{57.5 - 54.4}{\sqrt{\frac{6.2^2}{50} + \frac{10.6^2}{60}}} = 1.9$$

- المقارنة Z_{cal} مع Z_{tab}:

$$Z_{cal} > Z_{tab}$$

أي:

$$1.9 > 1.64$$

- القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة أكبر من قيمة (Z) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما يدل على أن متوسط المجتمع الأول أكبر من متوسط المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية 5%.

مثال رقم (07):

أخذت عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وكانت البيانات كالتالي :

$$\{5 - 9 - 12 - 8 - 10 - 12\}$$

وأخذت عينة عشوائية أخرى من مجتمع آخر يتبع التوزيع الطبيعي وكانت بياناتها كالتالي:

$$\{5 - 6 - 3 - 7\ 8\}$$

اختبر وجود فرق معنوي بين متوسطي المجتمعين عند مستوى المعنوية 5%.

_الحل :

نلاحظ أن $n_1, \mathrm{n}_2 < 30$ ، σ_1^2, σ_2^2 مجهولتين والمجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي ، إذن :

- صياغة الفرضيات الإحصائية :

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

- حساب إحصاء المحسوبة :

$$T_{cal} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SP\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}}}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{5+6+7+8}{5} = 5.8$$

$$\bar{X}_2 = \frac{12+10+8+12+9+5}{6} = 9.33$$

$$S_1{}^2 = 3.7$$

$$S_2{}^2 = 7.14$$

$$SP^2 = \frac{S_1{}^2(n_1 - 1) + S_2{}^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = 5.61$$

$$SP = \sqrt{SP^2} = 2.3627$$

$$T_c = \frac{(5.8 - 9.33) - (0)}{2.3687\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = -2.46$$

- تحديد القيمة الجدولية :

- $t_{n_1+n_2-2\ ,\ 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9\ ,\ 0.975} = 2.262$

- مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية :

$$|t_{cal}| > t_{tab}$$

$$|-2.46| > 2.262$$

- القرار : بما أن قيمة (t) المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من قيمة (t) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما يدل على أن متوسط المجتمع الأول يختلف عن متوسط المجتمع الثاني عند مستوى المعنوية 5%.

3. 6. اختبار الفرضيات للنسبة:

إذا كانت لدينا قيم المشاهدات التالية $x_1 ;x_2.......x_n$ لعينة عشوائية ذات حجم كبير وتخضع لتوزيع ذات الحدين واختيار فرض العدم $H_0: P = P_0$ مقابل فرض البديل :

$$H_1: P \neq P_0 \qquad ; \qquad H_1: P > P_0 \qquad ; \qquad H_1: P < P_0$$

فإنه يتم رفض حسب طبيعة فرض البديل H_1 كما يلي :

1) $H_1: P \neq P_0 \qquad \Rightarrow \qquad |Zcal| \geq Z_{\alpha/2}$
2) $H_1: P > P_0 \qquad \Rightarrow \qquad Zcal \geq Z_{\alpha}$
3) $H_1: P < P_0 \qquad \Rightarrow \qquad Zcal \leq -Z_{\alpha}$

- خطوات إجراء هذا الاختيار:

1) صياغة الفرضيات الإحصائية $(\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_0})$.
2) تحديد مستوى المعنوية .
3) استخراج قيمة المجدولة (Z) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري عند مستوى (α) في حالة الاختيار من جانب واحد أو $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ في حالة الاختيار من طرفين.
4) حساب قيمة (Z) وفقاً للصيغة الآتية:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}} \sim (0.1)$$

حيث أن:

$\hat{P}$: نسبة عدد حالات النجاح في العينة ، وتٌحسب كما يلي: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

P_0 : نسبة النجاح وتكون مفترضة (معطاة).

q_0 : نسبة الفشل وتحسب كما يلي : $q_0 = 1 - P_0$

5) القرار الإحصائي .

6) الاستنتاج .

