

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
جامعة عمار ثليجي بالأغواط  
UNIVERSITÉ AMAR TELIDJI LAGHOUAT  
كلية العلوم  
FACULTÉ DES SCIENCES  
قسم الرياضيات  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



## MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications.

PAR : Allali Roufida

## Thème

---

# CONTRÔLE OPTIMAL DU SYSTÈME DE TRANSMISSION DE L'HÉPATITE B AIGUË ET CHRONIQUE.

---

Devant le jury composé de :

M. Yazid Fares	MCA	Université de Laghouat	Président
M. Saf Salim	MCB	Université de Laghouat	Examineur
M. Rahmoune Abdelaziz	MCA	Université de Laghouat	Encadreur

Année Universitaire : 2023-2024

---

## Remerciements

À tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire,  
Avant tout, je remercie « ALLAH » le tout puissant qui m'a donné le courage et la santé  
pour réaliser ce travail.

En second lieu, je souhaite adresser mes sincères remerciements au directeur de mon  
mémoire, Dr. Rahmoune Abdelaziz, pour son orientation avisée et son soutien constant  
tout au long de mon parcours académique. Votre guidance a été d'une valeur inestimable  
et a grandement contribué à mon développement professionnel.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury pour leur  
précieuse évaluation de mon travail et pour leurs commentaires constructifs qui m'ont  
permis d'améliorer mon mémoire.

Enfin, je voudrais remercier chaleureusement le Dr. Saadi Achour et la Dr. Chettih  
Istighfar pour leur assistance et leurs conseils tout au long de ce projet.  
Votre soutien indéfectible a été une source d'inspiration et de motivation pour moi, et je  
suis profondément reconnaissante d'avoir eu la chance de travailler avec des personnes  
aussi dévouées et compétentes.

Je vous prie d'accepter l'expression de ma plus sincère gratitude.

---

## Dédicace

À ceux qui ont été les piliers de mon parcours,

À mes parents, mes premiers enseignants et mes plus grands soutiens, votre amour inconditionnel et vos sacrifices ont été le fondement de ma réussite. Chaque page de ce mémoire porte l’empreinte de votre dévouement et de vos encouragements constants.

À mes grands-parents, dont la sagesse et les bénédictions ont été une inspiration pour moi, je vous offre ce modeste accomplissement avec tout mon respect et ma gratitude pour les valeurs que vous m’avez inculquées.

À mes sœurs Ilham, Tasnim, Linda, Soundous, et Hiba, qui ont partagé chaque étape de ce voyage avec moi, votre soutien indéfectible et votre affection ont été ma force. Ce mémoire est aussi le vôtre, car vous avez été mes compagnes de route les plus fidèles.

À mon frère Anes, dont le soutien et les encouragements ont été inestimables, je vous remercie pour votre présence et votre soutien constant.

À ma nièce Ines, qui représente l’avenir et l’espoir, je dédie ce travail avec l’espoir qu’il puisse inspirer vos propres rêves et aspirations.

À mes oncles, mes tantes et leurs enfants, qui ont toujours été une source de soutien et d’encouragement, je vous adresse ma reconnaissance pour votre présence constante dans ma vie.

Que ce travail soit le reflet de l’amour, de la dévotion et de l’engagement de ceux qui m’entourent, et qu’il puisse être une humble expression de ma gratitude envers chacun d’entre vous. Avec tout mon amour et ma reconnaissance,

## Résumé

Ce mémoire présente la dynamique de transmission de l'épidémie d'hépatite B aiguë et chronique et développe une stratégie de contrôle optimale pour contenir la propagation de l'hépatite B au sein d'une communauté. Pour ce faire, nous commençons par décrire la formulation du modèle et déterminer le nombre de reproduction de base  $R_0$ . Nous démontrons que si  $R_0 < 1$ , l'équilibre sans maladie est asymptotiquement stable à la fois localement et globalement. De plus, nous prouvons que le modèle est asymptotiquement stable localement et globalement si  $R_0 > 1$ . Pour contrôler la propagation de l'infection, nous élaborons une stratégie de contrôle impliquant trois variables : l'isolement des individus infectés et non infectés, le traitement et la vaccination. L'objectif est de minimiser le nombre de personnes infectées de manière aiguë et chronique par l'hépatite B tout en maximisant le nombre de personnes susceptibles et rétablies. Enfin, nous présentons des simulations numériques illustrant la faisabilité de la stratégie de contrôle et comparant le contrôle PID avec le contrôle optimal. L'analyse révèle un avantage clair pour l'approche de contrôle optimal. Bien que des techniques d'optimisation par algorithme génétique (GA) aient été appliquées pour maximiser les performances du contrôleur PID, aboutissant à des mesures de performance se rapprochant de celles du contrôle optimal, ce dernier a tout de même démontré des résultats supérieurs.

**Mots-Clés :** Hépatite B, Contrôle Optimal, Contrôle PID, Dynamique de Transmission, Optimisation par Algorithme Génétique.

## Abstract

This project presents the transmission dynamics of the acute and chronic hepatitis B epidemic and develops an optimal control strategy to contain the spread of hepatitis B within a community. To achieve this, we first outline the model formulation and determine the basic reproduction number  $R_0$ . We demonstrate that if  $R_0 < 1$  the disease-free equilibrium is both locally and globally asymptotically stable. Furthermore, we prove that the model is locally and globally asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . To control the spread of the infection, we devise a control strategy involving three variables : isolating infected and non-infected individuals, treatment, and vaccination. The aim is to minimize the number of acutely and chronically infected individuals with hepatitis B while maximizing the number of susceptible and recovered individuals. Finally, we present numerical simulations illustrating the feasibility of the control strategy and comparing PID control with optimal control. The analysis reveals a clear advantage for the optimal control approach. Even though Genetic Algorithm (GA) optimization techniques were applied to maximize the performance of the PID controller, resulting in metrics that closely approached those of the optimal control, the optimal control still demonstrated superior outcomes.

**Key Words :** Hepatitis B, Optimal Control, PID Control, Transmission Dynamics, Genetic Algorithm Optimization.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>12</b>
1.1	Introduction	12
1.2	Rappel sur le calcul matriciel [22, 14, 28]	12
1.2.1	Matrice jacobienne	15
1.3	Modélisation des systèmes dynamiques	16
1.3.1	Notion d'un système	16
1.3.2	Système dynamique	17
1.3.3	Le cas des systèmes linéaires	17
1.3.4	Système non linéaire	18
1.3.5	Systeme monovariable et multivariable	18
1.4	Représentation des systèmes multivariables	19
1.4.1	Représentation externe	19
1.4.2	Représentation interne	21
1.5	Analyse et Synthèse des systèmes dynamiques	22
1.5.1	L'analyse de stabilité autour d'un point d'équilibre	22
1.5.2	Stabilité au sens de Lyapunov	26
1.6	Conclusion	28
<b>2</b>	<b>Le controle optimal de la transmission du HBV</b>	<b>30</b>
2.1	Introduction	30
2.2	Méthode numérique des résolution d'équations différentielles	31
2.2.1	Méthode d'Euler	31
2.2.2	Les méthodes de Runge-Kutta	31
2.3	La théorie du contrôle optimal	33
2.3.1	Le control optimal	33
2.3.2	Rappel sur le calcul variationnel	33

2.3.3	Problème de Bolza	36
2.4	La commande optimale du HBV : Application pratique	42
2.5	La modélisation mathématique	44
2.6	Analyse de stabilité conjoncturelle	48
2.6.1	Analyse de stabilité autour des points d'équilibre du système HBV	49
2.7	Application de contrôle optimale	56
2.8	Existence d'un problème de contrôle optimal	57
2.9	Conclusion	60
<b>3</b>	<b>Simulation et résultats numériques</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction	61
3.2	Outils de commandes additionnels	61
3.2.1	Le correction PID	61
3.2.2	Les algorithmes génétiques d'optimisation	63
3.3	Simulation numérique	64
3.4	Résultats numériques	65
3.4.1	L'utilisation de l'optimisation génétique (GA) pour pousser le régulateur PID à sa performance maximale.	73
3.5	Conclusion	76
	<b>Conclusion générale</b>	<b>78</b>
	<b>Annexes</b>	<b>80</b>

# Table des figures

1.1 Schéma block d'un système	16
1.2 Système monovariante (a), système multivariante (b).	18
1.3 Schéma bloc d'un système multivariante à deux entrées et deux sorties	20
2.1 Système à temps final (terminal) libre et état final libre	38
2.2 Approximation des Conditions au point final.	40
2.3 Le diagramme de flux représentant la transmission HBV.	45
3.1 Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique	63
3.2 Le Comportement de la maladie sans appliquer les techniques de contrôle.	66
3.3 Population des individus susceptibles sous controleur CO et PID.	67
3.4 Population des individus infectés par une infection aiguë sous controleur CO et PID.	68
3.5 Population des individus atteints d'hépatite B chronique sous controleur CO et PID.	68
3.6 Population des individus guéris sous controleur CO et PID.	69
3.7 Le signal de commande des entrées CO et PID : (a) isolement, (b) traitement et (c) vaccination.	72
3.8 Population des individus susceptibles sous controleur CO et PID+GA.	73
3.9 Population des individus infectés par une infection aiguë sous controleur CO et PID+GA.	74
3.10 Population des individus atteints d'hépatite B chronique sous controleur CO et PID+GA.	74
3.11 Population des individus guéris sous controleur CO et PID+GA.	75
3.12 Le signal de commande des entrées CO et PID+GA : (a) isolement, (b) traitement et (c) vaccination.	76
3.13 Simulation 01 : Modèle HBV	81

---

3.14 Simulation 02 : Contrôle optimal pour HBV	82
3.15 Simulation 03 : PID+GA+Systeme HBV	83
3.16 Simulation 04 : Systeme HBV	84
3.17 Simulation 05 : Optimisation GA avec optimtool	85
3.18 Simulation 06 : le vrcteur commande du CO	86
3.19 Simulation 07 : le vrcteur commande du CO (Les Lamndas)	87

# Introduction générale

Dans la vie quotidienne, les problèmes de commande optimale se manifestent fréquemment, que ce soit dans la gestion du temps pour atteindre une destination désirée rapidement ou dans la minimisation de la consommation. Ce concept, étudié dès le XIXe siècle avec le calcul des variations, consiste à trouver la commande d'un système dynamique qui minimise un critère donné, tel qu'un indice de performance. Cette approche, fondamentale pour les automaticiens, vise à concevoir des régulateurs pour les systèmes, recherchant une loi de commande optimale qui nous donne les performances désirées les plus efficaces.

Historiquement, la théorie de la commande optimale a évolué depuis la seconde guerre mondiale. Des contributions telles que la théorie de Wiener-Kolmogorov pour les systèmes linéaires SISO, la programmation dynamique de Bellman et la généralisation multivariée de Kalman ont jeté les bases de cette discipline. Cependant, malgré les progrès réalisés, les défis persistants en font toujours un sujet de recherche actif.

Parallèlement, le domaine médical est confronté à des problèmes de transmission et de contrôle de maladies infectieuses, telles que l'hépatite B. Cette maladie virale, affectant le foie, présente des phases aiguës et chroniques, avec des implications graves pour la santé publique. Avec environ 400 millions de personnes infectées dans le monde, la lutte contre l'hépatite B est devenue une préoccupation mondiale.

Dans ce contexte, les modèles mathématiques sont devenus des outils essentiels pour comprendre et gérer la transmission des maladies infectieuses. Les chercheurs ont développé divers modèles épidémiologiques pour prédire et contrôler la propagation du virus de l'hépatite B. Ces modèles, souvent basés sur des équations différentielles, permettent d'évaluer l'efficacité des stratégies de prévention, telles que la vaccination et la quarantaine.

Ainsi, ce mémoire explore l'application du contrôle optimal au système de transmission de l'hépatite B aiguë et chronique. À travers l'étude d'un modèle de transmission du virus, nous cherchons à développer des stratégies de contrôle visant à réduire le nombre d'infections et à maximiser le nombre de guérisons. En combinant les concepts de contrôle optimal et

de modélisation épidémiologique, nous espérons contribuer à la lutte contre cette maladie mondiale.

Le présent travail est organisé en trois parties :

- La première partie est consacrée aux préliminaires et aux définitions sur le contrôle optimal. Nous commençons par une revue des rappel matriciel et quelques définitions de bases, une representation des systèmes multivariables et analyse et synthèse d'un système dynamique lineaire et continue .
- La deuxième partie consiste à définir le modèle mathématique de la transmission de l'hépatite B et à développer une approche de résolution théorique. Nous formulons le modèle mathématique en utilisant des équations différentielles pour décrire les différentes populations d'individus susceptibles, infectés et récupérés. Ensuite, nous analysons la stabilité de l'équilibre du système et calculons le nombre de reproduction de base  $R_0$  pour évaluer la dynamique de la transmission.
- Dans la troisième partie, nous nous tournons vers la résolution numérique du modèle et l'analyse des résultats obtenus. Nous utilisons le logiciel MATLAB pour implémenter les méthodes numériques nécessaires à la simulation du système. En particulier, nous employons des méthodes de discrétisation pour résoudre les équations différentielles et obtenir des solutions numériques. Enfin, nous présentons les résultats sous forme de graphiques et nous discutons leur pertinence par rapport aux objectifs de contrôle fixés.

En conclusion, ce mémoire offre une perspective interdisciplinaire sur la problématique du contrôle optimal, en explorant son application à un problème de santé publique majeur. En combinant les outils mathématiques et les connaissances médicales, nous visons à fournir des solutions innovantes pour la prévention et la gestion de l'hépatite B.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Introduction

Le contrôle optimal est une discipline de recherche qui vise à déterminer la meilleure façon de contrôler un système dynamique pour optimiser sa performance. En combinant la théorie des systèmes dynamiques et l'optimisation mathématique, le contrôle optimal trouve des applications dans divers domaines tels que l'ingénierie, l'économie et la biologie. Il repose sur des principes clés comme le maximum de Pontryagin pour résoudre des problèmes de commande optimale.

En effet, le contrôle optimal consiste à trouver la trajectoire optimale d'un système en tenant compte des contraintes, tout en optimisant une mesure de performance. Cela permet d'obtenir des solutions efficaces dans des situations très complexes. En appliquant les techniques d'optimisation mathématique et du principe de Pontryagin sur les systèmes dynamique étudiés, on peut déterminer les conditions de transversalité pour optimiser le contrôle d'un système. Donc, le contrôle optimal est un outil puissant pour améliorer l'efficacité des systèmes, prendre des décisions éclairées et résoudre des problèmes complexes dans divers domaines.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils nécessaires pour le contrôle optimal.

### 1.2 Rappel sur le calcul matriciel [22], [14], [28]

**Définition 1.1** (La matrice). *Soit une matrice  $A$  d'ordre  $n \times p$ , s'elle possède  $n$  lignes et  $p$  colonnes.  $a_{i,j}$  sont appelés les éléments ou bien les coefficients de cette matrice  $A$ , où ces coefficients sont situés à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne.*

Une telle matrice sera représenté par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \quad \text{ou} \quad (a_{i,j}).$$

**Définition 1.2** (La trace). *La trace d'une matrice est la somme des éléments de la diagonale principale de la matrice ( $\sum a_{ii}$ ).*

*Dans le cas d'une matrice carrée de taille  $n \times n$ , les éléments  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sont appelés les éléments diagonaux, sa diagonale principale est la diagonale  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Définition 1.3** (Le Cofacteur). *Le cofacteur noté  $D_{ij}$  d'une matrice  $A$  est défini par la relation :*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1.1)$$

Où le  $M_{ij}$  représente le mineur de la matrice  $A$ .

**Définition 1.4** (Le déterminant). *À toute matrice carrée  $A$  qui correspond à une valeur appelée le déterminant de  $A$ , que l'on dénote par  $\det(A)$  ou encore  $|A|$ .*

*Le déterminant de la matrice  $A$  est définie par la relation :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

### Déterminant d'une matrice d'ordre $n$

*Soit  $A$  une matrice carrée et  $D_{ij}$  ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant la méthode suivante :*

1. Choisir une ligne ou une colonne de  $A$  : pour simplifier les calculs, on choisit la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros.
2. Multiplier chaque élément  $a_{ij}$  de la ligne ou la colonne choisie par le cofacteur  $D_{ij}$  correspondant.
3. Faire la somme de ces résultats.

**Définition 1.5** (Matrice adjointe ‘comatrice’). Soit  $A$  une matrice carrée d’ordre  $n$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice adjointe de  $A$ , la matrice carrée d’ordre  $n$  notée  $\text{adj}(A)$  définie par :

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}$$

$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  est le cofacteur de l’élément  $a_{ij}$ .

**Définition 1.6** (Inverse d’une matrice). Une matrice carrée  $A$  d’ordre  $n$  est dite inversible (ou régulière ou non singulière) s’il existe une matrice  $B$  d’ordre  $n$  appelée matrice inverse de  $A$  tel que  $B = A^{-1}$ .

Où :  $A \times B = B \times A = I_n$  ; avec  $I_n$  est la matrice identité d’ordre  $n$ .

Notez bien que la formule générale de l’inverse d’une matrice est :

$$A^{-1} = \frac{[\text{adj}(A)]^T}{\det(A)}$$

Où :  $\det(A) \neq 0$ .

**Définition 1.7.** (les valeurs propres)

Un nombre complexe  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  si et seulement si, l’une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Le rang de la matrice  $A - \lambda I$  est strictement inférieur à  $n$ .
2. Le déterminant de la matrice  $A - \lambda I$  est nul :  $|A - \lambda I| = 0$ .

Autrement dit, les valeurs propres de  $A$  sont les scalaires notés par :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Où  $I$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .

**Définition 1.8.** (les vecteurs propres)

Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  quelconque, alors les  $n$  valeurs propres distincts de  $A$  sont notés  $\lambda_i$  qui sont associées aux  $n$  vecteurs propres  $V_i$  par :

$$AV_i = \lambda_i V_i \quad i = 1 \dots n$$

Cette dernière équation d'ordre  $n$  sera en fonction de  $\lambda$ , elle est dite aussi : l'équation caractéristique de la matrice  $A$ .

**Définition 1.9.** (polynôme caractéristique)

Le polynôme caractéristique de  $A$ , noté  $p(\lambda)$  est défini comme le déterminant de la matrice  $X - \lambda I$ , où :

- $X$  : est la matrice  $A$  elle-même.
- $\lambda$  : les racines de ce polynôme, dans notre cas c'est les valeurs propres.
- $I$  : est la matrice identité  $n \times n$ .

En d'autre terme, le polynôme caractéristique  $p(\lambda)$  est donné par :

$$p(\lambda) = \det(X - \lambda I)$$

### 1.2.1 Matrice jacobienne

Soit  $F$  une fonction de plusieurs variables définie par  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , dont les composantes sont  $F = (f_1, \dots, f_p)$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que les dérivées partielles  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  existent en  $x$  (pour tous  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, p$ ).

**Définition 1.10.** La matrice jacobienne de  $F$  en  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  est

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

C'est une matrice à  $p$  lignes et  $n$  colonnes. Où la première ligne correspond aux dérivées partielles de  $f_1$ , la seconde ligne aux dérivées partielles de  $f_2$ , .....etc.

Prenons l'exemple d'une fonction aux dérivés partielles à deux variables.

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $F = (f_1, f_2)$ , par rapport à  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

## 1.3 Modélisation des systèmes dynamiques

### 1.3.1 Notion d'un système

Un système est un ensemble d'objets interconnectés dans le but de réaliser une tâche spécifique. Un système réagit avec l'extérieur par l'intermédiaire des grandeurs qui sont en fonction du temps, appelés : signaux.

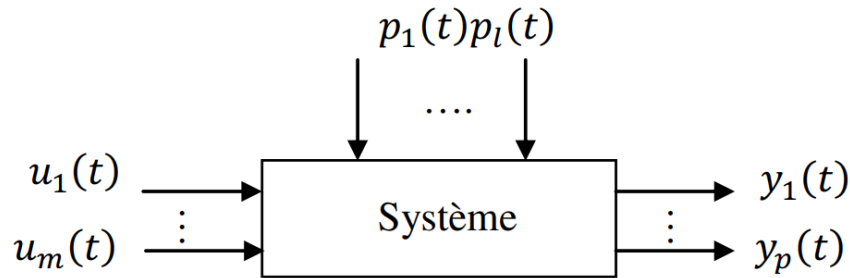


FIGURE 1.1 – Schéma block d'un système

Parmi les grandeurs physiques mises en jeu dans un système, l'on peut distinguer :

a) Grandeurs d'entrée : elle agit sur le système, il en existe deux types :

- Entrées maîtrisables, ou les variables de commandes  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ , qui sont des excitations externes appliquées au système afin de contrôler l'évolution de ces grandeurs de sortie.
- Perturbations sont des entrées non maîtrisables  $p_1(t), \dots, p_i(t)$ , autrement dit ils sont des grandeurs physiques imprévisibles pouvant s'opposer à l'action du système.

b) Grandeurs de sortie, ou bien les réponses du système notées ainsi  $y_1(t), \dots, y_p(t)$  qui sont des grandeurs contrôlées par l'effet des entrées.

Afin de synthétiser des lois de commandes pour commander n'importe quel système dynamique, il est nécessaire de définir un modèle mathématique qui traduit le comportement

du système étudié tout en reliant l'entrée par sa sortie qui nous permet de :

- 1- Analyser le système : en décrivant son comportement à des excitations externes (entrées).
- 2- Synthétiser par une loi de commande : par appliquer des techniques d'asservissement pour améliorer les performances du système (ses réponses).

### 1.3.2 Système dynamique

Un système dynamique est un système dont son l'évolution au fil du temps (i.e. sa réponse) est décrite par une loi mathématique. Autrement dit, les systèmes dynamique ce sont des systèmes décrits par des équations différentielles. Sachant que ces systèmes ont une mémoire, i.e. ils ont une réponse temporelle qui dépend de l'entrée présente mais également des réponses (et/ou) des entrées passés.

On outre, l'étude des systèmes dynamiques s'intéresse à leurs propriétés, comme l'analyse de stabilité face aux perturbations afin d'étudier l'évolution de la réponse du système au fil du temps  $t$ . Cela nous permet de modéliser des phénomènes divers (mécaniques, biologiques, électrique...etc).

Dans cette mémoire nous allons étudier, le comportement d'un système dynamique biologique qui décrit la propagation d'une maladie très dangereuse, c'est la transmission du virus d'hépatite B, donc les systèmes dynamiques offrent un outil puissant pour comprendre et prédire l'évolution de nombreux systèmes complexes.

### 1.3.3 Le cas des systèmes linéaires

Un système est dit linéaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants.

Soit un système avec un signal d'entrée  $u(t)$  définit comme suit :

$$u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t) + \dots + \lambda_m u_m(t)$$

Autrement dit, on définira un système linéaire par tout système qui réalise (à sa sortie) la combinaison linéaire d'entrée ( i.e. conserve toutes les opérations linéaires comme la dérivation et intégration), où chaque  $y_p(t)$  étant la sortie correspondante à  $u_m(t)$ .

$$y(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) + \dots + \lambda_p y_p(t)$$

Soit l'équation différentielle d'ordre  $n$  du système linéaire qui s'écrit par :

$$a_p \frac{d^p y(t)}{dt^p} + a_{p-1} \frac{d^{p-1} y(t)}{dt^{p-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1.2)$$

Notez bien que l'ordre d'un système est la valeur de l'indice le plus grand entre  $p$  et  $m$ .

