الجمهورية الجزائرية الشعبية الديموقراطية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار ثليجي الأغواط
UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT
كـليـــــةالـعـلـــــوم
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématique

Par: Ikram rebhi

THEME

Méthode des différences finies et quelques Applications aux equations Différentielles

Soutenu publiquement devant le jury composé de:

Mr. Brahime Ismail	*M.C.B*	*Président*
Mr. OUCHENANE Djamel	*M.C.A*	*Examinateur*
Mr. Ahcen Boukehila	*M.C.B*	*Examinateur*
Ms. Abdesselam nawal	*M.C.A*	*Encadreur*

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

En premier lieu, mes remerciements s'adressent à ***ALLAH*** *le tout puissant pour les chances qui m'offert pour réaliser ce travail.*

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements pour mon encadrante, Madame ***Abdesselam Nawal*** *d'avoir accepté de m'encadrer pour mon projet de fin d'études, ainsi que pour ses remarques pertinentes et s'encouragement.*

Un très grand merci aux professeurs : ***I. Ismail****,* ***A. Boukehila****, et* ***D. Ouchenane*** *qui ont accepté de participer à mon jury de ce mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs, et toutes les personnes qui ne m'ont soutenu jusqu'au bout, et qui m'ont pas cessé de me donner des conseils très importants en signe de reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie mon ce mémoire :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et ma source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir , que dieu te garde et te protège , à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

A la personne qui m'a toujours aidé et encouragé, qui étais toujours à mes cotés, Soumia, ma sœur bien aimée.

Je dédie aussi l'accomplissement de ce mémoire, avec tous mes sentiments de respect, d'amour, de gratitude et de reconnaissance à ma sœur Fatima et son mari Tayeb, ainsi qu'à mes nièces adorées Ikram et Maram. A mes frères, Madani et sa femme Fadila , Omar, Samir et Amin.

Ainsi qu'à ma tante préférée Djamila.

Aux personne dont j'ai bien aimé leur présence dans ce jour, à mes amies Zineb, Iman, Amel, Saida, Souad.

Aux personnes qui n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager toutes mes années d'étude, à Khadidja, Hiba, Sabrina.

Aux personnes qui m'ont aidé de prés ou de loin tout au long de mon parcourt d'étude, Bnina, Rabiha, Chahinaz, Fela, Saadia, Khadouj, Djamila, Mariem, Maha, Zouina, Rouba, Anfal,Hasna, Manal.

Résumé :

Dans ce travail, on a étudie quelques équations aux dérivées partielle en utilisant la méthode des différences finies cette dernière est une technique courante de recherche de solutions approchées des équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Abstract :

In mathematics, finite-difference methods (FDM) are numerical methods for solving differential equations by approximating them with difference equations, in which finite differences approximate the derivatives. FDMs are thus discretization methods. FDMs convert a linear (non-linear) PDE (Partial differential equations) into a system of linear (non-linear) equations, which can then be solved by matrix algebra techniques.

Table des matières

Introduction

La compréhension des phénomènes du monde réel ainsi que le développement de la technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les Équations aux Dérivées Partielles (E.D.P). C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes ; à travers des équations aux dérivées partielles qui nous permettent de comprendre le rôle de tel où tel paramètre et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier (E.D.P) modélise plusieurs phénomènes naturels en :Physique, Chimie, Biologie...etc

Au cours de l'histoire, les méthodes de calcul ont été l'expression de pratiques sans cesse renouvelées. Le développement de l'informatique a largement contribué à une rapide progression de l'ensemble des techniques numériques.

Cet mémoire porte sur quelques équations aux dérivées Partielles (E.D.P). Nous nous sommes intéressés particulièrement à la méthode des différences finies ; portant il existe plusieurs méthodes pour résoudre (E.D.P).

Dans ce mémoire, nous avons considéré méthode des différences finies et quelques applications aux equation différentielles. Notre travail est divisé en trois chapitres.

Avant d'entamer méthode des différences finies et quelques applications aux equation différentielles, il est nécessaire de faire rappel de quelques notions de calcul différentielle tels que :les équation aux dérivées partielles(EDP), les méthode des différences finies, consistance, convergence et stabilité.

Le deuxième chapitre présente des méthodes qui permettant d'obtenir des solutions explicites des équations aux dérivées partielles.