مثال رقم (08):

تقدر الدوائر الرسمية نسبة المتخرجين الجامعيين الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم بـ70%، فأخذوا عينة مكونة من 900 طالب وأُجريت عليها الدراسة، فوجد أن نسبة الحصول على عمل 67%. كيف يمكن اختبار بمستوى معنوية 5% ما إذا كانت النسبة الرسمية صحيحة أم مبالغ فيها؟

الحل :

- صياغة الفرضيات :

$$H_0: P = 0.70$$
$$H_1: P < 0.70$$

- مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- استخراج القيمة المجدولة(Z_{tab}) كما يلي :

$$\alpha = 0.05 \ , \qquad 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$$

ومنه :

$$Z_{0.95} = 1.64$$

- تحديد (Z_{cal}) المحسوبة كما يلي :

$$P_0 = 0.70 \qquad \Rightarrow \qquad q_0 = 0.30$$

ومنه :

$$Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_{0q_0}}{n}}} = \frac{0.67 - 0.70}{\sqrt{\frac{0.70 - 0.30}{90}}} = -1.9634$$

- مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية :

$$Z_{cal} < -Z_{tab}$$
$$-1.9634 < -1.64$$

- القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة أصغر من سالب قيمة (Z) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما يدل على أن الدوائر الرسمية قد بالغت في تقديرها عند مستوى المعنوية 5%.

مثال رقم (09):

يدعي صياد أنه يصيب 75 % من الطيور التي يطلق عليها النار فهل توافق هذا الادعاء. إذا كان في يوم ما قد أسقط 80 طيرا من أصل 120 طيراً التي كانت قد أُطلِق عليها النار مستخدماً في ذلك مستوى معنوية 5%.

الحل :

- صياغة الفرضيات :

$$H_0: P = P_0$$
$$H_1: P \neq P_0$$

- مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- استخراج القيمة المجدولة (Z_{tab}) كما يلي :

$$\boldsymbol{\alpha = 0.005 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975}$$

ومنه:

$$Z_{0.975} = 1.96$$

- تحديد (Z_{cal}) المحسوبة كما يلي :

-

$$P_0 = 0.75 \rightarrow q_0 = 1 - P_0 = 1 - 0.75 = 0.25$$

ومنه :

$$Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.67 - 0.70}{\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{120}}} = -4.5$$

- مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية :

$$|Z_{cal}| \geq Z_{tab}$$
$$|-4.5| \geq 1.96$$

- القرار : بما أن قيمة (Z) المحسوبة بالقيمة المطلقة أكبر من قيمة (Z) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما سبق لا نوافق هذا الادعاء. عند مستوى المعنوية 5%.

3. 7. اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتين:

إذا كانت لدينا قيم المشاهدات $x_1 ; x_2 \ldots . x_n$ لعينة عشوائية ذات التوزيع ذو الحدين وكانت لدينا قيم المشاهدات $y_1 ; y_2 \ldots . y_n$ تتبع توزيع ذو الحدين، وكانت العينتان المستقلتان عن بعضهم البعض وكانت n1 ; n2 كبيرتين وأردنا اختبار $H_0 : \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 = 0$ مقابل فرض البديل :

$$H_1 : P_1 - P_2 \neq 0 \quad ; \quad H_1 : P_1 > P_2 \quad ; \quad H_1 : P_1 < P_2$$

فإنه سيتم رفض (H_0) حسب طبيعة فرض البديل كما يلي:

1) $H_1: P_1 \neq P_2 \Rightarrow |Z_{cal}| \geq Z_{\alpha/2}$

2) $H_1: P_1 > P_2 \Rightarrow Z_{cal} \geq Z_{\alpha}$

3) $H_1: P_1 < P_2 \Rightarrow Z_{cal} \leq -Z_{\alpha}$

- **خطوات إجراء هذا الاختبار:**

نتبع نفس الخطوات السابقة باستثناء قيمة (Z_{cal}) فإن طريقة حسابها تختلف عن السابقة حيث تعطى كما يلي :

$$Zcal = \frac{\left(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}\right) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \backsim (0.1)$$

$$\Rightarrow Zcal = \frac{\left(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}\right)}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

