

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار تليجي بالاغواط

UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI - LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTÉ DES SCIENCES

قسم الرياضيات

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications

Réalisé par : DAYNAA MAACHA

Encadré par : Dr. AMAR BOUGOUTAIA

Thème :

Sur les opérateurs Lipschitz (q,p)-mixing

Devant le jury composé de :

Dr. AMAR BOUGOUTAIA	M.C.A	Université de Laghouat	Encadreur
Dr. AMAR BELACEL	PROF	Université de Laghouat	Président
Dr. KHEDIDJA BEY	M.C.B	Université de Laghouat	Examinatrice

Année universitaire : 2024/2025

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبفضله تتحقق الآمال.

أهدي هذا العمل المتواضع

إلى والديَّ الكريمين، اللذين وهبا حياتيهما لرعايتي وتعليمي، فكانا خير معين وسند. أسأل الله أن يجزيكما خير الجزاء، ويطول في عمركما، ويرزقكما الصحة والسعادة، ويجعلني كما تحبان. وأن أكون دائماً عند حسن ظنكما، مُشرفاً برضاكما، حاملاً لشهادتي هذه فخراً لكم قبل أن تكون لي. إلى مشرفي الأستاذ الدكتور (عمر بوقطاية)، الذي تكرم بتوجيهي بكل حكمة وصبر، فكان نبراساً يُضيء طريقي العلمي، ونموذجاً يُحتذى به في الأمانة العلمية والدقة الأكاديمية. شكراً لسعة صدرك، ونصائحك الثمينة، ودعمك الذي لم يتوقف عند حدود الإشراف الأكاديمي، بل تجاوزه إلى الرعاية والتشجيع.

إلى أساتذتي الأفاضل في قسم (الرياضيات)، الذين أغدقوا عليّ بعلمهم وخبراتهم. إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل، سواءً بالإرشاد أو الدعم المعنوي، فجزاهم الله خير الجزاء. وأخيراً، أتوجه بالشكر لكل من ساعدني في رحلتي الأكاديمية، ولو بكلمة طيبة أو تشجيع.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire, **AMAR BOU-GOUTAIA**, pour son encadrement rigoureux, la clarté de ses orientations et la qualité de son accompagnement tout au long de ce travail. Sa disponibilité, son exigence scientifique et ses conseils avisés ont grandement contribué à la réalisation de ce mémoire dans les meilleures conditions.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury qui m'ont honorée par leur présence lors de la soutenance.

Je remercie tout particulièrement le professeur **AMAR BELACEL**, président du jury, pour l'attention portée à mon travail et la pertinence de ses remarques.

Ma gratitude va également à la professeure **KHEDIDJA BEY**, dont les observations enrichissantes et l'analyse approfondie ont constitué un apport précieux à l'évaluation de cette recherche.

Je suis profondément reconnaissante à l'ensemble des membres de la commission pour la qualité de leurs interventions, leur rigueur académique et l'intérêt manifeste qu'ils ont porté à ce mémoire.

الملخص

يتناول هذا البحث المؤثرات الليبشيتزية من نوع (q, p) -مختلط، وهي تعميم غير خطي للمؤثرات (q, p) -مختلط التي قدمها بييتش. مستوحى من أعمال فارمر جونسون، وتشافيز-دومينغيز، يندرج هذا العمل في إطار نظرية المؤثرات القابلة للتجميع، في صلب التحليل على الفضاءات البانخية.

نقوم بدراسة شروط الوجود، معايير التمييز، وأهم الخصائص المميزة لهذه المؤثرات. يهدف هذا العمل إلى تعميق الفهم بين قابلية الجمع، واللاخطية، والهندسة الخاصة بفضاءات بانخ.

الكلمات المفتاحية : اللاخطية، فضاءات بانخ، مؤثرات قابلة للتجميع، المؤثرات الليبشيتزية (q, p) -مختلط.

Abstract

This research focuses on Lipschitz (q, p) -mixing operators, a nonlinear generalization of the (q, p) -mixing operators introduced by Pietsch. Inspired by the works of Farmer Johnson, and Chávez-Domínguez, this study lies within the framework of the theory of summing operators, at the heart of analysis on Banach spaces.

We investigate the conditions for existence, identification criteria, and main characterizations of these operators. This work aims to deepen the understanding of the connections between summability, nonlinearity, and the geometry of Banach spaces.

Keywords : non linearity, Banach spaces, summing operators, Lipschitz operators, (q, p) -mixing.

Résumé

Ce mémoire porte sur les opérateurs Lipschitziens (q, p) -mixing, une généralisation non linéaire des opérateurs (q, p) -mixing introduits par Pietsch. Inspirée des travaux de Farmer Johnson et Chávez-Domínguez, cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs p -sommants, au cœur de l'analyse sur les espaces de Banach.

Nous analysons les conditions d'existence, les critères d'identification et les principales caractérisations de ces opérateurs. Ce travail vise à approfondir la compréhension des liens entre sommabilité, non-linéarité et géométrie des espaces de Banach.

Mots-clés : non-linéarité, espaces de Banach, opérateurs Lipschitziens, (q, p) -mixing, p -sommants.

Table des matières

Table des notations	6
Introduction	7
1 Préliminaire	8
1.1 Espace métrique	8
1.2 Opérateurs linéaires	8
1.3 Les applications de Lipschitz	9
1.4 Espace de Lipschitz	11
1.5 Espaces Lipschitz-libres	12
1.6 L'espace des molécules $\mathcal{M}(X; E)$	14
1.7 Topologie faible et topologie *-faible	16
2 Les opérateurs Lipschitziens (q, p)-mixing	17
2.1 Opérateurs linéaires p -sommants	18
2.2 Opérateurs Lipschitziens p -sommants	28
2.3 Opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing	30
3 Caractérisations	35
3.1 Domination	35
3.2 Les suites (q, p) -mixing	37
3.3 La norme de Chevet-Saphar et opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing	40
Conclusion	42
Bibliographie	43

Table des notations

Symbole	Signification
p^*	Conjugué d'un réel p , vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$
\mathbb{K}	Le corps des nombres réels ou complexes
\mathbb{R}	L'ensemble des nombres réels
E, F, G	Espaces de Banach
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires et bornés (continus)
X, Y, Z	Espaces métriques
E^*	Le dual topologique de E
$B_{E^*} = \{x^* \in E^*, \ x^*\ \leq 1\}$	Boule unité de E^*
$B_{X^\#}$	La boule unité fermée de $X^\#$
$\sigma(X, X^*)$	La topologie faible
$\sigma(X^*, X)$	La topologie $*$ -faible
$Lip_0(X, Y)$	L'ensemble des opérateurs Lipschitziens entre X et Y s'annulant en 0
$X^\# = Lip_0(X, \mathbb{K})$	Le dual Lipschitzien de l'espace métrique pointé X
$\langle x, x^* \rangle$	Crochet de dualité entre E et E^*
$\mathcal{M}(X)$	L'ensemble de toutes les molécules sur l'espace métrique X
Π_p^L	L'ensemble de tous les opérateurs p -sommants strictement de Lipschitz
π_p^L	La norme des opérateurs Lipschitziens p -sommants de X dans Y
$\mathcal{A}(X)$	Espace d'Arens-Eells de X
$\mathcal{F}(X)$	Espace libre Lipschitzien de X
$\mathcal{C}(X)$	L'ensemble des fonctions continues sur le compact K
$J_p (1 \leq p < \infty)$	L'application d'inclusion canonique définie de $C(K)$ vers $L_p(\mu)$
$I_{\infty, p}$	L'application d'inclusion formelle définie de $L_\infty(\mu)$ vers $L_p(\mu)$ pour $(1 \leq p < \infty)$
i	L'injection linéaire métrique
$M_{q,p}^L(X, Y)$	L'ensemble des opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing.
$m_{q,p}^L(T)$	La norme des opérateurs de Lipschitz (q, p) -mixing de X dans Y .

Introduction

La théorie des opérateurs p -sommants occupe une place centrale dans la théorie moderne des espaces de Banach, non seulement en raison de son élégance intrinsèque, mais aussi grâce à ses nombreuses applications dans divers domaines tels que la géométrie des espaces de Banach, l'analyse harmonique et la théorie des opérateurs. Lorsque l'on manipule des opérateurs p -sommants, il est fréquent de rencontrer un opérateur T possédant la propriété que $S \circ T$ est p -sommant dès que S est q -sommant. C'est précisément cette idée qui a conduit à la notion d'opérateurs (q, p) -mixing, introduite et étudiée par Pietsch [14]. Par ailleurs, Farmer et Johnson [7] ont récemment proposé le concept d'opérateurs Lipschitziens p -sommants. Les opérateurs Lipschitziens (q, p) -mixing, quant à eux, représentent une généralisation de Lipschitz des opérateurs linéaires (q, p) -mixtes et ont été définis par Chávez-Domínguez dans [3]. Dans ce travail, nous revisitons en détail cette généralisation et explorons certaines de ses propriétés.

Ce travail est organisé en trois chapitres principaux :

1. **Le premier chapitre** est dédié à la présentation de préliminaires utiles ainsi qu'à des rappels de définitions essentielles pour une compréhension approfondie du manuscrit.
2. **Le deuxième chapitre** introduit la définition des opérateurs Lipschitziens (q, p) -mixing, en mettant en avant une condition (ou critère) suffisante. Nous commençons par un rappel sur les opérateurs Lipschitziens p -sommants, puis nous énonçons quelques propriétés relatives à la classe des opérateurs Lipschitziens (q, p) -mixing.
3. **Le troisième chapitre** est consacré à l'étude des caractérisations de ces opérateurs. Trois caractérisations distinctes sont présentées : la première repose sur une inégalité intégrale liée au théorème de domination de Pietsch, la deuxième fait intervenir les suites (q, p) -mixing, et la troisième s'appuie sur l'espace de Chevet-Saphar.

Chapitre 1:

Préliminaire

Ce chapitre a pour vocation de présenter les concepts fondamentaux et les outils théoriques qui serviront de socle à ce mémoire.

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1 (Distance) Soit X un ensemble quelconque. On appelle **distance** sur X une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ avec les propriétés suivantes :

- (i) $d(x, x) = 0, \forall x \in X$ et $d(x, y) > 0, \forall x, y \in X, x \neq y$.
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (iii) $\forall x, y, z \in X$ on a

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z) \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Définition 1.1.2 (Espace métrique) Si X est un ensemble et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance sur X , le couple (X, d) s'appelle **espace métrique**.

