

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة عمار ثليجي الأغواط
كلية التكنولوجيا

Introduction aux Vibrations et
Ondes
Cours et Exercices

Dr. Abdennour Benmakhlouf
2023

Introduction générale

Le présent travail est particulièrement un cours sur les phénomènes vibratoires avec un recueil d'exercices. Ce polycopié est désigné aux étudiants de deuxième année tronc commun en sciences et technologie. Sa réalisation est une suite à notre enseignement du module ondes et vibrations noté physique 3 durant les années 2016 et 2022.

Le cours est conforme au programme du ministère de l'enseignement supérieure Algérienne et traite particulièrement, la première partie du module Vibrations et Ondes. Le contenu de la matière proposé dans ce manuscrit s'intéresse essentiellement à la compréhension des phénomènes vibratoires dans les systèmes mécaniques et électriques. Les grandes lignes du manuscrit sont inspirées du cours proposé ultérieurement par le Pr. Lafkir Ben khaldoun et présenté au département de sciences exacte de l'université de Laghouat.

Les exercices proposés dans le manuscrit sont issus d'exercices présentés durant les sciences de travaux dirigés et des contrôles proposés durant les années d'enseignements. Pour enrichir le contenu du manuscrit, un nombre important d'exercices sont, certainement, inspirés d'autres références. La résolution des exercices est essentiellement basée sur la méthode de Lagrange qui utilise le concept de l'énergie des systèmes soit mécanique ou électrique.

Le programme du cours est présenté en cinq chapitres et une annexe. Le premier chapitre délivre une introduction générale sur les phénomènes vibratoires, présente quelques définitions fondamentales nécessaires et termine par une présentation sur la méthode de Lagrange utilisée le long du cours pour le traitement mathématique des problèmes étudiés. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des vibrations libre non amorti des systèmes à un degré de liberté. Le troisième chapitre traite les oscillations amorties dans les systèmes libres à un degré de liberté. Le quatrième chapitre explore les oscillations dans les systèmes à un degré de liberté forcé amorti. Le cinquième chapitre présente une introduction aux vibrations dans les systèmes à plusieurs degrés de liberté. Le long des chapitres quelques exemples simples sont proposés. Chaque chapitre se termine par des exercices avec solutions détaillés qui permettent d'aborder des applications des sujets traités dans le chapitre correspondant. A la fin du cours, nous avons présenté une annexe qui donne les outils mathématiques essentielles et nécessaires pour ce module.

TABLE DES MATIERES

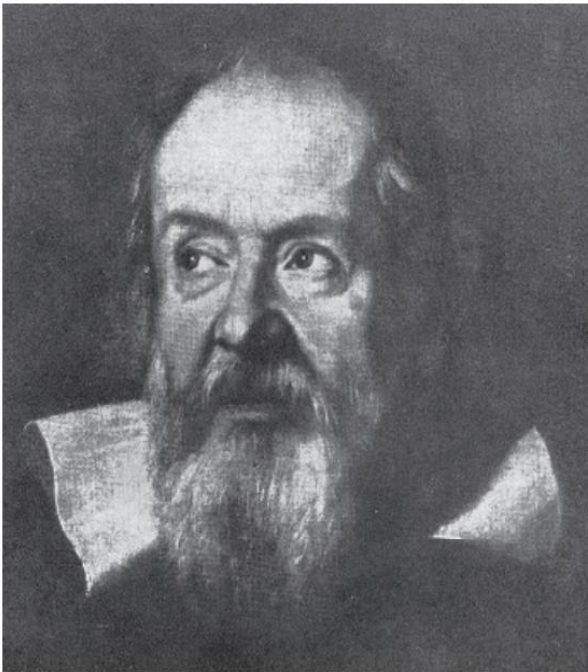
CHAPITRE I : Généralités sur les vibrations	
I.1	Bref historique sur les vibrations 2
I.2	Importance de l'étude des vibrations 2
I.3	Exemples des systèmes vibratoires 3
I.4	Définitions importantes 3
I.5	Vibrations libres et forcées 5
I.6	Notion d'équilibre d'un système mécanique 5
	I.6.1 L'énergie totale d'un système 5
	I.6.2 Concepts d'équilibre stable et instable 6
I.7	Interprétation du mouvement d'un système à partir de la courbe de l'énergie potentiel 9
I.8	Degré de liberté d'un système 10
I.9	Mouvement oscillatoire linéaire 11
	I.9.1 Oscillateur harmonique 11
	I.9.2 Forme quadratique de l'énergie potentielle 13
	I.9.3 Quelques exemples de l'énergie potentielle 15
I.10	Formalisme de Lagrange 16
	I.10.1 Introduction 16
	I.10.2 Equations de Lagrange pour une particule 16
	EXERCICES DU CHAPITRE I 17
CHAPITRE II : Systèmes linéaires à un degré de liberté libres non amorties	
II.1	Oscillateur libre 23
II.2	Exemples d'oscillations libres 23
	II.2.1 Etude d'un système masse-ressort (m, k) 23
	II.2.2. Pendule simple 25
	II.2.3. Pendule de torsion 26
II.3	Solution de l'équation différentielle du Mvt 28
II.4	L'analogie électro - mécanique 29
II.5	Condition d'oscillation 31
	EXERCICES DU CHAPITRE II 33
CHAPITRE III : Vibrations linéaires à un degré de liberté libres amorties	
III.1	Introduction 45
III.2	Force d'amortissement 45
III.3	Schématisation d'amortissement 46
III.4	Mise en équation d'un système oscillatoire amorti 47
III.5	Etude des oscillations amortis par le formalisme de Lagrange 48
	III.5.1 Forces dissipatives : fonction de Rayleigh 48
	III.5.2 Résolution de l'équation différentielle de Mvt 50
	III.5.3 Régime pseudopériodique 52
	III.5.4 Décrément logarithmique (δ) 53

III.5.5	Facteur de qualité	54
III.6	Analogie électro-mécanique	54
	EXERCICES DU CHAPITRE III	57
CHAPITRE IV : Vibrations linéaires à un degré de liberté forcées amorties		
IV.1	Introduction	65
IV.2	Equation de mouvement	65
IV.2.1	Mise en équation du mouvement	65
IV.2.2	La solution homogène de E. D. M.	66
IV.2.3	Solution particulière de E. D. M	67
IV.3	Exemple d'application	69
IV.4	Caractéristiques du mouvement oscillatoire forcée en fonction de Ω	70
IV.4.1	La courbe de l'amplitude $A(\Omega)$	70
IV.4.2	La courbe de déphasage $\Psi(\Omega)$	72
IV.4.3	La bande passante	72
IV.4.4	Facteur de qualité	73
IV.5	Etude de la vitesse du mouvement d'un système forcé amorti	74
IV.6	Bilan énergétique	75
IV.7	Analogie entre système mécanique et électrique	76
IV.7.1	Circuit RLC	76
IV.7.2	Résonance électrique	79
	EXERCICES DU CHAPITRE IV	80
CHAPITRE V : Oscillations linéaires à plusieurs degrés de liberté		
V.1	Introduction	89
V.2	Système à deux degrés de liberté	89
V.2.1	Introduction	89
V.2.2	Couplage dans les oscillateurs à deux degrés de liberté	90
V.2.3	Equation de mouvement	91
V.3	Systèmes libres à deux degrés de liberté libre non amorti	91
V.3.1	Description du système	91
V.3.2	Mise en équations	91
V.4	Systèmes oscillatoire forcé non amorti à deux degrés de liberté	95
V.4.1	Description du système	95
V.4.2	Mise en équations	95
V.4.3	Fréquences de Résonance	96
	EXERCICES DU CHAPITRE V	97
ANEX		105
REFERENCES		112

C

hapitre I

Généralités sur les vibrations



Galileo Galilée (1564-1642), astronome italien, philosophe et professeur de mathématiques aux universités de Pise et de Padoue. En 1609, il devient le premier homme ayant pointé un télescope vers le ciel. Il a écrit le premier traité sur la dynamique moderne en 1590. Ses travaux sur les oscillations d'un pendule simple et la vibration des cordes ont une importance fondamentale dans la théorie des vibrations [1].

I.1 Bref historique sur les vibrations

Les vibrations occupent un grand espace de notre quotidien. Par exemple, on entend parce que nos tympans vibrent, notre respiration est dû à la vibration des poumons et la marche implique un mouvement oscillatoire périodique des jambes et des mains [1]. Le passage des véhicules lourds peut provoquer des vibrations du sol suffisamment puissant pour créer une nuisance en milieu urbain. Dans les turbines et les machines, les vibrations provoquent des pannes mécaniques accompagné d'une usure plus rapide des pièces de ces machines. D'autre part, les structures conçues pour soutenir les machines lourdes sont également soumis à des vibrations. Dans toutes ces situations, la structure ou le composant de la machine soumis à des vibrations peut tomber en panne et aussi crée un bruit excessif. Sur le plan microscopique, les atomes qui constituent la matière vibrent sous l'effet de température. Cette vibration peut entraîner une émission des photons.

Dans le domaine de la science, les phénomènes vibratoires jouent un rôle déterminant dans plusieurs branches de physique : mécanique, électricité, optique, acoustique, etc. L'homme s'est intéressé aux phénomènes vibratoires lorsqu'il a construit les premiers instruments de musique. Plusieurs efforts humains ont participé au développement de cette discipline. Pythagore [582-507 av. J-C] fut le premier à étudier expérimentalement la vibration d'une corde. Dix siècles après, Galilée [1564-1642] démontre que le ton d'un son est déterminé par la fréquence des vibrations. Brücke Taylor [1685-1731] a retrouvé par voie théorique les résultats expérimentaux de Galilée. Vers 1750, d'Alembert établissait l'équation différentielle régissant les vibrations d'une corde. En 1822 Fourier présenta son mémoire sur la théorie des séries harmonique. Au 19^{ème} siècle l'étude des vibrations des systèmes mécaniques acquit un intérêt exceptionnel par l'adoption du courant alternatif, comme agent de transport énergétique.

I.2 Importance de l'étude des vibrations

Dans une usine, l'être humain fait partie intégrante des systèmes mécaniques d'ingénierie. Ainsi, la transmission des vibrations causées par ces machines aux êtres humains entraîne une gêne et une perte de rendement.

Certaines vibrations des systèmes sont dangereuses et indésirables (Une excitation vibratoire trop importante peut entraîner des dommages, tels que la rupture par fatigue vibratoire, ou générer des nuisances sonores) ... d'autre part les vibrations occasionnent une dissipation

d'énergie nuisibles aux rendements. Ainsi, très longtemps, on a étudié les vibrations des machines et des structures presque uniquement dans le but de les atténuer et, si possible, de les supprimer.

En dépit de ses effets néfastes, on construit actuellement des machines ou des appareils qui utilisent les vibrations mécaniques pour remplir des fonctions désirées. En effet, les applications des équipements vibratoires ont augmenté considérablement ces dernières années. Par exemple, la vibration est mise à contribution dans les compacteurs, les machines à laver, les brosses à dents électriques, les perceuses de dentiste. La vibration est également utilisée dans les piles et les circuits électroniques pour filtrer les fréquences indésirables. La compréhension des phénomènes vibratoires permet de simuler les tremblements de terre pour la recherche géologique [1]. Très récemment, des résultats intéressants sur la possibilité de traitement de certaines maladies : diabète de type II, paralysie cérébrale, obstruction pulmonaire chronique, obésité..., par l'exposition à des périodes régulières et limitées de vibrations de corps entier [2]. Donc, l'étude des vibrations permet d'analyser, de corriger ou de favoriser, des vibrations pour notre confort.

I.3 Exemples des systèmes vibratoires

Selon la nature du milieu vibratoire, on peut distinguer quatre types de vibrations:

- ✓ *Vibration des structures* : Un pont ou un immeuble peuvent vibrer sous l'effet du vent ou le passage permanent de gros véhicules. Rappelons la rupture du pont de Tacoma entraînée par la résonance des oscillations dues au vent.
- ✓ *Vibrations des machines immobiles* : l'exemple le plus connue est celui d'une machine à laver et des turbines à gaz.
- ✓ *Vibration des véhicules* : c'est une vibration qui accompagne un appareil en déplacement.
- ✓ *Vibration des atomes et des molécules* : A l'échelle microscopique, les atomes et les molécules qui constituent un solide sont animés d'un mouvement vibratoire (oscillatoire) qui traduit la réponse du milieu à l'effet de température.

I.4 Définitions importantes

- *La vibration*

La vibration est l'état d'un élément qui se déplace en avant et en arrière, de droite à gauche ou de haut en bas. Une **vibration** est un mouvement d'oscillation autour d'une position d'équilibre

stable ou d'une trajectoire moyenne. Les termes utilisés pour décrire le déplacement d'un objet qui effectue un mouvement vibratoire sont la fréquence, l'amplitude et l'accélération.

- *La fréquence*

Un objet qui vibre, effectue un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre fixe. L'objet effectue un cycle complet de vibration lorsqu'il se déplace d'une position extrême à l'autre position extrême, puis revient à la position de départ. Le nombre de cycles effectués pendant une seconde est appelé la fréquence, f [**Hz**=**s⁻¹**]. Un hertz correspond à un cycle par seconde. Souvent, on utilise un autre terme qui correspond l'inverse de la fréquence appelé **période** qui indique le temps d'une oscillation complète (va et vient) **T[s]**.

- *L'amplitude*

Un objet vibrant se déplace sur une distance maximale de part et d'autre de sa position fixe. L'amplitude est la distance comprise entre les positions extrêmes et la position centrale fixe.

- *L'accélération*

L'accélération mesure l'intensité de vibration. L'accélération est une grandeur qui indique dans quelle mesure la vitesse varie en fonction du temps. L'accélération passe de zéro à une valeur maximale pendant chaque cycle de vibration. Elle augmente à mesure que l'objet s'approche de la position d'équilibre.

Exemple I.1:

Un système mécanique masse-ressort (**Figure I.1**) effectue un mouvement oscillatoire décrit par l'équation horaire $x(t) = 4 \cos(6.28 t) \text{ cm}$.

1. Donner les caractéristiques (pulsation ω , période T et amplitude A) de ce mouvement.
2. Calculer le nombre du mouvement de vas et vient du mobile en une seconde.

Réponse :

1. Caractéristiques du mouvement :

La pulsation $\omega = 62.8 \text{ rd s}^{-1}$; La période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.1\text{s}$; l'amplitude $A = 4\text{cm}$

2. Le nombre du mouvement de vas et vient du mobile en une seconde définit sa fréquence f :

$$f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

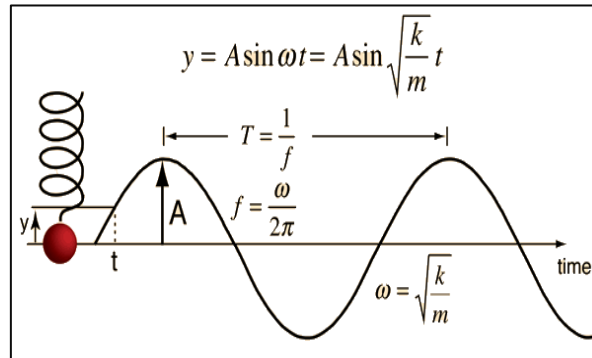


Fig. I.1 : La courbe $y(t)$ qui décrit l'équation horaire d'un mouvement oscillatoire périodique et ses caractéristiques : La pulsation ω , la période T , la fréquence f et l'amplitude A .

I.5 Vibrations libres et forcées

L'étude et la compréhension d'un mouvement vibratoire nécessite la connaissance de sa nature. Généralement, qu'il soit désirable ou indésirable, la vibration d'un système peut être libre ou forcée. Un système mécanique est animé d'un *mouvement vibratoire libre* si, aucune force externe n'agit sur lui lorsqu'il est mis en mouvement après qu'il a subi un déplacement initial. La vibration d'un système implique le transfert de son énergie potentielle en énergie cinétique et de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle, alternativement. Si le système est amorti, de l'énergie est dissipée à chaque cycle de vibration et doit être remplacée par une source externe si un état de vibrations constantes doit être maintenue. Dans ce cas, *la vibration est dite forcées*.

I.6 Notion d'équilibre d'un système mécanique

I.6.1 L'énergie totale d'un système

La loi fondamentale de la dynamique relie l'accélération $\vec{r}(t)$ d'une particule de masse m à la cause de son mouvement (la force \vec{F}) par la relation :

$$\vec{F} = m \vec{r}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

Avec

$$\vec{p} = m \vec{r}(t) = m \vec{v}(t)$$

La force \vec{F} est dite conservative si elle dérive d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (4)$$

Le terme U désigne l'énergie potentielle du système. L'énergie potentielle est définie à une constante arbitraire près. Elle ne dépend que de la position du corps dans l'espace

Si T désigne l'**énergie cinétique** de la particule, on peut montrer que le travail donné par l'intégrale curviligne $w = \int_{M_1 M_2} \vec{F} d\vec{s}$, effectué par la force \vec{F} lorsque le point matériel se déplace de M_1 en M_2 s'écrit :

$$W = T_2 - T_1 = U_1 - U_2$$

Et

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{constante } E$$

On appelle **énergie totale** la constante E et on écrit

$$E = T + U$$

1.6.2. Concepts d'équilibre stable et instable

Selon le premier principe de la dynamique, un objet est en équilibre lorsque les forces qui agissent sur lui se compensent c.-à-d., la somme de ces forces est nulle. Si \vec{R} est la résultante des forces au point d'équilibre $x_{\text{éq}}$:

$$\vec{R}(x)|_{x=x_{\text{éq}}} = \sum \vec{F}|_{x=x_{\text{éq}}} = \vec{0} \quad (5)$$

Généralement, en terme d'énergie, un système, livré à lui-même, évolue spontanément vers les énergies potentielles décroissantes. L'étude de la fonction analytique énergie potentielle permet de caractériser les positions de stabilité d'un système. Pour simplifier, on traite un problème à une dimension, par exemple selon Ox . Pour un système isolé (conservatif) la résultante de force $\vec{R} = \sum \vec{F}$ dérive d'un potentiel :

$$\vec{R} = -\overrightarrow{\text{grad}}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

A une dimension :

$$\vec{R} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$$

En utilisant l'équation (5), l'équilibre du système peut être commenté par la condition :

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

La position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction de l'énergie potentielle U . Il est important de distinguer deux formes d'équilibre (**figure I.2**):

- *Équilibre stable:*

Un équilibre est dit stable si, après perturbation, le mobile retrouve sa position initiale. Le système tend à revenir à sa position d'équilibre après excitation sous l'effet des forces de rappel.

$x = x_{\text{éq}}$ est une position d'équilibre stable si :

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx}\Big|_{x=x_{\text{éq}}} = 0 \\ \frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_{\text{éq}}} > 0 \end{cases}$$

- *Équilibre instable:*

Après perturbation, le mobile s'écarte de sa position initiale (souvent pour rejoindre une position d'équilibre stable). Ceci est le résultat de l'absence des forces de rappel. $x_{\text{éq}}$ est une position d'équilibre instable si :

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx}\Big|_{x=x_{\text{éq}}} = 0 \\ \frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=x_{\text{éq}}} < 0 \end{cases}$$

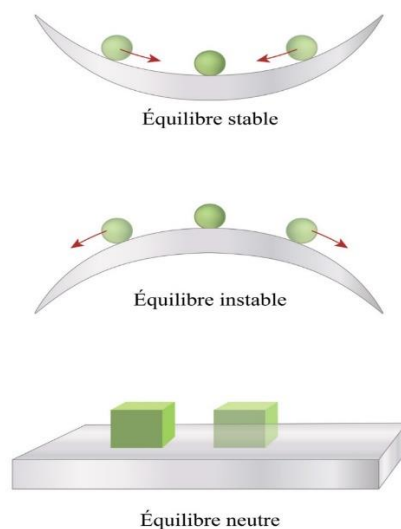


Fig. I.2 : les trois types d'équilibre : Un objet en équilibre stable tend à retourner à sa position d'équilibre lorsque légèrement déplacé de sa position d'équilibre. Un objet en équilibre instable tend à s'éloigner de sa position d'équilibre lorsque légèrement déplacé de sa position d'équilibre. Un objet en équilibre neutre tend à conserver sa nouvelle position après un léger déplacement [3].