ولغرض الدراسة نقوم بتقدير كل من(p و q) نظرا لعدم وجود أية معلومات حولهما بالطريقة التالية:

$$\hat{p} = \frac{\left(n_1\widehat{P_1} + n_2\widehat{P_2}\right)}{n_1 + n_2}$$

$$\hat{p} = \frac{(X_1 + X_2)}{n_1 + n_2} \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

ومنه:

$$Z_{cal} = \frac{\left(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}\right)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

حيث أن: $\hat{q}$; $\hat{p}$ قيم تقديرية لكل من p و q :

مثال رقم (10):

شركة للإنتاج التبغ توزع نوعين من التبغ، ووجد من بين 200 مدخن أي 56 يدخنون النوع الأول، وأن من بين 150 مدخن وجد أن 29 يدخنون النوع الثاني فهل تستطيع أن نستنتج أن النوع الأول أكثر رواجا من النوع الثاني؟.

الحل :

$$\boldsymbol{n_1 = 56, X_1 = 200 \Rightarrow \widehat{p_1} = \frac{X_1}{n_1} = \frac{56}{200} = 0.28}$$

$$\boldsymbol{n_2 = 29, X_2 = 150 \Rightarrow \widehat{p_2} = \frac{x_2}{n_2} = \frac{29}{150} = 0.19}$$

$$\boldsymbol{\widehat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{56 + 29}{200 + 150} = 0.24}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \widehat{q} = 0.76}$$

- صياغة الفرضيات :

$$H_0: P_1 = P_2$$
$$H_1: P_1 > P_2$$

- مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- استخراج القيمة المجدولة (Z_{tab}) كما يلي :

$$\alpha = 0.05 \ , \qquad 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$$

ومنه :

$$Z_{0.95} = 1.64$$

- تحديد (Z_{cal}) المحسوبة كما يلي :

$$Z == \frac{0.28 - 0.19}{\sqrt{(0.24)(0.76)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{150}\right)}} = 1.8$$

- مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية :

$$Z_{cal} > Z_{tab}$$

$$1.8 > 1.64$$

- القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة أكبر من قيمة (Z) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) مما يدل على أن النوع الأول أكثر رواجا من النوع الثاني عند مستوى المعنوية 5%.

مثال رقم (11):

اختيرت عينة عشوائية حجمها (700) طالب بواقع (360) طالبا و(340) طالبة، وقد لوحظ أن عدد الطلاب المدمنين على التدخين كان (50) طالبا، وعدد الطالبات المدمنات على التدخين كان (30) طالبة.

هل يمكن استنتاج أن نسبة الطلاب المدمنين على التدخين هي أكثر من نسبة الطالبات المدمنات على التدخين عند مستوى المعنوية 5%.

الحل :

$$\boldsymbol{n_1 = 50, X_1 = 360 \Rightarrow \widehat{p_1} = \frac{X_1}{n_1} = \frac{50}{360} = 0.14}$$

$$\boldsymbol{n_2 = 30, X_2 = 340 \Rightarrow \widehat{p_2} = \frac{X_2}{n_2} = \frac{30}{340} = 0.09}$$

$$\boldsymbol{\widehat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{50 + 30}{360 + 340} = 0.11}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \widehat{q} = 0.89}$$

- صياغة الفرضيات :

$$H_0 : P_1 = P_2$$
$$H_1 : P_1 > P_2$$

- مستوى المعنوية:

$$\alpha = 0.05$$

- استخراج القيمة المجدولة(Z_{tab}) كما يلي :

$$\alpha = 0.05 \ , \qquad 1-\alpha = 1-0.05 = 0.95$$

ومنه :

$$Z_{0.95} = 1.64$$

- تحديد (Z_{cal}) المحسوبة كما يلي :

$$Z == \frac{0.14-0.09}{\sqrt{(0.11)(0.89)\left(\frac{1}{360}+\frac{1}{340}\right)}} = 2.058$$

- مقارنة القيمة المحسوبة مع القيمة الجدولية :

$$Z_{cal} > Z_{tab}$$
$$2.058 > 1.64$$

- القرار: بما أن قيمة (Z) المحسوبة أكبر من قيمة (Z) المجدولة فإننا نرفض فرض العدم (H_0) ، مما سبق نستنتج أن نسبة الطلاب المدمنين على التدخين أكبر من نسبة الطالبات المدمنات على التدخين عند مستوى المعنوية 5%.