Définition 1.1.3 (Espace métrique pointé) Pour plus de détails, voir [9]

On appelle espace métrique pointé tout triplet (X, d, e) , où (X, d) est un espace métrique et $e \in X$ est un élément distingué (appelé **point de base**). Si X est un espace normé, on choisit généralement $e = 0$ comme élément distingué.

1.2 Opérateurs linéaires

Soient E et F des espaces normés.

Définition 1.2.1 L'application

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = u(x) \end{aligned}$$

est appelé opérateur linéaire (ou plus simplement un opérateur) si elle vérifie :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad u(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha u(x_1) + \beta u(x_2).$$

Définition 1.2.2 Un opérateur u est borné, s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.2.3 Un opérateur u est continu en $x_0 \in E$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x - x_0\|_E < \delta \implies \|u(x) - u(x_0)\|_F < \epsilon.$$

Théorème 1.2.1 L'opérateur u est continu si et seulement si il est borné. Pour plus de détails voir ([12], p.215–216).

Définition 1.2.4 ([12], p.223) Soient E et F des espaces de Banach, u un opérateur linéaire borné, on appelle opérateur adjoint de u et on le note par u^* l'application :

$$u^* : F^* \longrightarrow E^*$$

qui vérifie :

$$\forall x \in E, \quad \forall y^* \in F^* : \quad \langle u(x), y^* \rangle = \langle x, u^*(y^*) \rangle.$$

Théorème 1.2.2 ([12], p.224) Si u est un opérateur borné, alors u^* l'est aussi et on a :

$$\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}. \quad (1.1)$$

1.3 Les applications de Lipschitz

Définition 1.3.1 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite de **Lipschitz** s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tous $x, y \in X$, on ait :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y). \quad (1.2)$$

La plus petite constante C vérifiant cette inégalité est appelée **constante de Lipschitz** de f , notée $Lip(f)$. Elle est définie par :

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} = \inf\{C : C \text{ vérifie l'inégalité (1.2)}\}.$$

Si (X, d_X, e_X) et (Y, d_Y, e_Y) sont des espaces métriques pointés, on dit que f préserve le point distingué si $f(e_X) = e_Y$.

Proposition 1.3.2 Soit (X, e, d) un espace métrique pointé. Alors l'application $f_z : X \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f_z(x) = d(x, z) - d(e, z),$$

est une application de Lipschitz de constante de Lipschitz $Lip(f_z) = 1$.

Preuve. D'après la seconde inégalité triangulaire, pour tout $x, y, z \in X$, on a :

$$|f_z(x) - f_z(y)| = |d(x, z) - d(y, z) + d(y, z) - d(x, z)| \leq d(x, y).$$

Ainsi, f_z est une fonction **non expansive**, c'est-à-dire que $Lip(f_z) \leq 1$. Pour démontrer l'inégalité inverse, on observe que :

$$Lip(f_z) = \sup_{x \neq y} \frac{|f_z(x) - f_z(y)|}{d(x, y)} \geq \frac{|f_z(z) - f_z(y)|}{d(z, y)} = 1.$$

On déduit finalement que $Lip(f_z) = 1$ ■

Proposition 1.3.3 Soient X un espace métrique, et f, g des fonctions de Lipschitz de X dans \mathbb{R} . Alors : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f).$$

La somme $f + g$ est également de Lipschitz, et :

$$Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g).$$

Preuve. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in X$, on a :

$$Lip(\lambda f) = \sup_{x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{d_X(x, y)} = |\lambda| \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_X(x, y)} = |\lambda| Lip(f).$$

Ainsi, λf est de Lipschitz et :

$$Lip(\lambda f) = |\lambda| Lip(f)$$

Pour tout $x, y \in X$, on a :

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (Lip(f) + Lip(g)) d_X(x, y)$$

Par conséquent, $f + g$ est de Lipschitz et :

$$Lip(f + g) \leq Lip(f) + Lip(g)$$
■

Proposition 1.3.4 Soient X, Y et Z des espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des applications de Lipschitz. Alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est également de Lipschitz, et sa constante de Lipschitz vérifie :

$$Lip(g \circ f) \leq Lip(g)Lip(f).$$

Preuve. Puisque f est de Lipschitz, pour tout $x, y \in X$, on a :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq Lip(f)d_X(x, y).$$

De même, puisque g est de Lipschitz, pour tout $u, v \in Y$, on a :

$$d_Z(g(u), g(v)) \leq Lip(g)d_Y(u, v).$$

En appliquant g à $f(x)$ et $f(y)$, on obtient :

$$d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \leq Lip(g)d_Y(f(x), f(y)).$$

En combinant les deux inégalités, on a :

$$d_Z(g(f(x)), g(f(y))) \leq Lip(g)Lip(f)d_X(x, y).$$

Cela montre que $g \circ f$ est de Lipschitz avec une constante de Lipschitz au plus $Lip(g)Lip(f)$. ■

1.4 Espace de Lipschitz

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de tous les fonctions de Lipschitz défini d'un espace métrique dans un espace de Banach.

L'espace $Lip(X)$

Soit X un espace métrique et E un espace de Banach. On note par $Lip(X, E)$ l'espace de toutes les fonctions de Lipschitz **bornées** de X dans E , c'est-à-dire :

$$Lip(X, E) = \{f : X \rightarrow E \mid f \text{ est de Lipschitz et bornée}\}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{Lip(X, E)} = \max \{\|f\|_\infty, Lip(f)\}, \quad (1.3)$$

où :

1. $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$ est la norme uniforme (ou norme infinie),
2. $Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{d_X(x, y)}$ est la constante de Lipschitz de f .

Si $E = \mathbb{R}$, alors $Lip(X, \mathbb{R}) = Lip(X)$.

L'espace $Lip(X)$ est un **espace de Banach** pour la norme (1.3), pour tout espace métrique X .

L'espace $Lip_0(X)$

Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. L'espace $Lip_0(X)$ est l'espace de toutes les fonctions de Lipschitz $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annulent au point de base e , c'est-à-dire :

$$Lip_0(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est de Lipschitz et } f(e) = 0\}.$$

La norme sur $Lip_0(X)$ est donnée par la constante de Lipschitz :

$$\|f\|_{Lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_X(x, y)}.$$

$Lip_0(X) = X^\#$, est l'espace de toutes les formes de Lipschitz sur X . La norme sur $X^\#$ est définie de manière similaire par la constante de Lipschitz :

$$\|x^\#\|_{Lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|x^\#(x) - x^\#(y)|}{d_X(x, y)}.$$

Proposition 1.4.1 (Voir[4])

- (a) $Lip(X)$ est un espace de Banach, pour tout espace métrique X .
- (b) $Lip_0(X)$ est un espace de Banach, pour tout espace métrique pointé X .

1.5 Espaces Lipschitz-libres

Dans la section précédente, nous avons vu que l'espace de Lipschitz $Lip_0(X)$ est un espace de Banach. Dans ce qui suit, nous démontrons le fait moins évident qu'il s'agit en réalité d'un espace de Banach dual. Il existe plusieurs manières équivalentes de construire le préduel de $Lip_0(X)$. La plus directe consiste à le définir comme l'espace linéaire engendré par les fonctionnelles d'évaluation $\delta(x) \in Lip_0(X)^*$, données par :

$$\langle f, \delta(x) \rangle = f(x)$$

pour $f \in Lip_0(X)$ et $x \in X$. En cohérence avec cette notation, on peut plus généralement considérer l'application

$$\delta : X \rightarrow Lip_0(X)^*$$

qui associe à chaque $x \in X$ sa fonctionnelle d'évaluation $\delta(x)$. Remarquons que $\delta(0)$ est simplement l'élément nul de $Lip_0(X)^*$, car toute fonction $f \in Lip_0(X)$ s'annule au point de base. Notons également que les fonctionnelles d'évaluation sont linéairement indépendantes. En effet, pour tout ensemble fini $E \subset X \setminus \{0\}$ et tout $x \in E$, la fonction qui prend la valeur 1 en x et 0 en tous les autres points de E est de Lipschitz sur E (toute fonction sur un espace métrique fini est clairement de Lipschitz). D'après le théorème de McShane, elle peut être étendue en une fonction $f \in Lip_0(X)$ telle que $\langle f, \delta(x) \rangle = 1$ et $\langle f, \delta(y) \rangle = 0$ pour $y \in E, y \neq x$. Par conséquent, $\delta(E)$ est un ensemble linéairement indépendant Voir[11].

Définition 1.5.1 Soit X un espace métrique pointé. L'espace Lipschitz-libre sur X , noté $\mathcal{F}(X)$, est le sous-espace de $Lip_0(X)^*$ défini par :

$$\mathcal{F}(X) = \overline{\text{vect}}\{\delta_x \mid x \in X\},$$

où l'application $\delta_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$ est définie par $\delta_X(x) = \delta_x$ pour $x \in X$, telle que :

$$\delta_x : X^\# \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto \delta_x(f) := f(x).$$

On pose

$$\|\mu\|_{\mathcal{F}(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x_i, x'_i) \right\},$$

où l'infimum est pris sur toutes les représentations de μ sous la forme

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\delta_{x_i} - \delta_{x'_i}).$$

On note que l'espace Lipschitz-libre est introduit par G.Godefroy et J.Kalton en 2003 (voir[6]).

Proposition 1.5.1 Soit X un espace métrique pointé. Les espaces $X^\#$ et $\mathcal{F}(X)$ sont isométriquement isomorphiques. C'est-à-dire, $X^\# \cong \mathcal{F}(X)$.

Preuve. Étape 1 : On définit l'application $S : \mathcal{F}(X) \rightarrow Lip_0(X)$ comme suit :

$$S(\varphi)(x) = \varphi(x)$$

Pour tout $x \in X$, où $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ et x' est un point fixé de X . Nous allons maintenant vérifier que $S(\varphi) \in Lip_0(X)$, c'est-à-dire que $S(\varphi)$ est une fonction de Lipschitz de constante ≤ 1 . Pour $x, x' \in X$, on a :

$$\begin{aligned} |S(\varphi)(x) - S(\varphi)(x')| &= |\varphi(x) - \varphi(x')| \\ &\leq \|\varphi\|d(x, x') \end{aligned}$$

Cela montre que $S(\varphi) \in Lip_0(X)$ et que $\|S(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$, ce qui implique que S est une application linéaire et non expansive.