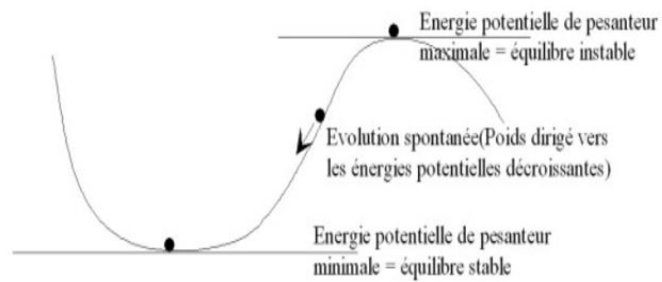


Fig. I.3 : illustration de l'équilibre stable et instable d'un système en fonction de son énergie potentielle.

Exemple I.2

La résultante de force appliquée sur une particule est :

$$\vec{R}(x) = (x^3 - x)\vec{i}$$

1. Tracer la courbe de $R(x)$.
2. Déterminer les positions d'équilibre stable et instable de la particule.

Réponse

1. La courbe de $\vec{R}(x) = (x^3 - x)\vec{i}$

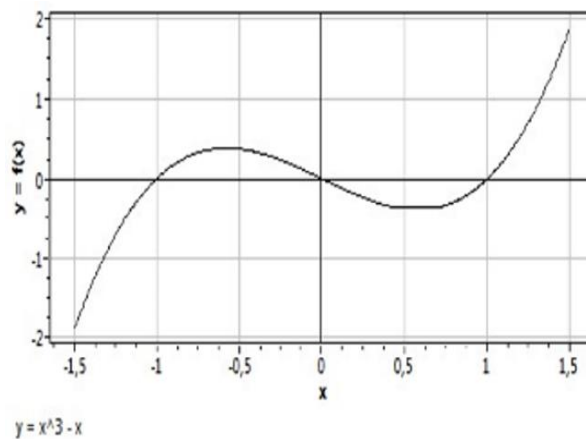


Fig. I.4 : Courbe de la fonction de $\vec{R}(x) = (x^3 - x)\vec{i}$.

2. Positions d'équilibre :

En utilisant la méthode des forces :

$$R(x) = 0 \rightarrow x = (0; -1; 1)$$

$$R'(x) = \frac{dR}{dx} = 3x^2 - 1 \quad \begin{cases} R'(0) = -1 < 0 & \rightarrow \text{équilibre stable} \\ R'(1) = 2 > 0 & \rightarrow \text{équilibre instable} \\ R'(-1) = 2 > 0 & \rightarrow \text{équilibre instable} \end{cases}$$

I.7 Interprétation du mouvement d'un système à partir de la courbe de l'énergie potentiel:

Soit une particule de masse m qui se déplace sur l'axe des x . L'énergie totale E d'un système conservatif est constante, elle est définie comme étant la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle:

$$E = T + U = cte$$

Puisque l'énergie cinétique est toujours positive c.-à-d. : $T = \frac{1}{2}mv^2 > 0$

Cela implique que : $T = E - U > 0$

Ce qui donne la condition de la possibilité du mouvement du système:

$$E \geq U$$

Exemple I.3

L'énergie potentielle d'une masse suspendue à un ressort de longueur x est :

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

1. Déterminer les positions d'équilibre du système.
2. Décrire qualitativement le mouvement de la particule.

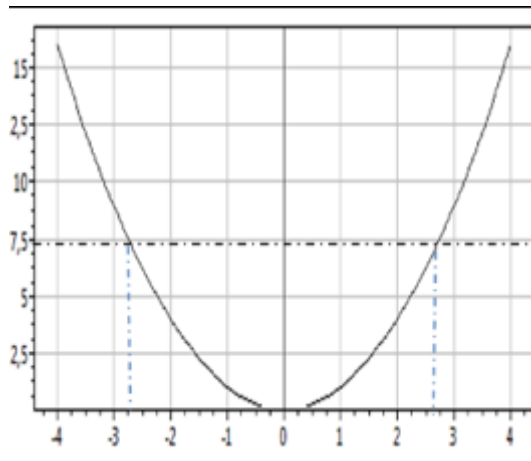


Fig. I.5 : Courbe de la fonction de $U(x) = 1/2 k x^2$.

Réponse :

1. Positions d'équilibres :

$$\mathbf{R(x)}|_{x=x_{\text{éq}}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{\text{éq}}} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{\text{éq}} = 0$$

2. Le mouvement de la masse m :

- Si $E = E_1 > 0$

$x \in]-\infty, -x_1[\rightarrow U(x) > E_1 \rightarrow T < 0$ Mouvement impossible

$x \in]x_1, +\infty[\rightarrow U(x) > E_1 \rightarrow T < 0$ Mouvement impossible

$x \in]-x_1, +x_1[\rightarrow U(x) < E_1 \rightarrow T > 0$ Mouvement oscillatoire

Aux points x_1 et x_2 $E = U$; $T = 0$; $v = 0$ Sont des **points de rebroussement**.

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx ; \quad \begin{cases} F(x_1) < 0 \\ F(-x_1) > 0 \end{cases}$$

▪ Si $E = E_1 < 0$

$x \in]-\infty, +\infty[\rightarrow U(x) > E_1 \rightarrow T < 0$ Mouvement impossible

Remarque :

Pour qu'il y ait un mouvement oscillatoire il faut que :

- La courbe $U(x)$ présente une cuvette de potentiel.
- La droite, qui représente la courbe de l'énergie totale, coupe cette cuvette.

I.8 Degré de liberté d'un système

La mécanique non relativiste définit la position au cours du temps d'une particule par les fonctions vectorielles $\vec{r}(t)$ (position) et \vec{v} (vitesse). Dans les coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r}(t) = X(t)\vec{i} + Y(t)\vec{j} + Z(t)\vec{k}$$

La vitesse d'une particule est donnée par la relation

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dY(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dZ(t)}{dt}\vec{k}$$

Pour déterminer la position d'un système de N points matériels, il faut connaître N vecteurs positions dépendant donc de $3N$ coordonnées. On dit que le système possède $3N$ degrés de libertés q_α ($\alpha = 1, \dots, 3N$) et on appelle q_α les **coordonnés généralisés** tandis que $\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}$ sont les **vitesse généralisées**.

Suivant le type de système, la **coordonné généralisé** q représente la position d'un point matériel, une intensité ou une tension électrique, la charge portée par un condensateur, ... [2].

$$q \Rightarrow x, y, z, \theta, u, i, q$$

La position de N points matériels est définie par un vecteur :

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1 \dots q_{3N})$$

Et

$$\vec{r} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha}$$

Généralement, pour un système de N points matériels reliés par ℓ liaisons cinématiques, on a $3N - \ell$ degré de liberté. Donc, le nombre de paramètres de configuration du système ou le coordonnées généralisées du système notées $q_{\alpha} (q_1, \dots, q_n)$ est :

$$n = 3N - \ell \quad (6)$$

Exemple I.4

- Pour un pendule simple

$$L = \text{cte} \quad d = 2 - 1 = 1 \quad \text{Var} (\theta)$$

- Un pendule double comporte 2 point matériels.

$$d = 2 * 2 - 2 = 2 \quad \text{Var} (\theta_1, \theta_2) \quad \begin{cases} q_1 = \theta_1 \\ q_2 = \theta_2 \end{cases}$$

- Pour une particule en Mvt sur un cercle

$$\text{Nombre de coordonnées } C = 2 \quad \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = R^2 = \text{Cte} \rightarrow \ell = 1 \quad d = 2 - 1 = 1 \quad \text{Var} (\theta)$$

- Mouvement d'une particule sur la surface d'une sphère ($R = \text{cte}$)

$$\text{Nombre de coordonnées } C = 3 \quad \begin{cases} R \sin \theta \cos \varphi \\ R \sin \theta \sin \varphi \\ R \cos \theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \text{Cte} \rightarrow \ell = 1 ; \quad d = 3 - 1 = 2 ; \quad \text{Var} \begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = \varphi \end{cases}$$

I.9 Mouvement oscillatoire linéaire

I.9.1 Oscillateur harmonique

Un **oscillateur harmonique** (OHA) est un oscillateur idéal dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale avec une amplitude constante et une fréquence qui dépend seulement des caractéristiques du système. Le modèle d'OHA décrit l'évolution de n'importe quel système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable. De ce fait, le modèle est très utile dans de nombreux domaines : mécanique, électricité, électronique et optique.

Un exemple très connu d'un OHA et celui d'un pendule élastique constitué d'un ressort de masse négligeable de constante de raideur k et d'une longueur à vide l_0 dont une extrémité est fixée et auquel on a attaché une masse ponctuelle m libre de se mouvoir suivant un axe horizontal sans frottement. On a alors un système à un degré de liberté qui est amené à osciller comme nous allons le démontrer.

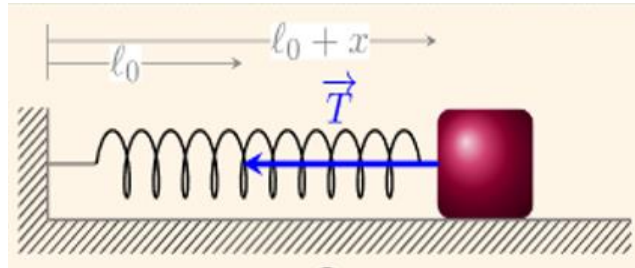


Fig. I.6 : système masse-ressort : Exemple d'un oscillateur harmonique.

Par application de la loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \ddot{x} \vec{i}$$

$$\vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_k = m\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{F}_N + \vec{F}_g = \vec{0} \\ \vec{F}_k = m\vec{a} \end{cases}$$

$$\vec{F}_k = -Kx(t)\vec{i} = m \ddot{x}(t) \vec{i} \text{ (Force de rappel du ressort).}$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Cette dernière équation s'écrit sous la forme mathématique connue :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{Avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(pulsation propre du système)}$$

On cherche une solution de la forme : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

A et φ sont deux constantes d'intégration que l'on obtient grâce à deux conditions initiales.

$$\text{Exemple, si } \begin{cases} x(t=0) = X_{init} \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = X_{init} \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x(t) = A \cos(\omega_0 t)}$$

La courbe de la **figure I.7** illustre la Courbe sinusoïdale de la fonction $x(t)$ de l'oscillateur harmonique masse-ressort.

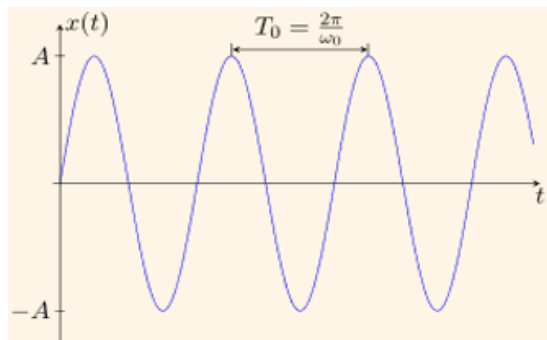


Fig. I.7 : Courbe sinusoïdale de la fonction de la position $x(t)$ d'un oscillateur harmonique masse-ressort.

Note :

Le mouvement du système masse-ressort (m, k) est qualifiée **d'harmonique**, de pulsation propre ω_0 qui dépend des caractéristiques du pendule élastique (m, k) mais pas de l'amplitude des oscillations.

I.9.2 Forme quadratique de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle joue un rôle important dans les calculs utilisant le formalisme de Lagrange. Néanmoins, dans un système à géométrie un peu compliquée, l'énergie potentielle d'une particule peut prendre une allure assez quelconque et peut compliquée.

Le mouvement oscillatoire est dit linéaire si l'écart de la position d'équilibre est infinitésimal. A cet effet, l'énergie potentielle peut prendre la forme quadratique en fonction de l'écart par rapport à la position d'équilibre (**Figure.I.8**).

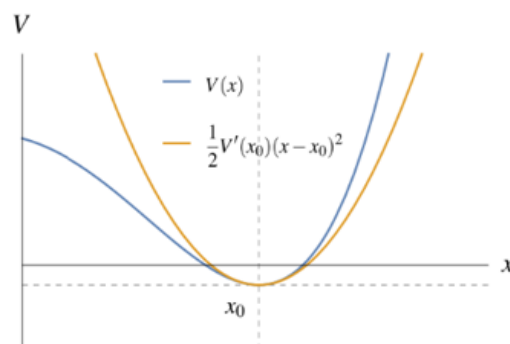


Fig. I.8 : Représentation quadratique d'une fonction quelconque de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre.

Si q_0 est une position d'équilibre d'un système mécanique, le développement en série de Taylor de l'énergie potentielle s'écrit sous la forme:

$$U(q) \approx U(q_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 U}{\partial q^3} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^3 + \dots$$

Le premier terme $U(q_0)$ est une constante qui n'a pas d'intérêt. Le second terme est nul car le minimum de la fonction $U(x)$ se trouve au point q_0 , c'est-à-dire $U'(q_0) = 0$. Pour des petites oscillations le troisième terme peut être négligé car $(q - q_0)^3$ tend vers zéro. Ainsi, on aboutit à la forme quadratique de l'énergie potentielle pour des petites oscillations par une approximation dite linéaire:

$$U(q) \approx \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right]_{q_0} \frac{(q - q_0)^2}{2}$$

Qui s'écrit aussi : $U(q) \approx \frac{1}{2} K (q - q_0)^2$

Avec : $k = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right]_{q_0}$

Si $K > 0$, on dit que l'énergie potentielle est une quadratique de la position. Ainsi, pour un petit déplacement hors d'équilibre la réponse est harmonique.

Dans ce cas, la force $F(q)$ prend la forme linéaire en fonction de l'allongement et s'oppose au mouvement telle que:

$$F(q) = -\frac{dU}{dq} = -K (q - q_0)$$

La force F est une force de rappel qui mène la particule à sa position d'équilibre, donnant naissance à un mouvement oscillatoire.

Dans l'exemple d'un système simple (m, k) à un degré de liberté, l'énergie potentielle s'écrit sous la forme quadratique suivante:

$$U \cong \frac{1}{2} k x^2$$

Où k est la constante de raideur du ressort, ainsi, la force de rappel s'écrit sous la forme de la loi de HOOK :

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

I.9.3 Quelques exemples de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle d'une particule dépend de la position du corps dans l'espace. La valeur de cette énergie est définie à une constante arbitraire près. La variation de l'énergie potentielle d'un corps lorsqu'il se déplace entre deux points A et B est l'opposé du travail fourni par la force à laquelle il est soumis entre ces deux points. Pour une force conservative :

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{F} d\vec{S}$$

Il existe plusieurs formes de l'énergie potentielle. Nous citons à titre d'exemple :

- *L'énergie potentielle de pesanteur*

Soit une particule de masse m qui se déplace du point A au point B. l'énergie potentielle de la particule est :

$$U_m = - \int_A^B \vec{p} d\vec{S} = - \int_A^B (p\vec{j})(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = -p \int_A^B dy$$

$$U = -p\vec{y}$$

- *Energie potentielle d'élasticité*

L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k dépend de son allongement x .

$$U_m = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

- *Energie potentielle d'un pendule de torsion*

Pour un pendule de torsion le moment de force : $\vec{\mathcal{M}}_c = -C\varphi\vec{k}$

$$\mathcal{M}_c = - \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow U = - \int_0^{\varphi+\varphi_0} \vec{\mathcal{M}}_c \cdot d\varphi \cdot \vec{k} = - \int_0^{\varphi+\varphi_0} -C \cdot \varphi \cdot d\varphi$$

Ainsi, l'énergie potentielle de torsion d'un fil d constante de torsion C est:

$$\frac{1}{2} C \cdot (\varphi + \varphi_0)^2 + cte$$

I.10 Formalisme de Lagrange

I.10.1 Introduction

La mécanique classique de Newton exprime l'état d'un système de N particules par les coordonnées habituelles de position \vec{r}_i avec $i = 1, \dots, N$. En revanche, l'idée simple du formalisme de Lagrange est d'exprimer, pour un système de N particules, les lois de la mécanique en fonction des coordonnées dites généralisées indépendantes q_j ($j = 1, \dots, n$). Le nombre n exprime le nombre de degré de liberté donné par l'équation (6).

Il suffit à priori d'identifier les coordonnées q et de faire ensuite toute la cinématique avec elle ;

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

Dans la méthode variationnelle établie par Lagrange basée sur l'analyse de l'énergie, le système est traité comme un ensemble au lieu de parties isolées. Il s'est avéré qu'il est plus facile de suivre l'évolution de l'énergie, quantité scalaire, que de suivre des quantités cinématiques telles que les vitesses ou les accélérations.

I.10.2 Equations de Lagrange pour une particule

- *Principe de base:*

Soit une particule dont la position est déterminée par les trois nombres notés q_i ($i = 1, 2, 3$). On s'intéresse à la position de la particule en fonction du temps. La particule suit une trajectoire dépendant du temps tel que :

$$q_i = q_i(t)$$

Les composantes de la vitesse généralisée \dot{q}_i ($i = 1, 2, 3$) étant défini par la relation :

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

Pour caractériser la trajectoire α de la particule entre les deux instants t_1 et t_2 , on introduit la quantité noté $S(\alpha)$ défini par :

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i^{(\alpha)}(t), \dot{q}_i^{(\alpha)}(t), t) dt$$

Où la fonction L dépend de $q_i(t)$ et $\dot{q}_i(t)$. La quantité S s'appelle l'action. Le principe de moindre action stipule que la particule suit une trajectoire tel que la variation $dS(\alpha) = 0$.

$$d \int_{t_1}^{t_2} L(q_i^{(\alpha)}(t), \dot{q}_i^{(\alpha)}(t), t) dt = 0$$

Cette condition mène au résultat suivant :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0$$

La seule condition pour satisfaire cette équation est que chaque terme entre crochet soit nul, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Ces équations s'appellent équation d'Euler Lagrange. La fonction $L(q_i, \dot{q}_i)$ s'appelle la fonction de Lagrange (lagrangien du système). On vérifie que la fonction L s'écrit comme la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - U(q_i)$$

EXERCICES DU CHAPITRE I

Exercice I.1

L'énergie potentielle d'une particule est représentée sur la figure suivante:

1. Déterminer les positions d'équilibre.
2. Donner la valeur de l'énergie cinétique de la particule au point points $x_O = 0$; $x_A = 2/3$ et $x_B = -1/3$ pour une énergie totale égale à $20/27$.
3. Calculer la force appliquée sur la particule aux points x_A et x_B et discuter ce résultat.
4. Décrire qualitativement le mouvement de la particule pour une énergie totale $E_T = 1$, 0.3 et $20/27$.