3. 8. اختبار الفرضيات حول تباين مجتمع:

لنفترض أنه لدينا مجتمع إحصائي يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه (μ) وتباينه (σ^2)، ونريد اجراء اختبار الفرضيات حول تباين مجتمع، أي أردنا اختبار $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل فرض واحد بديل من الفروض الاتية:

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad ; \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad ; \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

فإنه سيتم رفض (H_0) حسب طبيعة فرض البديل كما يلي:

1) $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 \geq \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}$

2) $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 \geq \chi^2_{(1-\alpha\ , n-1)}$

3) $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad \chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha\ , n-1)}$

أما المعيار المستخدم في ذلك، هو:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

مثال رقم (12):

اختيرت عينة عشوائية حجمها 20 مفردة من مجتمع ما يتبع التوزيع الطبيعي، وكان تباين هذه العينة هو 266، أهتبر الفرض القائل أن تباين هذا المجتمع هو 250بدرجة ثقة 99%.الحل:

الحل:

لدينا:

$$S^2 = 266\ , \quad \sigma_0^2 = 250\ , \quad n = 20\ , \quad \upsilon = n - 1 = 19$$

- صياغة الفرضيات:

$$H_0: \sigma^2 = 250$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 250$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 1 - C = 1 - 0.99 = 0.01$$

- توزيع القيم الحرجة:

التوزيع المستخدم هو ${}^{2}_{(19)}$ ومستوى المعنوية هو $\alpha = 0.01$ وأن الاختبار ذو اتجاهين (من طرفين)، فإن القيم الحرجة تكون كما يلي:

$$\chi^2_{(19\,,0.995)} = 6.644 \quad , \quad \chi^2_{(19\,,0.005)} = 36.582$$

إن منطقة رفض $_0$ يكون خارج هذه الفترة أو الحدود

- حساب المعيار المستخدم:

$$C = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19)266}{250} = 20.216$$

- المقارنة:

$$\chi^2_{(19\ ,0.995)} = 6.644 < C = 20.216 < \chi^2_{(19\,,0.005)} = 36.582$$

- القرار:

نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1 القائل أن تباين المجتمع يختلف عن 250 عند مستوى المعنوية 1%.

3. 9. اختبار الفروض حول النسبة بين تباين مجتمعين:

لنفترض أنه لدينا مجتمع إحصائي يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه (μ_1) وتباينه (σ_1^2)، وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها (n_1) وتباينها (S_1^2)، ولدينا مجتمع إحصائي أخر مستقل عن الأول يتبع التوزيع الطبيعي متوسطه (μ_2) وتباينه (σ_2^2)، وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها (n_2) وتباينها (S_2^2)،ونريد اجراء اختبار

الفرضيات حول مقارنة تباين المجتمع الأول (σ_1^2) مع تباين المجتمع الثاني (σ_2^2)، أي أردنا اختبار $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$مقابل فرض واحد بديل من الفروض الاتية:

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \qquad ; \qquad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \qquad ; \qquad H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

فإنه سيتم رفض (H_0) حسب طبيعة فرض البديل كما يلي:

1) $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad F_c < F_{\left(\nu_1,\nu_2,1-\frac{\alpha}{2}\right)}$

أو:

$F_c > F_{\left(\nu_1,\nu_2,\frac{\alpha}{2}\right)}$

2) $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad F_c > F_{(\nu_1,\nu_2,\alpha)}$

3) $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad F_c > F_{(\nu_1,\nu_2,1-\alpha)}$

أما المعيار المستخدم في ذلك، هو

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1,n_2-1,\alpha)}$$

مثال رقم (13):

سحبت عينتين من مجتمعين مستقلين طبيعيين، العينة الأولى حجمها 10 وتباينها 7.14، والعينة الثانية حجمها 8 وتباينها 3.21.

المطلوب: اختبر فرضية تساوي تبايني المجتمعين باحتمال 95%.