Étape 2 : On définit maintenant l'application $R : Lip_0(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ comme suit :

$$R(f)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (f(x_i) - f(x'_i))$$

pour $f \in Lip_0(X)$ et $\varphi \in \mathcal{F}(X)$, où x_i et x'_i sont des points de X et α_i des coefficients associés aux points. On vérifie que $R(f) \in \mathcal{F}(X)$ et que la norme de $R(f)$ est majorée par la norme de f . En effet, on a :

$$\begin{aligned} |R(f)(\varphi)| &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i| |f(x_i) - f(x'_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|f\| d(x_i, x'_i) \end{aligned}$$

Cela montre que $R(f) \in \mathcal{F}(X)$ et que $\|R(f)\| \leq \|f\|$, ce qui implique que R est une application linéaire non expansive. Étape 3 : Enfin, on montre que $R \circ S = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$ et $S \circ R = \text{id}_{X^\#}$. Pour $\varphi \in \mathcal{F}(X)$, on a $(R \circ S)(\varphi) = \varphi$, ce qui montre que $R \circ S$ est l'identité sur $\mathcal{F}(X)$. Pour $\psi \in X^\#$, on a $(S \circ R)(\psi) = \psi$, ce qui montre que $S \circ R$ est l'identité sur $X^\#$. Puisque $R \circ S = \text{id}_{\mathcal{F}(X)}$ et $S \circ R = \text{id}_{X^\#}$, cela montre que R et S sont des bijections inverses l'une de l'autre. Par conséquent, $X^\#$ et $\mathcal{F}(X)$ sont isométriquement isomorphiques, et donc $X^\# \cong \mathcal{F}(X)$. ■

Proposition 1.5.2 (Voir [10]) Soit (X, d) un espace métrique pointé. L'application

$$\delta_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

est une injection isométrique non linéaire de X dans $\mathcal{F}(X)$.

Soit $T : X \rightarrow E$ une application de Lipschitz telle que $T(e) = 0$. Alors il existe une unique application linéaire

$$T_L : \mathcal{F}(X) \rightarrow E$$

telle que $T = T_L \circ \delta_X$ et $\|T_L\| = \text{Lip}(T)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & & \\ \delta_X \uparrow & \searrow T_L & \\ X & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

Preuve. Pour tout $x, x' \in X$, et pour tout $f \in \text{Lip}_0(X)$, on a

$$\begin{aligned}
\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, \varphi \rangle| \\
&= \sup_{R(g) \in B_{\mathcal{F}(X)}^*} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, R(g) \rangle|, \quad R(g) = \varphi \\
&= \sup_{g \in B_{X^\#}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, g \rangle| \\
&\leq \sup_{g \in B_{X^\#}} |g(x) - g(x')| \\
&\leq \sup_{g \in B_{X^\#}} \text{Lip}(g) \cdot d(x, x') \\
&\leq d(x, x'),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} \leq d(x, x').$$

Donc δ_X est de Lipschitz et $\text{Lip}(\delta_X) \leq 1$. Pour l'inégalité inverse, pour tout $x, x' \in X$, on a

$$\begin{aligned}
\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} = \sup_{f \in B_X^\#} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, f \rangle| \\
&= |\langle \delta_x - \delta_{x'}, f_x \rangle| = |f_x(x) - f_x(x')|
\end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} = \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} = d(x, x')$$

et $\text{Lip}(f) = 1$. ■

1.6 L'espace des molécules $\mathcal{M}(X; E)$

Nous commençons par rappeler la définition et les propriétés de l'espace d'Arens-Eells. Nous référons à [13] pour plus de détails.

Définition 1.6.1 Soit (X, d_X) un espace métrique. Une molécule sur X est une fonction $m : X \rightarrow \mathbb{R}$ à support fini et satisfaisant

$$\sum_{x \in \text{supp}(m)} m(x) = 0.$$

Désignons par $\mathcal{M}(X)$ l'espace vectoriel de tous les molécules définies sur X . On peut écrire

$$m = \sum_{x \in \text{supp}(m)} m(x) \mathbf{1}_{\{x\}} = \sum_{i=1}^n m(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}},$$

où $\text{supp}(m) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathbf{1}_{\{x\}}$ désigne la fonction caractéristique de $\{x\}$.

Remarque 1.6.1 On peut montrer que tout $m \in \mathcal{M}(X)$ s'écrit sous la forme

$$m = \sum_{i=1, m(x_i) > 0}^n m(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}} + \sum_{i=1, m(x_i) < 0}^n m(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{1}_{\{x_i\}} - \mathbf{1}_{\{x'_i\}}).$$

Cette écriture n'est pas unique.

Définition 1.6.2 Soit (X, d_X) un espace métrique. Munissons l'espace des molécules $\mathcal{M}(X)$ de la norme suivante :

$$\|m\|_{\mathcal{M}(X)} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^l |\lambda_j| d(x_j, y_j) : m = \sum_{j=1}^l \lambda_j (\mathbf{1}_{\{x_j\}} - \mathbf{1}_{\{y_j\}}) \right\}.$$

L'espace $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)})$ est un espace normé. Notons $\mathcal{A}(X)$ la complétion de l'espace normé $(\mathcal{M}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{M}(X)})$. Pour tout $x, y \in X$, on définit la molécule m_{xy} par

$$m_{xy} = \mathbf{1}_{\{x\}} - \mathbf{1}_{\{y\}}.$$

Définition 1.6.3 (Voir [3])

- (a) Soit (X, d_X) un espace métrique et E un espace de Banach. Une E -molécule sur X est une fonction $m : X \rightarrow E$ à support fini et satisfaisant $\sum_{x \in X} m(x) = 0$. Désignons par $\mathcal{M}(X; E)$ l'espace vectoriel de tous les E -molécules définies sur X .
- (b) Une E -atome est une fonction de la forme $vm_{xx'}$ où $v \in E, x, x' \in X$. Toute molécule est une somme d'atomes, c'est-à-dire $m = \sum_{j=1}^n v_j m_{x_j x'_j}$.

On définit le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $Lip_0(X; E^*)$ et $\mathcal{M}(X; E)$ par :

$$\langle T, m \rangle = \sum_{x \in X} \langle T(x), m(x) \rangle, \quad m \in \mathcal{M}(X, E), T \in Lip_0(X, E^*).$$

Pour tout atome $m = vm_{x'y'}$ et $T \in Lip_0(X; E^*)$,

$$\begin{aligned} \langle T, m \rangle &= \sum_{x \in X} \langle T(x), v m_{x'y'}(x) \rangle \\ &= \langle T(x'), v m_{x'y'}(x') \rangle + \langle T(y'), v m_{x'y'}(y') \rangle \\ &= \langle T(x') - T(y'), v \rangle. \end{aligned}$$

Dans ce cas, pour $m = \sum_j v_j m_{x_j x'_j}$, on a

$$\langle T, m \rangle = \sum_j \langle T(x_j) - T(x'_j), v_j \rangle. \quad (1.4)$$

1.7 Topologie faible et topologie *-faible

Soit X un espace de Banach. La boule unité de X sera notée B_X . Le dual topologique de X , c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale, est noté X^* . La norme duale est définie par :

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f(x)|.$$

Les éléments de X^* sont généralement notés x^* . Le bidual de X , noté X^{**} , est le dual de X^* (c'est-à-dire $X^{**} = (X^*)^*$). Pour chaque $x \in X$, l'application $x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle$ de X^* dans \mathbb{R} est une forme linéaire continue sur X^* , donc un élément de X^{**} . On écrit souvent $\langle x^*, x \rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

Topologie faible $\sigma(X, X^*)$

La topologie faible sur X est la topologie la moins fine sur X qui rend continues toutes les applications $\varphi \in X^*$. Elle est notée $\sigma(X, X^*)$.

Topologie *-faible $\sigma(X^*, X)$

Pour chaque $x \in X$, on considère l'application $\varphi_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\varphi_x(f) = \langle f, x \rangle \text{ pour } f \in X^*.$$

La topologie *-faible sur X^* est la topologie la moins fine sur X^* qui rend continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in X}$. Elle est notée $\sigma(X^*, X)$. Sur X^* , on définit trois topologies : la topologie forte, la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, et la topologie *-faible $\sigma(X^*, X)$. Remarquons que chaque φ_x est continue en tant que forme linéaire sur X^* (avec la topologie forte) et donc $\varphi_x \in X^{**}$. Par conséquent, φ_x est continue pour la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$, et par définition de la topologie *-faible, on obtient que la topologie *-faible est moins fine que la topologie faible, qui elle-même est moins fine que la topologie forte. L'importance de la topologie *-faible est sans aucun doute contenue dans le théorème de Alaoglu-Banach-Bourbaki (voir [1]).

Théorème 1.7.1. (Alaoglu-Banach-Bourbaki)

L'ensemble $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie *-faible $\sigma(X^*, X)$.

Chapitre 2:

Les opérateurs Lipschitziens (q, p) -mixing

Dans ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans notre travail, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux (voir [7, 2]). Nous rappelons quelques propriétés des opérateurs Lipschitziens p -sommants et nous définissons les opérateurs Lipschitziens (q, p) -mixing.

Convergences forte, faible et faible-*

On a définition des Convergences forte, faible et faible-* . pour plus de détails, voir [1]

Convergence forte . Soit X un espace de Banach (ou de Hilbert), et soit (x_n) une suite dans X . On dit que la suite (x_n) **converge fortement** vers $x \in X$, et on écrit :

$$x_n \rightarrow x \quad \text{fortement}$$

si :

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Convergence faible . Soit X un espace de Banach, et soit (x_n) une suite dans X . On dit que (x_n) **converge faiblement** vers $x \in X$, et on note :

$$x_n \rightharpoonup x$$

si pour tout $f \in X^*$ (le dual de X), on a :

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Convergence faible-* . Soit X un espace de Banach, et soit (f_n) une suite dans X^* . On dit que (f_n) **converge faiblement-*** vers $f \in X^*$, et on écrit :

$$f_n \xrightarrow{*} f$$

si pour tout $x \in X$, on a :

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

2.1 Opérateurs linéaires p -sommants

Rappelons la définition d'un opérateur linéaire p -sommant introduite par Grothendieck pour $p = 1$ dans son mémoire 1955. En 1967, Pietsch était le premier qui a généralisé la notion des opérateurs p -sommants, il a défini la classe des opérateurs p -sommants et a montré quelques propriétés intéressantes, parmi les principaux résultats parus dans [15] on peut trouver les théorèmes de domination, factorisation, les théorèmes d'inclusions...