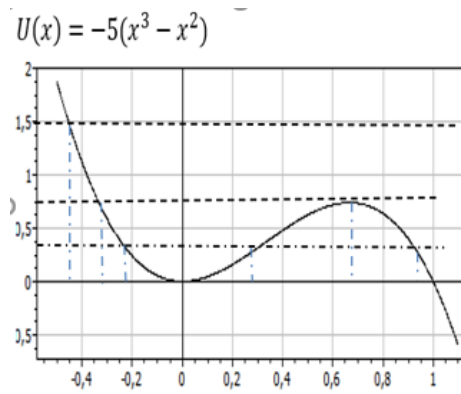


Fig.I.9 : l'énergie potentielle de la particule

Solution I.1

1. Les positions d'équilibre :

l'énergie potentielle est donnée par : $U(x) = -5(x^3 - x^2)$

L'équilibre $\Leftrightarrow \frac{dU}{dx} = U'(x) = 0$

$$\Rightarrow U'(x) = -5(3x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow \text{les positions d'équilibre : } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2/3 \end{cases}$$

2. La valeur de l'énergie cinétique T:

$$E_T = T + U \Rightarrow T(x) = E_T - U(x)$$

$$T(x_0 = 0) = 20/27 - U(0) = 20/27 - 0 = 20/27$$

$$T(x_A = 2/3) = 20/27 - U(2/3) = 20/27 - 20/27 = 0$$

$$T(x_B = -1/3) = 20/27 - U(-1/3) = 20/27 - 20/27 = 0$$

3. La force appliquée sur la particule

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}U}, \text{ à une dimension } \vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{i} = 5(3x^2 - 2x)\vec{i} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}(x_A = 2/3) = 0\vec{i} \\ \vec{F}(x_B = -1/3) = 5\vec{i} \end{cases}$$

▪ *Discussion*

Au point x_A la vitesse de la particule est nulle en plus la somme des forces appliquées sur la particules est nulle, on dit que x_A est un point d'arrêt.

Au point x_B la vitesse de la particule est nulle et la particule subit l'effet d'une force dans le sens positif, on dit que x_B est un point de rebroussement.

4. Description qualitative du mouvement $E_T = 1, 0.3$ et $20/27$.

Pour $E_T = 1$

$x \in]-\infty, -0.38[\rightarrow E_T < U(x)$ Mouvement impossible

$x \in]-0.38, +\infty[\rightarrow E_T > U(x)$ Mouvement possible vert l'infini

Pour $E_T = 0.3$, la droite de E_T coupe le courbe $U(x)$ aux points -0.22 ; 0.29 ; 0.93

$x \in]-\infty, -0.22[\rightarrow E_T < U(x)$ Mouvement impossible

$x \in]-0.22, 0.29[\rightarrow E_T > U(x)$ Mouvement possible (oscillatoire)

$x \in]0.29, 0.93[\rightarrow E_T < U(x)$ Mouvement impossible

$x \in]0.93, +\infty[\rightarrow E_T > U(x)$ Mouvement possible vers l'infini

Pour $E_T = 20/27$, la droite de E_T coupe le courbe $U(x)$ aux points -0.33 ; 0.66

$x \in]-\infty, -0.33[\rightarrow E_T < U(x)$ Mouvement impossible

$x \in]-0.33, 0.66[\rightarrow E_T > U(x)$ Mouvement possible (ne peut être oscillatoire à cause du points d'arrêt $x=0.66$)

$x \in]0.66 + \infty[\rightarrow E_T > U(x)$ Mouvement possible vers l'infini.

Exercice I.2

Un pèse astronaute

A l'intérieur d'une navette spatiale, en chute libre la gravité apparente est nulle. Pour suivre leur masse, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissent osciller et mesurent la période propre (naturelle) d'oscillation.

Déterminer la masse d'un astronaute sachant qu'elle prend 2.31 s pour effectuer une oscillation complète. On donne $K = 500 \frac{N}{m}$ la masse du dispositif $m = 10Kg$.

Solution I.2

Le dispositif est un système masse-ressort qui correspond à un oscillateur harmonique avec une pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

La période propre est :

$$T_0 = 2.31s$$

Avec :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2.720 \text{ rad/s}$$

La masse totale est :

$$M = \frac{K}{\omega_0^2} = 67.6 \text{ Kg}$$

La masse de l'astronaute est :

$$m_a = M - m = 57.6 \text{ Kg}$$

Exercice I.3

Un pendule pour compter les secondes

On désire déterminer la longueur de la corde d'un pendule simple pour que la période naturelle de pulsation soit de 1s (près de la terre).

Solution I.3

Le pendule simple est un OHA avec une pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Pour une période propre $T_0 = 1\text{s}$, la pulsation est : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 6.283 \text{ rad/s}$

Donc : $L = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9.81}{6.283^2} = 0.248 \text{ m}$

Exercice I.4

Une particule de masse m se déplace sur l'axe x . L'énergie potentielle est défini par la fonction $U(x) = Ax^2$. Donner le lagrangien du système et déduire l'équation différentielle du mouvement.

Solution I.4

La particule se déplaçant le long de l'axe x possède un seul degré de liberté. Le lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Ax^2$$

L'équation différentielle de mouvement:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + 2Ax = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2A}{m}x = 0$$

Cette dernière équation correspond à l'équation connue :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Exercice I.5

Soit la fonction lagrangienne :

$$L = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)l^2\theta^2 - \frac{1}{2}K_2Y^2 + K_2l\theta y - \frac{1}{2}K_3Y^2$$

M, m, k_1, k_2, k_3, l sont des constantes et y, θ des variables indépendants

Donner l'équation différentielle du mouvement du système.

Solution I.5

E.D.M :

Le système possède deux degrés de liberté (deux variables y, θ), donc le nombre d' EDM est deux :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right] - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = M\dot{Y}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right] = M\ddot{Y}, \quad \frac{\partial L}{\partial Y} = -(K_2 + K_3)Y + K_2 l \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2ml^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = 2ml^2 \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = (K_1 + K_2)l^2 \theta + K_2 l y$$

$$\Rightarrow \text{E. D. M : } \begin{cases} M\ddot{Y} - [-(K_2 + K_3)Y + K_2 l \theta] = 0 \\ 2ml^2 \ddot{\theta} - [(K_1 + K_2)l^2 \theta + K_2 l y] = 0 \end{cases}$$

C

hapitre II

Systèmes linéaires à un degré de liberté libres non amorties



Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) est un mathématicien, mécanicien et astronome de parent Français. La majorité de ses contemporains cherchent à résoudre des problèmes pratiques, alors que pour Lagrange, il s'agit de faire de la physique mathématique, c.-à-d. de développer des techniques mathématiques applicables à la physique.

Lagrange est considéré comme le fondateur du calcul des variations, avec Euler, et de la théorie des formes quadratiques, on lui doit aussi l'équation différentielle de Lagrange.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie [4].

II.1 Oscillateur libre

Un système physique fermé (sans dissipation et sans excitation extérieure) est le siège d'oscillations libres, dites aussi oscillations propres. Un oscillateur libre non amorti est un système conservatif avec une énergie mécanique constante. Le mouvement d'un oscillateur libre non amortis est caractérisés par une amplitude constante. De plus, la période propre des oscillations ne dépend pas de cette amplitude. Dans un système oscillatoire, il peut exister plusieurs fréquences d'oscillation (mode de vibration), dont le nombre dépend du nombre de degré de liberté.

Pour étudier un système vibratoire, dans une première approximation, il est important de linéariser l'équation différentielle du mouvement (E. D. M). Dans le formalisme de Lagrange qui utilise l'énergie du système, il est nécessaire d'écrire l'énergie potentielle sous forme quadratique pour aboutir à une (E. D. M) linéariser.

II.2 Exemples d'oscillations libres

Ils existent un grand nombre de système physiques réels, ou les frottements peuvent être négliger, qui se comportent comme des oscillateurs harmoniques.

II.2.1. Etude d'un système masse-ressort (m, k)

Un système *masse-ressort* est un système mécanique constitué d'une masse accrochée à un ressort qui se déplace dans une seule direction. Le système possédant un seul degré de liberté peut osciller de deux manières : Oscillation horizontale et verticale.

- *Ressort horizontal*

La **figure (II.1)** présente un système (m, k) placé à l'horizontale. Le ressort linéaire de masse négligeable avec une constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est attaché à l'une de ses extrémités a un bâti. L'autre extrémité du ressort est attaché à un masse m supposée ponctuelle. La masse m peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal (**Figure II.1**). A l'instant $t = 0s$, la masse est écartée de sa position puis lâchée sans vitesse initiale. Au cours du temps, la masse fait un mouvement de va et vient autour de sa position d'équilibre. Le centre de masse M est repérée par son abscisse $x(t)$.

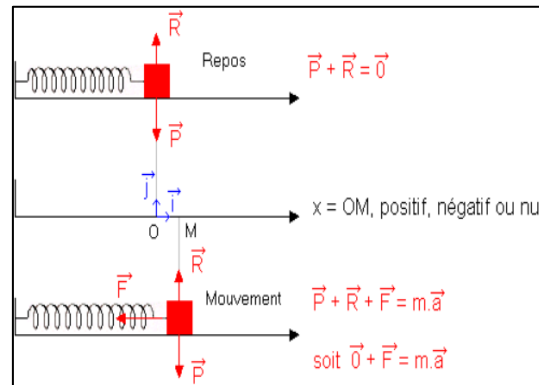


Figure II.1

On veut étudier le mouvement du système masse-ressort. Selon la loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

La masse m est soumise aux forces suivantes : Le poids \vec{p} , la réaction du sol \vec{R} et la force de rappel du ressort \vec{F}_k . Seul la force de rappel \vec{F}_k fourni un travail. Les deux autres forces sont perpendiculaire au déplacement donc leur travail est nul. Dans cette étude, on va utiliser la méthode de Lagrange pour décrire le mouvement du système.

Le lagrangien du système étudié s'écrit : $\mathcal{L} = T - U$

L'énergie cinétique T est celle de la masse m : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle est celle du ressort. A l'équilibre, l'allongement du ressort est nulle ($x_0 = 0$). Donc pour un allongement x de la position d'équilibre :

$$U = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

Pour un système libre non amortis, l'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On reconnaît ici l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ qui s'écrit sous la forme générale :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La résolution de cette équation est de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A et φ deux constantes dépendant des conditions initiales. La **figure II.2** illustre la courbe de l'équation horaire $x(t)$ du système (m-k) étudié.

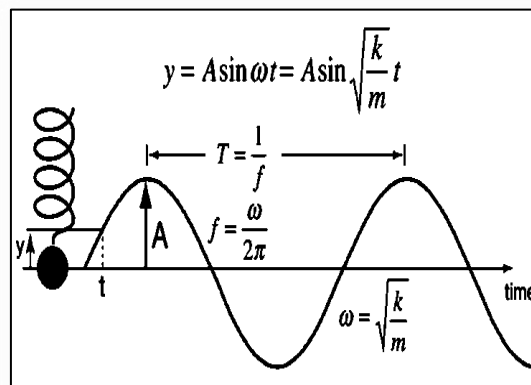


Fig.II.2 : Equation horaire $x(t)$ d'un OHA pour le système masse-ressort.

II.2.2. Pendule simple

Un pendule simple est un dispositif constitué d'une masse ponctuelle M suspendue à une corde de longueur ℓ inextensible qui est suspendue à un support rigide (**Figure II.3**). Lorsque la masse est déplacée légèrement d'un côté puis lâchée librement, le système se met à osciller d'avant et en arrière à partir de sa position d'équilibre. Le balancement d'un pendule simple à partir de sa position moyenne est un exemple de mouvement harmonique simple. Pour étudier le mouvement du pendule simple nous proposons d'utiliser la méthode de Lagrange:

Le lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = T - U$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = U_m + Cte$$

$$U = - \int \vec{P} \cdot d\vec{l} = - \int_0^y -mg dy$$

$$U = mg(\ell - \ell \cos\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Pour $\theta \ll$ $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \longrightarrow U_m = mg\ell \frac{\theta^2}{2}$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \cdot \ell^2 \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \ell \cdot \theta^2 + cst$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ell^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot \ell \cdot \theta = 0$$

La dernière équation s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \sin\theta = 0$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ est la pulsation propre du pendule.

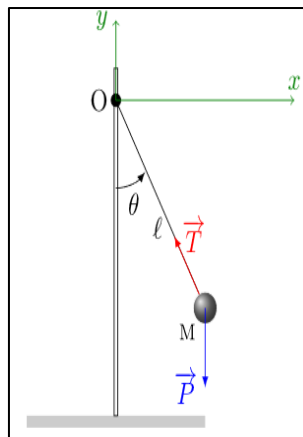


Fig.II.3 : Pendule simple constitué d'une masse ponctuelle M suspendue à une corde de longueur ℓ inextensible.

II.2.3. Pendule de torsion

Un pendule de torsion est constitué d'une barre de longueur L et de masse négligeable rappelée à sa position d'équilibre par un fil métallique de torsion C et fixé en ses deux extrémités à un bâti. La barre se termine par deux masses m_1 et m_2 supposée ponctuelle (Figure II.4). Une fois la tige est écartée de sa position d'équilibre, elle commence à osciller. On veut étudier la nature de ce mouvement.

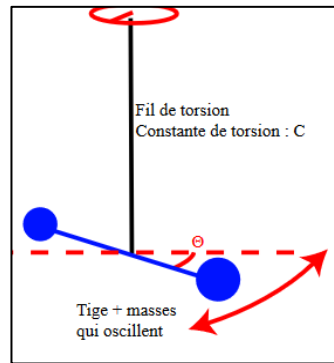


Fig.II.4 : Pendule de torsion.

Pour un ressort la force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{i}$, par correspondance, pour un pendule de torsion le moment de force est $\vec{\mathcal{M}}_c = -C\theta\vec{k}$.

Pour un système conservatif, le moment de force dérive d'une fonction potentielle:

$$\mathcal{M}_c = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \rightarrow U = -\int_0^{\theta+\theta_0} \vec{\mathcal{M}}_c \cdot d\theta \cdot \vec{k}$$

L'énergie potentielle du système est celle de la torsion du fil :

$$U = -\int_0^{\theta+\theta_0} -C \cdot \theta \cdot d\theta \cdot \vec{k} = \frac{1}{2} C \cdot (\theta + \theta_0)^2$$

A l'équilibre $\theta_0 = 0$, donc ; $U = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$

L'énergie cinétique T est : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = 2 T_{m_1}$

$$T = 2 \frac{1}{2} J_{m/O} \dot{\theta}^2 = \left[m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{L} = T - U = \left[m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{m \cdot L^2}{2} \cdot \ddot{\theta} + C \cdot \theta = 0$$

La dernière équation s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \frac{2C}{m L^2} \theta = 0$

Qui s'écrit aussi $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ qui correspond à l'équation d'un OHA avec une pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m L^2}}.$$

II.3 Solution de l'équation différentielle du Mvt

Pour un système à un degré de liberté libre non amortie, l'équation différentielle qui régit ce système est une équation linéaire dont la forme est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Pour résoudre cette équation on cherche des solutions de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad , \quad \omega_0 > 0$$

Les constantes A (amplitude) et φ (constante de phase) sont déterminées à partir des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

Remarque :

Un oscillateur est dit linéaire si l'équation différentielle qui régit l'évolution de la longueur X est linéaire.

Exemple :

Résoudre et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle homogène: $\ddot{x} + 4x = 0$. Pour les conditions initiales suivantes : $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$; $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$

Solution :

$$\ddot{x} + 2^2 x = 0$$

$$\omega_0 = 2$$

$$x(t) = A \cos(2.t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A \cos(\varphi) = 1 & A = 1 \\ -A \sin(\varphi) = 0 & \varphi = 0 \end{cases} \quad x(t) = 1 \cos(2.t)$$

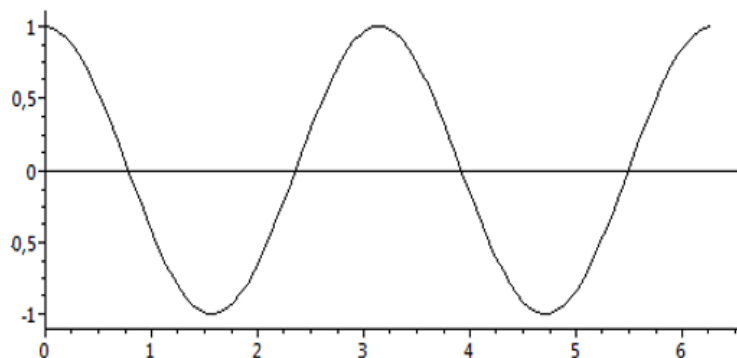


Fig.II.5 : Courbes représentative de deux périodes d'un OHA.

II.4 L'analogie électro - mécanique :

Circuit électrique L – C

On considère le circuit électrique ci-contre, comprenant un condensateur parfait de capacité C et une bobine parfaite (résistance négligée) d'inductance L. A l'instant $t = 0s$, le condensateur est chargé initialement avec une charge Q.

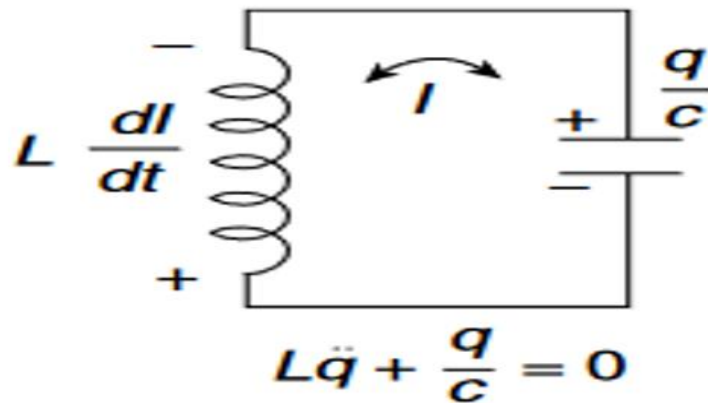


Fig.II.6 : Circuit électrique LC.

Pour la mise en équation du système électrique LC, on va utiliser deux méthodes :

- La loi des mailles:

On applique la loi des mailles dans le circuit précédent, on trouve:

$$U_L + U_C = 0 \quad \Rightarrow \quad L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

On utilise le fait que $i = \frac{dq}{dt}$ on aboutit à l'équation :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = 0$$

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

Ou $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

On retrouve, ainsi, l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Conclusion :

Dans un circuit électrique parfait (L,C), la charge électrique du condensateur évolue comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω_0 .

- Deuxième méthode (bilan énergétique):

L'énergie électrostatique = énergie potentielle : $U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

L'énergie magnétique = énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L\dot{q}^2$

Le lagrangien du système s'écrit comme : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} L\dot{q}^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

L'équation différentielle du mouvement de la charge q s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Si on compare les équations différentielles du pendule élastique et du circuit L-C, on constate l'analogie électromécanique suivante :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k x = 0 \leftrightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

Système mécanique		Circuit électrique
Pendule élastique	Pendule simple	L 1/C U(t)
X	θ	
\dot{X}	$\dot{\theta}$	
m	ℓ	
K	g	
F	\mathcal{M}	

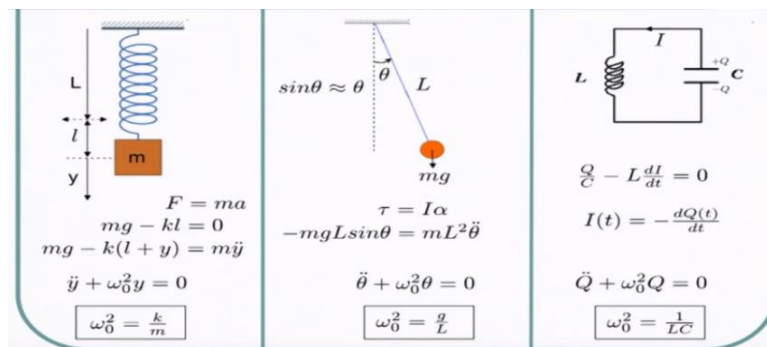


Fig.II.7 : Analogie entre les trois systèmes oscillatoires : masse-ressort, pendule simple et circuit électrique LC.