Dans le troisième chapitre nous allons faire une application des l'équation des ondes et de la méthode de différences finies.

On termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre nous allons définir les équations aux dérivées partielles, et citer les différents types de cette dernière. Nous allons ainsi présenter la méthode des différences finies, aussi quelques équations aux dérivées partielles classique.

1.1 Equation aux dérivées partielles(EDP)

Il existe une infinité d'équations aux dérivées partielles. Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci. Il faut donc se résoudre à restreindre notre champ d'étude. On réalisera ceci en exigeant que l'équation satisfasse certaines propriétés, par exemple qu'elle soit linéaire. Nous énumérerons aussi quelques-unes des équations aux dérivées partielles classiques. Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des équations aux dérivées partielles. L'acoustique, l'aérodynamique, la dynamique des fluides, l'élasticité, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique quantique, la météorologie, l'océanographie, la physique des plasmas sont quelques-uns de ces domaines.

Une **équation aux dérivées partielles** est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes ($x, y, \ldots$ ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F\Big(x, y, \ldots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\Big) = 0. \tag{1.1}$$

où F est une fonction de plusieurs variables. Si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le $n-$tuplet de variables indépendantes $(x, y, \ldots)$ comme appartenant à un domaine $\mathcal{D}$ convenable de $\mathbb{R}^n$. Nous utiliserons EDP comme abréviation d'équation aux dérivées partielles.

Une **solution** de l'équation 1.1 est une fonction $u = u(x, y, \ldots)$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de $\mathcal{D}$ et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation 1.1, celle-ci est satisfaite.

Définition 1.1. L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

un **opérateur** L désignera une transformation qui associe à toute "bonne" fonction $u = u(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables $x, y, \ldots$ sur un domaine $\mathcal{D}$: une fonction $Lu = Lu(x, y, \ldots)$ sur ce même domaine. Le qualificatif "bonne" signifie ici que Lu est bien définie. Parfois il faudra exiger que les dérivées partielles de u existent jusqu'à un certain ordre. Si $u = u(x, y)$, alors

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$$

est un exemple d'opérateur. Cependant pour que Lu soit bien définie, il est nécessaire que la dérivée partielle de u par rapport à x existe sur le domaine $\mathcal{D}$; c'est ce qui signifie "bonne" dans ce cas-ci. L'équation 1.1 peut donc s'écrire sous la forme $L(u) = f(x, y, \ldots)$ où $f(x, y, \ldots)$ est une fonction des variables indépendantes, L est un opérateur et u est une fonction à déterminer.

Définition 1.2. Un opérateur L est linéaire si et seulement si $L(au+bv) = aL(u)+bL(v)$ quels que soient les nombres réels a, b et les "bonnes" fonctions u, v. Implicitement nous supposons que la fonction $au + bv$ est aussi une "bonne" fonction.

Définition 1.3. Une EDP est dite linéaire si elle est de la forme $Lu = f(x, y, \ldots)$ où L est un opérateur linéaire, $f(x, y, \ldots)$ est une fonction des n variables indépendantes, $(x, y, \ldots)$ appartient à un domaine $\mathcal{D}$ convenable de $\mathbb{R}^n$ et u est la fonction recherchée.

Si $f(x, y, \ldots) \equiv 0$, on dit alors que l'équation est linéaire **homogène**. Sinon elle est **non-homogène**.

Une EDP linéaire d'ordre 2 avec n variables indépendantes sera donc de la forme :

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D \tag{1.2}$$

où A_{ij}, B_i, C et D sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dans cette situation, nous supposerons que les solutions recherchées u ont toutes leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall i, j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

continues sur $\mathcal{D}$. Ceci a comme conséquence que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Nous pouvons alors supposer sans perte de généralités que $A_{ij} = A_{ji}$. Il suffit de remplaçer chacune des fonctions A_{ij} avec $i \neq j$ par $(A_{ij} + A_{ji})/2$.
L'EDP n'est pas modifié et alors nous avons bien avec ces nouvelles fonctions que $A_{ij} = A_{ji}$. Si $D \equiv 0$, alors l'équation 1.2 est linéaire homogène.