Définition 2.1.1 Soit $1 \leq p < \infty$. On dit que l'opérateur $u : X \rightarrow Y$ est dit absolu-ment p -sommant ($u \in \Pi_p(X, Y)$) s'il existe une constante positive C telle que pour toute suite finie $(x_i)_{i=1}^n$ de X on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_{\ell_{p,weak}^n(X)} \quad , \quad (2.1)$$

la plus petite constante C vérifiant (2.1), notée $\pi_p(u)$. On note par $(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ la classe des opérateurs p -sommants. Pour $p = \infty$, on a $\Pi_\infty(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Corollaire 2.1.1 (Voir [1]) Pour tout $x \in E$ on a :

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in B_{E^*}} |\langle f, x \rangle|.$$

(le sup est atteint)

Corollaire 2.1.2 Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G^*} = \sup_{x \in B_G} |\langle x, g \rangle|$$

Alors, il existe $f \in E^*$ qui prolonge g telle que :

$$\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$$

Remarque. On définit l'espace des suites faiblement p -sommables. On dit qu'une suite est faiblement p -sommable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^p < +\infty, \quad \forall x^* \in E^*.$$

L'espace des suites faiblement p -sommables noté par $\ell_{p,w}(E)$ est un espace de Banach, où la norme est définie par

$$\|(x_n)\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*, x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le cas $p = \infty$

$$\ell_{\infty,w}(E) = \ell_\infty(E) \quad \text{où} \quad \|(x_n)\|_{\ell_{\infty,w}} = \|(x_n)\|_\infty.$$

Proposition 2.1.1 Soit $u : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Si u est p -sommant. Alors, u est continu.

Preuve. On a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

Il suffit de prendre le cas $n = 1$ dans (2.2). Soient

$$u \in \Pi_p(E, F) \quad \text{et} \quad x \in E$$

donc

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|.$$

En vertu du Corollaire (2.1.1), on constate que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \|x\|$$

qui exprime la continuité de u sur E . Avec l'inégalité intéressante

$$\|u\| \leq \pi_p(u). \quad (2.3)$$

■

Proposition 2.1.2 L'ensemble $\Pi_p(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.

Preuve. Il suffit de démontrer que $\Pi_p(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

1. $\Pi_p(E, F)$ est non vide, car pour $u = 0$ (l'opérateur nul) on a :

$$0 \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}, \quad \forall C > 0.$$

2. Soient u et v des opérateurs p -sommants, où il existe C_1 telle que :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq C_1 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p},$$

et il existe C_2 telle que :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|v(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq C_2 \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}.$$

Si on applique l'inégalité de Minkowski, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(u+v)(x_k)\|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n \|v(x_k)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (2.4)$$

par conséquent

$$u + v \in \Pi_p(E, F).$$

3. Soient u un opérateur p -sommant et α un réel quelconque, donc il existe C telle que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(\alpha u)(x_k)\|^p \right)^{1/p} &= |\alpha| \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq |\alpha| C \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par conséquent

$$(\alpha u) \in \Pi_p(E, F). \quad \blacksquare$$

Théorème 2.1.1 (Théorème d'Inclusion) Si $1 \leq p < q < \infty$. Alors,

$$\Pi_p(E, F) \subseteq \Pi_q(E, F).$$

En plus

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

Preuve. Soient

$$(x_k)_{k=1}^n \subset E \quad \text{et} \quad \lambda_k = \|u(x_k)\|_p^{\frac{q}{p}-1}.$$

Donc

$$\|u(\lambda_k x_k)\|^p = \lambda_k^p \|u(x_k)\|^p = \|u(x_k)\|^q$$

Par suite

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n \|u(\lambda_k x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.6)$$

Si $u \in \Pi_p(E, F)$, on aura

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(\lambda_k x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Moyennant la formule (2.6), on trouve

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^p |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit d'autre part $\alpha = \frac{q}{q-p}$ et $\beta = \frac{q}{p}$. Comme

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{q-p}{q} + \frac{p}{q} = 1,$$

on peut appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k^p)^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En remplaçant λ_k par sa valeur $\|u(x_k)\|_p^{\frac{q}{p}-1}$, on obtient :

$$\leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| (x_k) \|_{q,w}.$$

Multipliant les deux membres par

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

on trouve finalement :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u) \| (x_k) \|_{q,w}. \quad (2.7)$$

Donc

$$u \in \Pi_q(E, F),$$

et d'après (2.7) on a

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u).$$

Théorème 2.1.2 (Théorème de Composition). Soit $1 \leq p < \infty$.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \Pi_p(F, G)$. Alors,

$$v \circ u \in \Pi_p(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(v) \|u\|.$$

2. Si $u \in \Pi_p(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

$$v \circ u \in \Pi_p(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v \circ u) \leq \|v\| \pi_p(u).$$

Preuve. 1. Supposons que

$$v \in \Pi_p(F, G) \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad (x_k)_{k=1}^n \subset E.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(v \circ u)(x_k)\|^p \right)^{1/p} &\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle u(x_k), y^* \rangle|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \pi_p(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, u^*(y^*) \rangle|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \pi_p(v) \|u^*\| \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \left\langle x_k, \frac{u^*(y^*)}{\|u^*\|} \right\rangle \right|^p \right)^{1/p} \\ \text{(la formule (1.1))} \quad &\leq \pi_p(v) \|u\| \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Donc $v \circ u \in \Pi_p(E, G)$, en plus

$$\pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(v) \|u\|.$$

2. Supposons que $u \in \Pi_p(E, F)$ et puisque $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \|(v \circ u)(x_k)\|^p \right)^{1/p} &\leq \|v\| \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|v\| \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on tire que :

$$v \circ u \in \Pi_p(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_p(v \circ u) \leq \pi_p(u) \|v\|.$$

Théorème 2.1.3 (Théorème de Factorisation) Soit l'injection isométrique

$$i : E \longrightarrow C(B_{E^*})$$

$$x \longmapsto i(x) = \langle x, x^* \rangle$$

et l'application identique

$$j_p : C(B_{E^*}) \longrightarrow L_p(B_{E^*}, \mu)$$

avec μ est une mesure de probabilité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u \in \Pi_p(E, F)$.
2. Il existe une mesure de probabilité sur B_{E^*} et une application bornée

$$w : \overline{(j_p \circ i)(E)} = G \longrightarrow F,$$

telle que

$$w \circ j_p \circ i = u.$$

Dans ce cas w est choisie, telle que $\|w\| = \pi_p(u)$.

Preuve. Voir la référence suivante ([8],p.279).

Proposition 2.1.3 π_p est une norme sur l'espace $\Pi_p(E, F)$.

Preuve. Pour tous u et v des opérateurs p -sommants et $(x_k)_{k=1}^n$ une suite d'éléments de E , on a :

1. $\pi_p(u) \geq 0$ (puisque les constantes C sont positives).
2. (a) Si $\pi_p(u) = 0$ donc

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} = 0$$

c'est-à-dire u est nul.

(b) Si l'opérateur nul vérifie (2.1). Alors,

$$0 \leq C \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle| \quad \forall x \in E.$$

Il est clair que la borne inférieure des nombres C est 0, donc $\pi_p(0) = 0$.

3. Soit α un réel quelconque, on va montrer que $\pi_p(\alpha u) = |\alpha| \pi_p(u)$. Comme $u \in \Pi_p(E, F)$, on a

$$\begin{aligned} \pi_p(\alpha u) &= \inf(|\alpha|C) \\ &= |\alpha| \inf C \\ &= |\alpha| \pi_p(u). \end{aligned}$$

4. Soient u et v des opérateurs p -sommants, on a :

$$\pi_p(u + v) \leq \pi_p(u) + \pi_p(v).$$

■

Proposition 2.1.4 $(\Pi_p(E, F), \pi_p)$ est un espace de Banach.

Preuve. Montrons que si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy de $\Pi_p(E, F)$, alors elle converge dans le même espace. On a :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_0, \quad \forall i > j \geq j_0, \quad \pi_p(u_j - u_i) \leq \epsilon,$$

donc, pour toute suite finie $(x_k)_{k=1}^n$ d'éléments de E on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(u_j)(x_k) - (u_i)(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq \epsilon \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}.$$

Si $i \rightarrow +\infty$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(u_j)(x_k) - u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq \epsilon \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \quad (2.9)$$

Et puisque $\Pi_p(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$, on trouve $u_j \rightarrow u$ dans $\mathcal{L}(E, F)$, et d'après l'inégalité (2.9)

$$u_j \rightarrow u \quad \text{dans} \quad \Pi_p(E, F).$$

■

Proposition 2.1.5 (Propriété d'idéal) Si

$$u \in \mathcal{L}(F, F_0), \quad \text{et} \quad w \in \mathcal{L}(E_0, E),$$

Alors,

$$v \in \Pi_p(E, F) \implies uvw \in \Pi_p(E_0, F_0).$$

Proposition 2.1.6 (Propriété d'injectivité) Si F un sous-espace de F_0 et soit l'isométrie

$$i : F \rightarrow F_0.$$

Alors,

$$u \in \Pi_p(E, F) \iff i \circ u \in \Pi_p(E, F_0).$$

En plus,

$$\pi_p(i \circ u) = \pi_p(u).$$

Preuve.

* Le premier sens est immédiatement tiré d'après la composition et on a :

$$\pi_p(i \circ u) \leq \pi_p(u). \quad (2.10)$$

* Soit $i \circ u \in \Pi_p(E, F_0)$, donc pour toute suite $(x_k)_{k=1}^n \subset E$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(i \circ u)(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq \pi_p(i \circ u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}.$$

Mais, et comme

$$\left(\sum_{k=1}^n \|(i \circ u)(x_k)\|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p},$$

donc

$$\left(\sum_{k=1}^n \|u(x_k)\|^p \right)^{1/p} \leq \pi_p(i \circ u) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}.$$

c'est-à-dire

$$u \in \Pi_p(E, F).$$

en plus, on a :

$$\pi_p(u) \leq \pi_p(i \circ u). \quad (2.11)$$

En vertu de (2.11) et (2.10) on trouve

$$\pi_p(i) = \pi_p(u).$$

■

Proposition 2.1.7 Soient $1 \leq p, q < \infty$ et $u \in \Pi_p(E, F)$ et $v \in \Pi_q(F, G)$ et

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

1. Si $s \geq 1$. Alors,

$$v \circ u \in \Pi_s(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_s(v \circ u) \leq \pi_q(v)\pi_p(u).$$

2. Si $s \leq 1$. Alors,

$$v \circ u \in \Pi_1(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_1(v \circ u) \leq \pi_q(v)\pi_p(u).$$

Preuve. 1). Si $s \geq 1$. Comme $u \in \Pi_p(E, F)$, donc il existe d'après le Théorème de Factorisation (2.1.3), une application bornée w sur $G = \overline{(j_p \circ i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu)$, telle que

$$u = w \circ j_p \circ i.$$

Soit $y^* \in F^*$, donc

$$y^* \circ w : \overline{(j_p \circ i)(E)} \subset L_p(B_{E^*}, \mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

cette application est continue. Moyennant le Corollaire (1.7.1) du Théorème de Hahn-Banach, on constate qu'on peut prolonger cette application sur tout l'espace $L_p(B_{E^*}, \mu)$ par une application continue g et telle que :

$$\|g\|_{p^*} = \|y^* \circ w\|_{p^*} \leq \pi_p(u)\|y^*\|. \quad (2.12)$$

Remarquons d'une part que

$$g \in L_p(B_E, \mu),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} w^* : F^* &\longrightarrow G^* \subset L_p(B_{E^*}, \mu) \\ y^* &\longrightarrow w^*(y^*) = g. \end{aligned}$$