II.5 Condition d'oscillation

Pour un oscillateur harmonique simple l'E D M : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Un tel mouvement est possible si la condition $\omega_0^2 > 0$ est satisfaite.

Exemple

Une masse M fixé à une tige homogène de masse négligeable et de longueur L oscille sans frottement, autour d'un axe fixe O . A l'équilibre, la tige est en position verticale ($\theta = 0$) et l'allongement du ressort est nulle. On faisant incliner la tige d'un angle θ , et on laisse le système libre.

1. Etablir l'équation différentielle de mouvement (E. D. M) dans le cas des mouvements de faible amplitude.
2. Donner la condition d'oscillation du système.
3. Donner l'équation horaire de mouvement.
4. Déduire la force appliquée par le système sur le mur au point A.

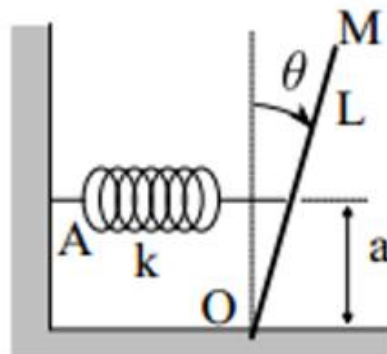


Fig.II.8

Solution :

1. Equation différentielle du mouvement:

- Le lagrangien du système : $\mathcal{L} = T - U$

$$T = \frac{1}{2} (J_{M/O}) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (M L^2) \dot{\theta}^2$$

$$U = U_m + U_k + cst$$

$$U_m = -\vec{P} \cdot \vec{h} = -Mgy = -Mg(L - L \cos \theta) ; \quad (\theta \ll \cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}) ;$$

$$U_m = -\frac{1}{2} [mgL] \theta^2$$

$$U_k = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k [a\theta]^2$$

$$U = \frac{1}{2}[ka^2 - MgL]\theta^2 + cst$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M L^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(ka^2 - MgL)\theta^2 + cte \quad (1)$$

E. D.M. pour un système oscillatoire libre non amortis à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow (M L^2)\ddot{\theta} + (ka^2 - MgL)\theta = 0$$

La dernière équation s'écrit sous la forme:

$$\ddot{\theta} + \frac{(ka^2 - MgL)}{(M L^2)}\theta = 0 \quad (3)$$

2. La condition d'oscillation du système:

Posant $\omega_0^2 = \frac{ka^2 - MgL}{ML^2}$ l'équation (3) s'écrit comme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (4)$$

La condition d'oscillation correspond à une valeur positive du terme ω_0^2 , c.-à-d.

$$\omega_0^2 > 0 \rightarrow \frac{ka^2 - MgL}{ML^2} > 0 \rightarrow ka^2 - MgL > 0 \rightarrow k > \frac{mgL}{a^2}$$

3. Equation horaire du mouvement :

Pour $\omega_0^2 > 0$, l'équation différentielle (4) est une équation d'un oscillateur harmonique. Pour résoudre cette équation, on choisit une solution de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les deux paramètres θ_0 et φ seront calculer à partir des conditions initiaux : $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$.

4. La force appliquée par le système sur le mur au point A

Le point A étant fixe :

Donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}; \quad \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = |\vec{T}| = Kx(t) = K a \theta(t).$$

$$F(t) = K a \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

La force appliquée sur le mur est sinusoïdale, cela explique l'effet que nous ressentons lors du passage des véhicules causant des vibrations du sol.

EXERCICES DU CHAPITRE II**Exercice II.1**

Un bloc de masse $m = 700g$ est fixé à un ressort de constante de raideur $k = 70N/m$. Le block est tiré à une distance $x = 10\text{ cm}$ de sa position d'équilibre sur une surface horizontale sans frottement et libéré du repos à $t = 0.1s$.

1. Quelle est la force exercée par le ressort sur le bloc juste avant que le bloc ne soit relâché ?
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement du système.
3. Quelles sont : l'amplitude, la pulsation, la fréquence et la période des oscillations ?
4. Quelle est la vitesse maximale des oscillations du bloc?
5. Quelle est l'intensité de l'accélération maximale des oscillations?
6. Calculer la constante de phase des oscillations et déduire l'équation horaire du mouvement.

Solution II.1

1. La force exercée par le ressort sur le bloc :

Le ressort étant en équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$

$$\begin{cases} P = R \\ F = kx \end{cases}$$

$$F = kx = 70 \left(\frac{N}{m} \right) \times 0.10(m) = 7.0\text{ N}$$

2. Equation différentielle du mouvement (EDM) :

Le bloc se déplaçant horizontalement le long de l'axe x est possède un seul degré de liberté.

Le lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$L'EDM: \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La dernière équation correspond à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3. Les caractéristiques du mouvement:

- L'amplitude: $A = 10\text{ cm}$
- La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{70\text{ N/m}}{0.7\text{ Kg}}} = 10.0\text{ rd s}^{-1}$
- La fréquence propre : $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10.0}{6.28} = 1.59\text{ s}^{-1}$
- La période propre : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6.28}{10.0} = 0.628s$; ou $T = \frac{1}{f}$

4. La vitesse maximale des oscillations du block :

La position du bloc est donnée par la solution de l'EDM :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = 10 \cos(10 t + \varphi)$$

La vitesse du bloc:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -100 \sin(10 t + \varphi)$$

La vitesse maximale des oscillations correspond à l'amplitude de la vitesse :

$$V_{max} = 100 \text{ cm s}^{-1}$$

5. L'intensité maximale de l'accélération des oscillations

L'accélération du bloc :

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -1000 \cos(10t + \varphi)$$

L'accélération maximale des oscillations correspond à l'amplitude de L'accélération:

$$\ddot{X}_{max} = 1000 \text{ cm s}^{-2}$$

6. La constante de phase des oscillations :

L'équation horaire de mouvement est :

$$x(t) = 10 \cos(10 t + \varphi)$$

A $t = 0.1 \text{ s}$:

$$\begin{cases} x(t = 0.1) = 10 \cos(1 + \varphi) = 10 \\ \dot{x}(t = 0.1) = -100 \sin(1 + \varphi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(1 + \varphi) = 1 \\ \sin(1 + \varphi) = 0 \end{cases}, \varphi = 5.28 \text{ rd}$$

L'équation horaire de mouvement du système s'écrit finalement:

$$x(t) = 10 \cos(10t + 5.28) \text{ cm}$$

Exercice II.3

Oscillation verticale d'un système (m-k)

Un système bloc-ressort est suspendu verticalement comme dans la **figure II.9**. Le bloc de masse $m = 100g$ est déplacé d'une distance $x_M = 4 \text{ cm}$ à partir de sa position d'équilibre et laissé sans vitesse initiale.

1. Pour une constante de raideur $k = 10 \text{ N/m}$, calculer l'allongement x_0 du ressort à l'équilibre.
2. Calculer le lagrangien du système.
3. Réduire l'expression de l'énergie potentielle à une forme quadratique en appliquant la condition d'équilibre.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
5. Déduire la période propre du système.
6. Donner la solution horaire $x(t)$ de la position du centre de masse du bloc.

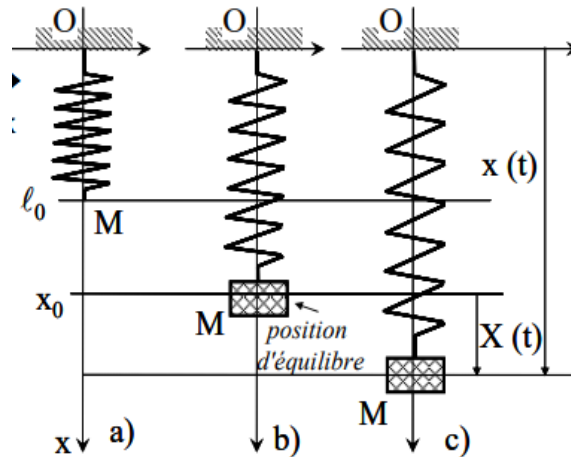


Fig.II.9

Solution II.3

1. Allongement x_0 du ressort à l'équilibre :

Le bloc de masse m subit l'effet de son poids \vec{p} , orienté vers le bas, et la force de rappel du ressort \vec{T}_0 , orientée vers le haut.

$$\text{A l'équilibre : } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \qquad \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$$

$$mg = kx_0$$

$$x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{0.1 \text{ Kg} \times 9.81 \text{ ms}^{-2}}{10 \text{ N/m}} = 9.81 \text{ cm}$$

2. Le lagrangien du système : $\mathcal{L} = T - U$

L'énergie cinétique est celle de la masse m :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle est celle de la masse m et du ressort k

$$U = U_m + U_k + Cte$$

Les deux forces \vec{p} et \vec{F}_k dérivent d'un potentielle. Pour une petite variation $d\vec{l}$ de la position de m l'énergie potentielle est $dU_m = -\vec{p} \cdot d\vec{l}$. Pour un allongement $d\vec{x}$ du ressort, l'énergie potentielle d'élasticité est $dU_k = -\vec{F}_k \cdot d\vec{x}$.

On choisit l'extrémité du ressort vide comme un repère. A l'équilibre le ressort est allongé de x_0 et la masse se trouve à x_0 . Lorsque le ressort est allongé de x nous avons:

$$U_m = - \int_0^{x+x_0} \vec{p} \cdot d\vec{x} = -mg(x + x_0)$$

$$U_k = - \int_0^{x+x_0} \vec{F}_k \cdot d\vec{x} = - \int_0^{x+x_0} -kx \cdot dx = \frac{1}{2}k \cdot (x + x_0)^2$$

$$U = -mg(x + x_0) + \frac{1}{2}k \cdot (x + x_0)^2 \quad (1)$$

$$U = -mgx - mg x_0 + \frac{1}{2}k \cdot (x + x_0)^2 + Cte$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \left[-mgx - mg x_0 + \frac{1}{2}k \cdot (x + x_0)^2 + Cte \right] \quad (2)$$

3. Forme quadratique de l'énergie potentielle :

$$\text{A l'équilibre :} \quad mg - kx_0 = 0 \quad (3)$$

$$U = -mgx - mg x_0 + \frac{1}{2}k \cdot (x + x_0)^2 + Cte$$

$$U = -mgx - mg x_0 + \frac{1}{2}k \cdot x^2 + \frac{1}{2}k x_0^2 + k x x_0 + Cte$$

$$U = -(mg - k x_0)x + \frac{1}{2}k \cdot x^2 + \left[\frac{1}{2}k x_0^2 + -mg x_0 \right] + Cte \quad (4)$$

Le terme entre [.] est une constante.

En remplaçant (3) dans (4) on aboutit à l'expression quadratique de U :

$$U = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + Cte$$

Le Lagrangien du système s'écrit ainsi:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}k \cdot x^2 + cte$$

4. Equation différentielle de mouvement:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m \ddot{x} + kx = 0$$

Qui s'écrit : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (OHA)

5. La période propre du système :

La pulsation propre du système étant: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} ; \quad T_0 = 6.28 \sqrt{\frac{0.1}{10}} = 0.628s$$

6. Equation horaire de mouvement $x(t)$:

L'équation $x(t)$ correspond à la solution de E. D. M. Pour résoudre cette équation, on cherche des solutions de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad , \quad \omega_0 > 0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{6.28}{0.628} = 10 \text{ rd s}^{-1}$$

A partir des conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 4 \text{ cm} \\ \dot{x}(0) = 0 \text{ cm.s}^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cos(\varphi) = 4 \text{ cm} \\ -A \sin(\varphi) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} A = 4 \text{ cm} \\ \varphi = 0 \end{matrix}$$

L'équation horaire de mouvement :

$$x(t) = 4 \cos(10 t) \text{ cm}$$

Exercice II.4

Un pendule simple constitué d'une masse M suspendue à une corde inextensible de longueur $\ell = 1 \pm 0.01\text{m}$ (Figure II.3).

1. Pour des oscillations faibles et en utilisant la loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement (E. D. M).
2. On veut utiliser ce pendule pour mesurer la constante de gravitation g à Laghouat. Trouver la valeur de g , si le temps nécessaire pour effectuer 5 oscillations est $t = 10 \pm 0.1\text{s}$.
3. Déduire la valeur de la pulsation propre ω_0 et donner la solution horaire $\theta(t)$ du système si, à l'instant $t = 0\text{s}$ la masse est lâchée sans vitesse initiale à une amplitude $\theta_0 = 12^\circ$.

Solution II.4

1. Equation différentielle du mouvement (méthode de Newton) :

$$\sum \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{ex}) = j. \ddot{\theta}. \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{T}) = j. \ddot{\theta}. \vec{k}$$

La tension \vec{T} de la corde étant perpendiculaire à la trajectoire de la masse, alors :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{T}) = 0$$

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \vec{OM} \times \vec{P} = -OM.p.\sin\theta \vec{k}$$

$$\rightarrow -P.\ell.\sin\theta = m.\ell^2.\ddot{\theta} \quad \rightarrow \ell.\ddot{\theta} + g.\sin\theta = 0$$

Pour des valeurs de $\theta \ll$, $\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin\theta = 0$$

On pose $\frac{g}{\ell} = \omega_0^2$

On trouve ainsi l'E. D. M $\ddot{\theta} + \omega_0^2.\sin\theta = 0$

2. La valeur de g :

Le temps de 5 oscillation est

$$5T_0 = 10s \Rightarrow \text{la période } T_0 = \frac{10 \pm 0.1s}{5} = 2 \pm 0.02s$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2s$$

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T_0^2} = 39.44 \frac{1 \pm 0.01}{4 \pm 0.04} = 9.86 \pm 0.04 s$$

3. Equation horaire de mouvement :

- La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2 \times 3.14}{2 \pm 0.02} = 3.14 \pm 0.02 \text{rd } s^{-1}$$

- Pour résoudre l'E. D. M on cherche des solutions de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad , \quad \omega_0 > 0$$

A partir des conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(0) = 12^\circ \\ \dot{\theta}(0) = 0 \text{ cm. } s^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 \cos(\varphi) = 20^\circ & \theta_0 = 12^\circ \\ -\theta_0 \sin(\varphi) = 0 & \varphi = 0 \end{cases}$$

L'équation horaire de mouvement : $\theta(t) = 12 \cos(3.14 t)^\circ$

Exercice II.5

Une tige de longueur L peut tourner autour d'un axe O comme dans la **figure II.110**. A l'équilibre la tige fait un angle nul avec la verticale. On écarte la tige d'un angle $\theta \ll$. On veut étudier le mouvement oscillatoire du système. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant deux méthodes.

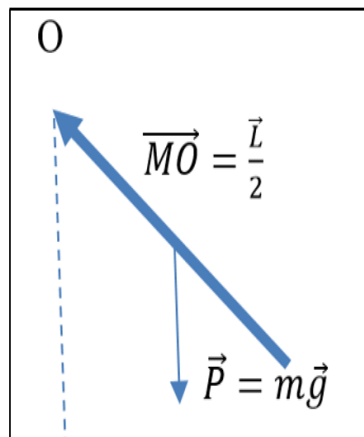


Fig.II.10

Solution II.5

- *Méthode de Newton :*

$$\sum \vec{\tau} = I \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{\tau} = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} = -mg \frac{L}{2} \sin \theta \vec{k}$$

$$I \ddot{\theta} \vec{k} = \left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \ddot{\theta} = -mg \frac{L}{2} \sin \theta \quad (\text{pour } \theta \ll \sin \theta \approx \theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0$$

La dernière équation décrit le mouvement d'un OHA de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

- *Méthode de Lagrange*

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} [I] \dot{\theta}^2 - mgh$$

(h correspond au mouvement du centre de la tige) : $h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \theta$

Pour $\theta \ll$ $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \dot{\theta}^2 - \frac{mgL}{4} \theta^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} mL^2 \cdot \ddot{\theta} + \frac{mgL}{2} \cdot \theta = 0$$

La dernière équation s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0$ (OHA)

Exercice II.6

Un disque de masse M et de rayon R est solidaire à une tige de longueur l . Un ressort de constante de raideur k est lié à la tige au point A. l'autre extrémité du ressort est fixée au point B d'un mur comme le montre la **figure II.11**. Le disque est animé d'un mouvement de rotation et de translation autour de sa position d'équilibre. Pour des petites oscillations:

1. Calculer le lagrangien du système.
2. Etablir l'équation différentielle du Mvt.
3. Donner la condition d'oscillation.
4. Donner alors la période d'oscillation.

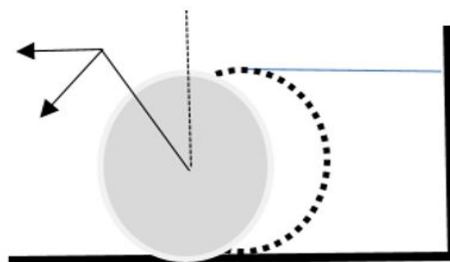


Fig.II.11

Solution II.6

1. Le lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = T - U$$

L'énergie potentielle est : $U = U_M + U_m + U_k + Cte$

$$U_M = 0; \quad \text{et} \quad U = -mgh + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 + Cte ;$$

Pour des valeurs faibles de $\theta \ll$

$$U = -mgl \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}k(2R\theta + 2R\theta_0)^2 + Cte \quad \theta \ll$$

$$\text{A l'équilibre :} \quad \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \rightarrow \theta_0 = 0 ;$$

$$U = \frac{1}{2}(4kR^2 - mgl)\theta^2 + Cte$$

$$\text{L'énergie cinétique :} \quad T = T_m + T_M$$

$$T_M = T_{tr}(\text{translation}) + T_{rot}(\text{rotation}) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{tr} = \frac{1}{2}MV_{oo'}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 \\ T_{rot} = \frac{1}{2}j_{M/o}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 \end{array} \right.$$

$$T_M = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}mV_m^2$$

$$V_m^2 = V_e^2 + V_r^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cos(\vec{V}_e, \vec{V}_r) \quad \cos(\vec{V}_e, \vec{V}_r) = \theta$$

$$V_m^2 = R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2Rl\dot{\theta}^2 \cos\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}^2 \cos\theta \approx \dot{\theta}^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \approx \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^2 \sin\theta \approx \dot{\theta}^2 \theta \approx 0 \end{array} \right.$$

$$V_m^2 = (R^2 + l^2 + 2Rl)\dot{\theta}^2 = (R + l)^2\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}m(R + l)^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R + l)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R + l)^2 \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(4kR^2 - mgl)\theta^2 + Cte$$

2. L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad : \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R + l)^2 \right] \ddot{\theta} + [4kR^2 - mgl]\theta = 0$$

$$3. \text{ Condition d'oscillation : } \omega_0^2 = \frac{4kR^2 - mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R+l)^2} \quad \omega_0^2 > 0 \rightarrow 4kR^2 - mgl > 0$$

4. La période d'oscillation

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kR^2 - mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R+l)^2}}}$$

EXERCICE II.7

Mouvement oscillatoire d'une bille dans une gouttière [5]

Une bille de masse m et de rayon r peut rouler sans glisser sur la surface d'une gouttière de rayon $R + r$. Le centre de masse de la bille décrit donc un cercle de rayon R . On libère la bille à une hauteur $h + r$ du fond de la gouttière.