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 10\,, n_2 = 8\,, S_1^2 = 7.14\,, S_2^2 = 3.21$$

- صياغة الفرضيات:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

- تحديد مستوى المعنوية:

$$\alpha = 1 - C = 1 - 0.95 = 0.05$$

- توزيع القيم الحرجة:

$$F_{\left(n_1-1\,,n_2-1,\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{0.0025,(9\ ,7)} = 4.82$$

- حساب المعيار المستخدم:

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{7.14}{3.21} = 2.22$$

- المقارنة:

$$F_c < F_{\left(n_1-1\,,n_2-1,\frac{\alpha}{2}\right)}$$

أي:

$$2.22 < 4.82$$

- القرار :

نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1 القائل أن تباين المجتمع الأول يختلف عن الثاني يختلف عن 250 عند مستوى المعنوية 5%.

خلاصة الفصل:

إن الهدف من أسلوب اختبار الفرضيات هو الوصول إلى قرار يخص رفض أو عدم رفض قيمة مدعاة للمعلمة من معلمات المجتمع بالاعتماد على نتائج أو احصاءات العينة المأخوذة من هذا المجتمع، إذا اختبار الفرضيات يلعب دورا أساسيا في عملية اتخاذ القرارات المناسبة والمتعلقة بمعلمة أو مجموعة من المعلمات في مجتمع واحد أو عدة مجتمعات، إن قبول الفرضية لا يعني حتما انها صحيحة ورفضها لا يعني حتما أنها خاطئة، لأن القبول والرفض يعتمد على تمثيل العينة للمجتمع.

الخاتمة

الخاتمة:

هدفت هذه المطبوعة إلى توضيح بعض المفاهيم الاحصائية للطبة حول الاحصاء الاستدلالي (الاحصاء 4) الذي يعتبر أحد أنواع علم الاحصاء وفرعه الثاني بعد الإحصاء الوصفي، كما يعتبر من أهم الأدوات الأساسية التي تعتمد عليها أغلب البحوث العلمية، ومن أهم التقنيات التي تساعد الباحثين على اختيار الأسلوب المناسب في التحليل الاحصائي، يهتم هذا الفرع من الاحصاء بجميع الأساليب والطرق الاحصائية المستخدمة في تحليل بيانات العينة للاستدلال بها عن معالم المجتمع المأخوذة منه، حيث يكون هذا الاستدلال على شكل تقديرات أو اختبار الفرضيات، من هنا نستنتج أن للإحصاء الاستدلالي فرعين هما التقدير الذي يهتم بإيجاد قين تقديرية للاستدلال بها عن معالم المجتمع المجهولة، واختبار الفرضيات الذي يهتم بتأكد من صحة الادعاء والافتراض حول مجتمع المدروس، هذان الفرعان يعتمدان في الأساس على نقطة أساسية وهي توزيع المعاينة، وهذه هما

وعلية جاءت هذه المطبوعة لتعالج أهم النقاط الاحصاء الاستدلالي (توزيع المعاينة، التقدير، اختبار الفرضيات) التي تعتبر المحاور الاساسية للإحصاء 4 ، واعتمدت في إعدادها على التبسيط من خلال تدعيم الدروس بالعديد من الأمثلة المتنوعة، حرصا مني على التوضيح وسهولة الفهم والاستيعاب الجيد للطلبة، ورغم كل هذا فهذا العمل يبقى عمل متواضع مني يحتاج للكثير، وبذل مجهود كبير للوصل إلى تقديم الاحصاء الاستدلالي بشكله الكامل.

قائمة المصادر والمراجع

قائمة المصادر والمراجع

- **المراجع باللغة العربية:**

1- معتوق أمحمد، الاحصاء الرياضي والنماذج الاحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2007.

2- عزام صبري، الاحصاء الرياضي، دار الصفاء، عمان، الأردن،2010.

3- عبدالحميد عبد المجيد البلداوي، أساليب الاحصاء للعلوم الاقتصادية وادارة الاعمال مع برنامج SPSS، دار وائل للنشر، الطبعة الأولى، 2009.

4- ابراهيم أبو عقيل، مبادئ في الاحصاء، دار أسامة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2012.