On va donner quelques exemples sur EDP :

Exemples d'EDP

1. **Équation de propagation (ou équation des cordes vibrantes)** est : Cette EDP, appelée équation de propagation des ondes, décrit les phénomènes

de propagation des ondes sonores et des ondes électromagnétiques.
La fonction d'onde inconnue est notée $u(x, y, z, t)$, t représentant le temps :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \quad \text{où} \quad u = u(x, y, z, t) \tag{1.3}$$

Le nombre c représente la célérité ou vitesse de propagation de l'onde u.

2. **Équation de Fourier** est :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.4}$$

Cette EDP est également appelée **équation de la chaleur**. La fonction u représente la température. La dérivée d'ordre 1 par rapport au temps traduit l'irréversibilité du phénomène. Le nombre k est appelé diffusivité thermique du milieu.

3. **L'équation de Laplace ou du potentiel** est : L'équation de Laplace est une EDP de base très importante :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \quad \text{où} \quad u = u(x, y, z, t) \tag{1.5}$$

4. **Équation d'advection** est :
L'équation d'advection en dimension 1 d'espace et de temps décrit le transport de la quantité $u(x, t)$ par la vitesse d'advection a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

L'équation d'advection joue un rôle fondamental dans l'étude des méthodes de résolution numérique par la méthode des volumes finis des systèmes hyperboliques de lois de conservation comme les équations d'Euler en dynamique des fluides compressibles.

Dans cette section nous allons présenter l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles, la méthode des différences finies.

1.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est l'une des techniques de recherche de solution approchée d'équations aux dérivées partielles qui consiste résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. En apparence, cette méthode est en général simple à mettre en œuvre, elle procède en deux étapes :

1. La discrétisation du domaine d'étude (l'espace discrétisé ou maillage) et des opérateurs de dérivation/différentiation. Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, etc, dérivées partielles) peut être obtenue par les formules de Taylor, en particulier celle de Taylor avec reste intégral permet de mesurer les erreurs.
2. La convergence du schéma numérique ainsi obtenu (lorsque la distance entre les points diminue).

Définition 1.4. Pour la méthode des différences finies, un maillage est un ensemble de points isolés (appelés nœuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles, une grille sur les seuls nœuds dans laquelle sont définies les inconnues correspondant aux valeurs approximatives de ces fonctions. Le maillage comprend également des nœuds situés sur la frontière du domaine

(ou au moins « proches » a de cette frontière) afin de pouvoir imposer les conditions aux limites et/ou la condition initiale avec une précision suffisante.

1. A priori, la première qualité d'un maillage est de couvrir au mieux le domaine dans lequel il se développe, de limiter la distance entre chaque nœud et son plus proche voisin. Cependant, le maillage doit également permettre d'exprimer la formulation discrète des opérateurs de différentiation : pour cette raison, les noeuds du maillage sont le plus souvent situés sur une grille dont les directions principales sont les axes des variables.

Définition 1.5. On appelle pas du maillage la distance entre deux nœuds voisins situés sur une droite parallèle l'un des axes. Dans ce sens, le pas est une notion à la fois locale et directionnelle.

On parlera de pas global pour désigner le plus grand pas local, une notion qui reste directionnelle.

1.3 Schémas de différences finies

Les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formules de Taylor.
Formule de Taylor d'ordre 1 :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h) \tag{1.6}$$

Formule de Taylor d'ordre 2 :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^2) \tag{1.7}$$

En un point $x \in [l; L]$ et pour une valeur h du pas de discrétisation donné par $h = \frac{L-l}{2}$; tel que u est une fonction une fois dérivable.

La formule 1.6 nous permet d'approximer $u'(x)$,

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x) \tag{1.8}$$

ou encore,

$$\frac{u(x) - u(x-h)}{h} \approx u'(x) \tag{1.9}$$

Et se basant sur 1.7 et 1.9 nous obtenons l'approximation suivante de $u''(x)(2)$

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{1.10}$$

Notons

$$\tilde{u}(x) = \frac{u(x+h) - u(x) + u(x-h)}{h} \tag{1.11}$$

$$\tilde{\tilde{u}}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{1.12}$$

FIGURE 1.1 – Solutions exacte, numérique et discrète

CONSISTANCE, CONVERGENCE ET STABILITE

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les trois principales sont la convergence, la stabilité et la consistance. Ces trois propriétés permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue. Ces différents liens figure 1.3 :

Définition 1.6. (la stabilité) :

c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées et bornée.

Définition 1.7. (la consistance) :

c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation (Δtet Δx) tendent vers zéro.