1. Calculer le lagrangien du système.
2. Etablir l'équation différentielle du Mouvement(EDM) et déduire la pulsation propre des oscillations.
3. Pour une goutte d'eau de rayon $r = 1\text{cm}$, trouver le rayon de la gouttière qui correspond à une période propre $T_0 = \pi \text{ s}$

Solution II.7

1. Lagrangien du système : $\mathcal{L} = T - U$
 - L'énergie cinétique

La bille est une sphère qui fait un mouvement de translation et de rotation. Son énergie cinétique est :

$$T = T_{tr} + T_{rot}$$

L'énergie cinétique de translation du centre de masse :

$$T_{tr} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (R \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$\dot{\theta}$ désigne la vitesse de rotation de la goutte d'eau dans la trajectoire de la gouttière supposé circulaire de rayon $R+r$.

L'énergie cinétique de rotation:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} m r^2 \right] \omega^2$$

ω est la vitesse de rotation de la bille (goutte d'eau) sur elle-même.

La bille fait un mouvement sans glissement, donc, son point I en contact avec la surface de la gouttière a une vitesse nulle. Si $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation, alors :

$$\vec{v}_I = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{CI}$$

Ce qui donne

$$(R \dot{\theta} + \omega r) \vec{u}_\theta = \vec{0}$$

$$\omega = -\frac{R}{r} \dot{\theta}$$

L'énergie cinétique de la bille est :

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} m r^2 \right] \left[\frac{R^2}{r^2} \dot{\theta}^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} m R^2 \right] \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

De l'équation (1) et (2) on trouve :

$$T = \frac{1}{2} m (R \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} m R^2 \right] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{7}{5} m R^2 \right] \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle

$$E_p = -m \vec{g} \cdot \vec{z} = mg R (1 - \cos \theta)$$

Si h est très petit devant R : $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

Soit : $E_p = \frac{1}{2} mg R \theta^2$

Le lagrangien du système : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} \left[\frac{7}{5} m R^2 \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mg R \theta^2$

2. Equation différentielle du Mouvement (EDM).

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\left[\frac{7}{5} m R^2 \right] \ddot{\theta} + mg R \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7R} \theta = 0$$

La dernière équation est une EDM d'un oscillateur harmonique de la forme:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

La pulsation propre de ces oscillations: $\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7R}}$

3. La valeur du rayon de la gouttière ($R + r$) qui correspond à une période propre $T_0 = \pi s$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{7R}{5g}}$$

$$R = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \frac{5}{7} g = \frac{\pi^2}{28} 5 \cdot 9.81 = 1.75 \text{ m}$$

$$R + r = 1.75 \text{ m} + 0.01 \text{ m} = 1.76 \text{ m}$$

C

hapitre III

Vibrations linéaires à un degré de liberté libres amorties

III.1 Introduction

Théoriquement, un oscillateur animé d'un mouvement libre non amortie rigoureusement périodique garde une amplitude constante. Dans la vie réelle, Le contact de l'oscillateur avec l'environnement peut se traduire par une perte d'énergie due au travail résistant des force d'interaction des parties en mouvement du système et son milieu. Ainsi, les oscillations finissent par s'arrêter et le système tend vers une certaine position d'équilibre. On dit que les oscillations sont amorties (Figure 3.1).

Considérons un système bloc-ressort. Si l'on donne un élan au bloc afin de le mettre en oscillation, on observe que l'amplitude d'oscillation diminue graduellement avec le temps. Cette décroissance est due essentiellement à l'existence de force de frottement (d'amortissement) qui dépend de la nature du milieu. On parle d'un système dissipatif (perte d'énergie). Ces forces dont les travaux sont constamment négatifs ne sont pas toujours définies de manière simple. La manière exacte dont l'amplitude diminue avec le temps dépend du type de force d'amortissement.

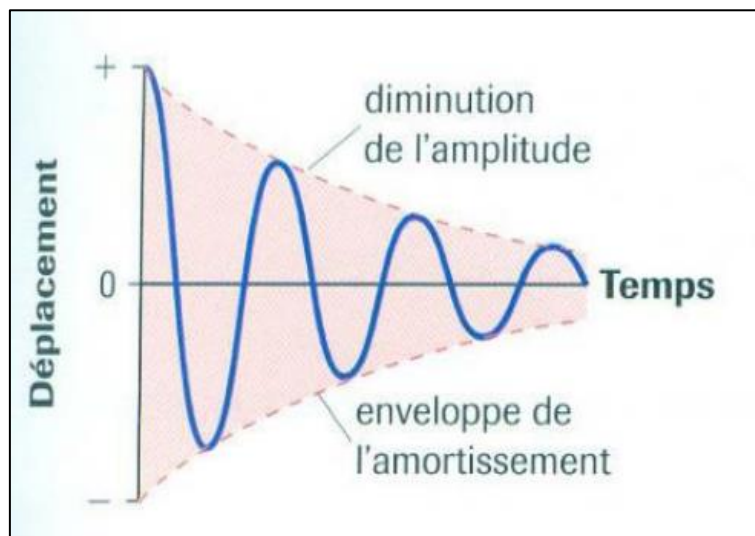


Figure 3.1 : Amplitude décroissante avec le temps de la courbe de l'équation de mouvement d'un oscillateur libre amorti.

III.2 Force d'amortissement

En pratique, durant le mouvement d'un système mécanique, la force de frottement est dirigée dans le sens inverse du mouvement éventuel de système. En mécanique, deux types d'amortissement existent :

- Amortissement par frottement solide ou la force de frottement est défini par la relation:

$$F_f = \mu N = cst$$

μ est le coefficient de frottement et N représente la force perpendiculaire à la surface de contact du mobile.

- Amortissement par frottement fluide (visqueuse) ou la force de frottement est défini par la relation:

$$F_f = -\alpha v^n \neq cst, n (\text{entier} > 1), \alpha > 0$$

Dans ce chapitre on va tenir compte de l'influence de la force de frottement typique simple que l'on rencontre souvent dans la pratique dans les frottements visqueux, où le module de la force d'amortissement est proportionnel à la vitesse de la masse en mouvement :

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$$

α est appelée constante de frottement et \vec{v} est la vitesse du mobile. Cet exemple est une bonne description des systèmes oscillatoires dans le régime de faible vitesse.

III.3 Schématisation d'amortissement

Plusieurs systèmes mécaniques dont on veut étudier peuvent être ramener à des modèles physiques simples. Un système oscillatoire (une voiture par exemple) peut être ramené à un système *masse-ressort* comme le montre la [figure 3.2](#).

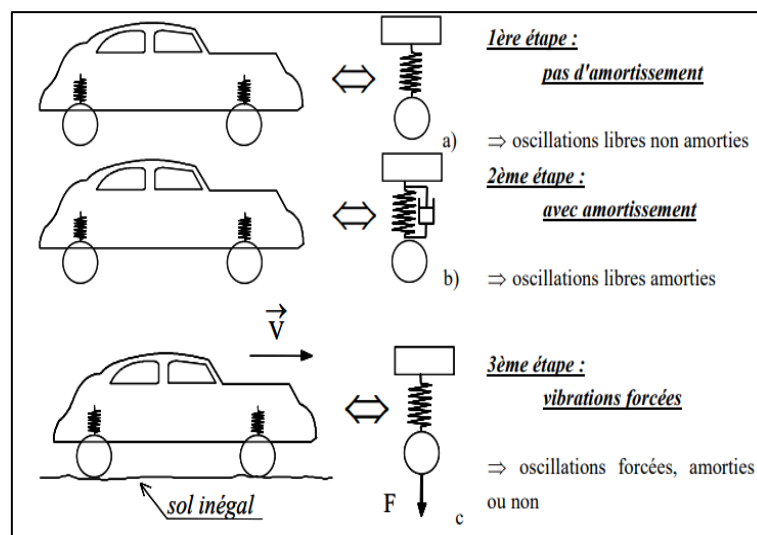


Figure 3.2 : Schématisation du mouvement oscillatoire d'une voiture : (a) système oscillatoire libre non amorti, (b) système oscillatoire libre amorti et (c) oscillation forcée amortie [6].

Dans le cas des oscillations libres amorties, l'effet d'amortissement est indiqué par le symbole en piston auquel on associe un coefficient de frottement α (Figure 3.3).

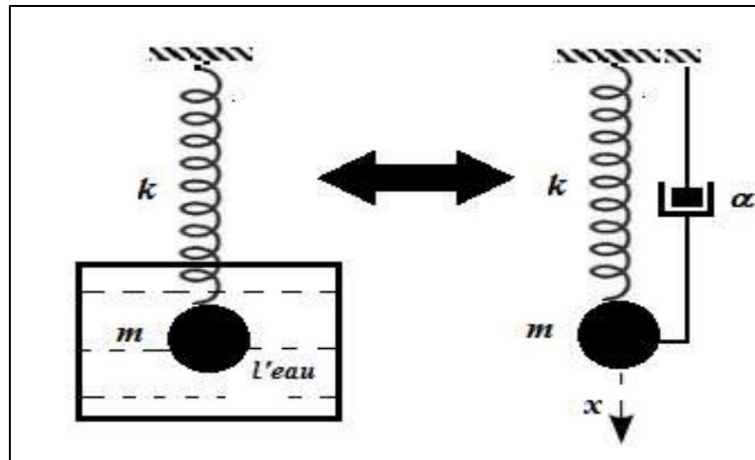


Figure 3.3 : Schéma d'un amortisseur pour système mécanique masse-ressort. L'effet d'amortissement (à gauche) est représenté par un piston auquel on associe la constante de frottement α .

III.4 Mise en équation d'un système oscillatoire amorti

Dans cette partie on traite seulement les forces de frottement de type $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$. Soit le système amorti masse-ressort de la figure 3.3. L'amortissement de type visqueux est décrit par un amortisseur de constante de frottement α comme le montre la figure. A l'instant t , on écarte la masse de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. La position du centre de masse est désigné par l'abscisse $x(t)$.

Pour comprendre l'effet des forces de frottement \vec{F}_f nous allons utiliser les lois de la mécanique de Newton pour étudier ce système.

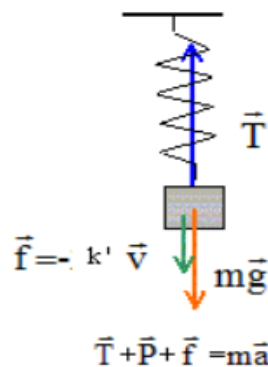


Figure 3.4 : Système masse-ressort en présence de la force d'amortissement \vec{F}_α .

Les forces agissant sur la masse sont : la tension du ressort \vec{T} , son poids \vec{P} et la force d'amortissement $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_\alpha = m \vec{a}$$

Par projection :

$$P - T - F_\alpha = m\ddot{x}$$

$$mg - k(x + x_0) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\text{A l'équilibre : } \sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$P - F_k = 0 ; \quad (F_\alpha = 0 \text{ vitesse nulle})$$

$$mg - kx_0 = 0$$

$$-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On met : $\beta = \frac{\alpha}{2m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

On aboutit à l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

III.5 Etude des oscillations amortis par le formalisme de Lagrange

Nous proposons d'étudier le système masse-ressort vertical de l'exemple précédent (**Figure 3.3**) en utilisant le formalisme de Lagrange. Pour cela, on introduit le concept de la fonction de dissipation de Rayleigh.

III.5.1 Forces dissipatives : fonction de Rayleigh

Si toutes les forces s'exerçant sur un système ne dérivent pas d'un potentiel, on peut toujours écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

Ou les Q_k sont les forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel. Un cas particulier important concerne les forces de frottement qui s'écrivent sous la forme $F_i = -\alpha_i v_i$. Les forces de ce type peuvent en effet s'obtenir à partir d'une fonction, appelée fonction de dissipation de Rayleigh définie par :

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\alpha_x v_{\alpha x}^2 + \alpha_y v_{\alpha y}^2 + \alpha_z v_{\alpha z}^2)$$

On montre que la force généralisée de frottement est alors

$$Q_k = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$$

Finalement les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Exemple :

Pour une force s'exerçant sur une particule, suivant l'axe des x : $F = -\alpha \dot{x}$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

$$Q_x = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -\alpha \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} + \alpha \dot{x} = 0$$

Remarque :

- D : s'appelle aussi énergie dissipative de Rayleigh
- V : vitesse linéaire

Nous avons montré dans le chapitre précédent que dans le cas des oscillations de faible amplitude, la fonction de Lagrange s'écrivait sous la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a \dot{q}^2 - \frac{1}{2} b q^2$$

L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$a \ddot{q} + b q + \alpha \dot{q} = 0$$

Cette équation s'écrit aussi :

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{SLA})$$

β : Est un coefficient positif, appelé facteur (ou coefficient) d'amortissement et défini par :

$$\beta = \frac{\alpha}{2a}$$

ω_0 : est la pulsation propre définie par : $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$

III.5.2 Résolution de l'équation différentielle de Mvt :

Pour résoudre l'équation (SLA) on choisit une solution de la forme : $x(t) = C \cdot e^{rt}$

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de β par rapport à ω_0 :

- ✓ Si $\beta > \omega_0$, on dit que le système est sur amorti ou apériodique.
- ✓ Si $\beta = \omega_0$, on dit que l'on a un amortissement critique.
- ✓ Si $\beta < \omega_0$, on dit que le système est sous-amorti ou pseudopériodique.

▪ Cas où le système est sur amorti $\beta > \omega_0$:

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$q(t) = A_1 e^{\left[-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right]t} + A_2 e^{\left[-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right]t}$$

A_1 et A_2 Sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La **figure 3.5** représente q en fonction du temps dans le cas particulier $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$. $q(t)$ est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro.

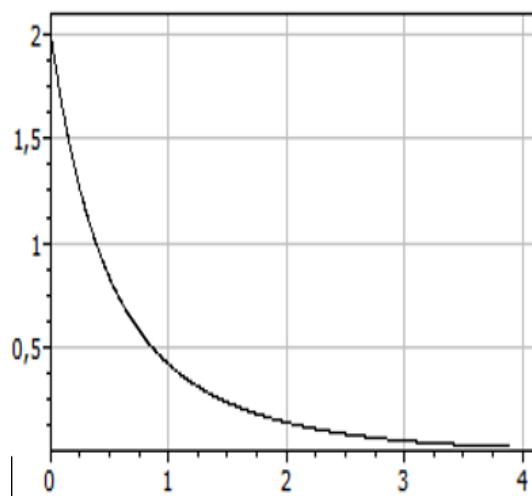


Figure 3.5 : Régime fortement amorti : variation de q en fonction du temps

▪ *Cas de l'amortissement critique $\beta = \omega_0$*

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}$$

Dans le cas particulier où : $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$

$$q(t) = q_0(1 + \beta t)e^{-\beta t}$$

La fonction $q(t)$ est encore une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente. Le régime apériodique critique est tel que le retour à la position d'équilibre s'effectue plus rapidement que n'importe quel autre régime apériodique (*Figure 3.6*).

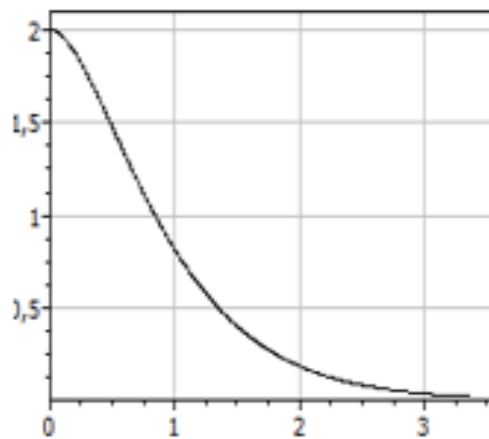


Figure 3.6 : Régime critique

Cas où le système est sous-amorti $\beta < \omega_0$

Un système est sous-amorti lorsque le coefficient d'amortissement est inférieur de la pulsation propre. Le régime est appelé aussi pseudopériodique. La solution générale de l'équation différentielle est de la forme

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_A t - \varphi)$$

Avec :

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

A_0 et φ : sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Dans le cas particulier où : $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} A_0 = \frac{q_0}{\cos(\varphi)} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{\beta}{\omega_A}\right) \end{cases}$$

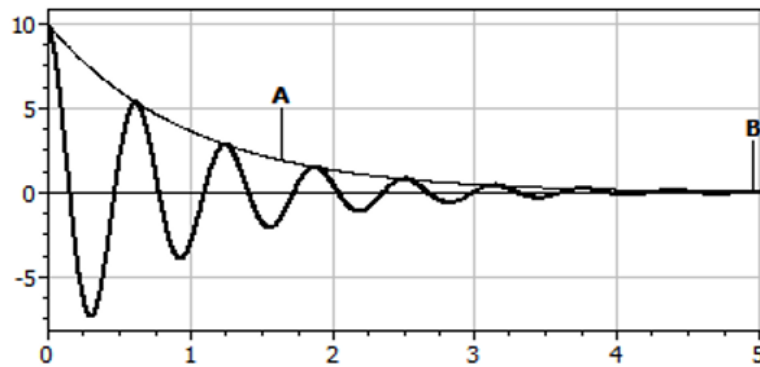


Figure 3.7 : Régime pseudopériodique

III.5.3 Régime pseudopériodique :

L'équation différentielle qui régit le mouvement d'un OLA est :

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Un régime pseudopériodique est caractérisé par la condition $\begin{cases} \omega_0 > \beta \\ \omega_0^2 > 0 \end{cases}$.

La solution générale est de la forme :

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_A t + \varphi)$$

Où A_0 est l'amplitude à ($t=0$).

Le terme $A_0 e^{-\beta t}$ correspond à l'amplitude d'oscillation amortie ; sa valeur diminue de manière exponentielle en fonction du temps. Malgré la diminution de l'amplitude la période d'oscillation (**pseudo-période**) $T = \frac{2\pi}{\omega_A}$ demeure constante. C.-à-d. à chaque aller-retour, l'amplitude est plus petite, mais la durée d'un aller-retour demeure la même.

Remarque :

La pulsation d'oscillation amortie $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ est plus petite qu'en absence d'amortissement.

Le terme $\beta[s^{-1}]$ est appelé facteur (coefficient) d'amortissement, il décrit la vitesse d'amortissement du système.

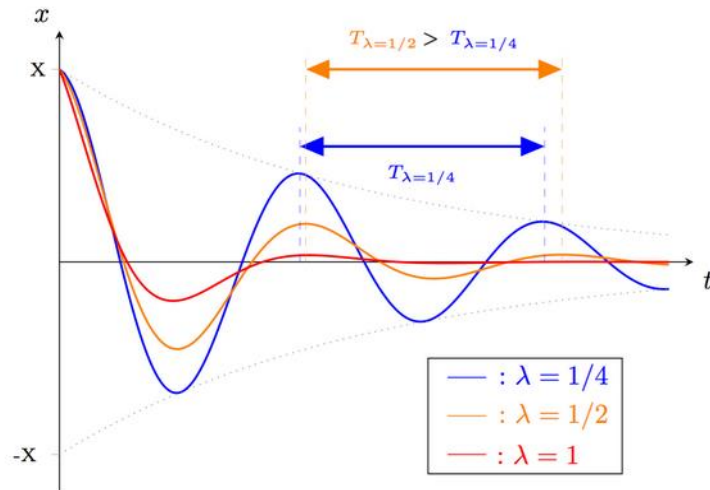


Figure 3.8 : Oscillations pseudopériodique : variation de la vitesse d'amortissement avec le coefficient d'amortissement λ . La pseudopériode T_λ augmente lorsque λ augmente..