En revanche que les systèmes linéaires ont les propriétés suivantes

**Additivité** : Si les signaux d'entrée  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  ont pour réponses  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ , alors le signal d'entrée  $u(t) = u_1(t) + \dots + u_n(t)$  a pour réponse  $y(t) = y_1(t) + \dots + y_n(t)$ .

**Homogénéité** : Si le signal d'entrée  $u(t)$  a pour réponse  $y(t)$ , alors  $\alpha u(t)$  donne  $\alpha y(t)$  où  $\alpha$  est une constante.

### 1.3.4 Système non linéaire

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui n'obéit pas au principe de superposition. Alors, un système non linéaire ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients constants.

Cette définition, ou plutôt cette non-définition, explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires.

### 1.3.5 Système monovariaible et multivariaible

D'une part, on dit qu'un système est de type "monovariaible" ou SISO (Single Input Single Output) est utilisé pour désigner un système qui a une seule entrée et une seule sortie.

D'autre part, le terme "multivariaible" ou MIMO (Multi-Input Multi-Output) est utilisé pour désigner un système qui a plusieurs entrées (et/ou) sorties comme illustre la figure 1.2.

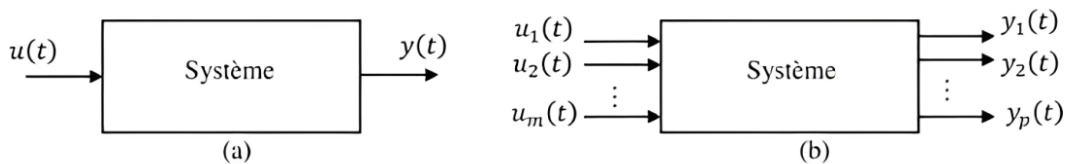


FIGURE 1.2 – Système monovariaible (a), système multivariaible (b).

**Définition 1.11.** (*état d'équilibre*)

$x_e$  est un état d'équilibre si  $x(t_0) = x_e \Leftrightarrow x(t) = x_e \quad t \geq t_0$  en l'absence de commande et de perturbations.

Pour une représentation d'état  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , les points d'équilibres sont les solutions de l'équation suivante :

$$f(x(t), 0) = 0$$

**Définition 1.12.** (point d'équilibre)

On appelle point d'équilibre, un couple  $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , vérifiant :

$$f(x_e, u_e) = 0.$$

## 1.4 Représentation des systèmes multivariables

### 1.4.1 Représentation externe

Cette représentation utilise directement la relation entre l'entrée et la sortie en considérant le système comme une boîte noire. En effet, il y a plusieurs types qui définissent un tel système dynamique (pour les 2 cas SISO ou bien MIMO), comme suit :

#### Equation différentielle (cas SISO)

Soit un système dynamique linéaire monovarié d'ordre  $n$ . Il est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (voir l'équation 1.2); où  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système, avec  $p \geq m$  (pour un système causal).

#### Système d'équations différentielles (cas MIMO)

Un système linéaire dynamique multivariable d'ordre  $n$  possédant  $m$  entrées et  $p$  sorties peut être décrit par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Après l'application des lois de la physique, de nombreux systèmes multivariables peuvent

être décrits par des équations différentielles et algébriques de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_1(t) = h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{y}_p(t) = h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases}$$

Où  $u_i(t), i = 1 \dots m$  et  $y_j(t), j = 1 \dots p$  sont respectivement l'entrée et la sortie de ce système.

### Fonction de transfert (cas SISO)

La fonction de transfert ou transmittance d'un système donné est le rapport entre la transformée de Laplace de sa sortie et celle de son entrée. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (1.2) et en prenant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$Y(s) [s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0] = U(s) [b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0] \quad (1.3)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (1.4)$$

### Matrice de transfert(cas MIMO)

Dans le cas MIMO, on a plusieurs fonctions de transfert représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la matrice de transfert du système comme s'est illustré dans la figure 1.3.

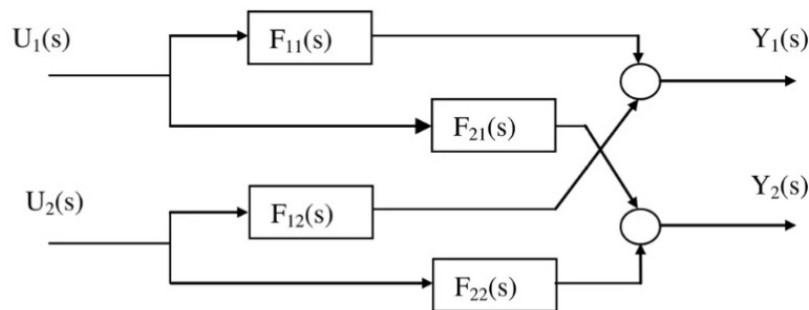


FIGURE 1.3 – Schéma bloc d'un système multivariable à deux entrées et deux sorties

Où la forme matricielle donnée par :

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

## 1.4.2 Représentation interne

### Représentation d'état

La représentation d'état étant particulièrement adaptés aux systèmes multivariables, elle est obtenue à partir des autres représentations (particulièrement à partir de la matrice de transfert dans le cas des systèmes MIMO).

Un système linéaire multivariable et invariant possédant  $m$  entrées et  $p$  sorties, peut être représenté par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Où :

- $x(t) \in R^n$  : Vecteur d'état
- ,  $u(t) \in R^m$  : Matrice d'entrée (ou de commande),
- $y(t) \in R^p$  : Matrice de sortie (ou de mesure),
- $A \in R^{n \times n}$  : Matrice dynamique (ou d'évolution),
- $B \in R^{n \times m}$  : Matrice de commande (ou d'entrée),
- $C \in R^{p \times n}$  : Matrice d'observation (ou de sortie),
- $D \in R^{p \times m}$  : Matrice de transmission directe.

### Avantages de la représentation d'état

- **Adaptabilité aux systèmes multivariables** : contrairement à la représentation classique par fonction de transfert, la représentation d'état est plus efficace que d'autre type de représentation, car elle offre plus flexibilité par rapport à la modélisation du système étudié.
- **Accès aux grandeurs internes du système** : la représentation d'état fournit une information interne du système car elle nous a permis à accéder directement aux variables d'état de notre système pour suivre l'évolution de chaque variable d'état à chaque instant  $t$ .

- **Les conditions initiales** : dans la réalité les conditions initiales ne sont pas toujours nulles, donc elle les intègre explicitement lors de la modélisation.
- **Flexibilité lors de la modélisation mathématique** : elle est souple pour faciliter l'analyse et la synthèse afin de commander les systèmes dynamiques par des commandes plus robustes.

## 1.5 Analyse et Synthèse des systèmes dynamiques

### 1.5.1 L'analyse de stabilité autour d'un point d'équilibre

D'un point de vu d'un automaticien, un système se trouve dans son état d'équilibre si cet état n'est pas modifié (i.e. il est libre) lorsque le système est abandonné à lui-même il va converger vers l'état le plus stable possible. Un tel état d'équilibre se détermine en posant à la fois  $u(t) = 0$  (i.e système libre et autonome) et  $\dot{x}(t) = 0$  (pas modifié i.e. libre).

Soit un système dynamique donné :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{1.6}$$

La recherche des états d'équilibre d'un tel système revient donc à résoudre le systèmes suivant :  $Ax(t) = 0$ . D'après cette dernière équation, on comprend qu'il peut exister un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de la matrice  $A$ , ici on distingue deux cas principaux :

**Cas 01 :**

Si :  $\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  n'a pas de valeurs propres nulles.

Alors : il existe un seul état d'équilibre qui est l'origine  $x(t) = x_0 = 0$ .

**Cas 02 :**

Si :  $\text{rang}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A$  possède au moins une valeur propre nulle.

Alors : il existe une infinité d'états d'équilibre.

Dans ce cas, on distingue les cas suivant :

1. Un état d'équilibre est dit *asymptotiquement stable* si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).
2. L'état d'équilibre est dit *instable*, si après une perturbation donnée, le système s'en éloigne davantage i.e. il diverge vers lui.

3. L'état d'équilibre est dit *stable* si après une perturbation donnée, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre i.e. il converge vers lui.

**Théorème 1.1.** *Un système linéaire et invariant décrit par une représentation d'état est dit :*

- **asymptotiquement stable** si toutes les valeurs propres de la matrice d'état dynamique  $A$  sont à partie réelle strictement négative.
- **stable** si au moins une des valeurs propres de  $A$  est nulle (ou à partie réelle nulle).
- **instable** si au moins une des valeurs propres de  $A$  est à partie réelle strictement positive.

**Remarque 1.1.** - On constate que la stabilité d'un modèle d'état dépend seulement de la matrice d'état dynamique  $A$ .

- Un système est dit "BIBO stable" s'il est asymptotiquement stable.

**Théorème 1.2** (Stabilité asymptotique). *Soit  $x_e$  un point d'équilibre d'un système autonome  $\dot{x} = f(x)$  si :  $x(t_1) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e$  pour  $t \geq t_1$ . Ou encore ssi :  $f(x_e) = 0$ .*

### Stabilité et instabilité d'un point d'équilibre

Le point d'équilibre  $x_e$  de  $\dot{x} = f(x)$  est :

- Stable : si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , (dépendant de  $\varepsilon$ ) tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

- Instable : s'il n'est pas stable.
- Asymptotiquement stable : s'il est stable et  $\delta$  peut être choisi tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e.$$

Puis, il sera globalement asymptotiquement stable ssi :  $\delta = \infty$  (i.e.  $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$ ).

Notez bien que la notion de stabilité est relative car s'applique au point d'équilibre et non pas au système lui-même. Un système peut avoir plusieurs points d'équilibre.

### Critère de Routh-Hurwitz

Dans ce travail, on a appliqué le critère de Routh-Hurwitz [5] qui est une méthode très utilisée pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques représentés par leurs fonction de transfert (Voir l'équation (1.4)) dans le but de déterminer leur stabilité à partir de son polynôme caractéristique. Ce critère nous permet de vérifier si toutes les racines du polynôme caractéristique ont des parties réelles négatives, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable. On outre, la procédure du critère de Routh-Hurwitz consiste à vérifier les conditions sur les coefficients du polynôme et à construire le tableau de Routh.

De plus, ce critère algébrique de Routh nous permet de faire le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé, un ou plusieurs paramètres à partir du polynome caracterustique (i.e. le dénominateur de la fonction de transfert en B.F)

Soit  $D(s)$  est un polynôme de degré  $n$  qui s'écrit sous la forme suivante : (avec  $a_n \neq 0$ )

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0$$

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients  $a_i$  dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des  $n$  décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{cccccc} a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \dots & a_1 \\ a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \dots & a_0 \\ \frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & & \frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & & \dots & & \frac{a_{n-1}a_1-a_n a_0}{a_{n-1}} & \dots \end{array}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes. On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_1 & \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_0 & \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0 & \end{array}$$

On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
 & a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
 & & b_m & & b_{m-1} & & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
 \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-3} b_{m-2}}{b_m} & & \cdots & & & & 
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ai plus que des 0 sur la ligne, ce qui est la condition d'arrêt de cet algorithme.

On outre, le nombre de pôles à partie réelle positive, de n'importe quelle fonction de transfert est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne à partie du tableau de Routh construit précédemment.

Finalement, par conséquent, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

### Procédure de construction de la table de Routh-Hurwitz

Afin d'appliquer ce critère algébrique, il faut suivre les étapes de l'algorithme suivant :

1. Ecrire le polynôme caractéristique de la fonction de transfert correspondante en boucle fermée : (avec  $a_n \neq 0$ )

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0.$$

2. Si un des coefficients est nul ou négatif, alors il existe au moins un autre coefficient qui sera positif, où encore il existe une ou des racines imaginaires qui sont à partie réelle positive.
3. Si tous les coefficients sont positifs, alors dans ce cas-là on doit établir le tableau de Routh-Hurwitz comme s'est mentionné ci-dessus.

**Remarque 1.2.** - Notez bien que le nombre des racines qui ont  $\text{Re}(s_i) > 0$  est égale au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh.

- Le système est donc stable ssi tous les coefficients de la première colonne sont non négatifs.

## 1.5.2 Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode de Lyapunov [5] permet d'analyser la stabilité d'un système dynamique (linéaire ou non linéaire) sans connaître explicitement les solutions des équations différentielles du modèle mathématique qui le décrivent.

Maintenant, nous allons parler du choix la fonction de Lapo définir quelques notions Soit un système dynamique autonome représenté par une équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x} = f(x)$$

Où :  $x$  est un vecteur représentant l'état du système et  $f$  est une fonction continue de  $x$ . Un point d'équilibre du système est un état  $x_e$  tel que  $f(x_e) = 0$ .

On dit qu'une fonction scalaire  $V(x)$  est une fonction de Lyapunov pour le point d'équilibre  $x_e$  si elle satisfait les conditions suivantes :

1. Condition de positivité définie :  $V(x_e) = 0$  et  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq x_e$ .
2. Condition de dérivée négative : La dérivée temporelle de  $V$  le long des trajectoires du système est non positive, c'est-à-dire  $\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  pour tout  $x \neq x_e$ .

**Définition 1.13.** (*Stabilité au sens de Lyapunov*)

L'état d'équilibre  $x_e$  est dit stable si  $\forall t \geq 0$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \|x(0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

Si non,  $x_e$  sera instable.

**Définition 1.14.** (*Stabilité asymptotique*) Un point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable s'il est stable, et ssi :

$$\exists \alpha > 0 \mid \|x(0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e.$$

C'est-à-dire, si la dérivée temporelle de la fonction de Lyapunov  $\dot{V}(x)$  est strictement négative, on dira que un point d'équilibre  $x_e$  sera asymptotiquement stable, cela signifie que les solutions du système tendent vers  $x_e$  au fil du temps (i.e. cas de convergence vers le point d'équilibre).

Si non, on aura un cas d'instabilité.

## Méthode indirecte de Lyapunov

La première méthode de Lyapunov est basée sur la linéarisation du système de  $\dot{x} = f(x)$  autour du point d'équilibre  $x_e$ . Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda(A)$  de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre  $x_e$ . Selon cette méthode, les propriétés de stabilité du point d'équilibre comme s'est exprimé dans la discussion ci-dessous :

**Théorème 1.3** (Première méthode de Lyapunov). *Soit  $x_e$  le point d'équilibre du système :  $\dot{x} = f(x)$  avec la fonction  $f$  est de classe  $f \in C^1$  ; on pose que :*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e)$$

ainsi :

$$\alpha(A) = \max \operatorname{Re}(\lambda(A))$$

Alors on a une discussion de ces différent cas :

- Si  $\alpha(A) < 0$ , donc le point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable.
- Si  $\alpha(A) > 0$ , donc le point d'équilibre  $x_e$  est instable.
- Si  $\alpha(A) = 0$ , on ne peut pas déduire une information sur la stabilité du point  $x_e$ .

Notez bien que cette méthode indirecte de Lyapunov a deux limitations principaux :

- D'une part, le premier inconvénient c'est qu'elle ne permet pas de dire si le point d'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre à partie réelle nulle, ou bien si aucune valeur propre à partie réelle strictement positive.
- Or, le deuxième inconvénient c'est que la stabilité n'est valable que dans un voisinage du point d'équilibre (i.e. stabilité locale).

## Méthode directe de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système décroît avec le temps, alors de celui-ci (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). Ainsi, la méthode directe de Lyapunov cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

## Principe d'invariance de LaSalle

Il arrive souvent que l'on trouve une fonction de Lyapunov dont la dérivée est seulement semi-définie négative, ce qui ne permet pas de conclure une information d'analyse sur la stabilité asymptotique en appliquant la méthode directe de Lyapunov. La difficulté se manifeste en analysant la fonction  $\dot{V}(x)$ , on n'exploite pas le fait que les différentes variables d'état  $x_i$  ne sont pas indépendantes mais sont reliées par les équations dynamiques du système étudié. En effet, sachez bien que ce principe de LaSalle a étudié cette question et a formulé un principe d'invariance qui permet d'analyser la stabilité asymptotique dans le cas d'une fonction  $\dot{V}(x)$  semi-définie négative.

**Théorème 1.4** (Principe d'invariance de LaSalle). *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système  $\dot{x} = f(x)$  est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction  $V(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ , est continument différentiable ayant les propriétés qui suit :*

- $V(0) = 0, V(x) > 0$  pour  $\forall x \in \Omega - \{0\}$
- $\dot{V}(x) < 0$  pour  $x \in \Omega$
- L'ensemble  $E \subset \Omega$  tel que  $\dot{V}(x) = 0$  ne contient pas de trajectoire du système autre que  $x(t) = 0$  (c'est-à-dire,  $x = 0$  est la seule solution qui vérifie  $\dot{V}(x) = 0$  et  $\dot{x} = f(x)$ ).
- Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et  $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$ , alors le point d'équilibre  $x_e$  est globalement asymptotiquement stable.

## 1.6 Conclusion

Tout d'abord, ce chapitre propose une exploration approfondie sur les notions de base en mathématique et en contrôle optimale des systèmes dynamiques. En effet, on constate bien qu'il est divisé en deux parties distinctes : " Rappel mathématique" et " Rappel en automatique" pour entamer le domaine du contrôle optimale que nous allons aborder ultérieurement dans le 2 ème chapitre.

En outre, on a vu aussi les définitions et les théorèmes nécessaires qui nous permettent de modéliser les systèmes dynamiques SISO ou MIMO par leurs différents types de représentations : soit par leurs équations différentielles ou bien par le biais de la représentation d'état dans le domaine temporelle, ou bien par sa fonction du transfert dans le domaine fréquentielle, ainsi nous avons abordé le rappel théorique fondamentale pour faire l'analyse de stabilité de n'importe quel système linearire ou non-lineaire donné par les techniques suivants : soit en appliquant le critère de "Routh-Hurwitz" qui s'applique juste dans le cas

des systèmes lineaires ou bien par “Lyapunov”. Ce dernier est très utile afin de démontrer la stabilité asymptotique locale et globale autour des points d’équilibre.

Enfin, ce présent chapitre nous a permis d’acquérir une base solide pour commencer la partie du commande optimale par la suite dans le chapitre prochain où nous allons aborder des applications réelles lors de l’étude de notre système biologique épidémique (HBV) dans le but d’analyser la stabilité autour de ces points d’équilibres, selon les cas du paramètre  $R_0$ .

# Chapitre 2

## Le controle optimal de la transmission du HBV

### 2.1 Introduction

De nos jours, les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie quotidienne. En effet, souvent, prenons cet exemple pratique : comment arriver à la destination désirée le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation,... etc.

Pour un système dynamique donné dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande qu'on doit appliquer au système qui va minimiser un critère donné. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX<sup>e</sup> siècle avec le calcul des variations. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX<sup>e</sup> siècle avec le calcul des variations.

Autrement dit, d'après le point de vue d'un automaticien, le contrôle optimal est une approche de conception des régulateurs des systèmes par la recherche de meilleures lois de commande possibles par rapport à un tel critère d'un indice de performance donné qui va être minimisé ou bien maximisé selon le cas étudié. La théorie de la commande optimale a commencé à se développer juste après la seconde Guerre mondiale, où le résultat principal de cette période a été la théorie de Wiener-Kolmogorov qui traite des systèmes SISO linéaires. Une théorie plus générale a commencé à émerger dans les années 1950 et 60. Puis, en 1957, Bellman a publié son livre sur la programmation dynamique. Ensuite, en 1960, Kalman a publié sa généralisation multivariée des Wiener-Kolmogorov. Après, en 1962, Pontryagin et al. ont publié le principe du maximum. Après, en 1965, Isaacs-Newton a publié son livre sur les jeux différentiels, et il y en a bien d'autres.

Enfin, notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues. Enfin, la commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité. Dans ce mémoire nous allons abordé

Dans ce chapitre nous allons choisir à étudier le système du HBV pour pouvoir prédire sa transmission dans la population en premier lieu,

## 2.2 Méthode numérique des résolution d'équations différentielles

### 2.2.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler [10] est une technique numérique utilisée pour résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires (EDO). Elle est développée par le mathématicien "Carl Euler".

Pour une EDO du premier ordre de la forme  $y'(t) = f(t, y(t))$  avec une condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , la méthode d'Euler procède comme suit pour un pas de taille  $h$  :

1. Calculer les coefficients :

$$k_1 = h \cdot f(t_0, y_0)$$

2. Mettre à jour la valeur de  $y$  :

$$y(t+h) = y_0 + k_1$$

Cette méthode est simple à implémenter mais elle est peut être limitée en terme de stabilité numérique et aussi en terme de précision. D'autre part, voici l'équation d'Euler-Lagrange si le système été à temps terminal fixe et état terminal fixe :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0 \quad (2.1)$$

### 2.2.2 Les méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes du Runge-Kutta [10] sont des méthodes de résolutions numériques puissantes pour approximer les solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO). Elles sont développés par les mathématiciens "Carl Runge" et "Martin Wilhelm Kutta" en 1901.

En suite, leur principe de base s'appuient sur l'idée de décomposer l'intervalle d'étude en petits pas et d'approximer la solution de l'EDO sur chaque pas par une ligne droite. Pour une EDO de premier ordre  $y'(t) = f(t, y(t))$  avec une condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , la

méthode du Range-Kutta d'ordre 4 procède comme suit pour un pas de taille  $h$  :

1. Calculer les coefficients :

$$\begin{aligned} k_1 &= h * f(t_0, y_0) \\ k_2 &= h * f(t_0 + h/2, y_0 + k_1/2) \\ k_3 &= h * f(t_0 + h/2, y_0 + k_2/2) \\ k_4 &= h * f(t_0 + h, y_0 + k_3) \end{aligned}$$

2. Mettre à jour la valeur de  $y$  :

$$y(t+h) = y_0 + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Ajoutons maintenant un cas plus particulier de la méthode du Range-Kutta d'ordre 2. Pour cette méthode, nous utilisons une approche similaire à celle du Range-Kutta d'ordre 4, mais avec moins de coefficients. Pour un pas de taille  $h$ , les étapes sont les suivantes :

1. Calculer les coefficients :

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(t_0, y_0) \\ k_2 &= h \cdot f(t_0 + h, y_0 + k_1) \end{aligned}$$

2. Mettre à jour la valeur de  $y$  :

$$y(t+h) = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Donc cette méthode d'ordre 2 offre une meilleure précision que celle d'Euler, mais elle est moins précise par rapport à celle du Range-Kutta d'ordre 4.