Définition 1.8. (la convergence) :

c'est la propriété qui assure que la solution numérique tende vers la (ou une) solution exacte des équations continues. C'est évidemment la propriété la plus recherchée !

1.4 Stabilité – Estimation d'énergie discrète

En plus de la consistance définie précédemment, une autre notion fondamentale dans l'analyse d'un schéma numérique est sa « stabilité ».

Définition 1.9. (Stabilité d'un schéma aux différences finies)

Un schéma numérique est dit stable si la solution discrète u_n à l'instant t^n est bornée indépendamment des paramètres de discrétisation Δx et Δt.

L'équation des ondes se prête mal à des estimations en norme infinie (on a remarqué précédemment l'absence d'un principe du maximum pour la solution exacte). On se place ici dans le cadre de l'analyse de stabilité $\mathcal{L}^2$. On recherche donc une borne en norme $\mathcal{L}^2$ de la solution.

Pour tout instant $n \in \mathbb{N}$, on assimile la solution numérique (u_j^n) à un élément de $\mathcal{L}^2([0,1])$ en posant : $\|u^n\| = \left(\int_0^1 |\tilde{u}(t^n,x)|^2 dx\right)^{1/2}$ où $\tilde{u}(t^n,.)$ est la fonction constante sur chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$ égale à u_j^n.
Autrement dit, $\|u^n\| = \left(\sum_{j=0}^{J} |u_j^n|^2 \Delta x\right)^{1/2}$. On considère également le produit scalaire associé :

$$(u,v) = \sum_{j=0}^{J} u_j v_j \Delta x$$

.

L'analyse de stabilité est obtenue ici sur la base de la propriété de conservation de l'énergie. On montre plus précisément que le schéma préserve une énergie discrète.

Lemme 1.1. ***(Conservation de l'énergie discrète)***

Soient u^0 et u^1 dans $\mathcal{L}^2([0,1])$ et soit (u_j^n) la solution numérique du schéma 3.5. On pose

$$\mathrm{E}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\right\|_2^2 + \frac{1}{2}(Au^n, u^{n+1}),$$

avec $(Au^n)_j = -\dfrac{c^2}{\Delta x^2}(u_j^{n+1} - 2u^n)_j + u^n)_{j-1}$. Alors l'énergie discrète $\mathrm{E}^{n+1/2}$ est une *quantité indépendante de n :*

$$\mathrm{E}^{n+1/2} = \mathrm{E}^{1/2}$$

Démonstration : On part de l'équation 3.5 multipliée par la dérivée discrète centrée $(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})/(2\Delta t)$, on obtient alors pour tout j et n :

$$\sum_{j=0}^{J} \Big[\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \Big] \Delta x = 0$$

Le premier terme n'est rien d'autre que

$$\sum_{j=0}^{J} \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - (u_j^n - u_j^{n-1})^2}{2\Delta t^3} \Delta x = \frac{1}{2\Delta t} \Big(\Big\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \Big\|^2 - \Big\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \Big\|^2 \Big)$$

Le second terme donne :

$$\begin{aligned}
& c^2 \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} \Big(\sum_j (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) u_j^{n+1} \Delta x - \sum_j (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) u_j^{n-1} \Delta x \Big) \\
= \; & c^2 \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} \Big(\sum_j (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) u_j^{n+1} \Delta x - \sum_j (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) u_j^n \Delta x \Big) \\
= \; & \frac{1}{2\Delta t} \big((Au^n, u^{n+1}) - (Au^{n-1}, u^n) \big)
\end{aligned}$$

En rassemblant les morceaux, on obtient finalement

$$\mathrm{E}^{n+1/2} = \mathrm{E}^{n-1/2}$$

Chapitre 2

DISCRETISATION DES EDP

Dans ce chapitre, nous présenterons des méthodes qui permettent d'obtenir des solutions explicites d'équations aux dérivées partielles. Dans ce cas, nous pouvons calculer exactement la solution étant donnée la température initiale connue. Nous serons ainsi en mesure de comparer la solution explicite obtenue des méthodes numériques avec la solution exacte et d'analyser l'erreur due à l'approximation liée aux méthodes numériques.