5- محمد محمود سليم صالح، مبادئ التحليل الاحصائي، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن،2009.

6- أنيس اسماعيل كتجو، الاحصاء والاحتمال، مكتبة العبيكان، الطبعة الأولى، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2000.

7- محمد صبح، وأخرون، نظريات العينات، منشورات جامعة دمشق، 2000-2001.

8- رامز قدسية، الاحتمالات والاحصاء، منشورات الجامعة الافتراضية السورية، 2018.

9- صالح بوعبدالله، مطبوعة محاضرات الاحصاء الرياضي، كلية العلوم الاقتصادية، جامعة المسيلة، 2005-2006.

10- ابراهيم محمد العلي، فتاة صبوح، محاضرات في الاحصاء الرياضي موجهة لطلاب السنة الثالثة، قسم الاحصاء والبرمجة، كلية الاقتصاد، جامعة شرين، 2020.

11- أماني موسى محمد، التحليل الاحصائي للبيانات، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث، كلية الهندسة، جامعة القاهرة، الطبعة الأولى، 2007.

12- علي عبد السلام، على حسين العجيلي، الاحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق، دار الحكمة.

13- محمد محمد المزاح، مبادئ الاحصاء والاحتمالات للعلوم الادراية والتطبيقية، جامعة العلوم والتكنولوجيا، الطبعة الثالثة، صنعاء، 2013.

14- سهير فهمي حجازي، محمود الدريني، الاحصاء التطبيقي، الشركة المصرية لإعادة تأمين المكتبة، 2003-2004.

15- غضبان عبدالله البدران، الاحصاء الاستدلالي مع تطبيقات، دار المناهج للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2022.

16- صلاح العيادي صالحين، مسائل محلولة في الاحصاء والاحتمالات، دار مكتبة ابن كثير للنشر والتوزيع، طرابلس، ليبيا.

17- أياد محمد الهوني، الاحصاء التطبيقي، الطبعة الاولى، 2014.

جبار محمد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان،2014.

18- عدنان بن ماجد عبدالرحمن بري وأخرون، أساسيات طرق التحليل الاحصائي ، النشر العلمي والمطابع، جامعة ملك سعود، الرياض، 1998.

19- عدنان بن ماجد عبدالرحمن بري وأخرون، مبادئ الاحصاء والاحتمالات، النشر العلمي والمطابع جامعة ملك سعود، الطبعة الثالثة، 1997.

20- كمال فليفل، فتحي حمدان، الاحصاء، دار المناهج للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، 2013.

21- جلال الصياد، عبد الحميد محمد ربيع، مبادئ الطرق الاحصائية، دار النشر تهامة، جدة، المملكة العربية السعودية، الطبعة الأولى، 1983.

22- صلاح العيادي صالحين، مسائل وحلول في الاحصاء والاحتمالات، دار بن الكثير للنشر والتوزيع، طرابلس. ليبيا.

23- مبارك أسبر ديب، مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، دروس موجهة لطلاب السنة الأولى، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، سورية، 2008-2009.

- **المراجع باللغة لأجنبية:**

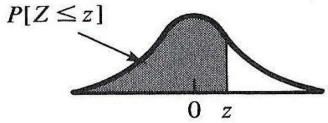
1- Jacqueline FOURASTIE , Benjamin SAHLER, Probabilité et Statistique, BORDAS , Paris, 2° édition, 1981.

2- Bernard GOLDFARB, Catherine PARDOUX, Introduction à la méthode statistique, Dunod, Paris, 4° édition, 2004.