**Définition 2.1** ( Trajectoire). *On considère le système commandé (contrôlé) :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

*On appelle trajectoire d'un système de contrôle toute fonction régulière*

*$t \in [0, T] \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  qui représente la solution du modèle d'état (1.6) sur un intervalle  $[0, T]$  de  $\mathbb{R}$ .*

**Définition 2.2** (Point selle). *Un point selle d'une fonction  $f(x, y)$  est un point  $(x_0, y_0)$  où la fonction atteint un maximum dans une direction et un minimum dans une direction perpendiculaire, ce qui donne une forme de selle de cheval au graphe de  $f$ .*

## 2.3 La théorie du contrôle optimal

### 2.3.1 Le control optimal

Il est clair que la théorie du contrôle [24] a émergé après la seconde guerre mondiale, en réponse aux besoins pratiques, notamment dans le domaine de l'aéronautique. Son développement est étroitement lié aux principes variationnels de la mécanique classique, tels que le principe de Fermat et les équations d'Euler-Lagrange. De plus, le principe du maximum de Pontryagin formulé en 1956, a été un jalon important, fournissant une condition nécessaire d'optimalité pour les problèmes de contrôle. Par la suite, la découverte de la méthode de programmation dynamique et l'introduction de l'analyse fonctionnelle ont enrichi la théorie du contrôle optimal. Les applications de cette théorie se sont multipliées rapidement dans divers secteurs tels que l'aérospatiale, l'automobile, la robotique, la médecine et les télécommunications, contribuant ainsi à façonner le monde moderne.

Enfin, dans la théorie moderne du contrôle, le problème de contrôle optimal est de trouver un contrôle qui fait que le système dynamique atteint une cible ou suit une variable d'état (ou trajectoire) et en même temps extrémisé un indice de performance donné.

### 2.3.2 Rappel sur le calcul variationnel

D'abord, le calcul des variations [11] traite certains types de "problèmes externes" où des expressions impliquant des intégrales sont optimisées (minimisées ou maximisées). De nombreux problèmes dans le calcul des variations ont leurs origines dans la physique où il faut minimiser l'énergie associée à un problème donné. En effet, le calcul des variations est une branche des mathématiques portant sur l'optimisation des quantités physiques (comme le temps, surface, ou distance). Elle trouve des applications dans plusieurs domaines, tels que l'aéronautique (maximisant la portance d'une aile d'avion), la conception d'équipements sportifs (en minimisant la résistance de l'air sur un casque de vélo, optimisation de la forme d'un ski), la mécanique (maximiser la force d'une colonne, un barrage, ou un arc), la conception des bateaux (optimisation de la forme d'une coque de bateau). Alors, le calcul de variation consiste à trouver l'extrémum (max ou min) d'une fonctionnelle. Il s'agit donc d'un problème de minimisation dans un espace fonctionnel, de dimension qui pourrait être infinie. Dans ce chapitre, on présente quelques notions et concepts de calculs de variation qui sont nécessaires pour la résolution des problèmes liés à la commande optimale.

Le calcul variationnel est une branche en analyse mathématiques qui cherche à optimiser les fonctions ou les fonctionnelles. Où des dernier sont définies comme suit :

- **Fonction** : Une variable  $u$  est une fonction de la variable indépendante  $t$ ,  $u(t) = f(t)$  pour chaque valeur de  $t$  sur un intervalle il correspondant une valeur  $u$ .
- **Fonctionnelle** : Une fonctionnelle  $J[u(x)]$  prend en entrée une fonction  $u(x)$  et renvoie une valeur scalaire  $J$ . Elle établit une relation entre une fonction et une valeur scalaire. En d'autre terme, elle est définit comme une fonction d'une fonction, i.e. soit une quantité variable qui dépend d'une fonction dénoté par :  $J = J(u(t))$ . Ainsi, son domaine de définition est un ensemble de fonctions admissibles. Sachez bien que dans les fonctions ordinaires les valeurs des variables indépendantes sont des nombres ; Tandis qu'avec des fonctionnelles, les valeurs des variables indépendantes sont des fonctions. Alors, le terme « fonctionnelle » désigne simplement les fonctions qui prennent d'autres fonctions comme argument.
- **Indice de performance** :

Dans la conception des lois de commande par les méthodes classiques on s'intéresse généralement soit à la réponse du système à une entrée donnée, caractérisée par le temps de montée, le temps d'établissement, le pic de dépassement, ou bien à la précision en régime permanent, et la réponse en fréquence du système caractérisée par des marges de gain et de phase, et la bande passante. En théorie de commande avancée, le problème de commande optimale consiste à trouver une commande qui entraîne le système dynamique d'atteindre un objectif ou de suivre une variable d'état (ou trajectoire désirée) et en même temps d'optimiser un indice de performance qui peut prendre plusieurs formes, comme décrit ci-dessous.

**1. La commande en temps minimum :**

Nous essayons de transférer un système d'un état initial arbitraire  $x(t_0)$  à un état final spécifié  $x(t_f)$  en un temps minimum. Ce dernier est formulé par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t^* \quad (2.2)$$

**2. Commande à consommation minimale :** nous pouvons formuler l'indice de performance comme un intégrale d'un débit :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (2.3)$$

Pour plusieurs contrôles, nous pouvons l'écrire aussi comme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m R_i |u_i(t)| dt \quad (2.4)$$

où  $R$  est un facteur de pondération.

**3.** Commande à énergie minimale : le critère de performance correspond à l'intégrale d'une puissance. Pour minimiser la consommation totale d'énergie, nous avons un critère de performance comme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2(t) r_i dt \quad (2.5)$$

Ou bien encore dans le cas général :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u'(t) R u(t) dt \quad (2.6)$$

Où,  $R$  est une matrice définie positive.  $Q$  est une matrice de pondération semi-définie-positive.

Nous avons alors :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x'(t) Q x(t) dt \quad (2.7)$$

Avec :  $x_d(t)$  est la valeur de la trajectoire désirée i.e. souhaitée,  $x_a(t)$  la valeur réelle, ainsi nous avons l'erreur est défini par :  $x(t) = x_a(t) - x_d(t)$ .

**4.** La Commande pour un objectif terminal : dans ce cas-là, nous cherchons à minimiser l'erreur entre  $x_d(t_f)$  et  $x_a(t_f)$ . L'erreur terminal est donné par :  $x(t_f) = x_a(t_f) - x_d(t_f)$ . En prenant soin des valeurs positives et négatives d'erreur et des facteurs de pondération, nous structurons la fonction de coût comme

$$J = x'(t_f) F x(t_f) \quad (2.8)$$

qui est également appelé la fonction de coût terminal. Ici,  $F$  est une matrice positive semi-définie.

**5.** Cas général : en combinant les formules ci-dessus, nous avons un indice de performance sous sa forme générale défini comme suit :

$$J = x'(t_f) F x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t)] dt \quad (2.9)$$

Ou encore :

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.10)$$

Où,  $R$  est une matrice définie positive, et  $Q$  et  $F$  sont des matrices semi-définies positives, respectivement. Veuillez noter que les matrices  $Q$  et  $R$  peuvent varier en fonction du temps. Si l'indice de performance (voir l'équation (2.10)) contient seulement la fonction de coût terminal  $S(x(t), u(t), t)$ , il s'appelle le **problème de Mayer**. Or, s'il (2.10) n'a que l'action intégral, il est appelé le **problème Lagrange**.

Ainsi le problème du contrôle optimal sera du type **Bolza**, si cet indice de performance contient à la fois le terme de coût terminal et le terme de coûts intégral comme dans l'équation (2.10). Donc, les indices de performance mentionnés ci-dessus (avec des formes carrées) conduisent à des résultats très élégants dans des systèmes de contrôle optimaux.

### 2.3.3 Problème de Bolza

Soit une fonctionnelle  $J$  définie sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , avec des conditions aux limites (i.e. initiales et finales). Le problème consiste à trouver la trajectoire optimale  $x^*(t)$  et la commande optimale  $u^*(t)$  qui minimisent  $J$ .

De plus, dans le domaine du contrôle optimal, le Lagrangien et l'Hamiltonien [3] jouent un rôle crucial pour formuler, et résoudre des problèmes complexes impliquant la minimisation ou la maximisation d'un critère sous des contraintes.

#### Problème de coût final

On considère le problème de contrôle optimal de Bolza où l'indice de performance a une forme générale contenant un terme de coût terminal (final) plus un terme intégral.

On considère le système décrit par le modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Avec :  $x(t)$  le vecteur d'état de dimension  $n$  et  $u(t)$  le vecteur de commande de dimension  $r$ .

Soit l'indice de performance à minimiser :

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$$

Sachant que les conditions aux limites :  $x(t_0) = x_0, x(t_f)$  est libre et/ou  $t_f$  est libre aussi.

Maintenant, nous allons présenter *la procédure de Pontryagin* pour résoudre ce problème, pour cela on peut écrire :

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{dS(x(t), t)}{dt} dt = S(x(t_f), t_f) - S(x(t_0), t_0)$$

Alors, l'indice de performance devient :

$$J(u(t)) = J_2(u(t)) + S(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ V(x(t), u(t), t) + \frac{dS(x(t), t)}{dt} \right] dt + S(x(t_0), t_0)$$

Puisque  $S(x(t_0), t_0)$  est une quantité fixe alors les 2 problèmes avec les indices de performance  $J$  et  $J_2$  sont équivalents. L'essentielle est de trouver la commande optimale  $u^*(t)$ .

On note aussi que :

$$\frac{d[S(x(t), t)]}{dt} = \left( \frac{dS}{dx} \right)^T \dot{x}(t) + \frac{dS}{dt}$$

**Solution du problème :**

Pour résoudre ce problème on va suivre les étapes suivantes :

**Etape 1 : Hypothèse de conditions d'optimalité**

On suppose l'existence des valeurs optimales suivantes  $x^*(t)$  et  $u^*(t)$  donc on peut écrire :

$$J(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ V(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{dS(x^*(t), t)}{dt} \right] dt$$

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t)$$

**Etape 2 : Variation de la commande et de vecteur d'état**

On considère des variations autour des valeurs optimales  $x^*(t)$  et  $u^*(t)$  exprimées par :

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t); u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$$

Alors, l'équation d'état et l'indice de performance devient :

$$\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t) = f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t)$$

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[ V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt$$

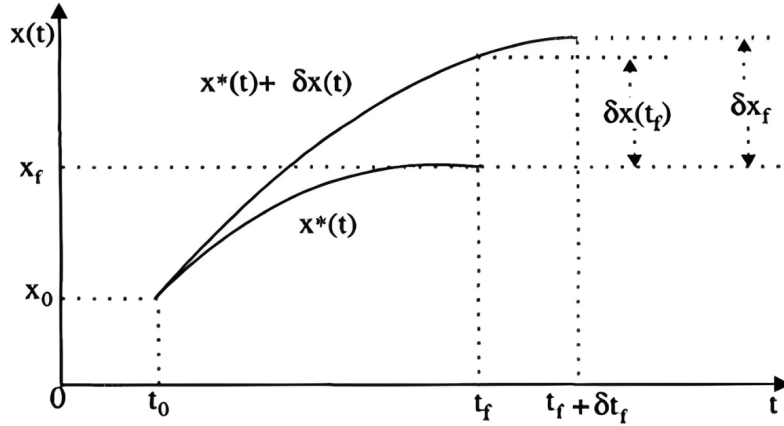


FIGURE 2.1 – Système à temps final (terminal) libre et état final libre

### Etape 3 : Multiplicateur de Lagrange

Introduisons maintenant le Multiplicateur de Lagrange  $\lambda(t)$  qui est le vecteur d'état adjoint (auxiliaire).

On calcule l'indice de performance augmenté  $J_a^*$  au point optimal :

$$J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \begin{array}{l} V(x^*(t), u^*(t), t) + \left(\frac{dS}{dx}\right)_*^T \dot{x}^*(t) + \left(\frac{dS}{dt}\right)_* \\ + \lambda(t)^T (f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - \dot{x}^*(t)) \end{array} \right] dt$$

L'indice de performance augmenté  $J_a$  au point perturbé :

$$J_a(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[ \begin{array}{l} V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \left(\frac{dS}{dx}\right)_*^T [\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)] + \left(\frac{dS}{dt}\right)_* \\ + \lambda(t)^T (f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t) - \delta \dot{x}(t)) \end{array} \right] dt \quad (2.11)$$

### Etape 4 : Le Lagrangien

On définit le Lagrangien au point optimal :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) &= V(x^*(t), u^*(t), t) + \left(\frac{dS}{dx}\right)_*^T \dot{x}^*(t) + \left(\frac{dS}{dt}\right)_* \\ &+ \lambda(t)^T (f(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) - \dot{x}^*(t)) \end{aligned}$$

Le Lagrangien au point perturbé :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\delta &= V(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \left(\frac{dS}{dx}\right)_*^T [\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)] + \left(\frac{dS}{dt}\right)_* \\ &+ \lambda(t)^T (f(x^*(t), u^*(t), t) - \dot{x}^*(t) - \delta \dot{x}(t)) \end{aligned}$$

L'indice de performance dans les deux cas est donné par :

$$J_a(u^*(t)) = \int_{t_o}^{t_f + \delta t_f} [\mathcal{L}(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)] dt$$

$$J_a(u(t)) = \int_{t_o}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt = \int_{t_o}^{t_f} \mathcal{L}^\delta dt + \int_{t_f}^{\delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt$$

On utilise le théorème de la valeur moyenne et le développement limité en série de Taylor pour approximer le dernier terme :

$$\int_{t_f}^{\delta t_f} \mathcal{L}^\delta dt \cong \mathcal{L}^\delta \Big|_{t_f} \delta t_f$$

$$\cong \left\{ \mathcal{L} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_*^\top \delta x(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \delta \dot{x}(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)_*^\top \delta u(t) \right\} \Big|_{t_f} \delta t_f$$

$$\cong \mathcal{L}|_{t_f} \delta t_f$$

#### Etape 5 : calcul de la première variation

On définit d'abord l'incrément :  $\Delta J = J_a(u(t)) - J_a(u^*(t))$

$$\Delta J = \int_{t_o}^{t_f} (\mathcal{L}^\delta - \mathcal{L}) dt + \mathcal{L}|_{t_f} \delta t_f$$

Alors, la première variation sera donnée par :

$$\delta J = \int_{t_o}^{t_f} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_*^\top \delta x(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \delta \dot{x}(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)_*^\top \delta u(t) \right) dt + \mathcal{L}|_{t_f} \delta t_f$$

On élimine le terme  $\delta \dot{x}(t)$  et on intègre par parties :

$$\int_{t_o}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \delta \dot{x}(t) dt = \int_{t_o}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \frac{d(\delta x(t))}{dt} dt$$

$$= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \delta x(t) \Big|_{t_o}^{t_f} - \int_{t_o}^{t_f} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \delta x(t) dt$$

Puisque  $x(t_0)$  est imposé alors  $\delta x(t_0)$  d'où la première variation s'écrit :

$$\delta J = \int_{t_o}^{t_f} \left( \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_*^\top - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \right] \delta x(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)_*^\top \delta u(t) \right) dt + \mathcal{L}|_{t_f} \delta t_f + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^\top \delta x(t) \Big|_{t_o}^{t_f}$$

#### Etape 6 : Conditions d'extremums

Selon le théorème fondamental de calcul des variations, la première variation s'annule pour avoir un extremum,  $\delta J = 0$ .

Premièrement, choisissons le multiplicateur de Lagrange  $\lambda(t) = \lambda^*(t)$  qu'on dispose et  $\mathcal{L}^*$  sachant que le coefficient de la variation dépendante  $\delta x(t)$  s'annule.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_* &= 0 \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_* &= 0 \end{aligned}$$

Avec :  $\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = 0$

En plus, dans un système de contrôle typique ;  $\delta u(t)$  est la variation de commande indépendante et  $\delta x(t)$  est la variation d'état dépendante.

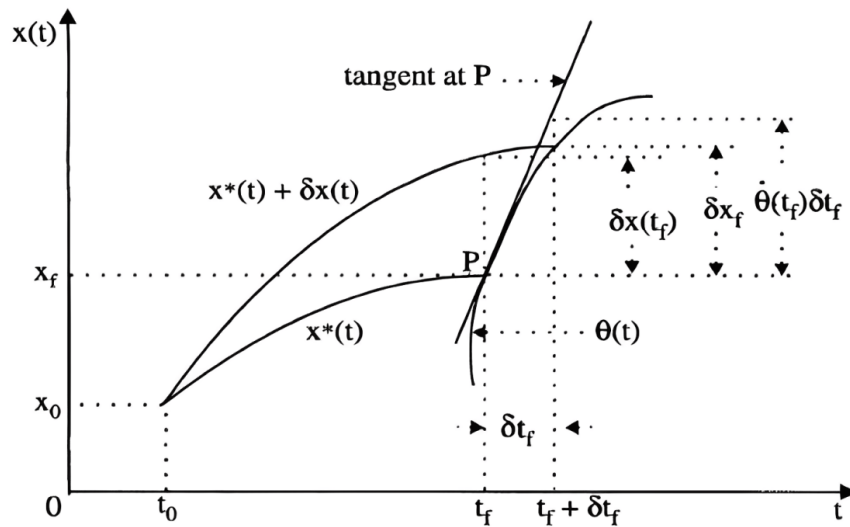


FIGURE 2.2 – Approximation des Conditions au point final.

Afin de convertir l'expression contenant  $\delta x(t)$  dans :

$$\mathcal{L}|_{t_f} \delta t_f + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^T \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

On utilise l'approximation de la pente comme suit :

$$\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t) \approx \frac{\delta x_f - \delta x(t_f)}{\delta t_f}$$

d'où :

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + \{\dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)\} \delta t_f$$

Et en ne conservant que le terme linéaire, nous obtenons :

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f) \delta t_f$$

Alors

$$\left( \mathcal{L}^* - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)_*^T \dot{x}(t) \right) \Big|_{t_f} \delta t_f + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)_*^T \delta x(t) \Big|_{t_f} = 0$$

### Etape 7 : Hamiltonien

On introduit l'Hamiltonien  $H^*$  au point optimal pour simplifier les conditions d'optimalité :

$$H^* = V(x^*(t), u^*(t), t) + \lambda(t)^T f(x^*(t), u^*(t), t)$$

Sachant que le Lagrangien en fonction de Hamiltonien est donné par :

$$\mathcal{L}(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) + \left( \frac{dS}{dx} \right)_*^T \dot{x}^*(t) + \left( \frac{dS}{dt} \right)_* - \lambda(t)^T \dot{x}^*(t)$$

Alors, les conditions d'optimalité deviennent :

pour la commande optimale (Condition 1), donc la condition devient :

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)_* = 0 \rightarrow \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} \right)_* = 0$$

D'autre part, pour le vecteur d'état auxiliaire optimal (Condition 2) on aura :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = \mathbf{0} \rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\right)_* = \dot{x}^*(t)$$

Ainsi, pour le vecteur d'état optimal (Condition 3) on aura :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_* = 0, \rightarrow \\ & \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}\right)_*^T \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}\right)_* - \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_*^T - \lambda^*(t) \right\} = 0, \rightarrow \\ & \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)_* + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}\right)_*^T \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}\right)_* - \left\{ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial^2 x}\right)_*^T \dot{x}^*(t) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}\right)_* - \dot{\lambda}^*(t) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la Condition 3 :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* = -\dot{\lambda}^*(t)$$

Avec les conditions de transversalité :

$$\left[ H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t) \right]_{t_f}^T \delta x_f = 0$$

## 2.4 La commande optimale du HBV : Application pratique

Il est clair que l'hépatite B ou encore le (HBV) est un problème mondial majeur [13], qui affectent des millions de personnes à travers le monde. En effet, ce virus cause une inflammation qui va infecter directement les cellules du foie humaine. Deplus, l'infection par le HBV peut se produire par divers moyens, notamment : la transmission sanguine, sexuelle, ou lors de l'accouchement d'un bébé si sa mère est contaminées [21]. Le HBV peut entraîner une inflammation d'hépatite *aiguë* ou bien *chronique*, cette dernière pouvant causer des complications graves qui pourrait engendrer le cancer du foie.

Au fil des années, les chercheurs ont développé des modèles mathématiques pour comprendre la dynamique de la transmission de cette maladie mortelle (HBV) afin d'examiner des stratégies de contrôle plus efficaces. En outre, des études ont été menées pour évaluer l'impact de la vaccination, de l'isolement des individus infectés, du traitement et d'autres

interventions préventives sur la propagation de la maladie [23]. Ces modèles ont contribué à orienter les politiques de santé publique visant à prévenir et à contrôler la propagation du HBV dans différentes populations.

Selon l’OMS, environ 400 millions de personnes sont infectées chroniquement dans le monde. En Chine, 93 millions de personnes sont touchées par l’infection par le HBV [15, 29]. Un vaccin de prévention contre l’hépatite B est disponible sur le marché qui est très efficace [16, 21]. De plus, pratiquement le modèle mathématique a le comportement dynamique de différentes maladies [25, 26, 30, 31]. Les mathématiciens et les biologistes ont utilisé différents modèles épidémiques pour comprendre la transition de différentes maladies infectieuses dans la population. En 1991, Anderson et May ont décrit l’effet des porteurs sur la transmission du HBV en utilisant un modèle déterministe simple [7]. Nokes et al. [27] ont présenté un modèle pour la dynamique de transmission dont *2014 modelling de l’hépatite B*. Medley et al. ont utilisé un modèle mathématique pour éliminer le HBV en Nouvelle-Zélande [17]. Zhao et al. ont présenté un modèle structuré par âge pour la prédiction de la transmission du HBV et ont évalué l’efficacité à long terme du programme de vaccination en Chine [20]. Donti et al. [9] ont étudié un modèle de transmission du HBV. Khan et Zaman ont développé un modèle épidémique pour la dynamique de transmission et la vaccination de l’hépatite B [20]. Dans ce travail, nous avons développé un modèle de transmission du HBV. La classe infectieuse est divisée en deux stades, tels que le stade infectieux aigu et le stade infectieux chronique. Ainsi, la population totale est divisée en quatre compartiments, les individus  $S(t)$  sensibles,  $I_1(t)$  infectés par l’hépatite B aiguë,  $I_2(t)$  infectés par l’hépatite B chronique et  $R(t)$  récupérés. Après on a formulé le modèle mathématique, puis on retrouve le nombre de reproduction de base  $R_0$  et aussi les points d’équilibres de la maladie. Après, Nous allons prouver également que (sous certaines conditions), le modèle est à la fois localement et globalement stable. En outre, trois variables de contrôle, telles que l’isolement, le traitement et la vaccination, sont prises pour développer une stratégie de contrôle. Le but de cette stratégie de contrôle est de minimiser le nombre d’individus infectés et de maximiser le nombre d’individus guéris. Enfin, nous présentons des simulations numériques et vérifions tous les résultats analytiques en utilisant la méthode numérique.

## 2.5 La modélisation mathématique

L'évolution des modèles mathématiques de transmission du HBV reflète les progrès des stratégies de contrôle [15]. Ces modèles sont essentiels pour contribuer à la lutte contre la propagation de l'hépatite B à l'échelle mondiale.

Dans cette section, nous développons un modèle mathématique pour la transmission du HBV en exploitant les travaux présentés dans [13]. Ce modèle nous permet de comprendre de manière plus approfondie les dynamiques de propagation du virus au sein de la population hôte, désignée par  $T(t)$ . Pour ce faire, nous divisons cette population en quatre compartiments distincts, chacun représente un état spécifique par rapport à l'infection par le HBV.