Les différences finies.
La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées au combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.
Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

2.1 Principe - ordre de précision

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

Soit $u(x,y,z,t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y,z,t) - u(x,y,z,t)}{\Delta x}$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x+\Delta x,y,z,t)$ au voisinage de x donne :

$$u(x+\Delta x,y,z,t) = u(x,y,z,t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t) + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z,t) + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,y,z,t) + \dots$$

En **tronquant** la série au premier ordre en Δx, on obtient :

$$\frac{u(x+\Delta x,y,z,t) - u(x,y,z,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t) + \mathcal{O}(\Delta x)$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx.

Définition 2.1. la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro est appelée l'ordre de la méthode.

2.2 Notation - cas 1D

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition.

On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N+1$ points x_i pour $i = 0,\dots,N$ régulièrement espacés avec un pas Δx. Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les nœuds du maillage.
Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension finies se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.
Notation on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i, soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud x_i, on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u'_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u.

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou upwind.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

2.3 Schéma d'ordre supérieur

pour 1er dérivées
Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développement de Taylor au voisinage de x_i. On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$
$$u_{i-1} = u(x_i + \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

La soustraction de ces deux relations donne :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-2}}{6\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

2.4 Dérivée d'ordre supérieur

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i. Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u, on écrit :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$
$$u_{i-1} = u_i - \Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à :

$$u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2\left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...

2.5 Généralisation de la notation indicielle

Dans le cas 1D instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur $u(x,t)$ en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition de u est décomposé en N nœuds x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx. De même, le temps est décomposé en intervalle élémentaire de pas constant Δt. On notera un u_i^n la valeur discrète de la grandeur $u(x,t)$ au nœud x_i et au temps $n\Delta t$.

Dans le cas 2D, considérons une grandeur $u(x, y)$ définie sur un certain domaine. Ce dernier est décomposé en $N \times P$ nœuds (x_i, y_j) répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx dans la direction x et Δy dans l'autre direction. On notera u_{ij} la valeur discrète de la grandeur $u(x, y)$ au nœud (x_i, y_j).

De façon similaire, dans le cas 2D instationnaire, on notera un u_{ij}^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, y, t)$ au nœud x_i, y_j et au temps $n\Delta t$. Et dans le cas 3D instationnaire, on notera un u_{ijk}^n la valeur discrète de la grandeur $u(x, y, z, t)$ au nœud (x_i, y_j, z_k) et au temps $n\Delta t$.

Quelques schémas en 1D

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta x u'_i$	-1	1			
$\Delta x^2 u''_i$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u'''_i$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

FIGURE 2.1 – Différences finies avant, ordre 1

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta x u'_i$				-1	1
$\Delta x^2 u''_i$			1	-2	1
$\Delta x^3 u'''_i$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

FIGURE 2.2 – Différences finies arrière, ordre 1

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

FIGURE 2.3 – Différences finies centré, ordre 2

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u_i'$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u_i''$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u_i'''$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u_i^{(4)}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

FIGURE 2.4 – Différences finies centré, ordre 4

2.6 Dérivées croisées

Déterminons une approximation de la dérivée croisée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la fonction de 2 variables $f(x, y)$. La discrétisation du domaine de calcul est bidimensionnelle et fait intervenir deux pas d'espace supposés constants Δx et Δy dans les directions x et y.
Le principe est toujours basé sur les développements de Taylor :

$$\begin{aligned} f(x_{i+l}, y_{j+m}) = f(x_i, y_j) + l\Delta x\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)_i + m\Delta y\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)_j + \frac{(l\Delta x)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)_i \\ + \frac{(m\Delta y)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_j + \frac{2ml\Delta x\Delta y}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big)_{ij} \end{aligned}$$

Au voisinage du point (i, j) :

$$\begin{aligned} f_{i+1,j+1} &= f_{i,j} + \Delta x\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)_i + \Delta y\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)_j + \Delta x\Delta y\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)_i + \frac{(\Delta y)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_j \\ f_{i-1,j-1} &= f_{i,j} - \Delta x\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)_i - \Delta y\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)_j + \Delta x\Delta y\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)_i + \frac{(\Delta y)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_j \\ f_{i+1,j-1} &= f_{i,j} + \Delta x\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)_i - \Delta y\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)_j - \Delta x\Delta y\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)_i + \frac{(\Delta y)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_j \\ f_{i-1,j+1} &= f_{i,j} - \Delta x\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)_i + \Delta y\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)_j - \Delta x\Delta y\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big)_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)_i + \frac{(\Delta y)^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)_j \end{aligned}$$