On peut conclure que

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y^* \rangle &= \langle (w \circ j_p \circ i)(x), y^* \rangle \\
&= \langle (j_p \circ i)(x), w^*(y^*) \rangle \\
&= \int_{B_{E^*}} \langle x, x^* \rangle g(x^*) d\mu(x^*) \quad \forall x \in E.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} &\implies \frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1 \\
\frac{p^*}{s^*} + \frac{p^*}{q} &= \frac{p}{p-1} + \frac{p}{p-1} \\
&= \frac{p(s-1)}{s(p-1)} + \frac{p}{q(p-1)} \\
&= \frac{p(s-1)}{s(p-1)} + \frac{p}{(p-1)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{p} \right) \\
&= \frac{ps}{s(p-1)} - \frac{p}{s(p-1)} + \frac{p}{s(p-1)} - \frac{1}{p-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

En se basant sur l'inégalité de Hölder, l'inégalité (2.13) implique :

$$\begin{aligned}
|\langle u(x), y^* \rangle| &\leq \int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^{\frac{s}{p}} |\langle x, x^* \rangle|^{\frac{s}{q}} |g(x^*)| d\mu(x^*) \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^{\frac{qp^*}{q}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^{\frac{qp^*}{q}} |g(x^*)|^{\frac{(p^*)^2}{q}} |g(x^*)|^{\frac{(p^*)^2}{p^*}} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{q}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Soit la suite $(x_k)_{k=1}^n \in E$, et on pose

$$z_k = x_k \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{-\frac{1}{p}}; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Avec cette notation, le système précédent s'écrit

$$\begin{aligned}
|\langle u(z_k), y^* \rangle| &\leq \left(\int_{B_{E^*}} |\langle z_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle z_k, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{q}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{s^*}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{-s}{p^2}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{-s}{pq}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
|\langle u(z_k), y^* \rangle|^q &\leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{q}{p^*}} \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \times \\
&\quad \times \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{p^*}{p^*} - \frac{s}{p} + \frac{s}{p}}.
\end{aligned}$$

Mais, par hypothese on a

$$\begin{aligned}
\frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1 &\Rightarrow \frac{q}{p} = \frac{q}{s} - 1 \\
\Rightarrow \frac{-sq}{p^2} = \frac{-s}{p} \left(\frac{q}{s} - 1 \right) &= -\frac{q}{p} + \frac{s}{p} \\
\Rightarrow \frac{-sq}{p^2} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p} &= -\frac{q}{p} + \frac{s}{p} - \frac{s}{p} + \frac{q}{p} = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Donc

$$|\langle u(z_k), y^* \rangle|^q \leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{q}{p^*}} \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*).$$

Par sommation des deux membres, on aboutit a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n |\langle u(z_k), y^* \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{k=1}^n \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{B_{E^*}} \sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{q}} \times \\
&\quad \times \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B_{E^*}} |g(x^*)|^{p^*} d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p^*} + \frac{1}{q}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|g\|_{p^*} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Comme $v \in \Pi_q(F, G)$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n \|v \circ u(x_k)\|^s \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\|v \circ u(z_k)\|^s \left(\int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{s}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\quad \left(\text{Hölder } \frac{s}{q} + \frac{s}{p} = 1 \right) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^n \|v \circ u(z_k)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n \int_{B_{E^*}} |\langle x_k, x^* \rangle|^s d\mu(x^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle u(z_k), y^* \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v) \sup_{y^* \in B_{F^*}} \left(\|g\|_{p^*} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{q}} \right) \times \\
&\quad \times \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{y^* \in B_{F^*}} \|g\|_{p^*} \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_q(v) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{s}} \sup_{y^* \in B_{F^*}} \|g\|_{p^*}
\end{aligned}$$

à l'aide de (2.12)

$$\leq \pi_q(v) \sup_{x^* \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, x^* \rangle|^s \right)^{\frac{1}{s}} \pi_p(u).$$

Ce qui exprime que

$$v \circ u \in \Pi_s(E, G) \quad \text{et} \quad \pi_s(v \circ u) \leq \pi_p(u) \pi_q(v).$$

2). Si $s \leq 1$.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p^*}$$

C'est-à-dire

$$1 \leq q \leq p^* < \infty.$$

Par l'application du Théorème d'inclusion (2.1.1), on tire que

$$v \in \Pi_{p^*}(F, G) \quad \text{et} \quad \pi_{p^*}(v) \leq \pi_q(v).$$

D'autre part on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. On applique la première partie de cette démonstration avec :

$$p^* = q \quad \text{et} \quad s = 1.$$

On trouve :

$$v \circ u \in \Pi_1(E, G).$$

Et d'après la dernière inégalité

$$\pi_1(v \circ u) \leq \pi_p(u)\pi_q(v).$$

■

2.2 Opérateurs Lipschitziens p -sommants

Nous présentons ici la version non linéaire d'opérateurs p -sommants (Voir [7]) que nous appelons les opérateurs Lipschitziens p -sommants. Puis nous présentons le théorème de domination/factorisation de Pietsch et quelques propriétés sur ces opérateurs. Soit (X, d_X) un espace métrique pointé. La boule unité $B_{X^\#}$ de $X^\#$ est compacte pour la topologie de convergence simple de X .

Définition 2.2.1 Une application de Lipschitz $T : X \rightarrow E$ est dite de Lipschitz p -sommant ($1 \leq p < \infty$), s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$, et $\forall (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}^+$, on ait

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i d(T(x_i), T(y_i))^p \leq C^p \sup_{f \in X^\#} \sum_{i=1}^n \alpha_i |f(x_i) - f(y_i)|^p. \quad (2.1)$$

La classe des opérateurs Lipschitziens p -sommants de X dans Y est notée par $\Pi_p^L(X, Y)$. Muni de la norme

$$\pi_p^L(T) = \inf\{C : C \text{ vérifiant l'inégalité (2.1)}\}.$$

Théorème 2.2.1 Soit $1 \leq p < \infty$ et T un opérateur linéaire borné de E dans F . Alors

$$\pi_p^L(T) = \pi_p(T).$$

Preuve. Voir la référence suivante ([7], Théorème 2)

Remarque 2.2.1 Dans la définition, on peut prendre les $\alpha_i = 1$ d'où $Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$, pour tout $T \in \Pi_p^L(X, Y)$.

Proposition 2.2.1 (Propriété d'idéal) Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $v : E \rightarrow X, w : Y \rightarrow F$ des fonctions de Lipschitz et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur Lipschitz p -sommant. Alors l'opérateur wTv est Lipschitz p -sommant et

$$\pi_p^L(wTv) \leq Lip(w)\pi_p^L(T)Lip(v).$$

Preuve. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n} \subset E$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(wTv(x_i), wTv(y_i))^p &\leq \text{Lip}(w)^p \sum_{i=1}^n d(Tv(x_i), Tv(y_i))^p \\ &\leq \text{Lip}(w)^p \pi_p^L(T) \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n |f(v(x_i)) - f(v(y_i))|^p \\ &\leq \text{Lip}(w)^p \pi_p^L(T) \text{Lip}(v)^p \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(v(x_i))}{\text{Lip}(v)} - \frac{f(v(y_i))}{\text{Lip}(v)} \right|^p \\ &\leq \text{Lip}(w)^p \pi_p^L(T) \text{Lip}(v)^p \sup_{g \in B_{E^\#}} \sum_{i=1}^n |g(v(x_i)) - g(v(y_i))|^p. \end{aligned}$$

D'où

$$wTv \in \pi_p^L(E, F) \text{ et } \pi_p^L(wTv) \leq \text{Lip}(w) \pi_p^L(T) \text{Lip}(v). \blacksquare$$

Proposition 2.2.2 (Injectivité) L'espace (Π_p^L, π_p^L) est injectif.

Preuve. Soient $i : E \hookrightarrow F$ l'injection linéaire métrique, et $T \in \text{Lip}_0(X, E)$ tel que $i \circ T \in \Pi_p^L(X, E)$. Puisque i est une injection, pour $(x_i)_{i \leq n}, (y_i)_{i \leq n} \subset X$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n \|iT(x_i) - iT(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p^L(iT) \sup_{f \in B_{X^\#}} \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $T \in \Pi_p^L(X, E)$ et $\pi_p^L(T) \leq \pi_p^L(iT)$. La propriété d'idéal donne l'inégalité inverse, et donc $\pi_p^L(T) = \pi_p^L(i \circ T)$. Cela montre que Π_p^L est injective. \blacksquare

Le théorème suivant donne la caractérisation des opérateurs Lipschitz p -sommants. Rappelons qu'un espace métrique Z est injectif si pour tout sous-espace F_0 d'un espace métrique F et pour tout $w \in \text{Lip}(F_0, Z)$, w admet un prolongement $\tilde{w} \in \text{Lip}(F, Z)$ avec $\text{Lip}(w) = \text{Lip}(\tilde{w})$.

Théorème 2.2.2 Soient $1 \leq p < \infty$, $C > 0$ et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur entre les espaces métriques X et Y . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) L'opérateur T est Lipschitz p -sommants et $\pi_p^L(T) \leq C$.
- (b) Il existe une mesure de probabilité régulière μ sur $B_{X^\#}$ telle que :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq C \left(\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(y)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Théorème de Domination de Pietsch)

- (c) Pour toute isométrie J de Y dans un espace injectif Z , le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J} & Z \\ A \downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(B_{X^\#}, \mu) & & \xrightarrow{J_P} & & L_p(B_{X^\#}, \mu) \end{array}$$

avec $\text{Lip}(A)\text{Lip}(B) \leq C$. **(Théorème de Factorisation)**

Théorème 2.2.3 (Théorème d'inclusion) Soient X, Y des espaces métriques et $1 \leq p < q < +\infty$. Alors

$$\pi_p^L(X, Y) \subset \pi_q^L(X, Y)$$

et

$$\pi_q^L(T) \leq \pi_p^L(T) \quad \text{pour tout } T \in \pi_p^L(X, Y).$$

2.3 Opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing

Définition 2.3.1 Soit $1 \leq p, q \leq \infty$. On dit que l'opérateur $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitz (q, p) -mixing avec constante k , si pour tout espace métrique Z et tout opérateur Lipschitz q -sommant $S : Y \rightarrow Z$, la composition $S \circ T$ est un opérateur Lipschitz p -sommant et

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq k\pi_q^L(S).$$

La plus petite constante k sera notée $m_{q,p}^L(T)$. On note $M_{q,p}^L(X, Y)$ l'espace des opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing.