III.5.4 Décrément logarithmique (δ)

Le terme **décrément logarithmique** désigne la mesure logarithmique de la décroissance périodique d'une grandeur pseudo-oscillatoire.

$$\delta = \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+T)} \right) = \beta \cdot T \quad T \text{ (la période)}$$

Pour n oscillations :

$$\Delta = \ln \left[\frac{A(t)}{A(t+nT)} \right] = n\beta T$$

$$\Delta = n\delta$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left[\frac{A(t)}{A(t + nT)} \right]$$

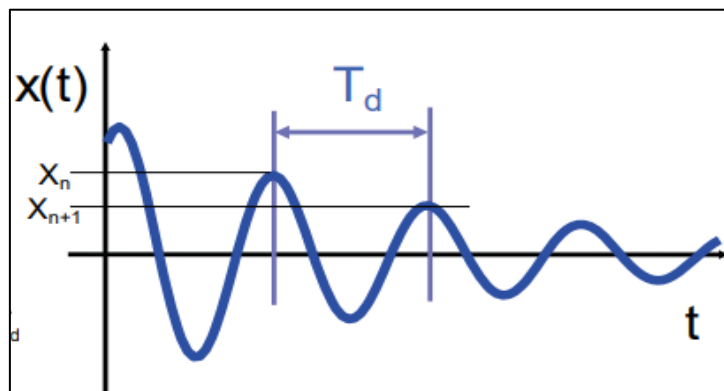


Figure 3.9 : En pratique, on peut mesurer avec exactitude le décrément logarithmique δ par la mesure des maxima séparés de nT_d . Le terme T_d est la pseudo période des oscillations.

III.5.5 Facteur de qualité

Le facteur de qualité noté Q est une grandeur qui rend compte de la faculté du système considéré à osciller. La valeur de Q est définie par l'expression :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

A partir des résultats précédents, on peut tirer les conclusions suivantes :

- $\omega_0 < \beta \rightarrow Q < \frac{1}{2}$; Mvt apériodique
- $\omega_0 = \beta \rightarrow Q = \frac{1}{2}$; Mvt apériodique critique
- $\omega_0 > \beta \rightarrow Q > \frac{1}{2}$; Mvt pseudopériodique
- $\beta = 0 \rightarrow Q \rightarrow \infty$; Oscillation harmonique
- $\beta \rightarrow \infty \rightarrow Q \rightarrow 0$; Pas de mouvement

Remarque :

$[\omega] = \text{rd.} \cdot \text{s}^{-1}$ $[T] = \text{s}$, $[K] = \text{N/m}$; $[\alpha] = \frac{\text{Kg}}{\text{s}}, \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{s}$; $[\beta] = \text{s}^{-1}$;
 δ et Q sont sans dimension

III.6 Analogie électro-mécanique

Analogie force-tension

- *Oscillateur mécanique*

Soit un oscillateur constitué par une masse m reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k et un amortisseur de constante α (Figure 3.10).

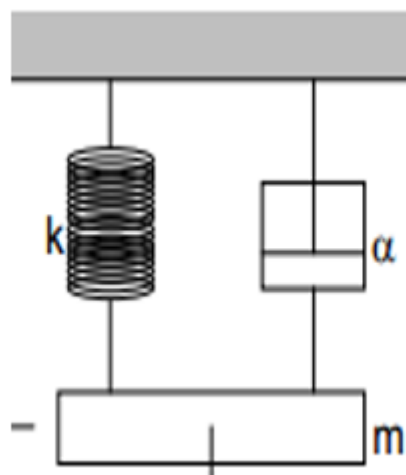


Figure 3.10 : Système mécanique : masse-ressort-amortisseur

Dans le cadre du théorème de Lagrange, on définit l'équation différentielle de mouvement pour un système libre amorti par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

Le Lagrangien \mathcal{L} du système est :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

La fonction de dissipation est :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

Ainsi, l'EDM devient :

$$m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0 \quad (\text{Mec})$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec :

$$\beta = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

▪ Oscillateur électrique

Le circuit de la figure comporte une résistance \mathbf{R} , une self \mathbf{L} , et une capacité \mathbf{C} placées en série. Le condensateur est chargé par un générateur qui est ensuite déconnecté à $t = 0\text{s}$ (figure 3.11).

La loi des mailles donne :

$$V_L + V_R + V_C = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{Elect})$$

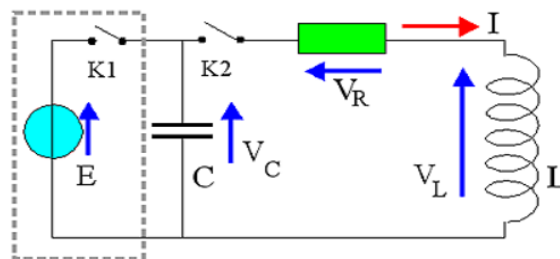


Figure 3.11 : Circuit électrique RLC en série.

L'équation (Elect) s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Avec :

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Pour un régime critique :

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0$$

$$\omega_0 = \beta|_{R=R_c} \rightarrow \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$R_C = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le tableau suivant donne les correspondances qui existe entre les deux système mécanique et électrique déduisent de la comparaison entre les deux équations (Mec) et (Elec).

Système mécanique	Système électrique
x	q
\dot{x}	i
m	L
α	R
k	$1/C$
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$

Amortisseur de voiture

Les amortisseurs de voiture sont conçus pour minimiser les chocs causés par les irrégularités de la route : on veut que la voiture revienne rapidement à sa position d'équilibre mais qu'elle ne fasse pas plusieurs oscillations. Ainsi, un amortisseur en bon état possède une constante d'amortissement voisine de la valeur critique (figure 3.12).

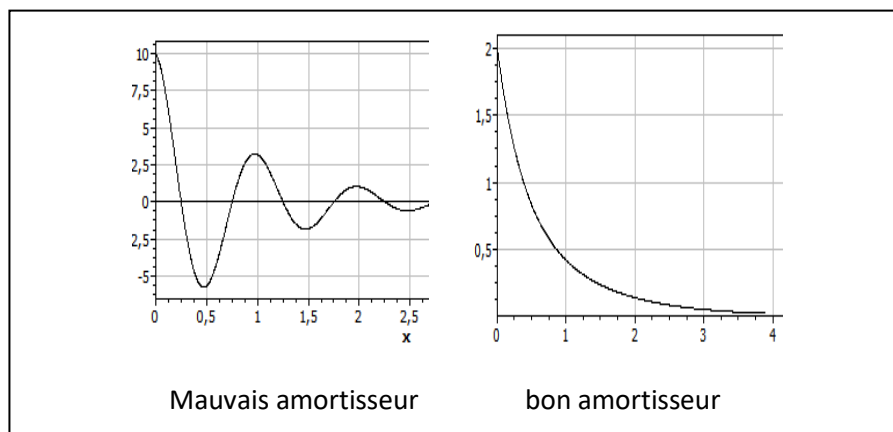


Figure 3.12 : (à gauche) un mauvais amortisseur d'une voiture correspond à des oscillations pseudopériodiques, (à droite) un bon amortisseur possède un régime critique.

EXERCICES CHAPITRE III**Exercice III.1**

Un bloc de masse m est lié horizontalement à l'extrémité libre d'un ressort de longueur ℓ_0 et d'une constante de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixée au mur (figure 3.13). La masse est soumise à une force de frottement visqueuse $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$ caractérisé par un coefficient d'amortissement β inférieure de la pulsation propre ω_0 du système ($\beta < \omega_0$).

1. Déterminer le Lagrangien du système.
2. Montrer que l'équation différentielle du mouvement (E. D. M) de m s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

3. Indiquer les expressions des constantes β et ω_0 en fonction des données de l'exercice.
4. Dédire l'abscisse de la masse, $x(t)$, repérée par rapport à la position d'équilibre.

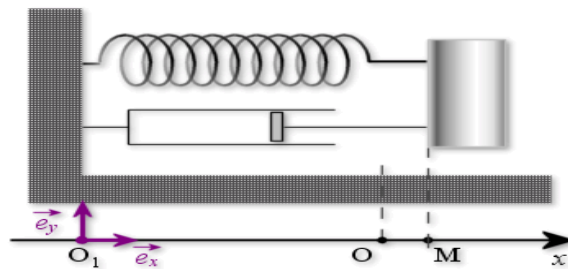


Figure 3.13 : système masse-ressort-amortisseur horizontal

Solution III.1

1. Le lagrangien du système : $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - \frac{1}{2}kx^2(t)$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

2. Equation différentielle de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

L'EDM s'écrit : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Qui correspond à l'équation : $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (EDM)

3. Les expressions des paramètres:
$$\begin{cases} \beta = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

4. La position $x(t)$ est la solution de l'EDM :

La condition $\beta < \omega_0$ correspond à un régime pseudopériodique, la solution est de la forme :

$$x(t) = X e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

Exercice III.2 [7]

Considérons le système mécanique de l'exercice III.1 (figure 3.13).

1. Exprimer l'énergie mécanique $E(t)$ du système à un instant t , puis à des instants t_n et $t_n + T_1$; correspondant à deux extrémums successives du graphe de $x(t)$.
2. Écrire l'expression de la variation d'énergie entre les deux instants précédents $\Delta E = E(t_n + T_1) - E(t_n)$ en fonction de $x(t_n)$ et de $E(t_n)$ et $E(t_n + T_1)$.
3. Exprimer ΔE en fonction du décrement logarithmique δ .
4. Que représente ΔE ? Justifier son signe.
5. Que représente le rapport $\Delta E/E(t_n)$.

Solution III.2

1. L'énergie mécanique $E(t)$ du système :

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t)$$

Aux instants t_n et $t_n + T_1$, la vitesse de la masse s'annule, les énergies cinétiques correspondantes sont nulles et il en résulte :

$$E(t_n) = \frac{1}{2} k x^2(t_n) \text{ et } E(t_n + T_1) = \frac{1}{2} k x^2(t_n + T_1)$$

2. La variation d'énergie :

$$\Delta E = E(t_n + T_1) - E(t_n) = \frac{1}{2} k x^2(t_n + T_1) - \frac{1}{2} k x^2(t_n)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} k x^2(t_n) \left[\frac{x^2(t_n + T_1)}{x^2(t_n)} - 1 \right] = E(t_n) \left[\frac{x^2(t_n + T_1)}{x^2(t_n)} - 1 \right]$$

3. Sachant que le décrement logarithmique est :

$$\delta = \ln \frac{x(t_n)}{x(t_n + T_1)} \quad ; \quad e^\delta = \frac{x(t_n)}{x(t_n + T_1)}$$

D'où l'on trouve:

$$\Delta E = E(t_n) [e^{-2\delta} - 1]$$

4. Le terme ΔE est négatif ce qui indique que l'énergie du système décroît en fonction du temps. $|\Delta E|$ représente l'énergie dissipée par l'oscillateur au cours d'une pseudo-période
5. Le rapport : $\frac{\Delta E}{E(t_n)} = [e^{-2\delta} - 1]$

Ce rapport (constant et sans dimension) représente l'énergie relative dissipée par l'oscillateur au cours d'une pseudo-période.

Exercice III.3

Soit le système oscillatoire en régime pseudopériodique de la **figure 3.14**.

1. En application la condition d'équilibre, démontrer que l'énergie potentielle s'écrit sous la forme quadratique $U = \frac{1}{2}Ax^2$.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement
3. Déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du coefficient d'amortissement β .
4. Si au bout de 4 oscillations, l'amplitude des oscillations diminue de 50%, et sachant que la pseudo-période vaut 1s, déduire les valeurs de la constante d'amortissement α et de raideur K .
5. Donner l'équation horaire de ce mouvement sachant que $x(0) = 10\text{cm}$ et $\dot{x}(0) = 0$.
6. On veut que le système soit en régime critique, quelle valeur α du piston doit-on choisir.

AN: $m = 1\text{kg}$

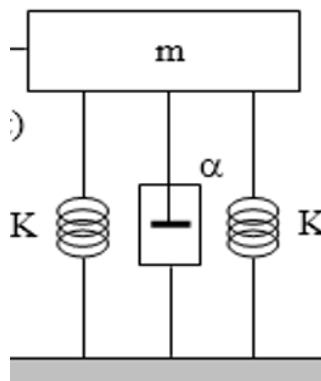


Figure 3.14 : système masse-ressort-amortisseur vertical

Solution III.3

1. L'énergie potentielle du système :

$$U = U_m + 2U_k = -mgx + k(x + x_0)^2$$

$$U = -mgx + kx^2 + 2kxx_0 + kx_0^2 \quad (2)$$

A l'équilibre : $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0$; \rightarrow

$$2kx_0 - mg = 0 \quad (1)$$

En remplace (2) dans l'expression de U (2) on trouve :

$$U = \frac{1}{2} [2k]x^2 + (2kx_0 - mg)x + kx_0^2$$

$$U = \frac{1}{2} [2k]x^2 + cte$$

2. Etablissement de l'équation différentielle du mouvement (EDM) :

Le lagrangien du système : $\mathcal{L} = T - U$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 ; \quad \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - kx^2 + cte ; \quad D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

Pour un système oscillatoire libre amorti, L'EDM est :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Ce qui donne : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 2kx = 0$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

3. La dernière équation correspond à l'équation différentielle linéaire :

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

D'où l'on trouve les expressions des paramètres: $\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{array} \right.$

4. les valeurs de la constante d'amortissement α et de raideur K.

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{A(t)}{A(t+nT)} \right) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1}{0.5} \right) = 0.17$$

$$\delta = \beta T \rightarrow \beta = \frac{\delta}{T} = 0.17 \text{ s}^{-1}$$

$$\alpha = 2m\beta = 2 \times 1 \times 0.17 = 0.34 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$$

La pseudo pulsation : $\omega_A = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rd/s}$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_A^2 - \beta^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_A^2 + \beta^2} = \sqrt{4\pi^2 + 0.17^2} = 6.28 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \rightarrow k = \frac{m \omega_0^2}{2} = \frac{1 \times 6.28^2}{2} = 19.73 \text{ N/m}$$

5. Equation horaire de Mvt :

Nous avons : $\beta < \omega_0$ cela correspond à un régime pseudopériodique, la solution est de la forme :

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} x(0) = A \cos \varphi = 10 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{0.1}{\cos(0.027)} \approx 10 \text{ cm} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\beta}{\omega_A}\right) = 0.027 \text{ rd} \end{aligned}$$

$$x(t) = 10 * e^{-0.17t} \cos(2\pi t - 0.027) \text{ [Cm]}$$

6. Pour un régime critique : $\omega_0 = \beta$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2k}{m}} &= \frac{\alpha}{2m} \\ \alpha &= \sqrt{8km} = \sqrt{8 \times 19.73 \times 1} = 12.56 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

Exercice III.4 [8]

Durant l'expérience du pendule de Pohl, on effectue le relevé expérimental de la réponse du système - considéré comme un oscillateur- en fonction du temps. Ensuite, on représente sur le relevé, les courbes qui enveloppent les extrema (**Figure 3.15**).

1. Selon l'allure de la courbe $\theta(t)$, dites de quel type de régime s'agit-il.
2. Mesurer le décrétement logarithmique δ pour chaque pseudo-période et déduire sa valeur moyenne.
3. S'agit-il d'un amortissement exponentiel ?

4. Déterminer les caractéristiques suivantes : pseudo-période, pseudo-pulsation, le coefficient d'amortissement et le facteur de qualité. On rappellera les expressions littérales utilisées

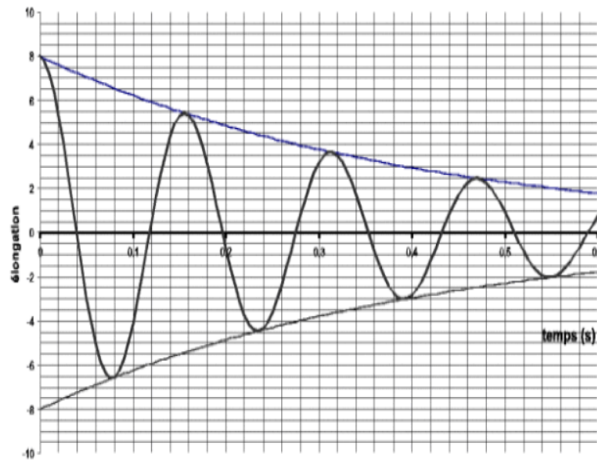


Figure 3.15 : Relevé expérimental $\theta(t)$ de la réponse du système oscillatoire en fonction du temps avec les courbes qui enveloppent les extrema.

Solution III.4

1. La fonction $\theta(t)$ d'écrit un mouvement oscillatoire avec un régime pseudo-périodique sinusoïdal amorti.
2. Pour mesurer δ on a besoin des extrema θ_{Max} successifs de la courbe $\theta(t)$. A partir du graphe nous avons:

Temps(s)	0	0.078	0.155	0.235	0.312	0.390	0.470
θ_{Max} (rd)	8.0	-0.6	5.5	-4.5	3.8	-3	2.5

Les rapports des élongations successives de même signe sont reportés dans le tableau suivant :

$\theta(t_n)$	$\theta(t_n + T_1)$	$\delta = \ln \frac{\theta(t_n)}{\theta(t_n + T_1)}$
8	5.5	0.37
5.5	3.8	0.37
3.8	2.5	0.42
-6.6	-4.5	0.38
-4.5	-3	0.40

la valeur moyenne du décrient δ :

$$\delta = \frac{\sum_i \delta_i}{5} = 0.39 \pm 0.03$$

3. Les décréments sont constants compte-tenu de la précision des mesures. L'amortissement est bien exponentiel.
4. Les caractéristiques d'oscillation :
 - La pseudo-période est déterminée dans l'intervalle du temps $[0, 0.47]$ s. Cet intervalle correspond à 3 oscillation (3 période).

$$T = \frac{0.47}{3} = 0.16 \pm 0.01 \text{ s}$$

- La pseudo-pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 39.25 \pm 3 \text{ rd s}^{-1}$
- Le coefficient d'amortissement :

Le décrément logarithmique est lié à l'amortissement β par la relation

$$\delta = \beta T$$

On en déduit :

$$\beta = \frac{\delta}{T} = \frac{0.39}{0.16} = 2.66 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Le facteur de qualité peut s'exprimer en fonction du décrément, par la relation approchée :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

La pulsation propre ω_0 s'exprime en fonction de ω et β par la relation :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{39.25^2 + 2.66^2} = 42 \text{ rd s}^{-1}$$

$$Q = \frac{42}{2 \times 2.66} = 7.98$$

C chapitre IV

Vibrations linéaire à un degré de liberté forcées amorties

IV.1 Introduction

Le régime forcé est le comportement de l'oscillateur soumis à l'action d'une force extérieure (excitation). Par opposition aux vibrations libres, les vibrations forcées se répètent périodiquement par apport extérieur d'une énergie qui se substitue dans le système mécanique ou électrique à l'énergie dissipé par les forces d'amortissement. Généralement, la fréquence de vibration d'un système forcé est reliée de manière simple à la fréquence de la force excitatrice extérieure.

La force d'excitation peut être harmonique, périodique non harmonique, non périodique ou aléatoire. Durant ce chapitre, on ne s'intéresse que des excitations harmoniques (périodique). Les exemples des oscillateurs amortis soumis à des forces extérieurs périodiques est fréquente en physique : Circuit électrique en présence d'un générateur de courant alternatif, oscillateur mécanique lié à un moteur, électrons liés à un atome et soumis à un champ électromagnétique [9], etc.