En effectuant une combinaison linéaire des quatre équations précédentes ((1)+(2)-(3)-(4)), nous obtenons une approximation de la dérivée croisée à l'ordre 1 :

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y}$$

Exemple simple 1D avec conditions de Dirichlet

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u'' = f(x) \\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \qquad u(1) = \beta \end{cases} , \qquad x \in]0,1[$$

où f est une fonction continue.
Le maillage est construit en introduisant $N+1$ nœuds x_i avec $i = 0, 1, \quad , N$, régulièrement espacés avec un pas Δx. La quantité u_i désignera la valeur de la fonction $u(x)$ au nœud x_i. L'équation à résoudre s'écrit, sous forme discrète en chaque nœud x_i :

$$-\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$$

Approximons la dérivée seconde de u au moyen d'un schéma centré à l'ordre 2 :

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

L'équation discrétisée est ainsi :

$$\frac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i \qquad \text{;pour } i \text{ variant de } 1 \text{ à } N-1$$

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

Exemple simple 1D avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u'' = f(x) \\ u(0) = \alpha \quad \text{et} \qquad u'(1) = \beta \end{cases} \quad , \qquad x \in]0,1[$$

où l'on a cette fois une condition de Neumann en $x = 1$.
Les modifications du problème discrétisé par rapport au cas précédent sont les suivantes. Tout d'abord, le nombre d'inconnues a changé. Il y a une inconnue au bord en $x = 1$. Le problème discret a donc maintenant, sur la base du même maillage que précédemment, N inconnues u_i pour i variant de 1 à N.
D'autre part, il faut discrétiser la condition de Neumann $u_0(1) = f_1$. Plusieurs choix sont possibles pour approximer cette dérivée première. C'est un des inconvénients de la méthode des différences finies : elle ne donne pas de façon naturelle une bonne approximation des conditions de Neumann. Dans notre cas, utilisons une approximation d'ordre 1 :

$$u'(1) = \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + \alpha/\Delta x^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ \beta/\Delta x \end{bmatrix}$$

2.7 Discrétisation de l'équation de la chaleur 1D

Considérons le problème monodimensionnel de la conduction de la chaleur dans une barre de $1m$ de longueur. Le champ de température $T(x,t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où α est la diffusivité thermique.
A cette EDP s'ajoute deux conditions aux limites aux extrémités de la barre $T(0,t) = T_g$ et $T(1,t) = T_d$ ainsi qu'une condition initale $T(x,0) = T_0$.

L'intervalle $[0,1]$ est discrétisé en $N+1$ nœuds de coordonnées x_i (i variant de 0 à N) régulièrement espacés. Notons Δx le pas d'espace. Le temps est discrétisé en intervalles de pas constant Δt. Notons T_i^n la température au nœud $x_i = i\Delta x$ et à l'instant $t = n\Delta t$.

On peut utiliser deux approches pour discrétiser cette équation de la chaleur. La première dite explicite utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération courante n :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^n = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^n$$

Et la seconde dite implicite utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération $n+1$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{n+1} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}$$

2.8 Discrétisation de l'équation de la chaleur 2D stationnaire

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domaine rectangulaire $[0, L_x] \times [0, L_y]$. Le champ de température $T(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad , \qquad (x,y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(o,y) = T_g \quad \text{et} \quad T(L_x, y) = T_g \qquad o < y < L_y \\ T(x,0) = T_b \quad \text{et} \quad T(x, L_y) = T_h \qquad o < x < L_x \end{cases}$$

Le domaine de calcul est discrétisé en $(N+1) \times (P+1)$ nœuds (x_i, y_j) (i variant de 0 à N et j variant de 0 à P). On supposera que les pas d'espace dans chaque direction Δx et Δy sont constants. La température discrète au nœud (x_i, y_j) sera notée $T_{ij} = T(x_i, y_j)$.