الملاحق

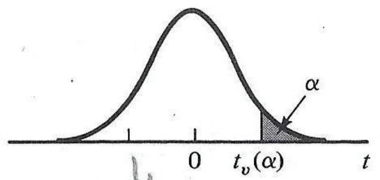
الملاحـق: الجداول الاحصائية

TABLE 1 STANDARD NORMAL PROBABILITIES



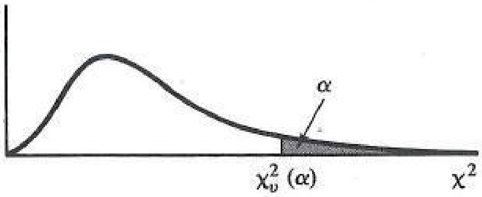
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

TABLE 2 STUDENT'S *t*-DISTRIBUTION CRITICAL POINTS



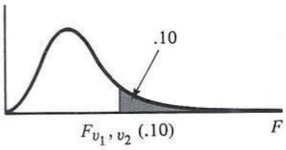
d.f. ν	α .250	.100	.050	.025	.010	.00833	.00625	.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	38.190	50.923	63.657
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	7.649	8.860	9.925
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	4.857	5.392	5.841
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	3.961	4.315	4.604
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	3.534	3.810	4.032
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.287	3.521	3.707
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.128	3.335	3.499
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.016	3.206	3.355
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	2.933	3.111	3.250
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	2.870	3.038	3.169
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	2.820	2.981	3.106
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	2.779	2.934	3.055
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	2.746	2.896	3.012
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.718	2.864	2.977
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.694	2.837	2.947
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.673	2.813	2.921
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.655	2.793	2.898
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.639	2.775	2.878
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.625	2.759	2.861
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.613	2.744	2.845
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.601	2.732	2.831
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.591	2.720	2.819
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.582	2.710	2.807
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.574	2.700	2.797
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.566	2.692	2.787
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.559	2.684	2.779
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.552	2.676	2.771
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.546	2.669	2.763
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.541	2.663	2.756
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.536	2.657	2.750
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.499	2.616	2.704
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.463	2.575	2.660
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.428	2.536	2.617
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.394	2.498	2.576

TABLE 3 χ^2 CRITICAL POINTS



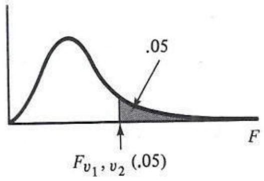
d.f. ν	.990	.950	.900	α .500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.0002	.004	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.02	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.11	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.30	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.55	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.87	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.24	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.65	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.09	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.56	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.05	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.57	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	4.11	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.66	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	5.23	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.81	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	6.41	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	7.01	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	7.63	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	8.26	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.90	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	9.54	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	10.20	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	10.86	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	11.52	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	12.20	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	12.88	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	13.56	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	14.26	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	14.95	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	22.16	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	29.71	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	37.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	45.44	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	53.54	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	61.75	69.13	73.29	89.33	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	70.06	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

TABLE 4 F-DISTRIBUTION CRITICAL POINTS ($\alpha = .10$)



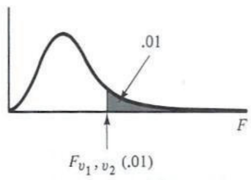
v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.79
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.76
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.51
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.11
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.96
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.86
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.82
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.78
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.75
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.72
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.70
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.68
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.66
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.62
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.59
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.58
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.57
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.56
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.55
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.54
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.40
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24

TABLE 5 *F*-DISTRIBUTION CRITICAL POINTS ($\alpha = .05$)



v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60
1	161.5	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	246.0	248.0	249.3	250.1	251.1	252.2
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.57
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.43
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.74
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.30
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.01
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.79
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.62
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2:72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.49
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.38
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.30
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.22
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.16
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.11
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.06
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.02
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.95
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.84
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.80
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.79
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.75
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.74
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.64
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.53
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.55	1.50	1.43
∞	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.46	1.39	1.32

TABLE 6 *F*-DISTRIBUTION CRITICAL POINTS ($\alpha = .01$)



v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30	40	60
1	4052.	5000.	5403.	5625.	5764.	5859.	5928.	5981.	6023.	6056.	6106.	6157.	6209.	6240.	6261.	6287.	6313.
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.32
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.65
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.20
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.06
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.82
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.03
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.48
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.08
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.78
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.54
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.34
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.18
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.05
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.93
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.83
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.75
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.67
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.61
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.55
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.50
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.45
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.40
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.36
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.33
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.29
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.26
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.23
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.21
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.02
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.84
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.93	1.86	1.76	1.66
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.78	1.70	1.59	1.47