Remarque 2.3.1 Pour tout $T \in M_{q,p}^L(X, Y)$, on a

$$Lip(T) \leq \pi_p^L(T) \leq m_{q,p}^L(T). \quad (2.2)$$

Exemple 2.3.1 Un premier exemple apparaît déjà dans [2], où un résultat non linéaire de Grothendieck est prouvé. C'est-à-dire, l'opérateur Lipschitz T d'un espace métrique X dans un espace de Hilbert H est Lipschitz 1-sommant et en fait

$$\pi_1^L(S \circ T) \leq k_G Lip(T),$$

où k_G est la constante de Grothendieck. Ce résultat implique que l'identité sur X est $(2, 1)$ -mixing avec cette constante.

Preuve. En effet, soient Y un espace métrique et $S : X \rightarrow Y$ Lipschitz 2-sommant. Alors, d'après le théorème de factorisation, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{S} & Y & \xrightarrow{J} & Z \\ A \downarrow & & & & \uparrow B \\ L_\infty(B_{X^\#}, \mu) & & \xrightarrow{J_2} & & L_2(B_{X^\#}, \mu) \end{array}$$

Comme $J_2 \circ A$ est un opérateur de X dans l'espace de Hilbert L_2 , alors $J_2 \circ A$ est Lipschitz 1-sommant et $\pi_1^L(J_2 \circ A) \leq k_G Lip(A)$. Donc, d'après la propriété d'idéal et l'injectivité, on trouve

$$\pi_1^L(S \circ I_X) = \pi_1^L(J \circ S \circ I_X) = \pi_p^L(B \circ (J_2 \circ A) \circ I_X) \leq K_G Lip(A) Lip(B).$$

Ce qui implique que

$$\pi_1^L(S \circ I_X) \leq k_G \pi_2^L(S).$$

D'où I_X est $(2, 1)$ -mixing. ■

Lemme 2.3.1 Pour montrer que $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitz (q, p) -mixing, il suffit de considérer sa composition avec des opérateurs de Y dans ℓ_q (ou tout autre espace L_q de dimension infinie).

Preuve. Premièrement, nous pouvons supposer sans perte de généralité que X et Y sont des espaces métriques finis. Maintenant, supposons que

$$\pi_p^L(R \circ T) \leq C\pi_q^L(R) \quad \text{pour tout } R : Y \rightarrow \ell_q. \quad (2.3)$$

Soit $S : Y \rightarrow Z$ une application Lipschitz q -sommant. Soit $J : Z \rightarrow W$ l'injection isométrique de l'espace métrique Z dans l'espace 1-injectif W . Par le théorème de factorisation pour les opérateurs Lipschitz q -sommants, on a

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\ell_{\infty,q}} & L_q(\mu) \\ \uparrow A & & \uparrow B \\ Y & \xrightarrow{S} & Z \xrightarrow{J} W \end{array}$$

avec $Lip(A)Lip(B) = \pi_q^L(S)$. Puisque Y est un ensemble fini, le rang de $I_{\infty,q} \circ A$ est un sous-ensemble fini de $L_q(\mu)$ et donc est presque isométrique à un sous-ensemble de ℓ_q . On a donc $I_{\infty,q} \circ A$ est une application de Lipschitz de Y dans ℓ_q , alors la condition (2.3) donne

$$\pi_p^L(I_{\infty,q} \circ A \circ T) \leq C\pi_q^L(I_{\infty,q} \circ A).$$

D'après la propriété d'idéal pour les applications de Lipschitz q -sommants, on a

$$\pi_q^L(I_{\infty,q} \circ A) \leq CLip(A)\pi_q^L(I_{\infty,q}) = CLip(A).$$

Alors que la propriété d'idéal pour les applications de Lipschitz p -sommants nous donne

$$\begin{aligned} \pi_p^L(J \circ S \circ T) &= \pi_p^L(B \circ I_{\infty,q} \circ A \circ T) \\ &\leq Lip(B)\pi_q^L(I_{\infty,q} \circ A \circ T) \\ &\leq Lip(B)CLip(A) \\ &= C\pi_q^L(S). \end{aligned}$$

Comme J est une injection isométrique, on a

$$\pi_p^L(J \circ S \circ T) = \pi_p^L(S \circ T).$$

Donc nous concluons que

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq C\pi_q^L(S).$$

C'est-à-dire que T est Lipschitz (q, p) -mixing. ■

La propriété d'idéal pour les opérateurs Lipschitz p -sommants donne :

Proposition 2.3.1 Pour tout opérateur T , on a

$$(1) \quad m_{q,p}^L(T) = Lip(T) \quad \text{pour tout } q \geq p.$$

$$(2) \quad m_{\infty,p}^L(T) = \pi_p^L(T).$$

Donc, dans ce cas, la seule possibilité qui donne quelque chose de nouveau est $q \geq p$.

Preuve.

1) Il suffit de montrer que $m_{q,p}^L(T) \leq Lip(T)$. Si $q \geq p$, alors $\Pi_q^L(X, Y) \subset \Pi_p^L(X, Y)$ et $\pi_p^L(R) \leq \pi_q^L(R)$ pour tout $R \in \Pi_q$. Donc pour tout $T \in m_{q,p}^L(T)$, on a

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq \pi_q^L(S \circ T) \leq Lip(T)\pi_q^L(S).$$

Ce qui implique que

$$m_{q,p}^L(T) \leq Lip(T).$$

2) Il suffit de montrer que $m_{\infty,p}^L(T) \leq \pi_p^L(T)$. Soit $T \in \Pi_p^L(X, Y)$, alors pour tout espace métrique Z et $S \in \Pi_\infty^L(Y, Z) = Lip(Y, Z)$, on a

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq Lip(S)\pi_p^L(T) = \pi_p^L(T)\pi_\infty^L(S).$$

D'où

$$m_{\infty,p}^L(T) \leq \pi_p^L(T). \quad \blacksquare$$

Proposition 2.3.2 Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $B : E \rightarrow X$, $A : Y \rightarrow F$ des fonctions de Lipschitz et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur Lipschitz (q, p) -mixing. Alors l'opérateur $A \circ T \circ B$ est Lipschitz (q, p) -mixing et

$$m_{q,p}^L(A \circ T \circ B) \leq Lip(A)m_{q,p}^L(T)Lip(B).$$

Preuve. Soient X, Y, E, F des espaces métriques. Soit $B : E \rightarrow X$, $A : Y \rightarrow F$ des fonctions de Lipschitz et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur Lipschitz (q, p) -mixing. D'après la définition des opérateurs (q, p) -mixing, on obtient

$$\begin{aligned} \pi_p(S \circ (A \circ T \circ B)) &= \pi_p((S \circ A \circ T) \circ B) \\ &\leq \pi_p(S \circ A \circ T)Lip(B) \\ &\leq \pi_p^L(S \circ A)m_q^L(T)Lip(B) \\ &\leq Lip(A)\pi_p^L(S)m_q^L(T)Lip(B). \end{aligned}$$

D'où

$$m_{q,p}^L(A \circ T \circ B) \leq Lip(A)m_{q,p}^L(T)Lip(B). \quad \blacksquare$$

Proposition 2.3.3 Soient X, Y et Z des espaces métriques et $p, q, r \in [1, \infty]$. Si $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitz (p, r) -mixing et $S : Y \rightarrow Z$ est Lipschitz (q, p) -mixing, alors la composition $S \circ T$ est Lipschitz (q, r) -mixing et

$$m_{q,r}^L(S \circ T) \leq m_{q,p}^L(S)m_{p,r}^L(T).$$

Proposition 2.3.4 Soient X, Y des espaces métriques. Soit $T \in M_{q_2, p_2}^L(X, Y)$. Si $p_1 \leq p_2$ et $q_1 \geq q_2$, alors

$$M_{q_2, p_2}^L(X, Y) \subset M_{q_1, p_1}^L(X, Y).$$

et

$$m_{q_2, p_2}^L(T) \leq m_{q_1, p_1}^L(T), \text{ pour tout } q_1 \geq q_2 \text{ et } p_2 \geq p_1.$$

Preuve. Soient X, Y des espaces métriques. Soient $T : X \rightarrow Y$ et $S : Y \rightarrow Z$ des applications Lipschitz (q, p) -mixing. On a :

$$\begin{aligned} M_{q_1, p_1}^L(X, Y) &\subset M_{q_2, p_2}^L(X, Y) \\ \pi_{p_1}^L(S \circ T) &\leq m_{q_1, p_1}^L(T) \pi_{q_1}^L(S) \\ &\leq m_{q_1, p_1}^L(T) \pi_{q_2}^L(S), \text{ pour } q_1 \geq q_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi_{p_2}^L(S \circ T) &\leq \pi_{p_1}^L(S \circ T) \\ &\leq m_{q_1, p_1}^L(T) \pi_{q_2}^L(S), \text{ pour } p_2 \geq p_1 \\ \pi_{p_2}^L(S \circ T) &\leq m_{q_1, p_1}^L(T) \pi_{q_2}^L(S). \end{aligned}$$

D'où

$$M_{q_2, p_2}^L(X, Y) \subset M_{q_1, p_1}^L(X, Y)$$

et

$$m_{q_2, p_2}^L(T) \leq m_{q_1, p_1}^L(T), \text{ pour tout } q_1 \geq q_2 \text{ et } p_2 \geq p_1.$$

Théorème 2.3.1 Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Alors toute application Lipschitz p -sommante $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitz (q, p) -mixing et vérifie

$$m_{q, p}^L(T) \leq \pi_p^L(T)^{p/r} \text{Lip}(T)^{p/q}.$$

Preuve. Le fait que T soit (q, p) -mixing découle immédiatement de la propriété d'idéal des opérateurs Lipschitz p -sommants. Soient maintenant $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in X$. Pour toute mesure de probabilité μ sur $B_{Y^\#}$, de l'inégalité ponctuelle $|g(y) - g(y')| \leq \text{Lip}(g)d(y, y')$ pour tout $y, y' \in Y$ et $g \in Y^\#$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^q d\mu(g) \right)^{p/q} \right]^{1/p} \\ &\leq \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^p d\mu(g) \right)^{p/q} d(Tx_j, Tx'_j)^{(q-p)p/q} \right]^{1/p}. \end{aligned} \quad (1)$$

En remarquant que $(q - p)r/q = p$, l'inégalité de Hölder permet de majorer cette dernière expression par

$$\left[\sum_{j=1}^n \int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^p d\mu(g) \right]^{1/q} \left[\sum_{j=1}^n d(Tx_j, Tx'_j)^p \right]^{1/r}. \quad (2)$$

D'une part, le fait que T soit Lipschitz p -sommante implique que

$$\left[\sum_{j=1}^n d(Tx_j, Tx'_j)^p \right]^{1/r} \leq \pi_p^L(T)^{p/r} \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x'_j)|^p \right]^{1/r} \quad (3)$$

et d'autre part, une simple estimation ponctuelle donne

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j=1}^n \int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^p d\mu(g) \right]^{1/q} \\ & \leq \text{Lip}(T)^{p/q} \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x'_j)|^p \right]^{1/q} \end{aligned} \quad (4)$$

En combinant (1), (2), (3) et (4), on obtient

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^q d\mu(g) \right)^{p/q} \right]^{1/p} \\ & \leq \pi_p^L(T)^{p/r} \text{Lip}(T)^{p/q} \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x'_j)|^p \right]^{1/p} \end{aligned}$$

■

Chapitre 3:

Caractérisations

Nous présentons ici trois caractérisations différentes des opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing, toutes inspirées par des résultats analogues dans le cas linéaire.