Nous utilisons un schéma centré d'ordre 2 pour approximer les dérivées secondes en espace :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{ij} &= \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{ij} &= \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}\end{aligned}$$

La formulation discrétisée est alors, pour i variant de 1 à N - 1 et j variant de 1 à P - 1 :

$$\Delta y^2(T_{i+1,j} - T_{i-1,j}) + \Delta x^2(T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) - 2(\Delta x^2 + \Delta y^2)T_{i,j} = 0$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$, en posant $A = \Delta x^2 + \Delta y^2$:

$$\begin{bmatrix} -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 & 0 & \Delta x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A & \Delta y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x^2 & 0 & \Delta y^2 & -2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_b \\ \Delta x^2 T_b + \Delta y^2 T_d \\ \Delta y^2 T_g \\ 0 \\ \Delta y^2 T_d \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_g \\ \Delta x^2 T_h \\ \Delta x^2 T_h + \Delta y^2 T_d \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les pas d'espace sont identiques $\Delta x = \Delta y$, la formulation devient, pour i variant de 1 à N - 1 et j variant de 1 à P - 1 :

$$T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0$$

Soit sous forme matricielle, pour $N = P = 4$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \\ T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} T_b + T_g \\ T_b \\ T_b + T_d \\ T_g \\ 0 \\ T_d \\ T_h + T_g \\ T_h \\ T_h + T_d \end{bmatrix}$$

Notons I la matrice identité d'ordre 3 et D la matrice de dimension 3 définie par :

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Notons T_1, T_2 et T_3 les vecteurs à 3 composantes définis par :

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \\ T_{33} \end{bmatrix}$$

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle bloc suivante :

$$\begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est tridiagonale et chacun de ses blocs est tridiagonal. La résolution du système peut s'effectuer par une méthode de Thomas matriciel où une méthode itérative matricielle (méthode de Gauss-Seidel).

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, on appliqué la méthode de différences finies sur quelques équations aux dérivées partielles par exemple l'équation des ondes, et chaleur ...ect.

3.1 Équation des ondes

Il est question dans ces notes de l'équation des ondes linéaire homogène, en dimension un d'espace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.1}$$

et éventuellement en dimension deux ou trois d'espace. Après avoir situé quelques problèmes physiques faisant intervenir l'équation des ondes, nous analyserons le problème de Cauchy monodimensionnel. Nous aborderons ensuite quelques méthodes de résolution numérique. Si nous avons le temps enfin, nous présenterons quelques éléments de théorie relatifs aux cas des dimensions d'espace deux ou trois.

3.1.1 L'équation des ondes en domaine borné

Dans cette partie, on considère l'équation des ondes 1D posée sur le domaine d'espace normalisé $[0,1]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0, x \in]0,1[, \tag{3.2}$$

avec les conditions initiale :

$$u(x,0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x), \quad x \in]0,1[, \tag{3.3}$$

et par exemple les conditions de bord de Dirichlet homogène

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.4}$$

3.2 Schéma numérique aux différences finies

On souhaite résoudre de manière approchée l'équation des ondes posée sur le domaine borné en espace $]0,1[$ avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad t > 0, x \in]0,1[, \\ u(t, 1+x) = u(t,x), \qquad t > 0, x \in]0,1[, \\ u(0,x) = g(x), \quad x \in]0,1[, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = h(x), \quad x \in]0,1[. \end{cases}$$

Les fonctions g et h sont supposées admettre des prolongements 1-périodiques de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^1$ respectivement. On propose un schéma numérique pour approcher la solution u aux points

$$x_0 = 0, x_j = j\Delta x, j = 0, \ldots, j+1, x_{j+1} = 1,$$

aux instants

$$t^n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

S'appuyant sur des développements de Taylor de la solution exacte u au voisinage du point (x,t).
Le schéma aux différences finies proposé calcule des valeurs un u_j^n approchant la valeur exacte $u(t^n, x_j)$.

Définition 3.1. (Schéma centré pour l'équation des ondes)

On définit le schéma centré pour l'équation des ondes par :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad n \geq 1, \quad 0 \leq j \leq J, \tag{3.5}$$

avec les données initiales

$$u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j), \quad 0 \leq j \leq J,$$

et une condition de périodicité :

$$u_{j+1}^n = u_0^n, \quad n \geq 1.$$

C'est un schéma explicite :

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

Les données initiales sont construites sur la base du développement de Taylor de u à l'ordre 1 en $t = 0$, mais pour approcher la donnée initiale u^1 à l'ordre 2, on peut préférer définir :

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Consistance - Erreur de troncature

Définition 3.2. (Erreur de troncature)

On appelle erreur de troncature l'erreur commise en supposant que la solution exacte réalise le schéma numérique :

$$\varepsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1})}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2}$$

Le schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0.