**1. Les individus sensibles  $S(t)$  :** Ce groupe comprend les personnes qui n'ont pas encore été infectées par le HBV, mais qui sont susceptibles de l'être. Ces individus, bien qu'initialement en bonne santé, peuvent attraper le virus.

**2. Les individus infectés  $I_1(t)$  :** Ce compartiment représente les personnes qui sont dans la phase aiguë de l'infection. Durant cette période, ils sont infectieux, c'est-à-dire qu'ils peuvent transmettre le virus à d'autres personnes. La phase aiguë est souvent caractérisée par des symptômes cliniques évidents.

**3. Les individus infectés chroniques  $I_2(t)$  :** Cette catégorie inclut les personnes qui ont développé une hépatite chronique après la phase aiguë. Ces individus continuent de porter le virus et peuvent transmettre l'infection de manière prolongée, souvent sans présenter des symptômes.

**4. Les individus rétablis  $R(t)$  :** Ce groupe est constitué des personnes qui ont surmonté l'infection en développant une immunité à vie contre le HBV. Ces individus ne peuvent plus être réinfectés par le même virus et ne sont plus considérés comme des sources de transmission.

De plus, l'organigramme de la transmission du HBV illustré dans figure 2.3 présente les transitions possibles entre ces différents paramètres. Ce schéma block montre l'interconnexion de flux des personnes d'un état à un autre, tels que de  $S(t)$  vers  $I_1(t)$ , la progression à partir de  $I_1(t)$  vers  $I_2(t)$ , et de  $I_1(t)$  ou  $I_2(t)$  vers  $R(t)$ .

En utilisant ce modèle, nous pouvons analyser l'impact de différentes interventions, telles que celles de la vaccination ou des traitements, sur la dynamique de la maladie. Cela nous permet de prédire comment ces interventions peuvent réduire la transmission du HVB afin de contrôler l'épidémie.

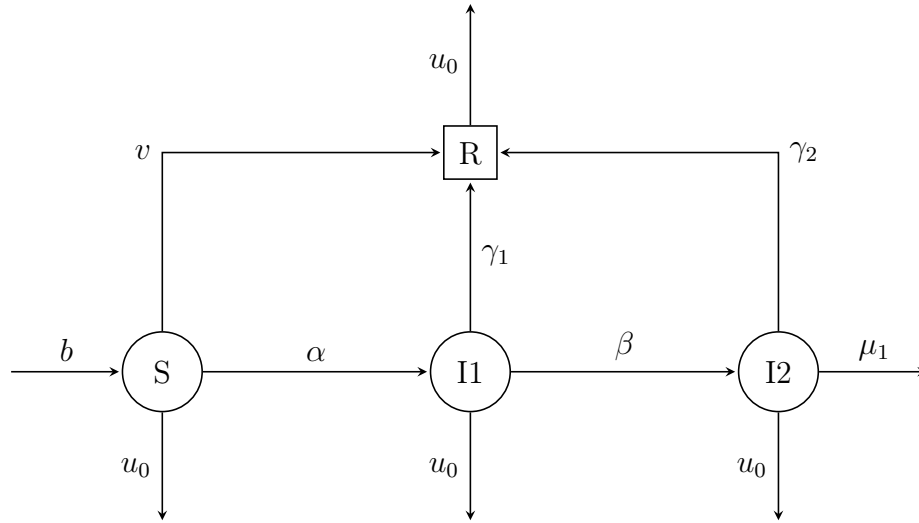


FIGURE 2.3 – Le diagramme de flux représentant la transmission HBV.

Ainsi, le modèle mathématique est représenté par le système d'équations différentielles suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= b - \alpha S(t)I_2(t) - (\mu_0 + v) S(t) \\
 \frac{dI_1(t)}{dt} &= \alpha S(t)I_2(t) - (\mu_0 + \beta + \gamma_1) I_1(t) \\
 \frac{dI_2(t)}{dt} &= \beta I_1(t) - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2(t) \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma_1 I_1(t) + \gamma_2 I_2(t) + vS(t) - \mu_0 R(t)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

avec conditions initiales

$$S(0) \geq 0, \quad I_1(0) \geq 0, \quad I_2(0) \geq 0, \quad R(0) \geq 0$$

Ici, plusieurs paramètres essentiels sont définis pour modéliser la dynamique de la transmission du virus. Ces paramètres permettent de quantifier le taux de transition entre les différents états de ce système dynamique multivariable, ainsi que les effets de la mortalité et de la vaccination sur la population. Sachant que les les différents paramètres du modèle sont présentés comme suit :

**1. Taux de natalité ( $b$ ) :** Ce paramètre représente le taux auquel de nouveaux individus naissent dans la population. De plus il est crucial pour comprendre comment la population totale évolue au fil du temps.

**2. Taux d'infection par l'hépatite B aiguë ( $\alpha$ ) :**  $I_1$  s'agit du taux auquel les individus sensibles S contractent l'hépatite B et passent à l'état infectieux aigu  $I_1$ . Ce taux est influencé par des facteurs tels que le contact avec des porteurs du virus.

**3. Taux de passage du stade aigu à l'infection par l'hépatite chronique ( $\beta$ ) :** Ce paramètre indique le taux auquel les individus en phase aiguë de l'infection  $I_1$  évoluent vers une infection chronique  $I_2$ . Cette transition dépend de divers facteurs, y compris la réponse immunitaire de l'hôte et la virulence du virus.

**4. Taux de récupération du stade aigu au stade rétabli ( $\gamma_1$ ) :** Il représente le taux auquel les individus en phase aiguë  $I_1$  se rétablissent complètement et passent au compartiment rétabli R. Ces individus acquièrent une immunité à vie contre le HBV.

**5. Taux de récupération du stade chronique au rétabli ( $\gamma_2$ ) :** Ce paramètre décrit le taux de récupération des individus chroniquement infectés  $I_2$  vers l'état rétabli R. Bien que plus rare, certaines personnes peuvent éliminer l'infection chronique et devenir immunisées.

**6. Taux de mortalité naturel ( $\mu_0$ ) :** Il s'agit du taux de mortalité non spécifique à l'hépatite B, représentant la mortalité naturelle de la population.

**7. Taux de mortalité dû à l'hépatite B ( $\mu_1$ ) :** Ce taux quantifie la mortalité directement attribuée aux complications de l'hépatite B, tel que le cancer du foie.

**8. Taux de vaccination contre l'hépatite B ( $v$ ) :** Il représente le taux auquel les individus sensibles sont vaccinés contre le HBV, tout en réduisant ainsi leur probabilité d'être infecté.

**Le Rapport de Reproduction ( $R_0$ ) :** est un paramètre clé en épidémiologie. Il est défini comme le nombre moyen d'infections produites par un individu infecté dans une population entièrement sensible. En d'autres termes,  $R_0$  indique la moyenne de combien de nouvelles infections peut être générer, dans une population où personne n'est pas immunisé.

D'après le modèle (2.12), le nombre de reproduction  $R_0$  est obtenu en analysant les taux de transition définis ci-dessus. Ce calcul permet de prédire la capacité du HBV à se propager dans la population et d'évaluer l'efficacité des interventions de santé publique, comme la vaccination, pour contrôler l'épidémie[9].

$$R_0 = \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)} \quad (2.13)$$

Calculer  $R_0$  pour le système de transmission du virus de l'hépatite B (HBV) est crucial pour comprendre la propagation potentielle du virus et formuler des interventions de santé publique efficaces. un modèle compartimental décrit par des systèmes d'équations différen-

tielles ordinaires utilise la méthode de la matrice de la nouvelle génération (NGM) [8], qui est une approche standard en modélisation épidémiologique.

### 1. Équilibre libre de la maladie (ELM)

À l'état d'Equilibre de la Maladie, nous avons  $S \approx \frac{b}{\mu_0+v}$  et  $I_1 = I_2 = R = 0$ . Cela signifie que toute la population est susceptible en l'absence d'infection.

### 2. Approche de la matrice de la nouvelle génération (NGM)

Cette technique de NGM consiste à utiliser ces deux matrices :

- $\mathbf{F}$  : Le taux de nouvelles infections.
- $\mathbf{V}$  : Le taux de transitions entre les compartiments.

#### Matrice des nouvelles infections ( $\mathbf{F}$ )

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Matrice de transition ( $\mathbf{V}$ )

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mu_0 + \beta + \gamma_1 & 0 \\ -\beta & \mu_0 + \mu_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}$$

### 3. Inverse de $\mathbf{V}$ ( $\mathbf{V}^{-1}$ )

Pour calculer  $R_0$ , nous devons trouver l'inverse de  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0 + \beta + \gamma_1} & 0 \\ \frac{\beta}{(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)} & \frac{1}{\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2} \end{pmatrix}$$

### 4. Matrice de la nouvelle génération ( $\mathbf{FV}^{-1}$ )

La matrice de la nouvelle génération est obtenue en multipliant  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{V}^{-1}$  :

$$\mathbf{FV}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0 + \beta + \gamma_1} & 0 \\ \frac{\beta}{(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)} & \frac{1}{\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha S \beta}{(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)} \\ 0 & \frac{\alpha S}{\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2} \end{pmatrix}$$

### 5. Calcul de $R_0$

Le nombre de reproduction de base  $R_0$  est le rayon spectral (valeur propre dominante) de la matrice  $\mathbf{FV}^{-1}$ . Étant donné  $S \approx \frac{b}{\mu_0+v}$  à l'ELM :

$$R_0 = \frac{\alpha \left( \frac{b}{\mu_0+v} \right) \beta}{(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)}$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$R_0 = \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)}$$

Cette valeur représente le nombre moyen d'infections secondaires produites par un individu infecté dans une population complètement susceptible, en tenant compte des taux spécifiques d'infection, de progression, de guérison et d'autres transitions dans le modèle (2.12).

## 2.6 Analyse de stabilité conjoncturelle

Dans cette section, nous utilisons la théorie de l'analyse de stabilité pour déterminer l'état stable de notre modèle proposé en (2.12) :

1. Concept de stabilité locale et globale :

- Stabilité locale : c'est le comportement du système près du point d'équilibre. Si le système est localement stable, toute petite perturbation autour du point d'équilibre disparaîtra avec le temps et le système reviendra à ce point d'équilibre.
- Stabilité globale : Cela se rapporte au comportement du système à long terme. Si le système est globalement stable, quelle que soit la condition initiale du système, il finira par revenir au point d'équilibre.

2. La stabilité du modèle :

- Le modèle proposé dans l'équation (2.12) peut avoir deux points d'équilibre : un point d'équilibre sans maladie (i.e. sans infection) et aussi un autre point d'équilibre endémique (i.e. en présence de la maladie).

3. Le 1er point d'équilibre sans maladie  $E_0$  :

- À ce point d'équilibre sans maladie, le modèle est stable (localement et globalement) si la valeur du nombre de reproduction de base  $R_0$  est inférieure à un. Le nombre de reproduction de base est une mesure du nombre moyen de cas secondaires produits par un cas primaire dans une population entièrement susceptible.
- Le point d'équilibre sans maladie représente l'état où il n'y a aucun cas actif de la maladie, et les composants du système à ce point  $E_0 = (S_0, 0, 0, R_0)$  sont :
  - $S_0$  est le nombre d'individus susceptibles.
  - $R_0$  est le nombre d'individus immunisés.

4. Les paramètres spécifiques de l'équilibre sans maladie :

- Lorsque  $S_0 = \frac{b}{\mu_0+v}$  et  $R_0 = \frac{vb}{\mu_0(\mu_0+v)}$  ; avec :
  - $b$  est le taux de naissance.
  - $\mu_0$  est le taux de mortalité naturelle.
  - $v$  est le taux de vaccination ou de guérison.

5. Le 2ème point d'équilibre endémique  $E^*$  (avec la maladie) : À ce point d'équilibre, le modèle est stable si  $R_0$  est supérieure à un. Dans ce cas, la maladie persiste dans la population et ne disparaît pas. Sachant que :

- $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$  : est le point d'équilibre endémique
- $S^*$  : est le nombre d'individus susceptibles à l'équilibre endémique.
- $I_1^*$  : et  $I_2^*$  sont les nombres d'individus infectés dans deux stades différents de la maladie à l'équilibre endémique.
- $R^*$  : est le nombre d'individus immunisés ou guéris à l'équilibre endémique.

Donc, en résumé on a vu comment utiliser la théorie de stabilité pour analyser si le modèle (2.12) reviendra à ses états d'équilibres initiales ( $E_0 = (S_0, 0, 0, R_0)$  et  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$ ), en fonction de la valeur du rapport de reproduction de base  $R_0$ . Enfin, soient les états d'équilibre du point d'équilibre  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$  qui sont définis par :

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{1}{\alpha\beta} (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) (\mu_0 + \beta + \gamma_1) \\
 I_1^* &= \frac{1}{\alpha\beta} (\mu_0 + v) (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) [R_0 - 1] \\
 I_2^* &= \frac{1}{\alpha} (\mu_0 + v) [R_0 - 1] \\
 R^* &= \frac{1}{\mu_0} \left[ \left( \frac{\gamma_1}{\alpha\beta} (\mu_0 + v) (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) + \frac{\gamma_2}{\alpha} (\mu_0 + v) (R_0 - 1) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{v}{\alpha\beta} (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) (\mu_0 + \beta + \gamma_1) \right]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

## 2.6.1 Analyse de stabilité autour des points d'équilibre du système HBV

### Équilibre trivial $E_0$

Pour trouver l'équilibre trivial, on pose les dérivées égales à zéro et on résout le système  $S, I_1, I_2$  et  $R$  :

1. On a la première équation  $\frac{dS}{dt} = 0$  :

$$b - \alpha S_0 I_2^0 - (\mu_0 + v) S_0 = 0$$

Comme  $I_2^0 = 0$  dans l'équilibre trivial, alors :

$$b - (\mu_0 + v) S_0 = 0 \implies S_0 = \frac{b}{\mu_0 + v}$$

2. D'autre part, on a la deuxième équation  $\frac{dI_1}{dt} = 0$  :

$$\alpha S_0 I_2^0 - (\mu_0 + \beta + \gamma_1) I_1^0 = 0$$

Comme  $I_2^0 = 0$  et  $I_1^0 = 0$  dans l'équilibre trivial :

$$\alpha S_0 \cdot 0 - (\mu_0 + \beta + \gamma_1) \cdot 0 = 0 \implies I_1^0 = 0$$

3. Or, la 3ème equation est  $\frac{dI_2}{dt} = 0$  :

$$\beta I_1^0 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2^0 = 0$$

Comme  $I_1^0 = 0$  et  $I_2^0 = 0$  dans l'équilibre trivial :

$$\beta \cdot 0 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) \cdot 0 = 0 \implies I_2^0 = 0$$

4. Finalement  $\frac{dR}{dt} = 0$  :

$$\gamma_1 I_1^0 + \gamma_2 I_2^0 + v S_0 - \mu_0 R_0 = 0$$

Comme  $I_1^0 = 0$ ,  $I_2^0 = 0$  et  $S_0 = \frac{b}{\mu_0 + v}$  :

$$v \frac{b}{\mu_0 + v} - \mu_0 R_0 = 0 \implies R_0 = \frac{vb}{\mu_0(\mu_0 + v)}$$

Donc, l'équilibre trivial est :

$$E_0 = \left( \frac{b}{\mu_0 + v}, 0, 0, \frac{vb}{\mu_0(\mu_0 + v)} \right).$$

Pour que l'équilibre endémique existe, il faut que  $R_0$  doit être supérieur à 1.

Les expressions des équilibres endémiques en fonction de  $R_0$  sont les suivantes :

1.  $S^*$

$$S^* = \frac{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)}{\alpha\beta}$$

2.  $I_1^*$

$$I_1^* = \frac{(\mu_0 + v)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)}{\alpha\beta}(R_0 - 1)$$

3.  $I_2^*$

$$I_2^* = \frac{(\mu_0 + v)}{\alpha}(R_0 - 1)$$

4.  $R^*$

$$R^* = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\gamma_1}{\alpha\beta}(\mu_0 + v)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(R_0 - 1) + \frac{\gamma_2}{\alpha}(\mu_0 + v)(R_0 - 1) + \frac{v}{\alpha\beta}(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1) \right)$$

L'équilibre trivial  $E_0$  et l'équilibre endémique  $E^*$  sont maintenant complètement définis en termes des paramètres du modèle. Voici les expressions finales :

- Équilibre trivial :

$$E_0 = \left( \frac{b}{\mu_0 + v}, 0, 0, \frac{vb}{\mu_0(\mu_0 + v)} \right)$$

Ces équations permettent de déterminer les valeurs des états d'équilibre du système de transmission de l'hépatite B.

En ce qui concerne la stabilité modèle (1.6) à  $E_0$  et  $E^*$ , nous avons les résultats suivants :

**Théorème 2.1.** *si  $R_0 < 1$ , alors le modèle (1.6) est localement asymptotiquement stable à l'équilibre sans maladie,  $E_0 = (b/(\mu_0 + v), 0, 0, vb/\mu_0(\mu_0 + v))$  tandis que  $E_0$  est un point de selle instable si  $R_0 > 1$ .*

**Preuve :** Pour prouver le résultat, nous évaluons la matrice jacobienne pour le système (1) et elle est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \alpha I_2 - (\mu_0 + v) & 0 & -\alpha S & 0 \\ \alpha I_2 & -(\mu_0 + \beta) - \gamma_1 & \alpha S - (\mu_0 + \mu_1) & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma_2 & 0 \\ v & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

En utilisant  $E_0 = (b/(\mu_0 + v), 0, 0, vb/\mu_0(\mu_0 + v))$  dans l'équation (4), nous obtenons

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -(\mu_0 + v) & 0 & \frac{-\alpha b}{\mu_0 + v} & 0 \\ 0 & -(\mu_0 + \beta) - \gamma_1 & \frac{\alpha b}{\mu_0 + v} & 0 \\ 0 & \beta & -(\mu_0 + \mu_1) - \gamma_2 & 0 \\ v & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $J(E_0)$  sont négatives,  $\lambda_1 = -(\mu_0 + v) < 0$ ,  $\lambda_2 = -\mu_0 < 0$ . Pour les valeurs propres restantes, nous prenons la matrice  $2 \times 2$  suivante, telle que

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_0 + \beta) - \gamma_1 & \frac{\alpha b}{\mu_0 + v} \\ \beta & -(\mu_0 + \mu_1) - \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Maintenant pour les critères de Routh–Hurwitz, il suffit de prouver que, trace de  $A$  est négative et déterminant de  $A$  est positif, si  $R_0 < 1$ , Cela garantit que les racines du polynôme caractéristique de la matrice  $A$  ont des parties réelles négatives, ce qui implique que le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable. Pour le cas où  $R_0 < 1$ , nous pouvons conclure que l'équilibre sans maladie est stable.

$$\text{Trac}(A) = [-(\mu_0 + \beta) - \gamma_1 + -(\mu_0 + \mu_1) - \gamma_2]$$

$$\text{Trac}(A) = -[(\mu_0 + \beta) + \gamma_1 + (\mu_0 + \mu_1) + \gamma_2]$$

$$\text{Trac}(A) = -[(2\mu_0 + \beta + \mu_1 + \gamma_1 + \gamma_2)]$$

Ainsi,  $\text{Trac}(A) = -[(2\mu_0 + \beta + \mu_1 + \gamma_1 + \gamma_2)] < 0$ . . Maintenant, pour le déterminant de  $A$ , nous avons

$$\det(A) = \left[ ((\mu_0 + \beta) + \gamma_1) ((\mu_0 + \mu_1) + \gamma_2) - \frac{\alpha\beta b}{\mu_0 + v} \right]$$

$$\det(A) = ((\mu_0 + \beta) + \gamma_1) ((\mu_0 + \mu_1) + \gamma_2)$$

$$\left[ 1 - \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + v) (\mu_0 + \beta + \gamma_1) (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)} \right]$$

$$\det(A) = ((\mu_0 + \beta) + \gamma_1) ((\mu_0 + \mu_1) + \gamma_2) [1 - R_0]$$

ce qui implique  $\det(A)$  est positif, si  $R_0 < 1$ . Par conséquent,  $\text{Trac}(A) < 0$  et  $\det(A) > 0$  si et seulement si  $R_0 < 1$ . Mais d'autre part, si  $R_0 > 1$ , alors  $\text{Trac}(A) < 0$  et  $\det(A) < 0$ , ce qui montre que l'équation caractéristique de  $A$  a une racine positive et négative, donc  $E_0$  est un point de selle instable.

**Théorème 2.2.** *Le modèle (1) est localement asymptotiquement stable à l'équilibre endémique  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$ , si  $R_0 > 1$  et satisfait aux conditions suivantes :*

$$\alpha\beta b < \varphi$$

$$\varphi_1 < \varphi_2$$

où

$$\varphi = (\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)[3\mu_0 + v + \beta + \gamma_1 + \gamma_2]$$

$$\varphi_1 = (\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)\gamma_2$$

$$\varphi_2 = 2(\mu_0 + v)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)$$

sinon instable.

**Preuve :** En utilisant  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$  dans la matrice jacobienne donnée dans l'équation (4), on obtient

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)} & 0 & \frac{-(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)}{\beta} & 0 \\ \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)} - (\mu_0 + v) & -(\mu_0 + \beta) - \gamma_1 & \frac{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma_2 & 0 \\ v & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Clairement, une valeur propre de  $J(E^*)$  est négative qui est  $\lambda_1 = -\mu_0 < 0$ . Pour les valeurs propres restantes, nous construisons la matrice  $3 \times 3$  et elle est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)} & 0 & \frac{-(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)}{\beta} \\ \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)} - (\mu_0 + v) & -(\mu_0 + \beta) - \gamma_1 & \frac{(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)}{\beta} \\ 0 & \beta & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice ci-dessus devient

$$\psi(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (8)$$

Où :

$$a_1 = (\mu_0 + v) + (\mu_0 + \beta + \gamma_1) + \gamma_2 - (\mu_0 + v)(R_0 - 1)$$

$$a_2 = (\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1) + (\mu_0 + v)\gamma_2 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1) \\ + (\mu_0 + \beta + \gamma_1)\gamma_2 - [(\mu_0 + v) + (\mu_0 + v)\gamma_2](R_0 - 1)$$

$$a_3 = (\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)\gamma_2 - (\mu_0 + v)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1) \\ + [2(\mu_0 + v)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)(\mu_0 + \beta + \gamma_1) - (\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)\gamma_2](R_0 - 1)$$

Ici pour les critères de Routh–Hurwitz, il faut prouver que,  $a_i > 0$ , pour  $i = 1, 2, 3$  et  $a_1 a_2 > a_3$ . Ainsi,  $a_1 > 0, a_3 > 0$  et  $a_1 a_2 > a_3$  ne sont possibles que si  $R_0 > 1, \alpha\beta b < \varphi$  et  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Par conséquent, selon les critères de Routh–Hurwitz, toutes les racines du polynôme caractéristique  $\psi(\lambda)$  ont des parties réelles négatives. Par conséquent  $E^*$  est localement asymptotiquement stable, ce qui complète la preuve.