3.1 Domination

La première caractérisation est proche dans l'esprit de la caractérisation des opérateurs Lipschitz p -sommant par le théorème de domination (Voir [2]).

Théorème 3.1.1 Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $T : X \rightarrow Y$ un opérateur Lipschitzien et $C \geq 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. T est Lipschitz (q, p) -mixing avec $m_{q,p}^L(T) \leq C$.
2. Pour toute probabilité μ sur $B_{Y^\#}$, il existe une probabilité ν sur $B_{X^\#}$ telle que, pour tout $x, x' \in X$ on ait

$$\left[\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx) - g(Tx')|^q d\mu(g) \right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(x')|^p d\nu(f) \right]^{\frac{1}{p}}$$

3. Pour tout $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in X$ et $g_1, \dots, g_n \in Y^\#$,

$$\left[\sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^n |g_k(Tx_j) - g_k(Tx'_j)|^q \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \left[\sum_{k=1}^n \text{Lip}(g_k)^q \right]^{\frac{1}{q}} \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^m |f(x_j) - f(x'_j)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

4. Pour tout $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in X$ et toute probabilité μ sur $B_{Y^\#}$,

$$\left[\sum_{j=1}^m \left[\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^q d\mu(g) \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^m |f(x_j) - f(x'_j)|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dans ce cas, $m_{q,p}^L(T)$ est égal à l'infimum de ces constantes C dans soit (2), (3) et (4).

Preuve. Le cas $q = \infty$ se réduit au théorème de domination pour les opérateurs Lipschitz p -sommants (d'après la Proposition 2.2.1), donc on va supposer que $1 \leq p \leq q < \infty$.

(1) \implies (2) Supposons que $T : X \rightarrow Y$ est Lipschitz (q, p) -mixing et soit μ une mesure de probabilité sur $B_{Y^\#}$. L'inclusion canonique $j_\mu : C(k) \rightarrow L_q(\mu)$ est un opérateur Lipschitz q -sommant de norme $\pi_q^L(j_\mu) \leq 1$. Donc, la composition $j_\mu \circ T$ est Lipschitz p -sommante. Par le théorème de domination de Pietsch pour les opérateurs Lipschitziens p -sommants, il existe une mesure de probabilité ν sur $B_{X^\#}$ telle que pour tout $x, x' \in X$,

$$\|j_\mu \circ T(x) - j_\mu \circ T(x')\|_{L_q(\mu)} \leq \pi_p^L(j_\mu \circ T) \left[\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(x')|^p d\nu(f) \right]^{\frac{1}{p}}$$

i.e.,

$$\left[\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx) - g(Tx')|^q d\mu(g) \right]^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p^L(j_\mu \circ T) \left[\int_{B_{X^\#}} |f(x) - f(x')|^p d\nu(f) \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, on a la condition (2) avec

$$\pi_p^L(j_\mu \circ T) \leq m_{q,p}^L(T) \pi_q^L(j_\mu) \leq m_{q,p}^L(T).$$

(2) \implies (3) On peut supposer sans perte de généralité que

$$\sum_{k=1}^n \text{Lip}(g_k)^q = 1.$$

Alors $\mu := \sum_{k=1}^n \text{Lip}(g_k)^q \delta_{g_k / \text{Lip}(g_k)}$ (où δ_g est la mesure de Dirac en $g \in Y^\#$) est une

mesure de probabilité sur $B_{Y^\#}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left[\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx) - g(Tx')|^q d\mu(g) \right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^n \text{Lip}(g_k)^q \left| \frac{g_k}{\text{Lip}(g_k)}(Tx_j) - \frac{g_k}{\text{Lip}(g_k)}(Tx'_j) \right|^q \right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^n \frac{\text{Lip}(g_k)^q}{\text{Lip}(g_k)^q} |g_k(Tx_j) - g_k(Tx'_j)|^q \right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^n |g_k(Tx_j) - g_k(Tx'_j)|^q \right]^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Alors, d'après la condition (2) on a

$$\begin{aligned} & \leq C^p \sum_{j=1}^m \int_{B_{Y^\#}} |f(x) - f(x')|^p d\nu(f) \\ & \leq C^p \sum_{j=1}^m |f(x) - f(x')|^p. \end{aligned}$$

Donc on a la condition (3) avec la même constante C .

(3) \implies (4) La condition (3) signifie que toutes les mesures de probabilité μ à support fini sur $B_{Y^\#}$ satisfont l'inégalité (3.1). Puisque l'ensemble de toutes les mesures de probabilité à support fini sur $B_{Y^\#}$ est $\sigma(C(B_{Y^\#})^*, C(B_{Y^\#}))$ dense dans l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur $B_{Y^\#}$, alors l'inégalité (3.1) est satisfaite pour toute mesure de probabilité μ sur $B_{Y^\#}$.

(4) \implies (3) Soit $S : Y \rightarrow Z$ est Lipschitz q -sommant. D'après le théorème de domination, il existe une mesure μ telle que pour tous $y, y' \in Y$

$$d_Z(S(y), S(y'))^p \leq \pi_q^L(S)^p \left[\int_{B_{Y^\#}} |g(y) - g(y')|^q d\mu(g) \right]^{\frac{p}{q}}$$

On fixe $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in X$. Alors, d'après l'inégalité précédente,

$$\left[\sum_{j=1}^m d_Z(S(Tx_j) - (S(Tx'_j)))^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \pi_q^L(S) \left[\sum_{j=1}^m \left[\int_{B_{Y^\#}} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^q d\mu(g) \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

Avec (3.1), on obtient

$$\left[\sum_{j=1}^m d_Z(S(Tx_j) - (S(Tx'_j)))^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C \pi_q^L(S) \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^m |f(x) - f(x')|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Donc $S \circ T$ est Lipschitz p -sommant et

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq C \pi_q^L(S).$$

D'où T est Lipschitz (q, p) -mixing et

$$m_{q,p}^L(T) \leq C.$$

■

3.2 Les suites (q, p) -mixing

Les opérateurs linéaires (q, p) -mixing ont été données par Pietsch (Voir [15]). Parce qu'un opérateur linéaire est (q, p) -mixing si et seulement si l'opérateur linéaire transforme les suites faiblement p -sommables en des suites (q, p) -mixing. Le résultat analogue dans le cas Lipschitzien découlera par le théorème précédent, car nous trouvons une contrepartie non linéaire appropriée de suite (q, p) -mixing. Nous utiliserons le lemme de Ky Fan minimax voir ([15], Lemme E.4.2).

Une famille \mathcal{A} de fonctions réelles définies sur un ensemble K est appelée concave si donnée $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{A}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tel que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, il existe $\phi \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\phi(x) \geq \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(x)$ pour tout $x \in K$.

Maintenant nous prouvons un résultat analogue à [[15], Thm. 16.4.3].

Proposition 3.2.1 Soit $1 \leq p \leq q < \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Pour tous points $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in X$,

$$\sup \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \left[\int_{B_{X^\#}} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f) \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} : \mu \text{ est une probabilité sur } B_{X^\#} \right\} \quad (3.2)$$

$$= \inf \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \sup_{f \in B_{X^\#}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-q} |f(x_j) - f(x'_j)|^q \right]^{\frac{1}{q}} : \lambda_j > 0 \right\}$$

Preuve. On définit σ le supremum du côté gauche (3.2) (on note qu'il est fini). Soit $u = \frac{r}{p}$ et $v = \frac{q}{p}$, donc $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$. Nous considérons maintenant le compact, sous-ensemble convexe

$$K = \left\{ \xi = (\xi_j)_{j=1}^n : \sum_{j=1}^n \xi_j^u \leq \sigma^p \text{ et } \xi_j \geq 0 \right\} \subset \ell_u^n$$

Pour $\varepsilon > 0$ et μ une probabilité sur $B_{X^\#}$, l'équation

$$\phi(\xi) = \sum_{j=1}^n (\xi_j + \varepsilon)^{-v} \int_{B_{X^\#}} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f)$$

définit une fonction convexe continue ϕ sur K . On prend le vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec

$$\xi_j = \left(\int_{B_{X^\#}} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{uv}}.$$

Alors $\xi \in K$ et $\phi(\xi) \leq \sigma^p$. Puisque la famille \mathcal{A} de toutes les fonctions ϕ obtenue de cette manière est concave, d'après le lemme de Ky Fan, nous pouvons trouver $\xi^0 \in K$ tel que $\phi(\xi^0) \leq \sigma^p$ pour tous $\phi \in \mathcal{A}$. En particulier, considérant la mesure de Dirac δ_f en $f \in B_{X^\#}$ nous obtenons

$$\sum_{j=1}^n (\xi_j^0 + \varepsilon)^{-v} |f(x_j) - f(x'_j)|^q \leq \sigma^p.$$

On pose $\lambda_j(\varepsilon) := (\xi_j^0 + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$. Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j(\varepsilon)^r \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\sum_{j=1}^n \xi_j^{\frac{1}{r}} \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\sum_{j=1}^n \xi_j^u \right]^{\frac{1}{r}} \leq \sigma^{\frac{p}{r}} = \sigma^{\frac{1}{u}}$$

et, pour $f \in B_{X^\#}$, on a

$$\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j(\varepsilon)^{-q} |f(x_j) - f(x'_j)|^q \right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{j=1}^n (\xi_j^0 + \varepsilon)^{-v} |f(x_j) - f(x'_j)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leq \sigma^{\frac{p}{q}} = \sigma^{\frac{1}{v}}.$$

Donc, le côté droit de (3.2) est inférieur ou égal au côté gauche.