On appelle ordre de consistance du schéma en espace p et en temps m les entiers tels que

$$\varepsilon_j^n = \mathbb{O}(\Delta t^m + \Delta x^p)$$

Attention : l'erreur de troncature n'est pas l'erreur entre la solution exacte et celle approchée par le schéma. Nous verrons plus loin cette « erreur de convergence », mais il y a un peu de travail avant de pouvoir la quantifier précisément.

Lemme 3.1. *Le schéma centré 3.5 est consistant d'ordre 2 en espace et 2 en temps.*

Démonstration :
En utilisant la formule de Taylor pour la solution exacte u supposée suffisamment régulière, on trouve :

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1})}{\Delta t^2} = \frac{\partial u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!}\Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) + \mathbb{O}(\Delta t^4)$$
$$\frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2} = \frac{\partial u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!}\Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) + \mathbb{O}(\Delta x^4)$$

Puisque u est solution, les premiers termes disparaissent ; il reste alors une erreur de troncature

$$\varepsilon_j^n = \frac{1}{12}\Big(\Delta t^2 = \frac{\partial u}{\partial t^2}(x_j, t^n) - c^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n)\Big) + \mathbb{O}(\Delta t^4 + \Delta x^4)$$

D'où le résultat.

Remarque :
À noter que si u est de classe $\mathcal{C}^4$ alors on peut facilement obtenir que $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$
Le choix particulier $\Delta t = c\Delta x$ permet ainsi d'annuler exactement le terme résiduel dans la formule ci-dessus de manière à obtenir une erreur de troncature en $\mathbb{O}(\Delta t^4 + \Delta x^4)$
En réalité pour le choix $\Delta t = c\Delta x$, l'erreur de troncature est exactement nulle, on peut s'en convaincre à partir de la décomposition en somme d'ondes progressives de u.

3.3 Convergence

Définition 3.3. (Erreur de convergence)

On appelle erreur de convergence la différence entre la solution exacte et la solution numérique

$$e_j^n = u(x_j, t^n) - u_j^n$$

. On dira que le schéma est convergent si pour tout $T > 0$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \sup_{\substack{n > 0 \\ t^n > 0}} \left\| \left(u_j^n - u(x_j, t^n) \right)_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_2 = 0$$

En fait, l'erreur de convergence est alors du même ordre que l'erreur de troncature si les données initiales sont approchées au même ordre.

Théorème 3.1. ***(Convergence du schéma centré - Admis)****(5)*

Si la solution u du problème de Cauchy est assez régulière, et sous la condition CFL $c\Delta t < \Delta x$, le schéma centré 3.5 est convergent.

APPLICATION NUMÉRIQUE

Comparons les trois méthodes de discrétisation sur le cas simple précédemment exposé. On choisit comme fonction $f(x) = \sin(x)$. L'équation différentielle à résoudre est donc :

$$\begin{cases} -u'' = \sin(\pi x) \qquad , \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La solution analytique au problème est $u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$. Notons par un indice 'a' la solution analytique.

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
u_i	0.0316	0.06	0.0826	0.09716	0.010216	0.09716	0.0826	0.06	0.0316
$(u_i)_a$	0.0313	0.0595	0.082	0.09636	0.010113	0.09636	0.082	0.0595	0.0313
$\|erreur\|10^{-3}$	9.6	8.4	7.3	8.3	110^{-2}	8.3	7.310^{-3}	8.4	9.6

FIGURE 3.1 – Méthode des Différences Finies

Divisons l'intervalle $]0,1[$ en dix segments réguliers de pas $h = 0,1$. Pour les discrétisations avec les Différences Finies, il y a N = 9 nœuds de calculs.
La solution discrète obtenue avec les Différences Finies est reportée dans le tableau :

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons considéré méthode des différences finies et quelques applications aux equation différentielles. Et appliquons la méthode de différences finies sur equation des ondes.

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation* , Editions de l'Ecole Polytechnique, 2012.

[2] J.A. Desideri, *Introduction à l'analyse numérique*, INRIA, 1998.

[3] E. Hairer, *Méthodes numériques*, Cours de l'université de Genéve, 2004.

[4] P. Lascaux and R. Theodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes I et II*, Masson, Paris, 1986.

[5] A. Quarteroni, *Analyse numérique*, Cours de l'EPFL, 2003.

[6] P. Viot, *Méthodes d'analyse numériques*, Cours de DEA de Jussieu, 2003.