IV.2 Equation de mouvement

Les oscillations d'un système forcé amorti passent par deux régimes : Le premier régime appelé **régime transitoire**, puis un **régime permanent** stable. Dans ce chapitre, on se limite à l'étude du régime permanent harmonique, après disparition des termes transitoires.

IV.2.1. Mise en équation du mouvement

Soit un système oscillatoire soumis à une force excitatrice extérieure. Pour simplifier l'étude, on impose une force extérieure sinusoïdale de la forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

F_0 : L'amplitude de la force.

Ω : La pulsation de la force excitatrice.

L'intérêt particulier porté par le choix d'une excitation sinusoïdale est motivé par la possibilité de décomposer toute fonction périodique de fréquence f en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquence $f, 2f, 3f, \dots, nf$. Il sera ainsi, possible, d'aborder par les séries de Fourier, le régime permanent périodique dû à une force périodique de forme quelconque (cela sort du cadre de ce cours).

Selon le formalisme de Lagrange, l'équation différentielle de mouvement d'un système oscillatoire amorti soumis à une force excitatrice $\vec{F}(t)$ a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F(t) \quad (2)$$

L'application du formalisme de Lagrange sur un système oscillatoire linéaire forcé amorti mène à une équation différentielle (E. D. M.) de la forme générale :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\Omega t) \quad (3)$$

Les deux pulsations ω_0 et Ω apparaissent dans l'équation du mouvement, (3), de manières complètement différentes. Il faut garder cette distinction à l'esprit pour comprendre les oscillations forcées. La pulsation propre (naturelle) du système, ω_0 , est une combinaison de toutes les quantités physiques pertinentes qui déterminent les oscillations libres (masse, ressort, ...). La pulsation Ω , n'entre que par la dépendance temporelle du système avec la force excitatrice. Pour exploiter exactement ce nouvel aspect, nous chercherons une solution de l'équation du mouvement qui oscille avec la même fréquence angulaire, Ω , de la force excitatrice [10].

La solution générale de l'équation différentielle de mouvement (3) avec second membre est la somme d'une solution homogène $x_H(t)$ de l'équation (3) sans second membre et d'une solution particulière $x_p(t)$ de cette équation différentielle avec second membre c.-à-d. :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) \quad (4)$$

La première solution $x_H(t)$ atteint toujours zéro au bout d'une certaine durée. Cette solution n'intervient que durant le régime permanent, quant à la seconde solution $x_p(t)$, elle présente l'évolution du mouvement lorsque le régime permanent est établi.

IV.2.2 La solution homogène de E. D. M.

La solution $x_H(t)$ de l'équation (E. D. M. (3)) sans second membre $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ a été discutée dans le chapitre 3, c'est une solution d'un système amorti de la forme:

$$\begin{cases} e^{-\beta t}(C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}) & \beta > \omega_0 \\ e^{-\beta t}(C_1 + C_2 t) & \beta = 0 \\ A e^{-\beta t} \cos(\omega_A t - \varphi) & \beta < \omega_0 \end{cases}$$

Dans les trois cas, cette solution tend vers zéro, après un certain temps appelé temps de relaxation τ :

$$t > \tau \quad \rightarrow \quad x_H(t) \rightarrow 0$$

IV.2.3. Solution particulière de E. D. M

La solution particulière correspond aux oscillations du système en régime permanent, c.-à-d. lorsque la solution $x_H(t)$, devient nulle.

$$x_H(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t)$$

On cherche une solution particulière de la forme :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad (5)$$

Dans l'équation (5), Ω est la pulsation de la force excitatrice, A désigne l'amplitude des oscillations et ψ représente le déphasage des oscillations du système par rapport à celle de la phase de la force excitatrice. Les deux termes A et ψ ne dépendent pas des conditions initiales.

L'équation (3) peut s'écrire sous la forme pratique suivante:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = A_0 \cos(\Omega t) \quad (6)$$

On associe à l'équation (6) une solution de la forme :

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\beta \frac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = A_0 \sin(\Omega t) \quad (7)$$

On pose :

$$Z(t) = X(t) + i Y(t)$$

La fonction complexe $Z(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + 2\beta \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = A_0 e^{i\Omega t} \quad (8)$$

Pour résoudre l'équation (8) on cherche une solution de la forme :

$$Z(t) = Z_0 e^{i\Omega t}$$

On reporte la fonction $Z(t)$ dans l'équation (8), on trouve :

$$(-\Omega^2 + i2\beta\Omega + \omega_0^2)Z_0 e^{i\Omega t} = A_0 e^{i\Omega t}$$

Et :

$$Z_0 = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\beta\Omega}$$

$$Z_0 = A_0 \left[\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right] + i A_0 \left[\frac{-2\beta\Omega}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right] \quad (9)$$

Le nombre complexe Z_0 peut s'écrire sous la forme :

$$Z_0 = A e^{i\phi} = A [\cos \phi + i \sin \phi] = Re [Z_0] + i Im [Z_0] \quad (10)$$

De (9) et (10) on trouve :

- La valeur du module A est :

$$A = A_0 \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad (11)$$

- L'argument ϕ du nombre complexe Z_0 vérifie l'égalité : $\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \left[\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$

$$\phi = \arctan \left[\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right] \quad (12)$$

Conclusion :

La solution de l'équation différentielle de mouvement (3) prend la forme :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$$

Avec :

$$A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\phi(\Omega) = \arctg \left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right)$$

Et

$$-\pi < \phi < 0$$

Remarques :

- Dans l'expression de $x(t)$ l'amplitude d'oscillation $A(\Omega)$ et le déphasage $\phi(\Omega)$ entre la force $F(t)$ et $x(t)$ sont deux fonctions de la pulsation Ω de la force excitatrice.
- Après le passage du régime transitoire, et lorsque le système atteint son régime permanent, la solution générale de (E. D. Mvt) $x(t)$ adopte un comportement périodique (Fig. 4.1.)

- $$\begin{cases} q(t) = x(t) & \rightarrow F(t) \text{ est un e force} \\ q(t) = \theta(t) & \rightarrow l.F(t) \text{ moment de force} \end{cases}$$

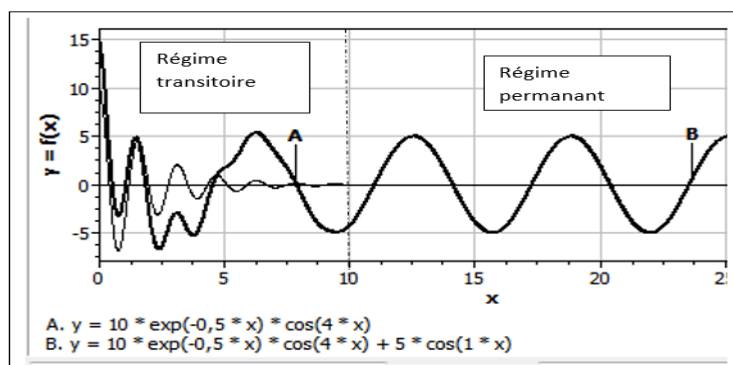


Figure.4. 1. : Courbe représentatif de la solution générale et particulière de l'EDM.

IV.3 Exemple d'application

Le système mécanique oscillatoire amorti (bloc-ressort-amortisseur) de la figure (4.2) est soumis à une force excitatrice de la forme : $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

1. Etablir l'équation différentielle de mouvement du système étudié.
2. Trouver la solution horaire du régime permanent.

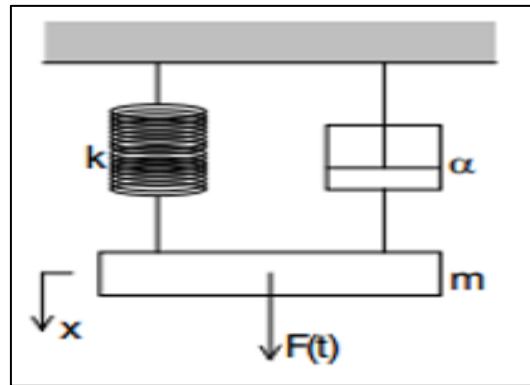


Figure 4.2 : Système oscillatoire forcé amorti

Réponse :

1. Selon le formalisme de Lagrange, E. D. M du système mécanique soumis à une force excitatrice $\vec{F}(t)$ a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F(t) \quad (1)$$

Dans l'équation (1):

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + cte \quad ; \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad ; \quad F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

On remplace les expressions du lagrangien \mathcal{L} , de la fonction de dissipation D et la force F dans l'équation (1), on trouve l'équation:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t) \quad (2)$$

Qui s'écrit sous la forme:
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \quad (3)$$

Qui s'écrit finalement:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\Omega t) \quad (\text{E. D. M. SLA}) \quad (4)$$

Avec :
$$\beta = \frac{\alpha}{2m} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad A_0 = \frac{F_0}{m}$$

2. Solution de l'équation différentielle de Mvt

La solution de l'équation (4) est la somme de deux solutions :

$$\mathbf{x}(t) = x_H(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

La solution particulière $\mathbf{x}_p(t)$ correspond au régime permanent qui s'établit lorsque la solution homogène $x_H(t)$ devient nulle.

$$x_H(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t)$$

On a montré avec les nombres complexes que la solution de (E. D. Mvt) :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\Omega t)$$

Est de la forme :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \psi)$$

Avec :

$$A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\psi(\Omega) = \arctg\left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

IV.4 Caractéristiques du mouvement oscillatoire forcée en fonction de Ω :

IV.4.1 La courbe de l'amplitude $A(\Omega)$:

Un système vibratoire amorti, sous l'effet d'une excitation extérieure de pulsation Ω , oscille périodiquement à la même pulsation de la force excitatrice lorsqu'il atteint son régime permanent. L'amplitude d'oscillation varie en fonction de la pulsation Ω . En plus, la forme de la fonction de l'amplitude $A(\Omega)$ dépend fortement de la valeur du coefficient d'amortissement β du système.

La **figure 4.3** illustre la forme de la courbe de l'amplitude $A(\Omega)$ d'un résonateur. A partir de cette courbe on peut tirer les conclusions suivantes :

- La fonction $A(\Omega)$ passe par un maximum d'autant plus élevé et aigu que l'amortissement est faible
- Le maximum de l'amplitude est obtenu pour la valeur de Ω qui annule $\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}$:

$$\left. \frac{dA(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

- Il existe un maximum à la pulsation pour : $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$
- Ce maximum existe, seulement si l'amortissement est suffisamment faible pour que :

$$\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{Condition de résonance})$$

- A cette pulsation, appelée **pulsation de résonance**, on dit que le système entre en résonance et l'amplitude A est maximale ; elle vaut :

$$A_{\max} = A(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Le phénomène de résonance d'une importance extraordinaire. Il est crucial dans de nombreux appareils et de nombreuses expériences délicates en physique. Les phénomènes de résonance sont utilisés de manière omniprésente pour construire une réponse importante et mesurable à une très petite perturbation [10].

- Pour une pulsation très grande ($\Omega \rightarrow \infty$) $\Rightarrow A \rightarrow 0$, le résonateur ne vibre plus lorsque la pulsation d'excitation est très supérieure à sa fréquence propre.
- Pour une excitation continu ($\Omega = 0$) $\Rightarrow A = \frac{A_0}{\omega_0^2}$
- Pour un amortissement élevée, le pic de résonance correspond à Ω_R est inférieur à ω_0 et la courbe de résonance est large.
- Lorsque l'amortissement est faible, Ω_R est tout juste à gauche de ω_0 .

Exemple :

Courbe A

$A_0 = 10$

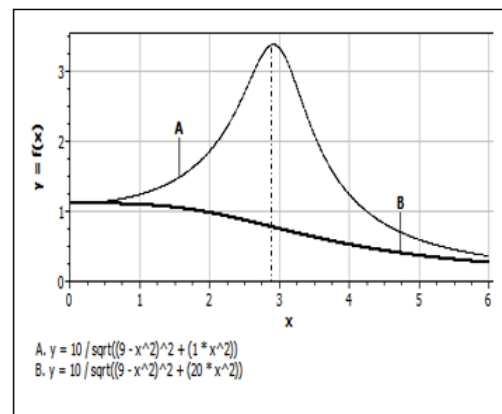
$\omega_0 = 3, \beta = 0.5; 0.5 < \frac{3}{\sqrt{2}} = 2.12$

$\Omega_R = \sqrt{9 - 2 * 0.25} = 2.91$

$A_{\max} = \frac{10}{2 * 0.5 * \sqrt{9 - 0.25}} = 3.37$

Courbe B :

$\omega_0 = 3, \beta = 2.23 > 2.12$ (pas de max)



Courbe A :

$\beta = 0.15 \ll \omega_0 \rightarrow \Omega_R \approx \omega_0$

Courbe B :

$\beta = 0.5 \quad \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2 * \beta^2} = 2.95$

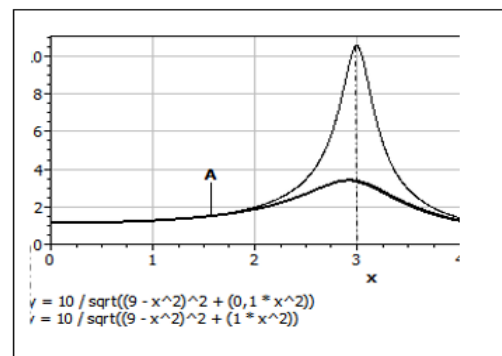


Figure 4.3 : La fonction de l'amplitude $A(\Omega)$ donnant la variation de la courbe de résonance en fonction du coefficient d'amortissement β pour un système oscillatoire forcé amorti.

IV.4.2 La courbe de déphasage $\Psi(\Omega)$

La fonction de déphasage $\Psi(\Omega)$ représente le retard du résonateur par rapport à la source (Système/Force excitatrice). Selon la figure 4.4 qui donne la courbe de la variation de la fonction de déphasage en fonction de la pulsation de la force excitatrice, on peut tirer les remarques suivantes:

- Pour une valeur très faible de la pulsation $\Omega \rightarrow 0$, le déphasage est presque nulle.

$$\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Psi \rightarrow 0$$

- Lorsque la pulsation est très grande $\Omega \rightarrow \infty$, le déphasage atteint une valeur maximale $\Psi = \pi$

$$\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi \rightarrow \pi$$

- Pour une pulsation Ω très proche de la pulsation propre ω_0 du résonateur, le déphasage est égale à $\frac{\pi}{2}$.

$$\Omega \approx \omega_0 \Rightarrow \Psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

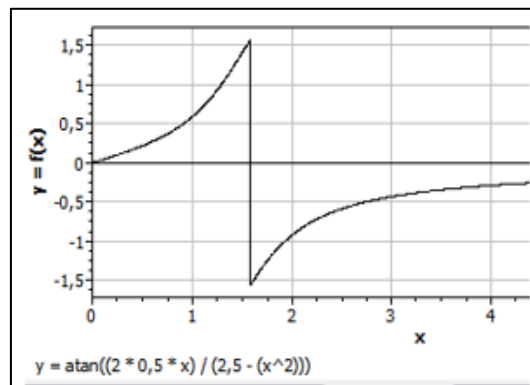


Figure 4.4 : La variation de la courbe de déphasage en de la pulsation de la force excitatrice Ω .

IV.4.3 La bande passante

La bande passante et la bande des pulsations qui appartient à l'intervalle de fréquence $[\Omega_1, \Omega_2]$ autour de $\Omega = \omega_0$ pour lesquelles :

$$A \geq \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$$

Les 2 pulsations Ω_1 et Ω_2 , situées de part et d'autre de la pulsation ω_0 , et pour lesquelles $A \geq \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$, sont appelées pulsations de coupure.

La bande passante $\Delta\Omega$ s'écrit :

$$\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2|$$

On trouve les deux pulsations Ω_1 et Ω_2 en résolvant l'inéquation : $A \geq \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{A_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

On trouve la solution :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \sqrt{\Omega_{rés}^2 - 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \\ \Omega_2 = \sqrt{\Omega_{rés}^2 + 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \end{cases} ; \text{ Avec : } (\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2})$$

Cas particulier

Pour $\beta \ll \omega_0$: $\Omega_{1,2} = \omega_0 \pm \beta$

$$\Delta\Omega = 2\beta$$

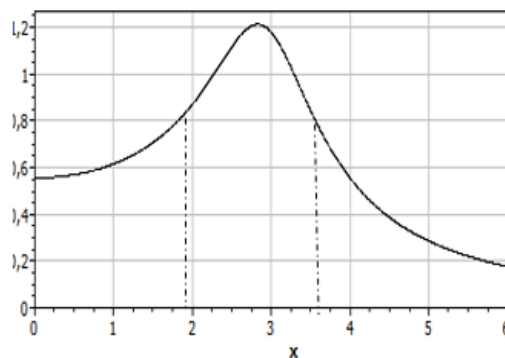


Figure 4.5 : la bande passante dans la courbe de résonance de l'amplitude $A(\Omega)$.

IV.4.4 Facteur de qualité

Le facteur de qualité d'un oscillateur est défini par le rapport de la pulsation propre ω_0 à la largeur de bande $\Delta\Omega$:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}$$

$$\text{si } \beta \ll \omega_0 : Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

D'après la Condition de résonance : $\beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour un système forcé, le facteur de qualité traduit l'acuité (intensité) de la résonance.

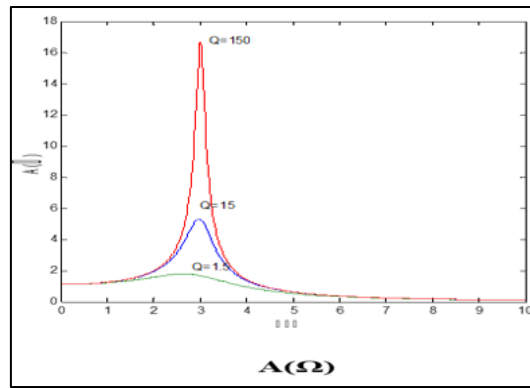


Figure 4.6 : variation de la courbe de résonance en fonction du facteur de qualité.