Inversement, soit $\lambda_j > 0$ est arbitraire. Par l'inégalité de Hölder pour toute mesure de probabilité μ sur B_{X^*} nous avons

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{j=1}^n \left[\int_{B_{X^{\#}}} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f) \right]^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\sum_{j=1}^n \left[\lambda_j \left(\int_{B_{X^{\#}}} \lambda_j^{-q} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p \right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=1}^n \int_{B_{X^{\#}}} \lambda_j^{-q} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \left(\int_{B_{X^{\#}}} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{-q} |f(x_j) - f(x'_j)|^q d\mu(f) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-q} |f(x_j) - f(x'_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Le Théorème 3.1.1 et la Proposition 3.2.1 nous donnent immédiatement une autre caractérisation des opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing, indiquée ci-dessous.

Corollaire 3.2.1 : Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Un opérateur de Lipschitz $T : X \rightarrow Y$ est (q, p) -mixing si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in X$, on ait

$$\begin{aligned}
& \inf \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^r \right]^{\frac{1}{r}} \sup_{g \in B_{Y^{\#}}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-q} |g(Tx_j) - g(Tx'_j)|^q \right]^{\frac{1}{q}} : \lambda_j > 0 \right\} \\
& \leq C \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \left[\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x'_j)|^p \right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, $m_{q,p}^L(T)$ égale à l'infimum des constantes C .

3.3 La norme de Chevet-Saphar et opérateurs Lipschitz (q, p) -mixing

Soient $(\lambda_j)_j \subset \mathbb{R}$, $(x_j)_j$ et $(x'_j)_j$ dans X , on définit

$$w_p^{\text{Lip}}((\lambda_j, x_j, x'_j)_j) := \sup_{f \in B_{X^\#}} \left\| (\lambda_j |f(x_j) - f(x'_j)|)_j \right\|_p.$$

Définition 3.3.1 Soit $m \in \mathcal{M}(X, E)$, on définit la norme p -Chevet-Saphar sur $M(X, E)$ par :

$$cs_p(m) = \inf \left\{ \|(\lambda_j \|v_j\|)_j\|_p w_{p^*}^{\text{Lip}}((\lambda_j^{-1}, x_j, x'_j)_j) : m = \sum_j v_j m_{x_j x'_j}, \lambda_j > 0 \right\}, \text{ pour } 1 < p < \infty,$$

et

$$cs_1(m) = \inf \left\{ \sum_{j=1} \|v_j\| d_X(x_j, x'_j) : m = \sum_j v_j m_{x_j x'_j} \right\}, \text{ pour } p = 1,$$

et

$$cs_\infty(m) = \inf \left\{ \sup_{f \in B_{X^\#}} \sum_j \|v_j\| |f(x_j) - f(x'_j)| : m = \sum_j v_j m_{x_j x'_j} \right\}, \text{ pour } p = \infty.$$

Théorème 3.3.1 Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $cs_p(\cdot)$ est une norme sur $M(X, E)$. On dénote par $CS_p(X, E)$ l'espace normé $(M(X, E), cs_p(\cdot))$ qui s'appelle l'espace de p -Chevet-Saphar.

Théorème 3.3.2 Les espaces $CS_p(X, E)^*$ et $\Pi_p^L(X, E^*)$ sont isométriquement isomorphes. Maintenant, nous arrivons à la troisième caractérisation des opérateurs de Lipschitz (q, p) -mixing. Rappelons que pour tout espace de Banach E et tout opérateur Lipschitz $T : X \rightarrow Y$, on définit l'opérateur linéaire $T_E : M(X, E) \rightarrow M(Y, E)$ par

$$T_E \left(\sum_{j=1}^n v_j m_{x_j x'_j} \right) = \sum_{j=1}^n v_j m_{T(x_j) T(x'_j)}.$$

Théorème 3.3.3 Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur de Lipschitz. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est Lipschitz (q, p) -mixing et $m_{q,p}^L(T) \leq C$.
2. Pour tout espace de Banach G (ou seulement $G = \ell_{q^*}$), l'opérateur $T_G : CS_{p^*}(X, G) \rightarrow CS_{q^*}(Y, G)$ est continu.

Dans ce cas,

$$m_{q,p}^L(T) = \|T_{\ell_{q^*}} : CS_{p^*}(X, \ell_{q^*}) \rightarrow CS_{q^*}(Y, \ell_{q^*})\| \geq \|T_G : CS_{p^*}(X, G) \rightarrow CS_{q^*}(Y, G)\|.$$

Preuve. Premièrement, supposons que T est Lipschitz (q, p) -mixing. Soit $\varphi \in (CS_{q^*}(Y, G))^*$ avec $\|\varphi\| \leq 1$. Comme $(CS_{q^*}(Y, G))^* \equiv \Pi_q^L(Y, G^*)$, on peut identifier φ avec un opérateur $L_\varphi \in \Pi_q^L(Y, G^*)$ tel que $\pi_q^L(L_\varphi) = \|\varphi\| \leq 1$. Soit $m = \sum_j v_j m_{x_j x'_j} \in \mathcal{M}(X, G)$. Alors $T_G(m) = \sum_j v_j m_{Tx_j Tx'_j}$, et

$$\langle \varphi, T_G(m) \rangle = \left\langle \sum_j L_\varphi(Tx_j) - L_\varphi(Tx'_j), v_j \right\rangle = \langle L_\varphi \circ T, m \rangle$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, T_G(m) \rangle| &= |\langle L_\varphi \circ T, m \rangle| \\ &\leq \pi_p^L(L_\varphi \circ T) cs_{p^*}(m) \\ &\leq \pi_q^L(L_\varphi) m_{q,p}^L(T) cs_{p^*}(m) \\ &\leq m_{q,p}^L(T) cs_{p^*}(m) \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur tous les φ , on aura

$$cs_{q^*}(T_G(m)) \leq m_{q,p}^L(T) cs_{p^*}(m)$$

ainsi

$$T_G : CS_{p^*}(X, G) \rightarrow CS_{q^*}(Y, G)$$

est continu et

$$\|T_G\| \leq m_{q,p}^L(T).$$

Inversement On suppose que $T_{\ell_{q^*}} : CS_{p^*}(X, \ell_{q^*}) \rightarrow CS_{q^*}(Y, \ell_{q^*})$ est continu et a une norme C , et soit $S : Y \rightarrow \ell_q$ un opérateur q -sommant. Il suffit de montrer que $S \circ T$ est p -sommant. Soit $m \in \mathcal{M}(X, \ell_{q^*})$, on prend $m = \sum_j v_j m_{x_j x'_j}$ où $v_j \in \ell_{q^*}$ et $x_j, x'_j \in X$. Alors

$$\langle S \circ T, m \rangle = \sum_j \langle v_j, (STx_j) - S(Tx'_j) \rangle = \left\langle S, \sum_j v_j m_{Tx_j Tx'_j} \right\rangle = \left\langle S, T_{\ell_{q^*}}(m) \right\rangle$$

De la dualité entre la norme q -sommant et la norme q^* -Chevet-Saphar,

$$|\langle S \circ T, m \rangle| = \left| \left\langle S, T_{\ell_{q^*}}(m) \right\rangle \right| \leq \pi_q^L(S) cs_{q^*}(T_{\ell_{q^*}}(m)) \leq \pi_q^L(S) C cs_{p^*}(m).$$

Prenant le supremum sur tous les m avec $cs_{p^*}(m) \leq 1$ et en invoquant la dualité entre la norme de Lipschitz p -sommant et la norme p^* -Chevet-Saphar, nous concluons que

$$\pi_p^L(S \circ T) \leq C \pi_q^L(S).$$

D'après le lemme 2.3.1 (la condition suffisante), nous concluons que T est Lipschitz (q, p) -mixing avec $m_{q,p}^L \leq C$. ■

Conclusion

Les opérateurs Lipschitziens de type (q, p) -mixing constituent une généralisation non linéaire de leurs équivalents linéaires en analyse fonctionnelle. Ils ont été initialement introduits par le mathématicien Chávez-Domínguez en 2012 comme cadre théorique pour l'étude de cette classe d'opérateurs.

Dans ce travail, nous nous appuyons sur la théorie fondamentale des opérateurs Lipschitziens p -sommants pour en donner une définition rigoureuse. Nous présentons ensuite trois caractérisations équivalentes :

1. **Une caractérisation intégrale** : via une inégalité basée sur le théorème de domination de Pietsch
2. **Une caractérisation séquentielle** : liée aux propriétés des suites (q, p) -mixing
3. **Une caractérisation géométrique** : s'appuyant sur la structure de l'espace de Chevet-Saphar

Ces différentes formulations offrent des outils flexibles pour analyser le comportement de ces opérateurs dans divers contextes.

Bibliographie

- [1] H. BREZIS. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Dunod, (1983).
- [2] J. Chavez Dominguez Operator ideals in Lipschitz and operator spaces categories, (2012).
- [3] J. Chávez-Domínguez, Lipschitz (q, p) -mixing operators, Journal of Mathematical Analysis, (2018).
- [4] K. De Leeuw, Banach spaces of Lipschitz functions, *Studia Mathematica*, 21, 55–66, 1961.
- [5] A. Dalet. Etude des espaces Lipschitz-libres. PhD thesis, Université de Franche-Comté, (2015).
- [6] A. Dalet, Etude des espaces Lipschitz-libres, Université de Franche-Comté, (2015).
- [7] J.D. Farmer and W.B. Johnson, Lipschitz p -summing operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 137(9) (2009), 2989-2995. *Journal of Functional Analysis*, (2020).
- [8] D.J.H. Garling. Inequalities : A journey into Linear Analysis. Cambridge, University Press, 2007.
- [9] M. Gromov. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [10] G. Godefroy and N.J. Kalton , Lipschitz-free Banach spaces, *Studia Mathematica*, 159, 121–141, 2003.
- [11] R. José Aliaga Varea. Geometry and structure of Lipschitz-free spaces and their biduals. PhDthesis, PhD thesis, Universitat Politècnica De Valencia, (2020)., URL, (2020).
- [12] A. Kolmogorov, S. Fomine. *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Edition Mir-Moscou. deuxième édition, Décembre (1973).
- [13] L. Mezrag. Nonlinear geometry of spaces. University of Msila, Algeria (2020–2021).
- [14] A. Pietsch, *Operator Ideals*, *Deutsch. Verlag Wiss, Berlin; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo*, pp. 247-259. 1978.
- [15] A. Pietsch.: Absolut p -summierende in Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.* 28 , 333 353,(1967).