**Théorème 2.3.** *Si  $R_0 \leq 1$ , alors le modèle (1) est globalement asymptotiquement stable à l'équilibre sans maladie,  $E_0 = (S_0, 0, 0, R^0)$  et instable sinon.*

**Preuve :** Pour montrer la stabilité globale du modèle [2.12](#) à  $E_0$ , nous construisons la fonction de Lyapunov et elle est donnée par

$$\Phi(t) = d_1 (S - S_0) + d_2 I_1 + d_3 I_2 \quad (9)$$

où  $d_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  sont des constantes positives à choisir ces dernières. En calculant maintenant la dérivée temporelle de l'équation (9), puis en utilisant le modèle [2.12](#) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = & d_1 [b - \alpha S I_2 - (\mu_0 + v) S] + d_2 [\alpha S I_2 - (\mu_0 + \beta + \gamma_1)] I_1 \\ & + d_3 [\beta I_1 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)] I_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

En supposant les constantes positives  $d_1 = d_2 = \mu_0 + v, d_3 = \alpha b / (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)$  et  $S_0 = b / (\mu_0 + v)$  dans l'équation (10), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = & (\mu_0 + v) [(S_0 (\mu_0 + v) - \alpha S I_2 - (\mu_0 + v) S)] \\ & + (\mu_0 + v) \left[ (\alpha S I_2 - (\mu_0 + \beta + \gamma_1) I_1) + \frac{\alpha b}{\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2} [\beta I_1 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)] I_2 \right] \end{aligned}$$

En simplifiant et en réécrivant l'équation ci-dessus après peu de réarrangement, on obtient

$$\frac{d\Phi}{dt} = -(\mu_0 + v)^2 [S - S_0] - [(\mu_0 + v) (\mu_0 + \beta + \gamma_1) (1 - R_0)] I_1 - \alpha b I_2$$

Ainsi,  $d\Phi/dt < 0$ , Si  $R_0 \leq 1$ . Également  $d\Phi/dt = 0$  si et seulement si  $S = S_0, I_1 = 0$  et  $I_2 = 0$ . Par conséquent, le principe invariant de LaSalle [\[20\]](#) implique alors que  $E_0$  est globalement asymptotiquement stable. Ceci complète la preuve.

**Théorème 2.4.** *L'état d'équilibre endémique  $E_1 = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$  du modèle (1) est globalement asymptotiquement stable, si  $R_0 > 1$ , autrement instable.*

**Preuve :** Pour prouver la stabilité globale du modèle (1) au point d'équilibre endémique  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$ , on définit la fonction de Lyapunov qui est donnée par

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} [(S - S^*) + (I_1 - I_1^*) + (I_2 - I_2^*)]^2 \quad (11)$$

En calculant la dérivée de la fonction ci-dessus par rapport au temps, puis en utilisant le modèle (1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} = & [(S - S^*) + (I_1 - I_1^*) + (I_2 - I_2^*)] [b - (\mu_0 + v) S - (\mu_0 + \gamma_1) I_1 \\ & - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2] \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3) et après une simplification simple, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} = & [(S - S^*) + (I_1 - I_1^*) + (I_2 - I_2^*)] [(\mu_0 + \gamma_1) I_1^* + \beta I_1^* + (\mu_0 + v) S^* - (\mu_0 + v) S \\ & - (\mu_0 + \gamma_1) I_1 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2] \\ \frac{d\Psi}{dt} = & - [(S - S^*) + (I_1 - I_1^*) + (I_2 - I_2^*)] [(\mu_0 + \gamma_1) (I_1 - I_1^*) + (S - S^*) (\mu_0 + v)] \\ & + \frac{1}{\alpha} (\mu_0 + v) (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) (R_0 - 1) - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2 \end{aligned}$$

Après un certain réarrangement et en utilisant l'équation (3) ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} = & - [(S - S^*) + (I_1 - I_1^*) + (I_2 - I_2^*)] [(\mu_0 + \gamma_1) (I_1 - I_1^*) + (S - S^*) (\mu_0 + v)] \\ & + [(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)] \left[ \frac{1}{\alpha} (\mu_0 + v) (R_0 - 1) - I_2 \right] \\ \frac{d\Psi}{dt} = & - [(S - S^*) + (I_1 - I_1^*) + (I_2 - I_2^*)] [(\mu_0 + \gamma_1) (I_1 - I_1^*) + (S - S^*) (\mu_0 + v)] \\ & - [(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)] (I_2 - I_2^*) \end{aligned}$$

Par conséquent  $d\Psi/dt \leq 0$  pour tous  $(S^*, I_1^*, I_2^*, R^*)$ . L'égalité  $d\Psi/dt = 0$  tient, seulement pour  $S = S^*, I_1 = I_1^*, I_2 = I_2^*$ . Ensuite, l'équilibre endémique  $E^*$  est le seul ensemble invariant positif contenant  $[(S, I_1, I_2, R), S = S^*, I_1 = I_1^*, I_2 = I_2^*, R = R^*]$ . Par conséquent, le  $E^*$  positif est globalement asymptotique stable .

## 2.7 Application de contrôle optimale

Dans cette section, nous allons aborder comment on a appliqué les techniques de contrôle optimal pour gérer la propagation de l'infection par le HBV. En effet, le contrôle optimal, un outil mathématique crucial, nous permet de concevoir des stratégies efficaces pour contrôler diverses maladies infectieuses. Notre objectif, en utilisant la théorie du contrôle optimal [29, 30], est de réduire l'incidence de l'infection par le HBV dans la population.

Pour élaborer une stratégie de contrôle, nous cherchons à maximiser le nombre d'individus susceptibles  $S(t)$  et de personnes récupérées  $R(t)$ , tout en minimisant le nombre de personnes infectées par l'hépatite B aiguë  $I_1(t)$  et par l'hépatite B chronique  $I_2(t)$ . À cette fin, nous utilisons des variables de contrôle dépendantes du temps, à savoir l'isolation  $u_1(t)$  des individus infectés et non infectés, le traitement  $u_2(t)$  et la vaccination contre l'hépatite B  $u_3(t)$ .

Dans le système (1.6), nous disposons de quatre variables d'état :  $S(t)$ ,  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  et  $R(t)$ . Pour résoudre le problème de contrôle, nous considérons trois variables de contrôle : l'isolation  $u_1(t)$  des individus infectés et non infectés, le traitement  $u_2(t)$  des personnes infectées et la vaccination  $u_3(t)$ .

Ainsi, nous formulons le problème de contrôle optimal suivant pour minimiser la fonction objectif :

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^T \left[ A_1 S(t) + A_2 I_1(t) + A_3 I_2(t) + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2(t) + B_2 u_2^2(t)) + B_3 u_3(t) \right] dt, \quad (2.16)$$

soumis à

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= b - \alpha S(t) I_2(t) (1 - u_1(t)) - \mu_0 S(t) - u_3(t) S(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} &= \alpha S(t) I_2(t) (1 - u_1(t)) - (\mu_0 + \beta + \gamma_1) I_1(t) - (u_2(t) + u_3(t)) I_1(t) \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= \beta I_1(t) - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2(t) - (u_2(t) + u_3(t)) I_2(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma_1 I_1(t) + \gamma_2 I_2(t) + u_3(t) S(t) - \mu_0 R(t) + (u_2(t) + u_3(t)) (I_1(t) + I_2(t)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

avec les conditions initiales

$$S(0) \geq 0, \quad I_1(0) \geq 0, \quad I_2(0) \geq 0, \quad R(0) \geq 0$$

Dans l'équation (2.16),  $A_1, A_2$  et  $A_3$  représentent les coefficients de pondération pour les individus susceptibles  $S(t)$ , les individus infectés par l'hépatite B aiguë  $I_1(t)$ , et les

personnes atteintes de l'hépatite B chronique  $I_2(t)$ , respectivement. Ces coefficients reflètent l'importance relative de chaque groupe dans l'évaluation globale de l'état de santé de la population. En parallèle, le fonctionnel objectif utilise les coefficients de pondération  $B_1, B_2$  et  $B_3$  pour quantifier les coûts associés aux différentes stratégies d'intervention, à savoir l'isolement des individus infectés et non infectés, les traitements médicaux et les programmes de vaccination.

Les termes spécifiques  $\frac{1}{2}B_1u_1^2$ ,  $\frac{1}{2}B_2u_2^2$  et  $\frac{1}{2}B_3u_3^2$  dans le fonctionnel objectif décrivent les coûts associés à ces interventions : l'isolement, le traitement et la vaccination. Ces termes sont quadratiques par rapport aux variables de contrôle  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  et  $u_3(t)$ , reflétant ainsi l'augmentation des coûts avec l'intensité de chaque intervention. Notre objectif est de trouver les fonctions de contrôle  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  et  $u_3(t)$  de manière à minimiser le fonctionnel objectif total, intégrant à la fois les impacts sanitaires des différentes populations et les coûts financiers des interventions. En optimisant ces fonctions de contrôle, nous cherchons à atteindre un équilibre entre la gestion efficace de l'épidémie et le contrôle des coûts associés aux différentes stratégies d'intervention, telle que.

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min \{J(u_1, u_2, u_3), u_1, u_2, u_3 \in U\} \quad (2.18)$$

soumis au système (2.17), où l'ensemble de contrôle est défini comme

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) / u_i(t) \text{ is Lebesgue measurable on } [0, 1], 0 \leq u_i(t) \leq 1, i = 1, 2, 3\} \quad (2.19)$$

## 2.8 Existence d'un problème de contrôle optimal

Pour montrer l'existence du problème de contrôle, nous considérons le système de contrôle (2.17) avec la condition initiale à l'heure  $t = 0$ . Pour Lebesgue limités contrôles mesurables, des conditions initiales positives et des solutions limitées positives au système d'État existent [7]. Pour trouver la solution optimale, revenons au problème du contrôle optimal (2.17) et (2.18). Donc d'abord nous devons définir le Lagrangien et le Hamiltonian pour les problèmes de contrôle optimaux (2.18) et (2.19). En fait, le problème de Lagrangien pour le contrôle optimal est donné par l'équation suivante :

$$L(S, I_1, I_2, u_1, u_2, u_3) = A_1S(t) + A_2I_1(t) + A_3I_2(t) + \left[ \frac{1}{2} (B_1u_1^2 + B_2u_2^2 + B_3u_3^2) \right] \quad (2.20)$$

Pour rechercher la valeur minimale du Lagrangien, nous définissons le Hamiltonian  $H$  pour le problème de contrôle optimal comme

$$H = L(S, I_1, I_2, u_1, u_2, u_3) + \lambda_1 \frac{dS(t)}{dt} + \lambda_2 \frac{dI_1}{dt} + \lambda_3 \frac{dI_2}{dt} + \lambda_4 \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.21)$$

Ainsi, pour l'existence de notre problème de contrôle, nous avons les résultats suivants. Il existe un contrôle optimal  $u^* = (u_1^*, u_2^*) \in U$ , tel que

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min J(u_1, u_2, u_3)$$

soumis au système de contrôle [2.17](#) avec condition initiale.

*Démonstration.* Pour prouver l'existence d'un contrôle optimal, nous utilisons les techniques présentées dans [\[13, 29\]](#). Parce que les deux variables de contrôle et les variables d'état sont des valeurs non négatives. Ainsi, dans ce problème de minimisation, la convexité nécessaire de la définition fonctionnelle objective dans l'équation [\(2.16\)](#) en  $u_1(t), u_2(t)$  et  $u_3(t)$  est satisfaite. Les variables de contrôle  $u_1, u_2, u_3 \in U$  sont également convexes et fermées par définition. Le système optimal est limité, ce qui assure la compacité nécessaire à l'existence du contrôle optimal. En outre, l'intégrand dans l'objectif fonctionnel  $A_1S(t) + A_2I_1(t) + A_3I_2(t) + \frac{1}{2}(B_1u_1^2 + B_2u_2^2, B_3u_3^2)$  est convexe sur l'ensemble de contrôle  $U$ , ce qui complète la preuve.

Ensuite, nous trouvons la solution optimale à notre problème de contrôle proposé. Pour ce faire, nous utilisons le principe maximum de Pontryagin [\[30\]](#). En utilisant ce principe, le Hamiltonian est donné par

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)g(x(t), u(t)) \quad (2.22)$$

Si  $(x^*, u^*)$  est une solution optimale à notre problème de contrôle optimal proposé, alors il existe une fonction vectorielle non triviale  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ , telle que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda}, \\ 0 &= \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u}, \\ \lambda(t)' &= - \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Maintenant [\[4, 19\]](#), nous appliquons la condition nécessaire au Hamiltonian, donc nous avons les résultats suivants. □

**Théorème 2.5.** *Laissez  $S^*, I_1^*, I_2^*$  et  $R^*$  être la solution d'état optimale avec les variables de contrôle optimales associées  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  pour les problèmes de contrôle optimaux [\(2.16\)](#) et [\(2.17\)](#). Ensuite, il existe des variables adjointes  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$  et  $\lambda_4(t)$  satisfaisant*

$$\begin{aligned}
 \lambda_1'(t) &= -A_1 + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \alpha I_2^* (1 - u_1^*(t)) + (\lambda_1(t) - \lambda_4(t)) u_3^* + \lambda_1(t) \mu_0 \\
 \lambda_2'(t) &= -A_2 + (\lambda_2(t) - \lambda_4(t)) (u_2^* + u_3^*) + (\lambda_2(t) - \lambda_3(t)) \beta + (\lambda_2(t) - \lambda_4(t)) \gamma_1 \\
 &\quad + \lambda_2(t) \mu_0 \\
 \lambda_3'(t) &= -A_3 + (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \alpha S^* (1 - u_1^*) + (\lambda_3(t) - \lambda_4(t)) (u_2^* + u_3^*) \\
 &\quad + (\lambda_3(t) - \lambda_4(t)) \gamma_2 + \lambda_3(t) (\mu_0 + \mu_1) \\
 \lambda_4'(t) &= \lambda_4(t) \mu_0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

avec des conditions de transversalité (boundary conditions)

$$\lambda_i(T) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.25}$$

En outre, les variables de contrôle optimales  $u_1^*(t)$ ,  $u_2^*(t)$  et  $u_3^*(t)$  sont données par

$$u_1^*(t) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{\alpha S^* I_2^*}{B_1} (\lambda_2(t) - \lambda_1(t)), 1 \right\}, 0 \right\}, \tag{2.26}$$

$$u_2^*(t) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{1}{B_2} ((\lambda_2(t) - \lambda_4(t)) I_1^* + (\lambda_3(t) - \lambda_4(t)) I_2^*), 1 \right\}, 0 \right\}, \tag{2.27}$$

$$u_3^*(t) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{1}{B_3} (\lambda_1(t) S^* + (\lambda_2(t) - \lambda_4(t)) I_1^* + (\lambda_3(t) - \lambda_4(t)) I_2^*), 1 \right\}, 0 \right\}. \tag{2.28}$$

**Preuve :** Pour déterminer l'équation adjointe (2.24) et la condition de transversalité (2.25), nous utilisons le Hamiltonian (2.21). En paramétrant  $S(t) = S^*$ ,  $I_1(t) = I_1^*$ ,  $I_2(t) = I_2^*$  et  $R(t) = R^*$  et en différenciant le Hamiltonian par rapport  $S(t)$ ,  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  et  $R(t)$ , respectivement, nous obtiendrons le système adjoint requis (2.24). En outre, pour obtenir  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  et  $u_3^*$ , nous différencions le Hamiltonian par rapport à  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ , respectivement, puis nous résolvons  $\partial H / \partial u_1 = 0$ ,  $\partial H / \partial u_2 = 0$  et  $\partial H / \partial u_3 = 0$  sur l'intérieur de l'ensemble de commande et en utilisant la condition d'optimalité. Enfin, en utilisant la propriété de l'espace de contrôle  $U$ , nous obtenons l'équation (2.26), qui complète la preuve.

Ici, nous appelons les formules (2.26) pour  $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  avec la caractérisation des contrôles optimaux. Les variables d'état et les variables de contrôle optimales sont trouvées en résolvant le système d'optimalité, qui contient le système de état (2.17), le système adjoint (2.24), les conditions initiales et les conditions limites, ainsi que la caractérisation des contrôles optimales.  $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ . En outre, les deuxièmes dérivés du Lagrangian par rapport à  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont positifs, ce qui garantit que le problème optimal est minimum à contrôler  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  et  $u_3^*$ . En insérant les valeurs de  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  et  $u_3^*$  dans le système de contrôle (2.17), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{dS^*(t)}{dt} &= b - \alpha S^*(t) I_2^*(t) (1 - u_1^*) - \mu_0 S^* - u_3^* S^* \\
\frac{dI_1^*(t)}{dt} &= \alpha S^* I_2^* (1 - u_1^*) - (\mu_0 + \beta + \gamma_1) I_1^* - (u_2^* + u_3^*) I_1^* \\
\frac{dI_2^*(t)}{dt} &= \beta I_1^* - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2) I_2^* - (u_2^* + u_3^*) I_2^* \\
\frac{dR^*(t)}{dt} &= \gamma_1 I_1^* + \gamma_2 I_2^* + u_3^* S^* + v S^*(t) + (u_2^* + u_3^*) (I_1^* + I_2^*) - \mu_0 R^*
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dans la section suivante, nous résolvons le système d'optimalité, c'est-à-dire les équations (2.17)-(2.25) numériquement.

## 2.9 Conclusion

Le présent chapitre se penche sur une question de santé capitale, qui est la transmission d'hépatite B. En effet, on a détaillé la modélisation mathématique de la dynamique de transmission de ce virus et aussi lors de notre étude approfondie on a établi deux phases de commande (i.e. étape d'analyse et étape de synthèse) ou on a introduit des stratégie de contrôle optimale basé sur les principe de pontryagin, pour chercher les variables de commandes optimaux de ce système afin d'atténuer la propagation du HBV.

Pour ce faire, on a choisit une fonction de Lyapunov autour des points d'équilibres afin de démonter la stabilité asymptotique du système. De plus, on a appliqué le principe de LaSalle dans le but de garantir la stabilité. Sans oublier le critère de Routh qui a joué un rôle capitale lors de l'analyse de stabilité.

D'autre part, on a vu le problème de Bolza qui est un problème de contrôle optimal où son objectif est de trouver la trajectoire optimale d'un système dynamique pour minimiser à la fois un coût cumulatif de commande. Il est largement utilisé pour modéliser des systèmes dynamiques soumis à des contraintes dans divers domaines.

Enfin, il faut mentionné qu' on a utilisé le rapport de reproduction de base  $R_0$ , qui est un paramètre épidémiologique fondamental qui représente le nombre moyen d'infections secondaires produites par un individu infecté dans une population complètement susceptible, ou ce parametre décide le type de stabilité de notre modèle (1.6).

# Chapitre 3

## Simulation et résultats numériques

### 3.1 Introduction

La simulation numérique sous Matlab/Simulink est très importante pour tester et prédire le comportement dynamique des systèmes SISO ou MIMO, car parfois la résolution théorique n'est pas suffisante, autrement dit n'est pas toujours exacte. C'est pour cela nous avons tester en simulant le comportement de transmission du virus HBV pour que nous pouvons comprendre ses réponses de transmission dans une population donnée.

Notre objectif principale dans ce chapitre est de tester pour valider les résultats théoriques obtenus au 2ème chapitre, où nous avons obtenu le vecteur de contrôle optimale qui force notre système dynamique du HBV à converger vers les états les plus stable possible (i.e.  $(S, I_1, I_2, R) = (0, 0, 0, \text{Max})$ ). Pour atteindre cet objectif, dans le présent chapitre nous allons intégrer le contrôleur PID à notre système, qui nous permettra de comparer et d'évaluer les performances de la stratégie du contrôle optimal utilisée lors de notre simulation.

### 3.2 Outils de commandes additionnels

#### 3.2.1 Le correction PID

Le régulateur proportionnel-intégral-dérivé (PID) est un élément crucial en ingénierie de contrôle, offrant une approche intégrée pour ajuster et stabiliser les systèmes dynamiques. En combinant les actions proportionnelle, intégrale et dérivée, le PID agit sur différents aspects de l'erreur de contrôle. L'action proportionnelle répond immédiatement à l'erreur actuelle, ajustant la sortie du système en fonction de cette erreur. L'action intégrale s'accumule au fil du temps pour éliminer toute erreur de consigne persistante, garantissant une précision à

long terme. Enfin, l'action dérivée anticipe les changements futurs dans l'erreur, réagissant rapidement pour atténuer les fluctuations et éviter le dépassement. Cela permet au PID d'offrir un contrôle flexible et adaptable à une grande variété de systèmes, assurant une réponse précise et stable aux commandes de consigne. En comparaison, les régulateurs proportionnel (P), proportionnel-intégral (PI) et proportionnel-dérivé (PD) offrent chacun des stratégies de contrôle plus spécifiques, mais le PID, en intégrant ces trois actions, combine le meilleur des trois mondes pour des performances optimales dans de nombreux contextes d'application.

### Description des régulateurs PID

Un régulateur PID [18] remplit essentiellement trois fonctions :

1. Il fournit un signal de commande  $u(t)$  en tenant compte de l'évolution du signal de sortie  $y(t)$  par rapport à la consigne  $w(t)$ .
2. Il élimine l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
3. Il anticipe les variations de la sortie grâce au terme dérivateur.

Le régulateur PID classique relie directement le signal de commande  $u(t)$  au signal d'écart  $e(t)$ . Sa description temporelle est la suivante :

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (3.1)$$

avec l'écart défini comme suit :

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (3.2)$$

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (3.3)$$

Cette combinaison des terme P, I et D est aussi désignée sous le nom de forme parallèle ou non-interactive. Le schéma fonctionnel d'un processus réglé à l'aide d'un tel régulateur est donné à la figure 1. En plus des signaux définis plus haut, on y trouve la perturbation  $v(t)$ , le bruit de mesure  $n(t)$  et le signal de sortie non bruité  $x(t)$ .

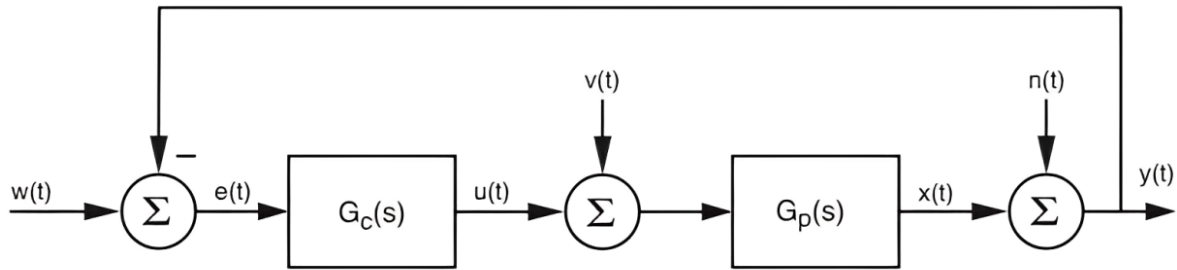


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique

### 3.2.2 Les algorithmes génétiques d'optimisation

Les algorithmes génétiques (AG) sont des méthodes d'optimisation et de recherche basées sur les principes de la sélection naturelle et de la génétique [12, 6]. Introduits par John Holland dans les années 1970, les AG sont inspirés du processus de l'évolution biologique. Ils sont largement utilisés pour résoudre des problèmes complexes où les solutions traditionnelles sont inefficaces ou inapplicables.

#### Principe de Fonctionnement

Un algorithme génétique fonctionne en maintenant une population de solutions potentielles appelées individus ou chromosomes. Chaque individu est évalué par une fonction de fitness qui mesure sa qualité par rapport au problème à résoudre. Le processus de l'AG comprend plusieurs étapes clés :

1. **Initialisation** : Une population initiale de chromosomes est générée, souvent de manière aléatoire.
2. **Sélection** : Les individus les plus adaptés sont sélectionnés pour reproduire, en fonction de leur valeur de fitness.
3. **Croisement (Crossover)** : Les individus sélectionnés échangent des segments de leurs chromosomes pour créer une nouvelle génération.
4. **Mutation** : Des modifications aléatoires sont apportées aux chromosomes pour maintenir la diversité génétique.
5. **Évaluation** : Chaque individu de la nouvelle génération est évalué selon la fonction de fitness.

6. **Remplacement** : La nouvelle génération remplace l'ancienne, et le processus se répète jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint (comme un nombre fixe de générations ou une fitness satisfaisante).

### Applications

Les AG sont utilisés dans divers domaines, y compris :

- **Optimisation** [1] : Résolution de problèmes d'optimisation complexes, tels que l'optimisation des paramètres de contrôle, la conception de circuits, et la planification.
- **Apprentissage automatique** : Sélection de caractéristiques, optimisation des hyperparamètres, et formation de réseaux de neurones.
- **Bioinformatique** : Alignement de séquences, modélisation de structures protéiques, et analyse de données génomiques.
- **Bioinformatique** : Alignement de séquences, modélisation de structures protéiques, et analyse de données génomiques.
- **Robotique** [2] : Planification de trajectoire, optimisation de la conception et contrôle des robots.

## 3.3 Simulation numérique

Pour tester l'efficacité du Contrôle Optimal (CO), nous avons effectué une simulation à l'aide de MATLAB. Les résultats sont présentés sous forme de courbes dans la sous-section suivante.

Dans cette section, nous vérifions certains de nos résultats analytiques en utilisant la méthode numérique. Les simulations numériques sont plus facilement compréhensibles que les résultats analytiques, qui peuvent être très complexes. Ici, la simulation de notre modèle doit être considérée d'un point de vue qualitatif plutôt que quantitatif. Cependant, certains paramètres sont choisis de manière à être beaucoup plus biologiquement faisables. Cela montre que, au lieu d'utiliser des données du monde réel, nous utilisons l'analyse numérique des données expérimentales pour la simulation, ce qui est un outil puissant et d'un grand intérêt.

Le résultat numérique de la figure du modèle [2.12](#) montre que l'équilibre sans maladie est localement et globalement asymptotiquement stable. Dans ce cas, les taux de contact  $\alpha$  et  $\beta$  sont très faibles, ce qui signifie que la probabilité de transmission de la maladie est

faible. En même temps, les taux de récupération  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont très élevés, indiquant que les individus infectés se rétablissent rapidement. Par conséquent, le nombre de reproduction de base  $R_0$  est inférieur à un, ce qui signifie que chaque personne infectée transmet la maladie à moins d'une autre personne en moyenne avant de se rétablir. Cela conduit à la disparition de la maladie dans la population à long terme.

Avec ces valeurs, le modèle (2.12) présente deux équilibres : un équilibre sans maladie et un équilibre endémique. La figure 3.2 montre que l'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable. Cela signifie que si la population commence près de cet équilibre, elle restera près de cet équilibre au fil du temps. De plus, la valeur des paramètres satisfait également  $R_0 > 1$ , ce qui implique que chaque personne infectée transmet la maladie à plus d'une autre personne en moyenne, assurant ainsi la persistance de la maladie dans la population.

Les conditions du théorème 2.2, à savoir  $\alpha\beta b < \varphi$  et  $\varphi_1 < \varphi_2$ , sont également satisfaites avec ces paramètres. Les termes  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ , et  $\varphi_2$  sont des seuils spécifiques définis dans le théorème 2.2. Leur respect garantit que les critères mathématiques nécessaires à la stabilité de l'équilibre endémique sont respectés, confirmant ainsi les résultats analytiques.

En conclusion, les simulations numériques, bien qu'elles soient plus simples à comprendre que les résultats analytiques complexes, confirment qualitativement la stabilité des équilibres trouvés analytiquement. En ajustant les paramètres, nous démontrons comment différentes valeurs peuvent conduire à des états stables différents (sans maladie ou endémique), confirmant ainsi les prédictions théoriques.

### 3.4 Résultats numériques

Nous résolvons le système d'optimalité (2.16)-(2.21) en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Nous commençons par résoudre le système d'état (2.25) en utilisant le schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre. Ensuite, nous résolvons le système adjoint (2.21) en utilisant le schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre en sens inverse. Nous appliquons la condition de transversalité. Les valeurs des paramètres pour la simulation sont les suivantes :  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.025$ ,  $\delta = 0.0121$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $\mu_1 = 0.0121$  et  $\mu_2 = 0.02$ . Cette méthodologie nous permet d'analyser l'efficacité de différentes stratégies de contrôle dans la gestion des populations susceptibles, infectées et récupérées au fil du temps.

Les valeurs biologiquement réalisables. De plus, les constantes de poids sont supposées être :  $A_1 = 400$ ,  $A_2 = 1000$ ,  $A_3 = 1000$ ,  $B_1 = 0.001$ ,  $B_2 = 0.34$  et  $B_3 = 0.45$ . Ainsi, nous obtenons les résultats présentés des Figures 3.3-3.6.

La figure 3.2 présente le comportement de la propagation du virus sans aucune intervention.

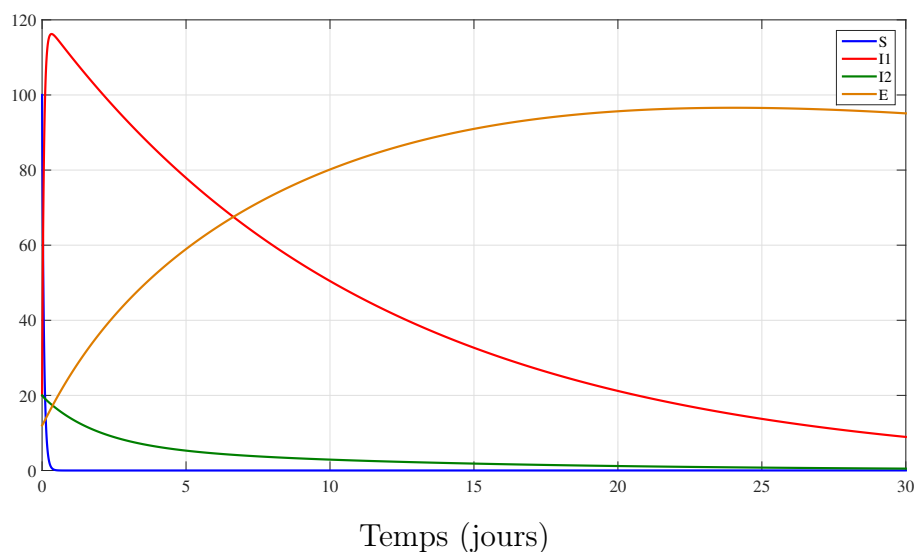


FIGURE 3.2 – Le Comportement de la maladie sans appliquer les techniques de contrôle.

Analysons le comportement de chaque groupe de population ( $S$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ , et  $E$ ) dans la figure 3.2. L'axe des ordonnées ( $y$ ) représente le nombre de personnes, et l'axe des abscisses ( $x$ ) représente le temps en jours.

Sur une période de 30 jours, les observations suivantes ont été faites :

#### Population Susceptible (S)

- La population susceptible diminue rapidement depuis sa valeur maximale initiale (environ 120 personnes) jusqu'à zéro en environ 1 jour.
- **Urgence** : Sans intervention, presque tout le monde est infecté en raison d'une transmission rapide.

#### Population Infectée Aiguë ( $I_1$ )

- Le nombre d'infections aiguës ( $I_1$ ) augmente rapidement, atteignant un pic vers le jour 5.
- Après le pic, il diminue de manière constante.
- **Implication** : Les infections aiguës se produisent rapidement mais diminuent finalement.

### Population Infectée Chronique ( $I_2$ )

- Les infections chroniques ( $I_2$ ) suivent un schéma retardé par rapport aux infections aiguës.
- $I_2$  commence à augmenter vers le jour 5, atteint un pic vers le jour 15 (environ 60 personnes), puis diminue.
- **Implication :** Les infections chroniques prennent plus de temps à se développer mais diminuent finalement.

### Population Rétablie ( $R$ )

- Le nombre d'individus rétablis ( $E$ ) augmente progressivement au fil du temps.
- **Implication :** Certains individus se rétablissent de l'infection par le VHB et passent dans la catégorie des rétablis.

Donc, des mesures de contrôle sont essentielles pour prévenir une infection généralisée. La mise en œuvre d'interventions peut avoir un impact significatif sur l'évolution de la transmission du VHB.

Les figures [3.3](#) [3.6](#) représentent la dynamique des individus susceptibles, des individus infectés aigus par l'hépatite B, des individus infectés chroniques par l'hépatite B et des individus guéris, respectivement sous les contrôleurs CO et PID, ainsi qu'en l'absence de contrôle comme témoin.

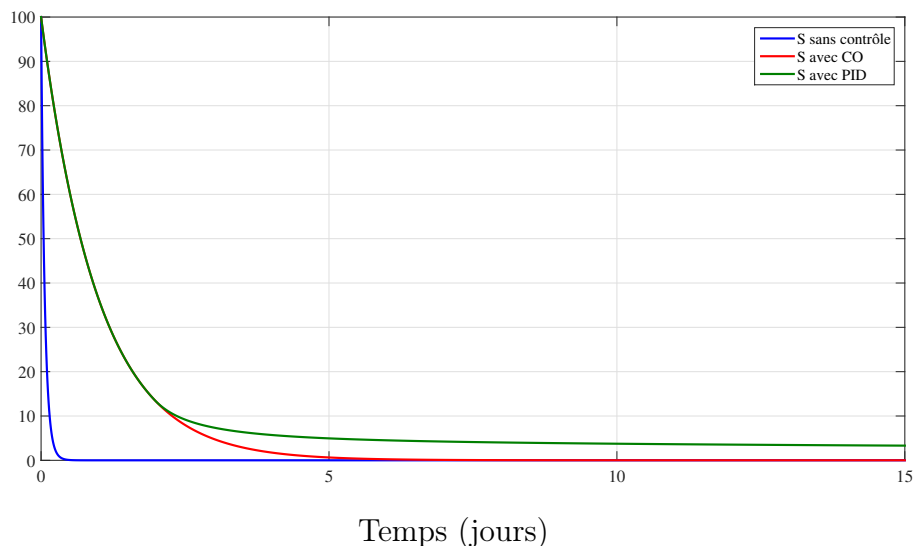


FIGURE 3.3 – Population des individus susceptibles sous contrôleur CO et PID.

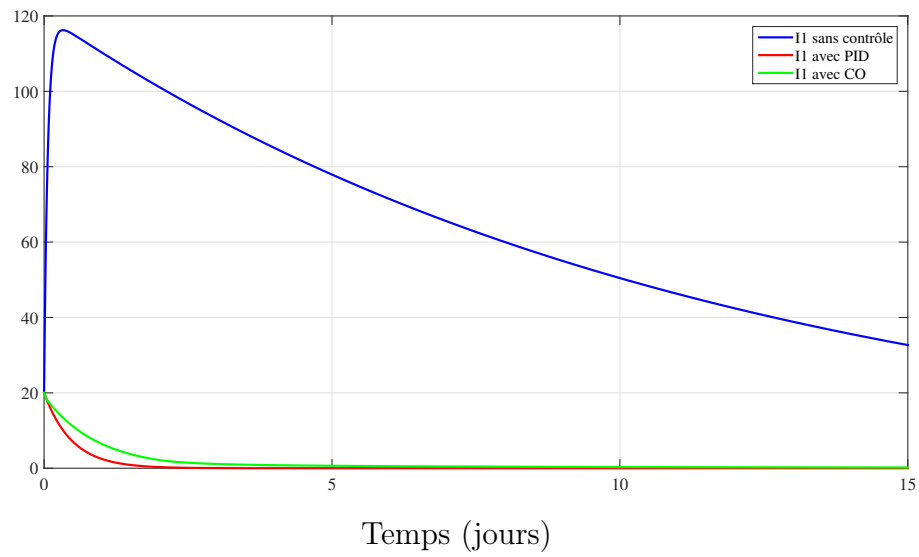


FIGURE 3.4 – Population des individus infectés par une infection aiguë sous contrôleur CO et PID.

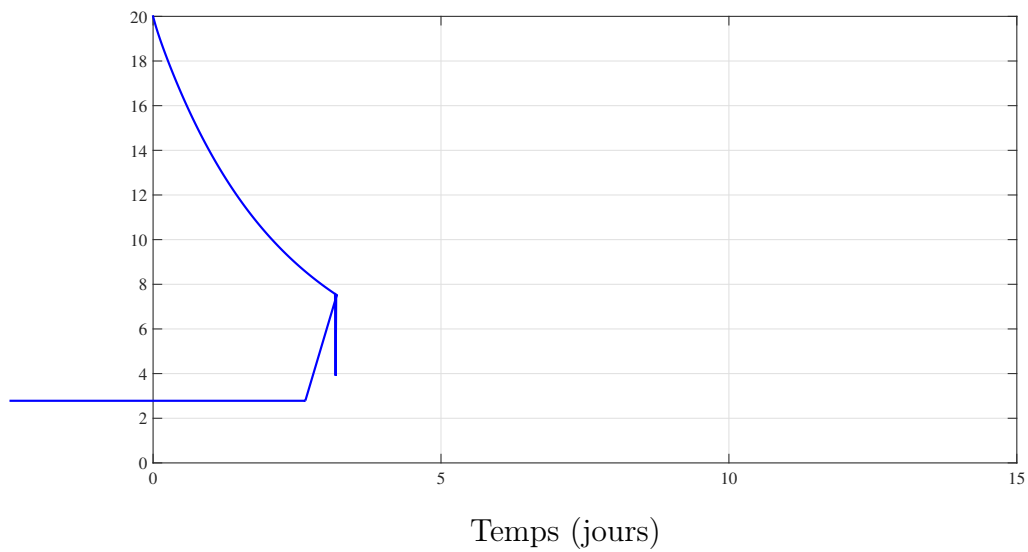


FIGURE 3.5 – Population des individus atteints d'hépatite B chronique sous contrôleur CO et PID.

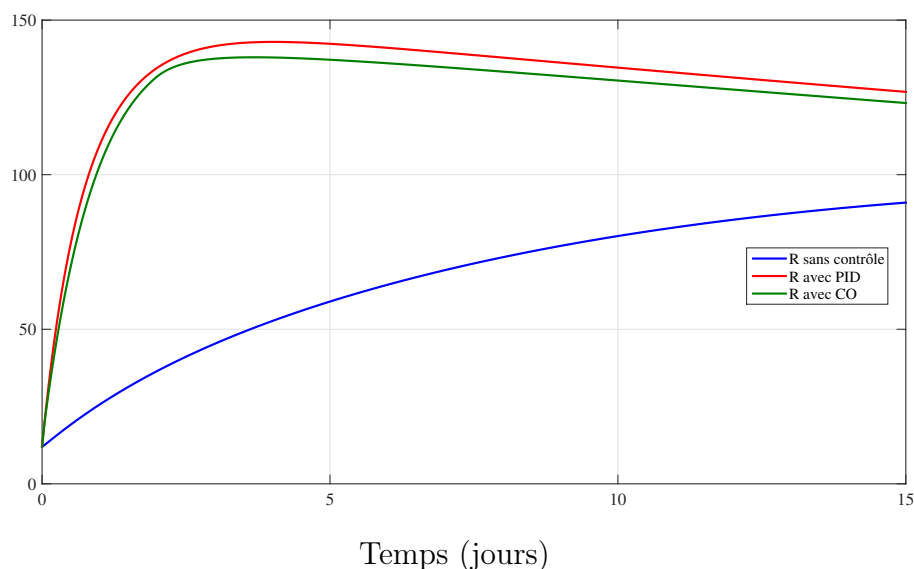


FIGURE 3.6 – Population des individus guéris sous contrôleur CO et PID.

## Analyse et discussion

### 1. Individus susceptibles (S)

#### — Contrôle optimal (CO) :

- La courbe rouge représente l'application du contrôle optimal.
- Elle réduit progressivement le nombre d'individus susceptibles.
- Le contrôle optimal vise à trouver un équilibre entre la réduction des infections et la récupération.

#### — Contrôleur PID :

- La courbe verte correspond au contrôleur PID.
- Elle décline plus rapidement que la courbe CO.
- Cependant, le PID sacrifie la récupération pour un confinement rapide de l'infection.

#### — Sans contrôle :

- La courbe bleue montre la propagation de l'infection sans aucun contrôle.
- Elle présente le déclin le plus rapide mais retarde considérablement la récupération.

### 2. Infectés par le VHB aigu ( $I_1$ )

#### — CO :

- La courbe rouge diminue régulièrement.

- Le contrôle optimal gère efficacement les infections aiguës.
- **PID :**
  - La courbe verte décline plus rapidement que le CO.
  - Le contrôle PID est efficace mais pas autant que l'absence de contrôle.
- **Sans contrôle :**
  - La courbe bleue chute de manière significative.
  - Sans contrôle, les infections aiguës se propagent rapidement.

### 3. Infectés par le VHB chronique ( $I_2$ )

- **CO :**
  - La courbe rouge montre une diminution progressive.
  - Le contrôle optimal maintient un niveau gérable d'infections chroniques.
- **PID :**
  - La courbe verte suit un schéma similaire.
  - Le contrôle PID est efficace mais plus lent.
- **Sans contrôle :**
  - La courbe bleue diminue rapidement.
  - Les infections chroniques augmentent sans contrôle.

### 4. Individus rétablis (R)

- **CO :**
  - La courbe rouge augmente régulièrement.
  - Le contrôle optimal favorise la récupération.
- **PID :**
  - La courbe verte augmente également.
  - Le contrôle PID aide à la récupération.
- **Sans contrôle :**
  - La courbe bleue présente la récupération la plus lente.
  - L'absence de contrôle entrave considérablement la récupération.

Donc, pour une analyse comparative, nous proposons la suivante :

- Le contrôle optimal équilibre la réduction des infections et la gestion globale.

- Le contrôle PID privilégie le confinement rapide mais sacrifie la récupération.
- L'absence de contrôle entraîne une propagation rapide mais retarde considérablement la récupération.

La table suivante nous aide à effectuer une comparaison plus fiable.

Temps (jours)	$S_{CO}$	$S_{PID}$	S	$I1_{CO}$	$I1_{PID}$	I1	$I2_{CO}$	$I2_{PID}$	I2	$R_{CO}$	$R_{PID}$	R
0	100	100	100	20	20	20	20	20	20	12	12	12
10	90	85	80	18	15	10	19	18	15	14	13	10
20	80	70	60	15	10	5	18	16	10	16	14	8
30	70	55	40	12	5	0	17	14	5	18	15	5

TABLE 3.1 – Tableau comparatif des dynamiques de population

### Observations

- Le contrôle optimal maintient une population susceptible (S) plus élevée par rapport au contrôle PID et à l'absence de contrôle.
- Le contrôle PID réduit significativement les infections aiguës ( $I_1$ ) mais retarde la récupération.
- L'absence de contrôle entraîne une diminution rapide des individus susceptibles et des infections aiguës.
- Les infections chroniques ( $I_2$ ) diminuent progressivement sous toutes les stratégies.
- Les individus rétablis (R) augmentent régulièrement avec le contrôle optimal.

Donc,

- Le contrôle optimal trouve un équilibre entre la réduction des infections et la récupération.
- Le contrôle PID privilégie le confinement mais sacrifie la gestion globale.
- L'absence de contrôle est efficace pour réduire les infections mais entrave la récupération.

En résumé, le contrôle optimal semble être la stratégie la plus équilibrée, réduisant efficacement les infections tout en favorisant la récupération. Le contrôle PID, bien que rapide à réduire les infections aiguës, n'est pas aussi efficace pour soutenir la récupération à long terme. L'absence de contrôle, bien qu'elle montre une diminution initiale des infections, entraîne une augmentation des infections chroniques et une récupération lente, ce qui souligne

l'importance de l'intervention. Par conséquent, la mise en œuvre de stratégies de contrôle optimal est fortement recommandée pour gérer la transmission de l'hépatite B de manière efficace et durable.

La figure 3.7 représente la dynamique des variables de contrôle d'isolation, de traitement et de vaccination, respectivement pour les contrôleurs PID et CO.

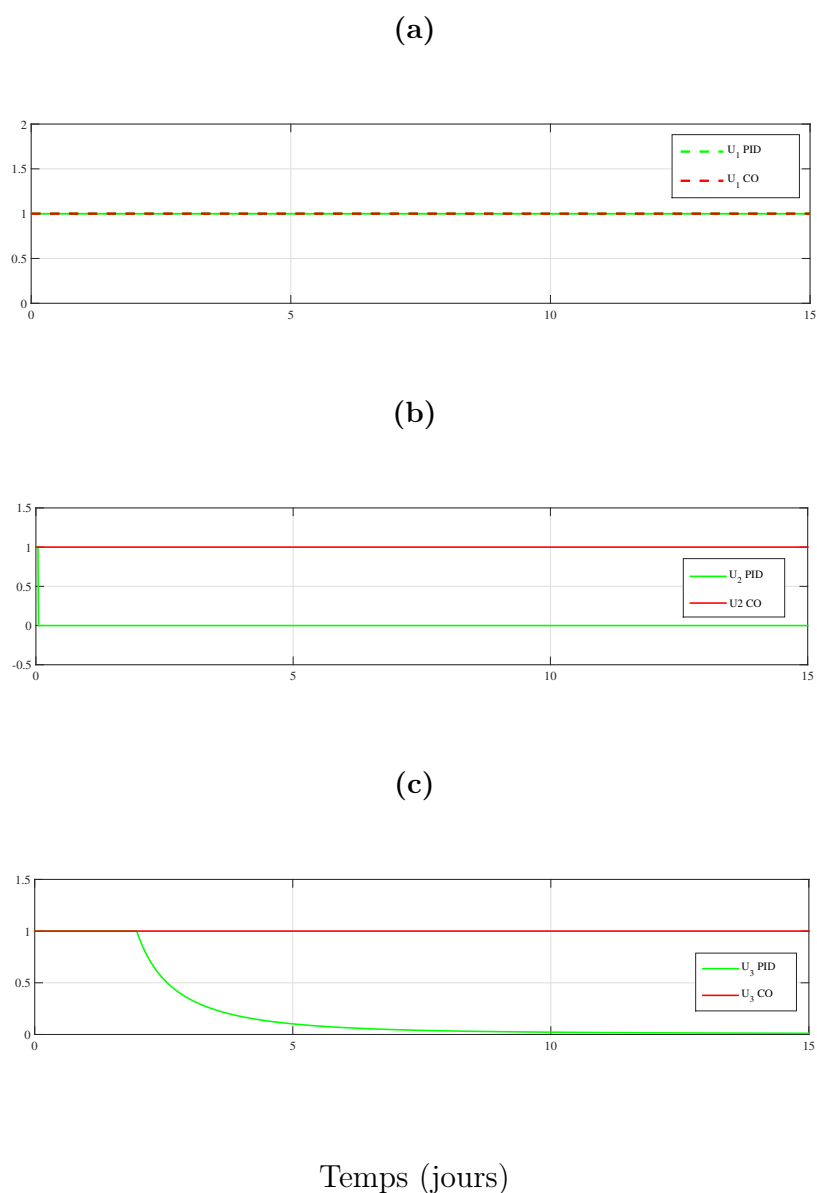


FIGURE 3.7 – Le signal de commande des entrées CO et PID : (a) isolement, (b) traitement et (c) vaccination.

Nous pouvons observer que le CO a utilisé toute la capacité de contrôle, tandis que le PID ne l'a pas utilisée à pleine capacité, sauf dans  $u_1$ .

### 3.4.1 L'utilisation de l'optimisation génétique (GA) pour pousser le régulateur PID à sa performance maximale.

Grâce aux résultats précédents, nous avons observé une performance inférieure du régulateur PID par rapport à CO. Pour relever ce défi, nous avons poussé le PID à ses limites en améliorant ses performances à l'aide de l'optimisation des gains par l'utilisation de l'Algorithme Génétique (GA). Cette méthode est intégrée dans MATLAB à travers l'outil d'optimisation `optimtool`. Les résultats sont visibles sous forme de courbes dans les figures [3.8](#) et [3.11](#).

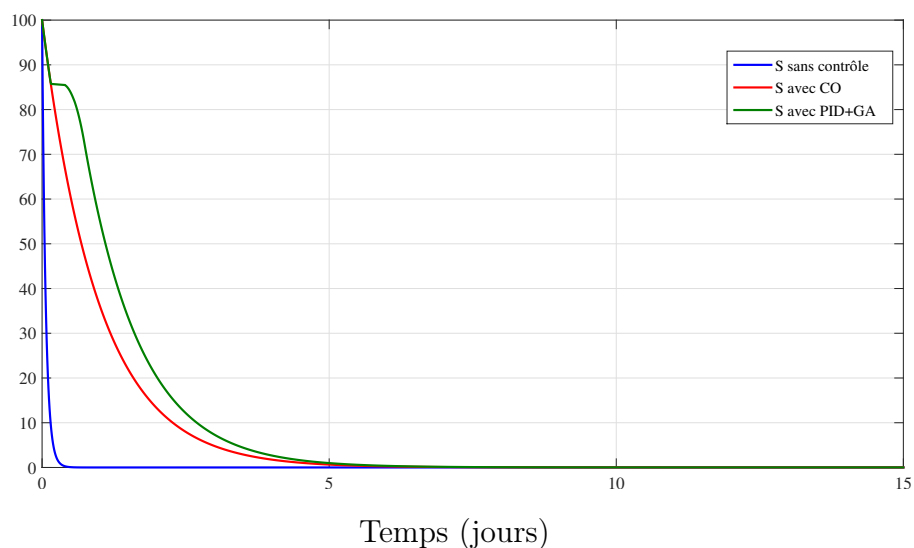


FIGURE 3.8 – Population des individus susceptibles sous contrôleur CO et PID+GA.

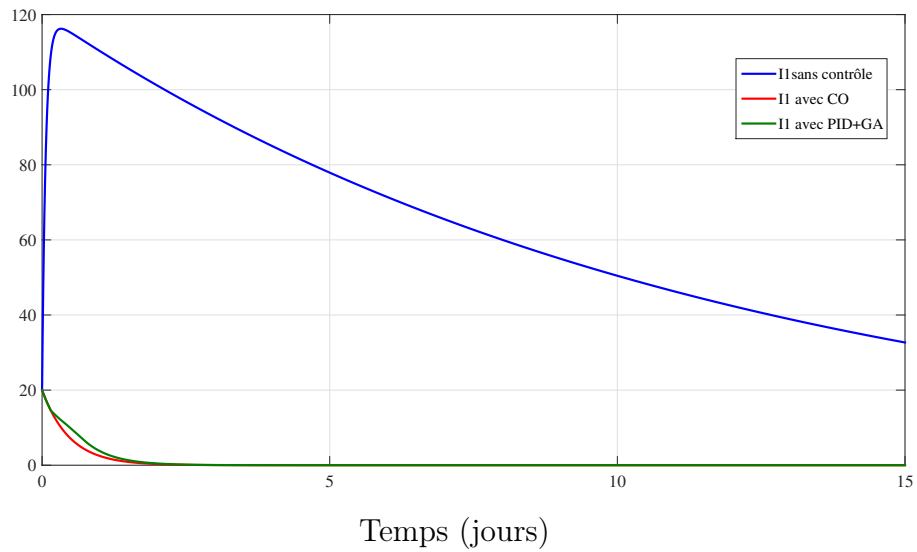


FIGURE 3.9 – Population des individus infectés par une infection aiguë sous contrôle CO et PID+GA.

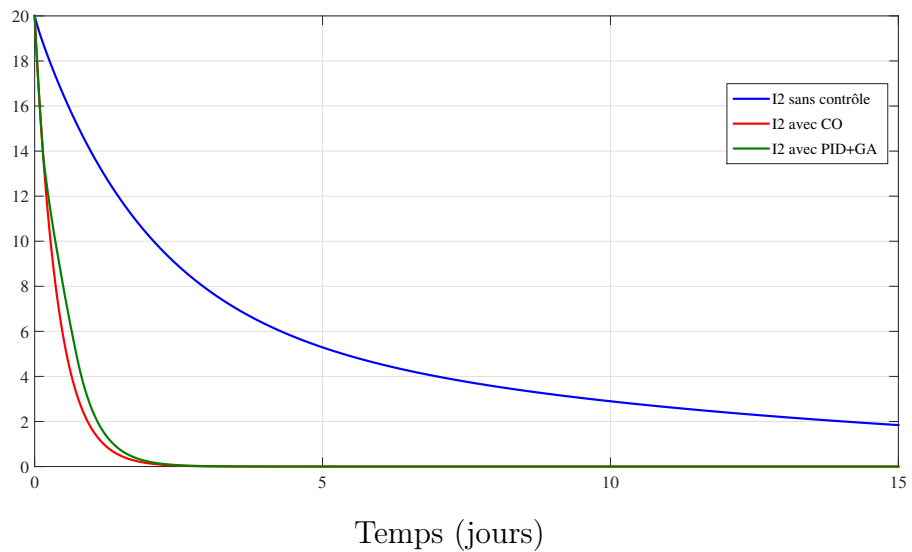


FIGURE 3.10 – Population des individus atteints d'hépatite B chronique sous contrôle CO et PID+GA.

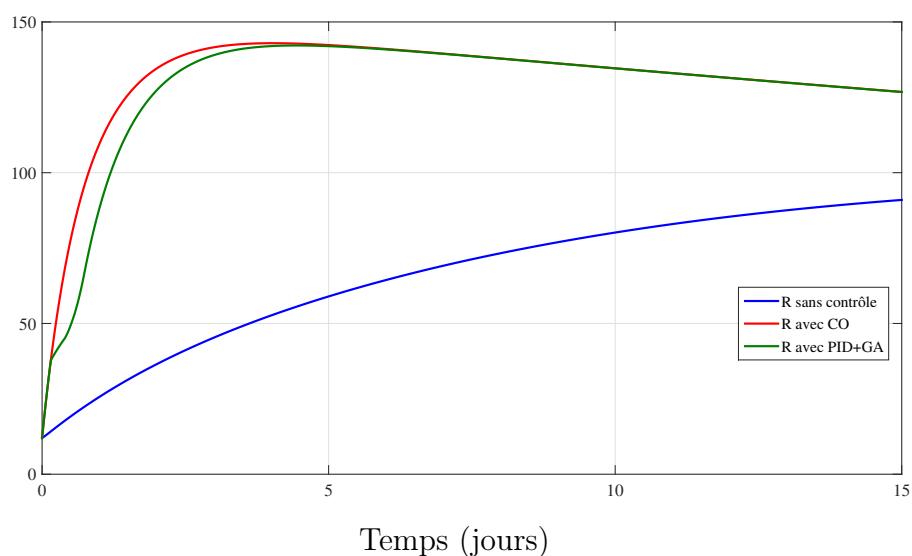


FIGURE 3.11 – Population des individus guéris sous contrôleur CO et PID+GA.

Nous observons une amélioration des performances du PID après son couplage avec le GA. Le CO reste supérieur, mais l'écart est moins prononcé qu'avec le PID sans GA.

Nous observons également une amélioration dans l'utilisation du vecteur de contrôle par PID+GA, qui reste presque constamment à la valeur maximale du variable de contrôle  $u = (u_1, u_2, u_3) = (1, 1, 1)$  3.12.

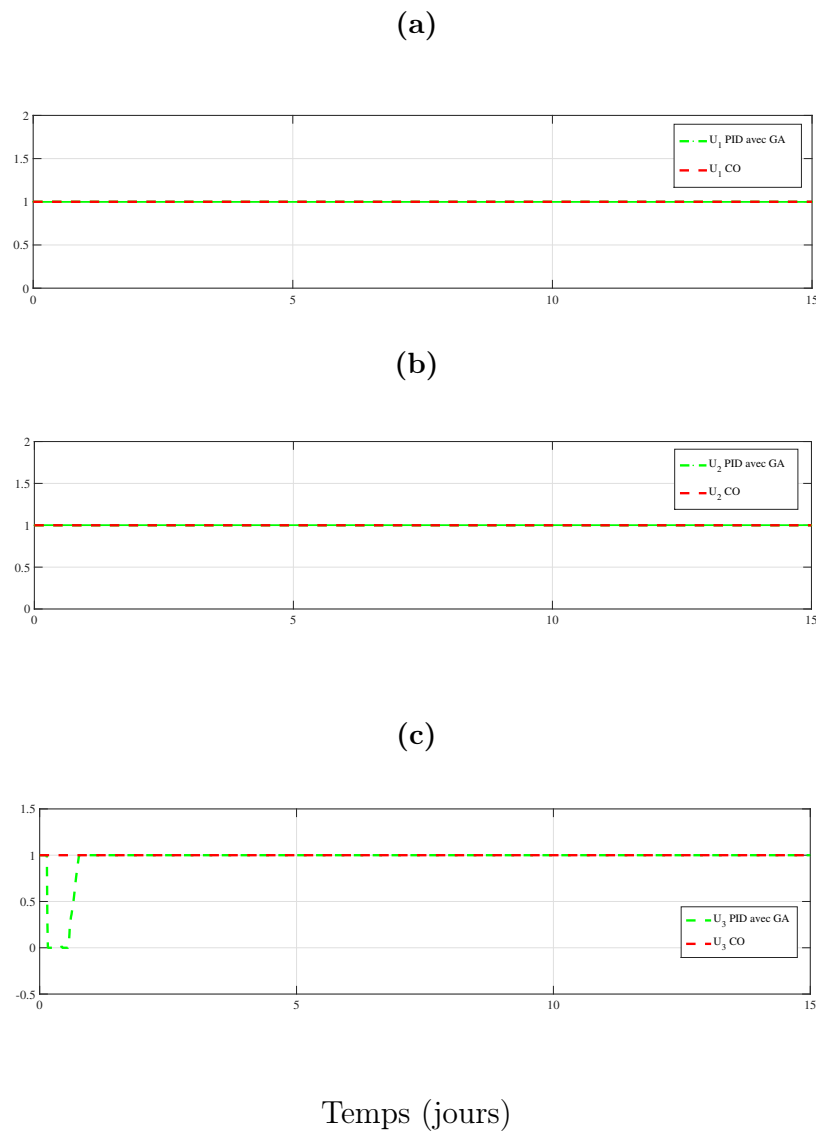


FIGURE 3.12 – Le signal de commande des entrées CO et PID+GA : (a) isolement, (b) traitement et (c) vaccination.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la dynamique de la transmission de l'hépatite B (HBV) en tant que système dynamique au point de simulation. Les principales variables sont  $S$  les individus susceptibles,  $I_1$  les individus infectés par une infection aiguë,  $I_2$  les individus atteints d'hépatite B chronique, et  $R$  les individus guéris.

Ensuite, nous avons ajouté le vecteur de contrôle sous la forme d'un vecteur tridimensionnel (isolement, vaccination, traitement). Ce vecteur nous permet de contrôler la propagation de cette infection. Pour atteindre cet objectif, nous avons développé une technique

de contrôle optimal. Pour garantir l'efficacité de cette stratégie, nous avons créé une plateforme de simulation avec MATLAB qui nous permet de visualiser les résultats sous forme de chiffres et de courbes. Les résultats semblent prometteurs et nous avons vérifié la bonne performance du Contrôle Optimal (CO) par une comparaison avec le contrôleur bien connu PID. Le CO surpasse facilement le contrôleur PID.

Nous sommes ensuite passés à l'étape suivante qui consiste à ajouter une méthode d'optimisation (nous avons choisi GA) pour pousser le PID à sa performance maximale. Les résultats entre CO et PID+GA sont très proches, mais le CO reste le plus performant.

# Conclusion générale

Ce mémoire constitue une étude approfondie de la dynamique de transmission de l'épidémie HBV, avec un accent particulier sur l'analyse comparative entre les stratégies de contrôle qu'on a appliqué à ce système biologique (1.6). En explorant la complexité de la propagation de cette maladie, nous avons identifié le nombre de reproduction de base  $R_0$  comme un paramètre crucial dans la modélisation de la dynamique épidémiologique. Sachant qu'il représente le potentiel de transmission du virus, en indiquant le nombre moyen de nouvelles infections qu'un individu infectieux peut engendrer dans une population totalement susceptible. Cette mesure fournit une évaluation quantitative de la capacité de propagation de la maladie et guide le développement de stratégies de contrôle efficaces. Alors, On peut déduire qu'il décide le type de la stabilité du système.

Dans notre analyse, nous avons mis en œuvre deux approches de contrôle distinctes : le Contrôle Optimal (CO) et le contrôleur Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) renforcé par l'algorithme génétique (PID+GA). Où le CO est fondé sur des techniques d'optimisation avancées, qui vise à minimiser la propagation de l'hépatite B en ajustant de manière dynamique les variables de contrôle telles que l'isolement, la vaccination et le traitement. De plus, les résultats obtenues lors de nos simulations numériques démontrent l'efficacité remarquable des techniques du CO, cela se traduisant par une réduction significative du nombre d'infections aiguës et chroniques, on quelque sorte on a limité la propagation du virus.

Parallèlement, nous avons évalué les performances du contrôleur PID classique, ainsi que sa capacité à être amélioré par l'optimisation par algorithme génétique. Bien que le contrôleur PID présente des avantages dans sa simplicité et sa familiarité, nos résultats montrent que le PID+GA offre des performances nettement supérieures, se rapprochant même des résultats obtenus avec le CO. Cependant, malgré les améliorations apportées par le PID+GA, le CO demeure la stratégie la plus efficace pour réduire la propagation de l'hépatite B.

En conclusion, notre étude met en évidence l'importance critique de  $R_0$  dans la compréhension et la gestion de l'épidémie d'hépatite B. Elle souligne également l'efficacité du Contrôle Optimal et du contrôleur PID+GA dans la réduction de la propagation de la maladie. Ces résultats offrent des perspectives précieuses pour le développement de stratégies de contrôle et de prévention des maladies infectieuses, contribuant ainsi à la santé publique mondiale.

# Annexes

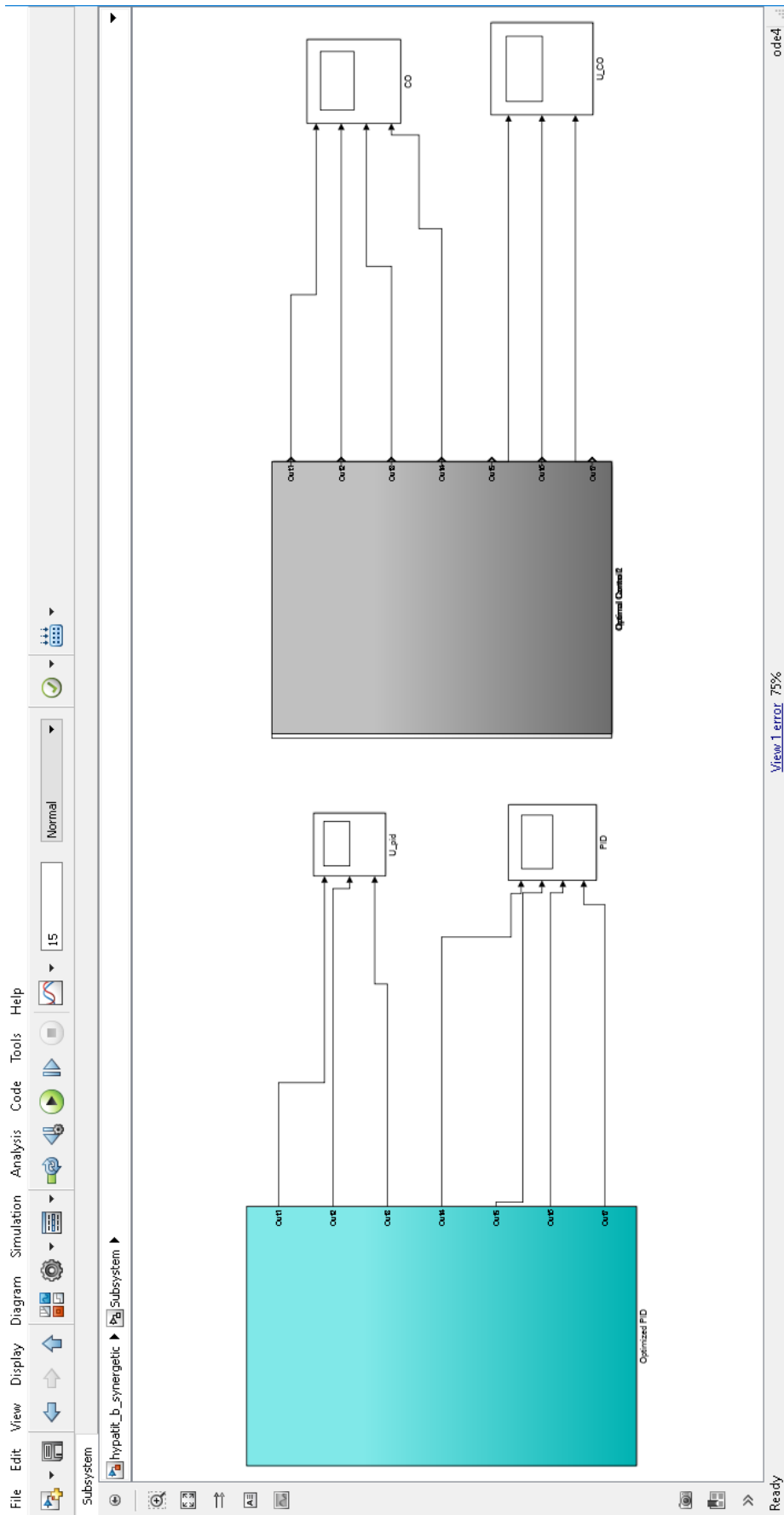


FIGURE 3.13 – Simulation 01 : Modèle HBV

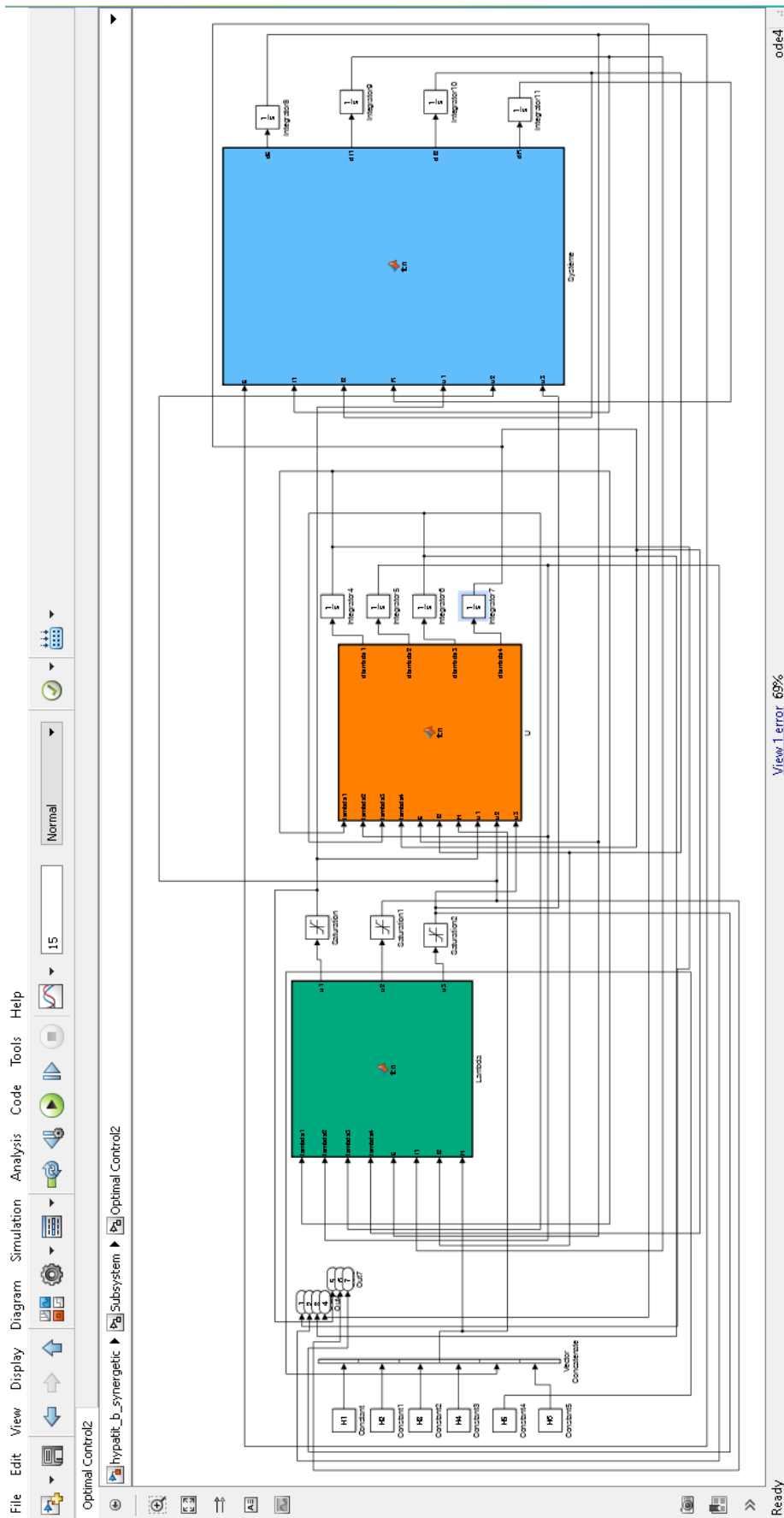


FIGURE 3.14 – Simulation 02 : Contrôle optimal pour HBV

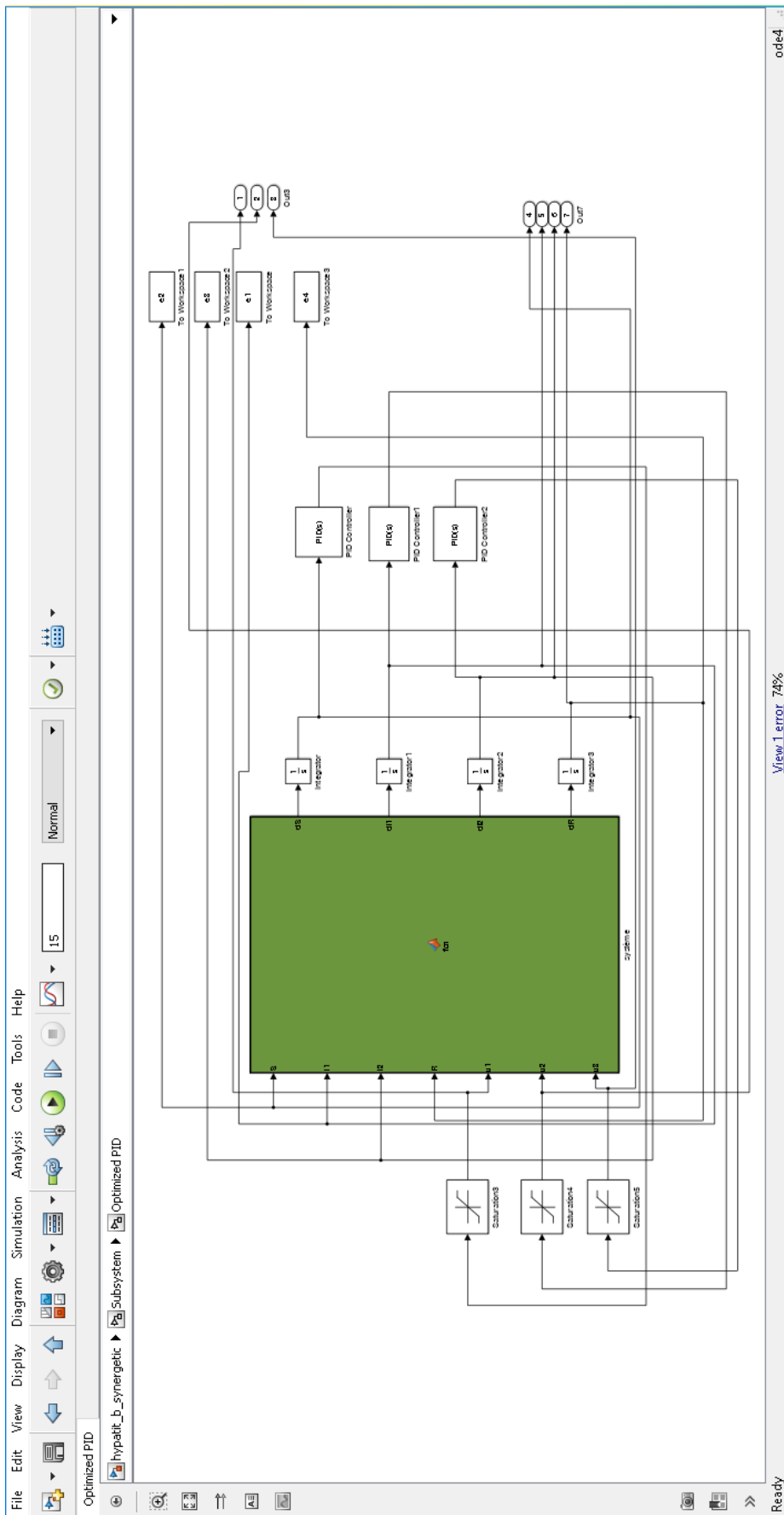


FIGURE 3.15 – Simulation 03 : PID+GA+Systeme HBV

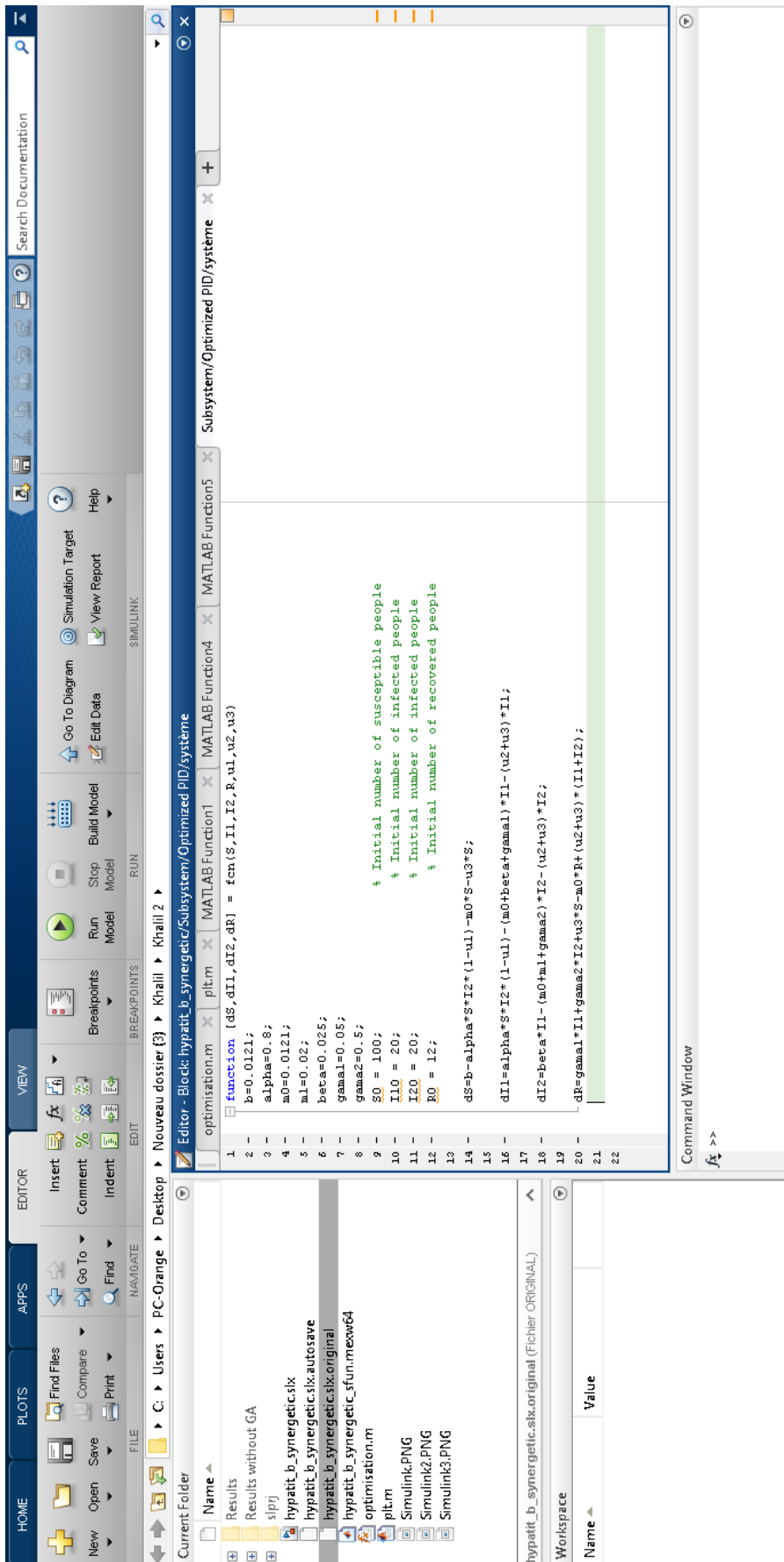


FIGURE 3.16 – Simulation 04 : Système HBV

The screenshot displays the MATLAB environment with the following components:

- File Explorer:** Shows the current folder path: `C:\Users\PC-Orange\Desktop\Nouveau dossier (3)\Khalil\Khalil_2\optimisation.m`.
- Editor:** Contains the MATLAB script `optimisation.m` with the following code:
 

```

1 function obj=optimisation(H)
2 assignin('base','H1',H(1))
3 assignin('base','H2',H(2))
4 assignin('base','H3',H(3))
5 assignin('base','H4',H(4))
6 assignin('base','H5',H(5))
7 assignin('base','H6',H(6))
8 assignin('base','H7',H(7))
9 assignin('base','H8',H(8))
10 assignin('base','H9',H(9))
11 assignin('base','H10',H(10))
12
13 % H1=H(1);
14 % H2=H(2);
15
16 sim('hyppatit_b_synergetic');
17 %t=importdata('data.mat');
18 %e1=importdata('data.mat');
19 % e1=e1(:,2);
20 % e2=e2(:,2);
21 obj=sum(abs(e1)+abs(e2)+abs(e3)-abs(e4))
22 %display('The best solution obtained by SSA is \m ', num2str(obj))
23
24 %tm = t';
25 %obj=sum(tm*abs(e1))+sum(abs(tm*e2))
26 %obj = sum(tm*(f.^2));
27 % K = [obj H(1) H(2)]
28 % [H(1) H(2)];
29 %obj=sum(e1.^2)+sum(e2.^2)
30 % obj=sqrt(sum(e1.^2)/length(e1))

```
- Command Window:** Shows the results of the optimization:
 

Name	Value
hypatit_b_synergetic.slk.original (Fichier ORIGINAL)	
Workspace	

FIGURE 3.17 – Simulation 05 : Optimisation GA avec optintool

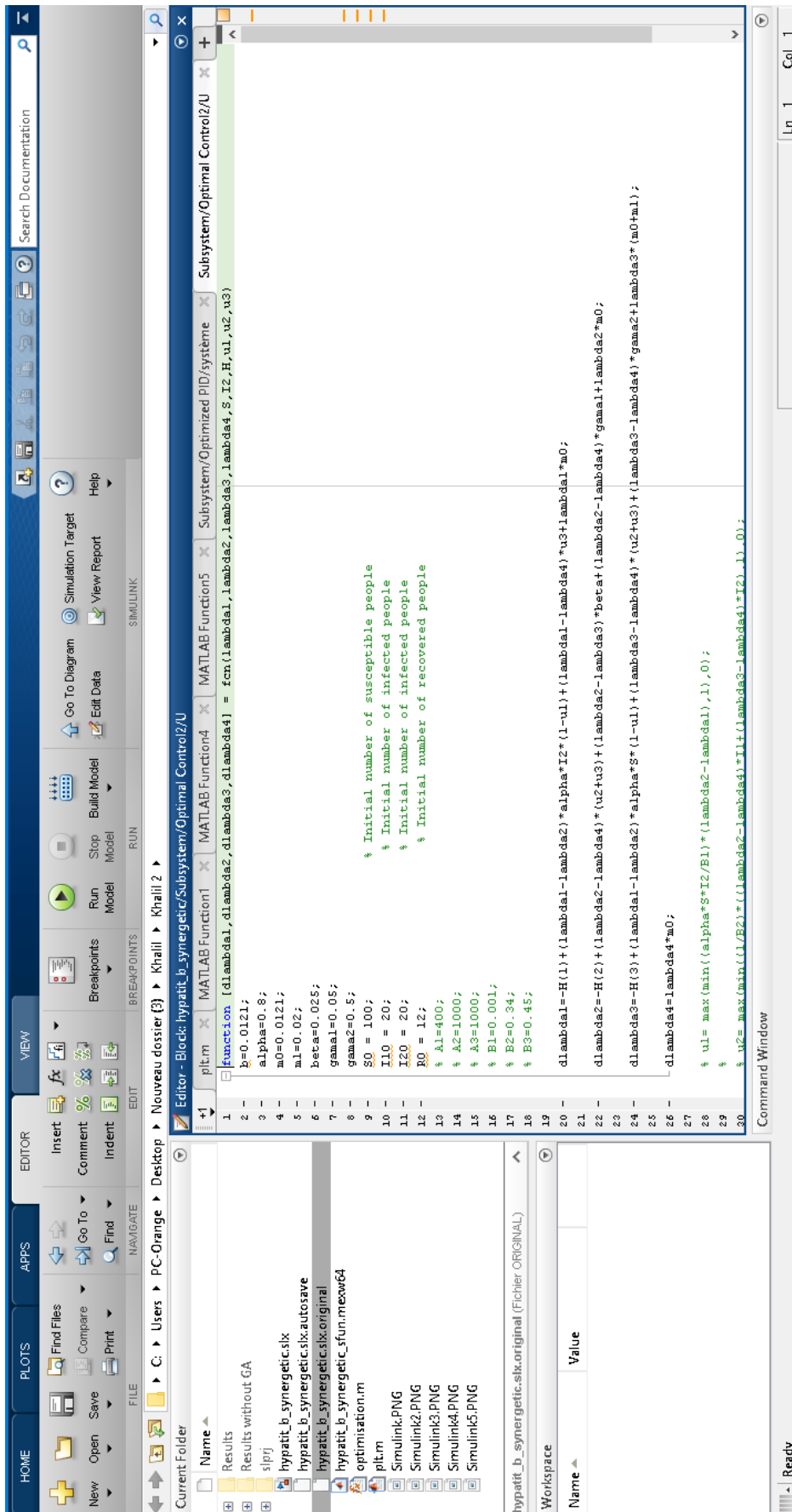


FIGURE 3.18 – Simulation 06 : le vrcteur commande du CO

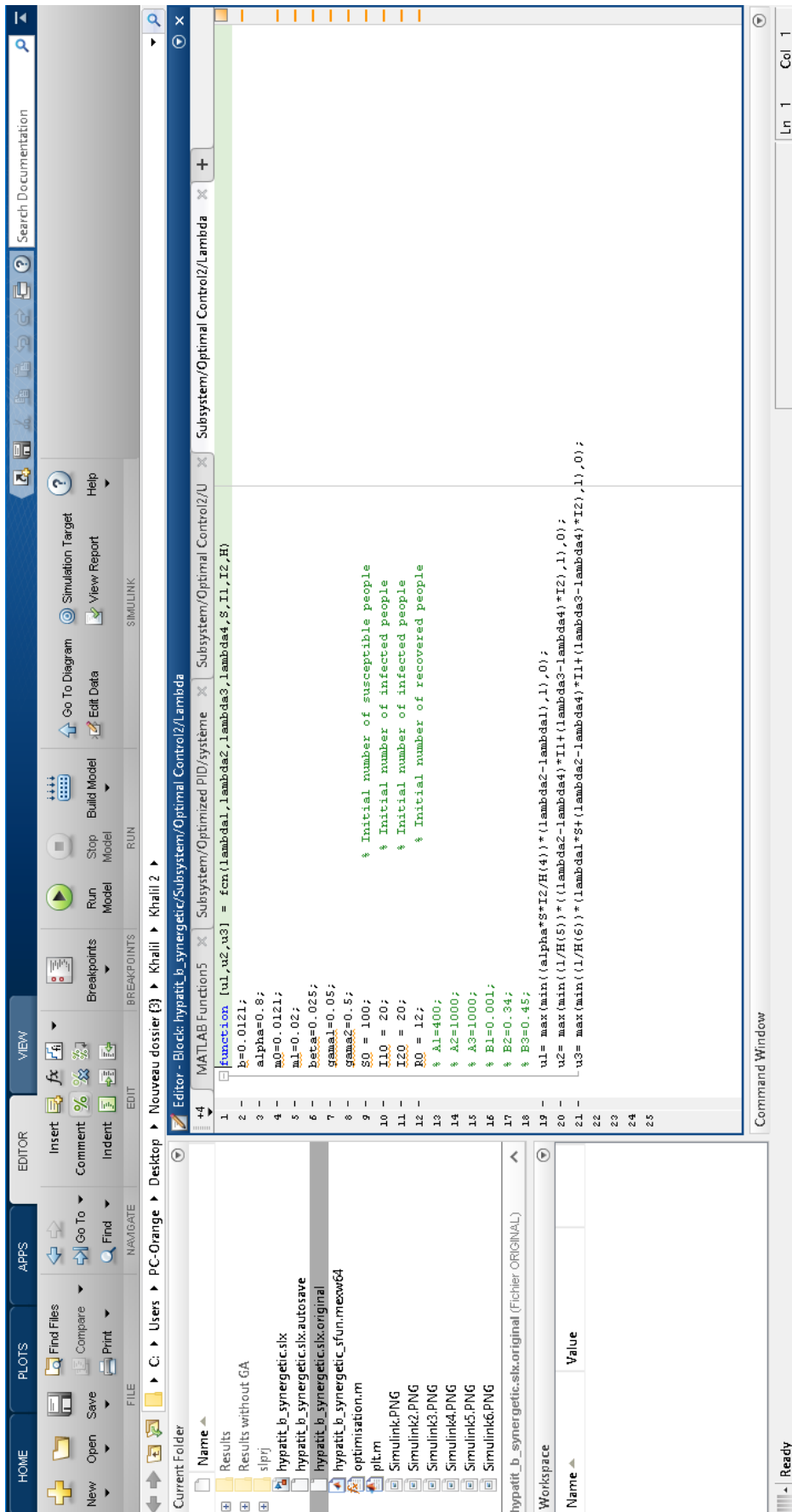


FIGURE 3.19 – Simulation 07 : le vecteur commande du CO (Les Lammdas)

# Bibliographie

- [1] ACHOUR, S., MOKHTARI, K., RAHMOUNE, A., AND YAZID, F. Optimized fixed-time synergetic controller via a modified salp swarm algorithm for acute and chronic hbv transmission system. In *MENDEL* (2023), vol. 29, pp. 191–201.
- [2] ACHOURA, S., RAHMOUNEA, A., OUCHENANE, D., ALHARBIB, A., AND BOULAA-RASB, S. Initialization of the difference of convex functions optimization algorithm for nonconvex quadratic problems. *Filomat* 38, 3 (2024), 1069–1083.
- [3] AGDOUR, Z., AND AMROUNI, T. *Résolution des problèmes de contrôle optimal*. PhD thesis, UMMTO, 2014.
- [4] ANDERSON, R. M., AND MAY, R. M. *Infectious diseases of humans : dynamics and control*. Oxford university press, 1991.
- [5] ARZELIER, D. Représentation et analyse des systemes linéaires. *Notes de cours, Version 6* (2010).
- [6] BARNIER, N., AND BRISSET, P. Optimisation par algorithme génétique sous contraintes. *Revue des Sciences et Technologies de l'Information-Série TSI : Technique et Science Informatiques* 18, 1 (1999), pp–1.
- [7] BIRKHOFF, G., AND ROTA, G. *Ordinary differential equations*, 1969.
- [8] DIEKMANN, O., HEESTERBEEK, J. A. P., AND METZ, J. A. J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $r_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of mathematical biology* 28 (1990), 365–382.
- [9] DONTWI, I., OBENG-DENTEH, W., OBIRI-APRAKU, L., AND ANDAM, E. Modelling hepatitis b in a high prevalence district in ghana.
- [10] EZ-ZINI, M., AND BOUAMEUR, S. Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre par la méthode de runge kutta d'ordre 4 et application. *Département de Mathématique, Informatique et Gestion Filière Sciences Mathématiques et Informatiques* (2017).

- 
- [11] GELFAND, I. M., SILVERMAN, R. A., ET AL. *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.
- [12] HOLLAND, J. adaptation in natural and artificial systems, university of michigan press, ann arbor,”. *Cité page 100* (1975), 33.
- [13] KAMYAD, A. V., AKBARI, R., HEYDARI, A. A., AND HEYDARI, A. Mathematical modeling of transmission dynamics and optimal control of vaccination and treatment for hepatitis b virus. *Computational and mathematical methods in medicine* (2014).
- [14] KUMAR, A. *Control of nonlinear differential algebraic equation systems with applications to chemical processes*. Chapman and Hall/CRC, 2020.
- [15] LIBBUS, M. K., AND PHILLIPS, L. M. Public health management of perinatal hepatitis b virus. *Public health nursing* 26, 4 (2009), 353–361.
- [16] MAYNARD, J. E., KANE, M. A., AND HADLER, S. C. Global control of hepatitis b through vaccination : role of hepatitis b vaccine in the expanded programme on immunization. *Clinical Infectious Diseases* 11, Supplement\_3 (1989), S574–S578.
- [17] MEDLEY, G. F., LINDOP, N. A., EDMUNDS, W. J., AND NOKES, D. J. Hepatitis-b virus endemicity : heterogeneity, catastrophic dynamics and control. *Nature medicine* 7, 5 (2001), 619–624.
- [18] MUDRY, F. Ajustage des paramètres d’un régulateur pid. *Ecole d’ingénieurs du Canton de Vaud-Département d’électricité et informatique* (2002).
- [19] PANG, J., CUI, J.-A., AND ZHOU, X. Dynamical behavior of a hepatitis b virus transmission model with vaccination. *journal of Theoretical Biology* 265, 4 (2010), 572–578.
- [20] PRADEEP, S., AND SHRIVASTAVA, S. Stability of dynamical systems-an overview. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 13, 3 (1990), 385–393.
- [21] SHEPARD, C. W., SIMARD, E. P., FINELLI, L., FIORE, A. E., AND BELL, B. P. Hepatitis b virus infection : epidemiology and vaccination. *Epidemiologic reviews* 28, 1 (2006), 112–125.
- [22] TAO, T. *Topics in random matrix theory*, vol. 132. American Mathematical Society, 2023.
- [23] THORNLEY, S., BULLEN, C., AND ROBERTS, M. Hepatitis b in a high prevalence new zealand population : a mathematical model applied to infection control policy. *Journal of Theoretical Biology* 254, 3 (2008), 599–603.

- [24] TRÉLAT, E. *Contrôle optimal : théorie & applications*, vol. 36. Vuibert Paris, 2005.
- [25] WANG, J., PANG, J., AND LIU, X. Modelling diseases with relapse and nonlinear incidence of infection : a multi-group epidemic model. *Journal of biological dynamics* 8, 1 (2014), 99–116.
- [26] WANG, J., ZHANG, R., AND KUNIYA, T. The stability analysis of an sveir model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes. *Journal of biological dynamics* 9, 1 (2015), 73–101.
- [27] WILLIAMS, R. Global challenges in liver disease. *Hepatology* 44, 3 (2006), 521–526.
- [28] ZABCZYK, J. *Mathematical control theory*. Springer, 2020.
- [29] ZAMAN, G., KANG, Y. H., AND JUNG, I. H. Stability analysis and optimal vaccination of an sir epidemic model. *BioSystems* 93, 3 (2008), 240–249.
- [30] ZAMAN, G., KANG, Y. H., AND JUNG, I. H. Optimal treatment of an sir epidemic model with time delay. *BioSystems* 98, 1 (2009), 43–50.
- [31] ZHANG, S., AND ZHOU, Y. The analysis and application of an hbv model. *Applied Mathematical Modelling* 36, 3 (2012), 1302–1312.