IV.5 Etude de la vitesse du mouvement d'un système forcé amorti

Pour un système oscillatoire forcé amorti la solution horaire du mouvement pour un régime permanent est :

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \Psi)$$

En régime permanent la vitesse du système est:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\Omega \cdot A \cdot \sin(\Omega t - \Psi)$$

$$\dot{x}(t) = V \cdot \cos(\Omega t - \Phi) \quad \left(\Phi = \Psi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$V(\Omega) = \Omega \cdot A = \frac{A_0 \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

La variation de l'amplitude de la vitesse en fonction de la pulsation d'excitation montre que, quelle que soit la valeur de β , la résonance en vitesse est obtenue pour $\Omega = \omega_0$ (Voir figure 4.7). La valeur maximale de l'amplitude de la vitesse vaut dans ce cas :

$$V_{max} = V(\omega_0) = \frac{A_0}{2\beta}$$

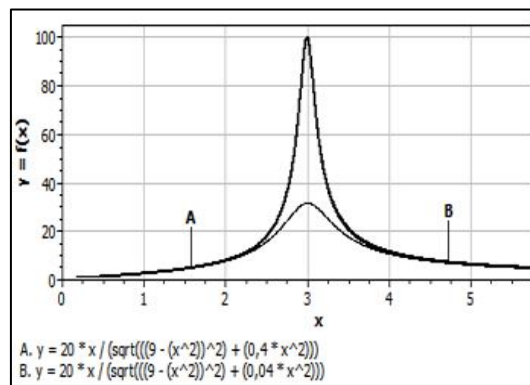


Figure 4.7 : variation de l'amplitude de la vitesse en fonction de la pulsation d'excitation

IV.6 Bilan énergétique

- *Puissance fourni par la force excitatrice*

Soit $P_F(t)$ la puissance instantanée fournie par la force extérieure $F(t)$ au système. En régime permanent, on obtient :

$$P_F(t) = F(t) \cdot \dot{X} \begin{cases} F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \\ \dot{X} = V \cos(\Omega t - \Phi) \end{cases}$$

$$P_F(t) = F_0 \cdot V \cdot \cos(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t - \Phi)$$

La valeur moyenne de la puissance $P_F(t)$ sur une période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} P_F(t) \cdot dt$$

On montre (voir annexe) que : $\langle P_F \rangle = \frac{1}{2} F_0 \cdot V \cdot \cos(\Phi)$

La valeur maximale de la puissance moyenne est obtenue pour $V = V_{max}$, qui correspond à $\Omega = \omega_0$ (c.-à-d. résonance) quelle que soit la valeur de α .

$$\Omega = \omega_0 \Rightarrow \Psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Phi = \Psi - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos(\Phi) = 1$$

La valeur maximale de la puissance moyenne fournie au système vaut dans ce cas :

$$\langle P_F \rangle_{max} = \frac{1}{2} F_0 \cdot V_{max}$$

- *Puissance dissipée par les forces de frottement*

La valeur instantanée de la puissance fournie par les forces de frottement de viscosité F_f sont données par la relation :

$$P_D(t) = v \cdot F_f = v \cdot \alpha \cdot v = \alpha v^2$$

Avec: $v = \dot{x}(t) = V \cdot \cos(\Omega t - \Phi)$

D'où l'on tire l'expression de La valeur instantanée de cette puissance dissipée:

$$P_D(t) = \alpha \cdot V^2 \cdot \cos^2(\Omega t - \Phi)$$

Par analogie avec l'expression de la valeur moyenne de la puissance de la force excitatrice $\langle P_F \rangle$, on peut tirer la valeur de la puissance maximale dissipée par la force de frottement qui s'écrit sous la forme:

$$\langle P_D \rangle_{max} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot V_{max}^2$$

La figure 4.8 représente les variations, en fonction de Ω , de la puissance moyenne fournie par les forces extérieures.

Remarque :

En comparant la valeur de la puissance maximale fournie à celle dissipée par le système, on montre que :

$$\langle P_F \rangle_{max} = \langle P_D \rangle_{max} \quad \text{Si : } F_0 = \alpha V_{max}$$

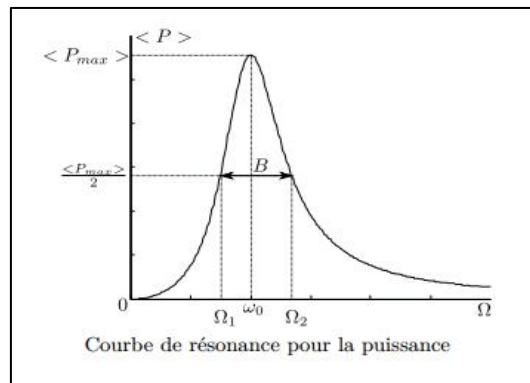


Figure 4.8 : variation de de la puissance moyenne fournie par les forces extérieures.

IV.7 analogie entre système mécanique et électrique

IV.7.1 Circuit RLC

Soit un circuit électrique composé d'une résistance R , une bobine d' inductance L et un condensateur d'une capacité C en série avec un générateur de tension variable $e(t)$ comme le montre la figure 4.9. la tension $e(t)$ est définie par :

$$u(t) = E_0 \cos(\Omega t)$$

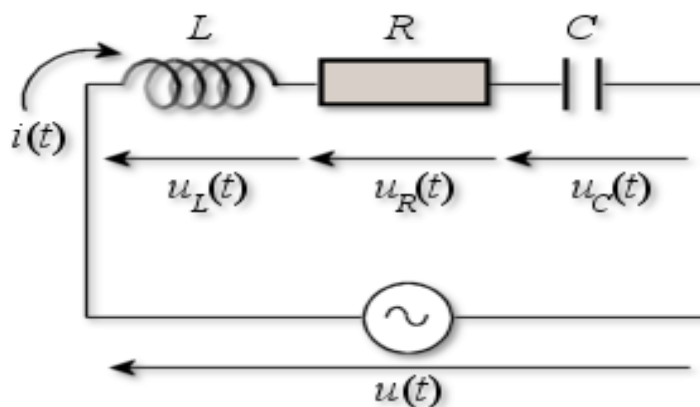


Fig.4.9 : circuit RLC en série alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = E_0 \cos(\Omega t)$

- **Expressions de la charge q :**

On cherche à déterminer l'expressions de la charge q sur les armature du condensateur. La loi de maille permet d'écrire l'équation :

$$u_l + u_R + u_C = u(t)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E_0 \cos(\Omega t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E_0}{L} \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos(\Omega t)$$

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

La solution de l'équation différentielle (5.1) et la somme de deux quantité :

$$q(t) = q_H(t) + q_p(t)$$

Lorsque le régime permanent est établi ($t > \tau$) :

$$q_H(t) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = q_p(t)$$

La solution permanente est donnée par l'équation :

$$q(t) = Q \cos(\Omega t - \Psi)$$

Avec :

$$Q = \frac{\frac{E_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\Psi = \arctan \left[\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

- **Expression du courant**

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \rightarrow i(t) = -\Omega Q \sin(\Omega t - \Psi)$$

Sachant que :

$$\sin x = -\sin(-x) \quad \text{et} \quad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

L'expression du courant peut s'écrire sous la forme :

$$i(t) = I \cos(\Omega t - \Phi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (\Phi = \Psi - \frac{\pi}{2}) \\ (I = \Omega Q) \end{cases}$$

▪ **Déphasage courant-tension**

$$u_R = Ri(t) = RI \cos(\Omega t - \Phi)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \cdot \Omega \cdot I \cdot \cos(\Omega t - \vartheta) \quad (\vartheta = \Phi - \frac{\pi}{2} = \Psi - \pi)$$

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{I}{\Omega \cdot C} \cos(\Omega t - \Psi)$$

$$\begin{cases} u_C = U_C \cos(\Omega t - \Psi) \\ u_R = U_R \cos(\Omega t - \Phi) \\ u_L = U_L \cos(\Omega t - \vartheta) \end{cases}$$

Si on choisit $\Phi = 0$

$$\begin{cases} u_C = U_C \cos(\Omega t - \frac{\pi}{2}) \\ u_R = U_R \cos(\Omega t) \\ u_L = U_L \cos(\Omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Les trois dernières équations impliquent que :

$$\text{Déphasage entre } u_C \text{ et } u_L = \pi$$

$$\text{Déphasage entre } u_C \text{ et } u_R = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Déphasage entre } u_L \text{ et } u_R = \frac{\pi}{2}$$

On conclut que dans un circuit RLC en série, pour un régime de tension sinusoïdale (Voir [figure 4.10](#)):

L'intensité du courant est en phase avec la tension au borne de la résistance.

La tension au borne de la capacité u_C est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant $i(t)$.

La tension au borne de la bobine u_L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur la courant $i(t)$

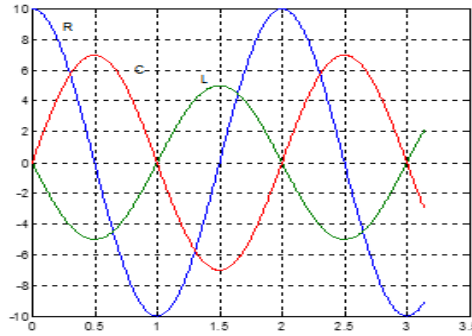


Fig.4.10 : illustration des trois fonctions : courant $i(t)$ (en bleu) ; le tension $u_C(t)$ (en rouge) et la tension $u_L(t)$ pour un circuit RLC en série alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = E_0 \cos(\Omega t)$.

IV.7.2 Résonance électrique

Dans l'expression de $i(t)$ l'amplitude I est fonction de la pulsation Ω :

$$I = \Omega Q = \frac{\Omega \frac{E_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$I_{max} = I(\Omega = \omega_0)$, il y a alors résonance d'intensité si

$$I_{res} = I_{max} = \frac{E_0}{2L\beta}$$

$$I_{res} = \frac{E_0}{R} \quad (\beta = \frac{R}{2L})$$

Remarque :

Dans l'expression de déphasage : $tg(\Psi) = \left[\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad ; \quad \beta = \frac{R}{2L} \quad \left\{ \begin{array}{l} U_R = RI \\ U_C = \frac{I}{C\Omega} \\ U_L = LI\Omega \end{array} \right. \rightarrow \quad tg(\Psi) = \left[\frac{U_R}{U_C - U_L} \right]$$

A la résonance $\Omega_{rés} = \omega_0$ $tg(\Psi) \rightarrow \infty \rightarrow \Psi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \Phi = 0$ $U_C = U_L$, le déphasage entre u_C et u_L étant π .

$$\mathbf{u_R + u_C + u_L = e(t)}$$

$$\mathbf{u_C + u_L = 0}$$

$$\mathbf{u_R = e(t)}$$

A la résonance le condensateur et la bobine se comporte comme des fils conducteurs.

EXERCICES DU CHAPITRE IV**Exercice 4.1.**

Soit le système mécanique oscillatoire amorti (bloc-ressort-amortisseur) de la **figure (4.11)**. le système est soumis à une force excitatrice de la forme : $\vec{F}(t) = 16 \cos(4t)\vec{i}$.

1. Etablir l'équation différentielle de mouvement du système étudié.
2. Calculer les quantités : pulsation propre ω_0 ; coefficient d'amortissement β et $A_0 = \frac{F_0}{m}$
3. Trouver la solution de l'équation homogène $x_H(t)$, si $x(0) = 10\text{cm}$ et $\dot{x}(0) = 0$.
4. Trouver la solution $x_p(t)$ du régime permanent.
5. Tracer la courbe de la solution totale du système pour : $m = 2\text{kg}$; $k = 18\text{ N/m}$; $\alpha = 2\text{ Ns/m}$;
6. Interpréter ce résultat.

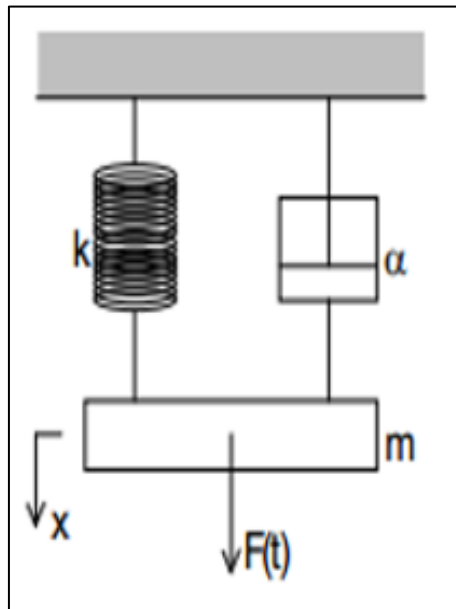


Figure 4.11 : *Système oscillatoire forcé amorti*

Solution 4.1 :

1. Equation différentielle de mouvement :

Dans l'exemple du cours (Fig. 4.1), nous avons démontré que l'équation différentielle du mouvement du système s'écrit sous la forme:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \quad (1)$$

Qui s'écrit sous la forme connue :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = A_0\cos(\Omega t) \quad (2)$$

Avec :

$$\beta = \frac{\alpha}{2m} ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} ; \quad A_0 = \frac{F_0}{m}$$

2. Calcul des quantités

$$\beta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{2}{2 \times 2} = 0.5 \text{ rd s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 \text{ d s}^{-1}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{16}{2} = 8 \text{ N/kg}$$

3. Solution $x_H(t)$ de l'équation homogène :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\beta < \omega_0$$

La solution correspond à un régime pseudo-périodique de la forme:

$$x_H(t) = X_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_A t - \varphi)$$

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{3^2 - 0.5^2} = 2.96 \text{ rd s}^{-1}$$

Pour : $x(0) = 10 \text{ cm}$ et $\dot{x}(0) = 0$

On trouve : et $\varphi = \arct\left(\frac{0.5}{3}\right) = 5.94$ et $X_0 = \frac{10}{\cos(5.94)} = 10.60 \text{ cm}$

$$x_H(t) = 10.6 e^{-0.5t} \cos(2.96 t - 5.94)$$

4. Solution particulière du régime permanent :

La solution particulière $\mathbf{x}_p(\mathbf{t})$ correspond au régime permanent qui s'établit lorsque la solution homogène $x_H(t)$ devient nulle.

$$x_H(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t)$$

On a montré avec les nombres complexes que la solution de (EDM) :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\Omega t)$$

Est de la forme :

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \psi)$$

Avec :

$$A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\psi(\Omega) = \arctg\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$A(4) = \frac{8}{\sqrt{(9 - 16)^2 + 4 \times 0.5^2 \times 16}} = 1 \text{ cm}$$

$$\psi(4) = \arctg\left(\frac{2 \times 0.5 \times 4}{9 - 16}\right) = -1.55$$

$$: \quad x_p(t) = 1 \cos(4t + 1.55)$$

5. *La courbe de $x(t)$:*

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = 10.6 e^{-0.5t} \cos(2.96 t - 5.94) + \cos(4t + 1.55)$$

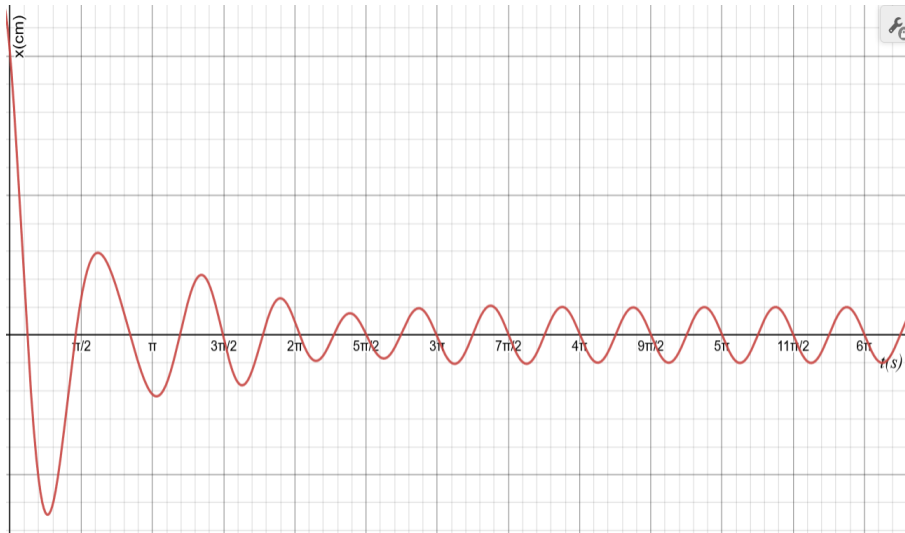


Figure.4. 12. : Courbe représentatif de la solution totale l'équation différentielle du système masse ressort avec amortisseur.

6. Sur la courbe de la figure 4.12 on peut constater la présence de deux régime de mouvement :

- Pour $t \in [0, 3\pi s]$: Régime transitoire qui est la somme des deux solutions :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

- Pour $t > 3\pi s$: Régime permanent pour laquelle :

$$x_H(t) \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) = x_p(t)$$

Exercice 4.2

Dans le système de la **figure 4.13**, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur $3L$ et de masse négligeable. Avec $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

1. En utilisant la méthode de Lagrange, démontrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$
2. Déduire les expressions et les valeurs de: La pulsation propre ω_0 , le coefficient d'amortissement β et l'amplitude A_0 .
3. Trouver à l'aide de la représentation complexe, la solution de l'EDM permanente (préciser son amplitude A et sa phase Ψ).
4. Tracer en fonction de la pulsation de la force excitatrice, la fonction de l'amplitude $A(\Omega)$
5. Déduire la pulsation de résonance Ω_R .
6. Donner les expressions de la pulsations de coupures Ω_{c1} et Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortisseur faible : $\beta \ll \omega_0$
7. Donner les valeurs de Ω_R, B et le facteur de qualité si : $m = 1kg, k = \frac{15N}{m}, L = 0.5m; \alpha = 0.5 \frac{Ns}{m}$ et $g = 10 ms^{-2}; F_0 = 6N$

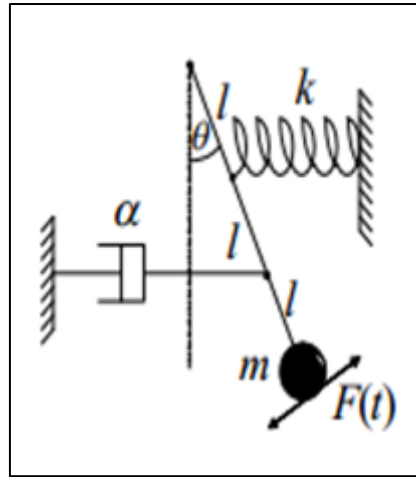


Figure.4. 13

Solution 4.2

1. Equation différentielle de mouvement (EDM):

Pour un système oscillatoire forcé à un degré de liberté L'EDM est :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = F$$

Le lagrangien $\mathcal{L} = T - U$

Avec :
$$U = U_m + U_K \approx mg(3L - 3.L.\cos\theta) + \frac{1}{2}k(L.\sin\theta)^2$$

Pour des petite oscillations c.-à-d. $\theta \ll$
$$\begin{cases} \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \sin\theta \approx \theta \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2}[3mgL + kL^2]\theta^2 + cte$$

$$T = T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m(3L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(9mL^2)\dot{\theta}^2 \quad \{x = 3L\sin\theta \approx 3L\theta$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(9mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}[3mgL + kL^2]\theta^2 + cte$$

Fonction de dissipation :
$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_a^2 = \frac{1}{2}\alpha(2L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(4\alpha L^2)\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = F$$

$$F = 3.L.F_0 \cos(\Omega t) \quad (\text{Équivalent d'un moment})$$

EDM:
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 3.L.F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow [9mL^2] \ddot{\theta} + [4\alpha L^2]\dot{\theta} + [3mgL + kL^2]\theta = 3.L.F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left[\frac{4\alpha}{9m}\right] \dot{\theta} + \left[\frac{3mg+kL}{9mL}\right] \theta = \left[\frac{F_0}{3mL}\right] \cos(\Omega t) \quad (1)$$

La dernière équation correspond à EDM de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t) \quad (2)$$

2. En comparant les deux équations (1) et (2) on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{3mg+kL}{9mL}} \\ \beta = \frac{2\alpha}{9m} \\ A_0 = \frac{F_0}{3mL} \end{array} \right. \quad \text{Avec : } \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = 2.89 \text{ rd s}^{-1} \\ \beta = 0.11 \text{ rd s}^{-1} \\ A_0 = 4 \frac{N}{kg.m} \end{array} \right.$$

3. La solution permanente est de la forme : $\theta(t) = A\cos(\Omega t - \Phi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0\cos(\Omega t) \rightarrow A_0 e^{j\Omega t} \\ \theta(t) = A\cos(\Omega t + \Phi) \rightarrow \underline{\theta} = \underline{A} e^{j\Omega t} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow -\Omega^2 \underline{A} e^{j\Omega t} + 2\beta j\Omega \underline{A} e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \underline{A} e^{j\Omega t} = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\beta\Omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{l'amplitude: } A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \\ \text{la phase: } tg(\Phi) = \left(\frac{Im\underline{A}}{Re\underline{A}}\right) = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \end{array} \right.$$

4. La courbe de la fonction $A(\Omega)$:

$$A(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{(8.35 - \Omega^2)^2 + 0.05 \times \Omega^2}}$$

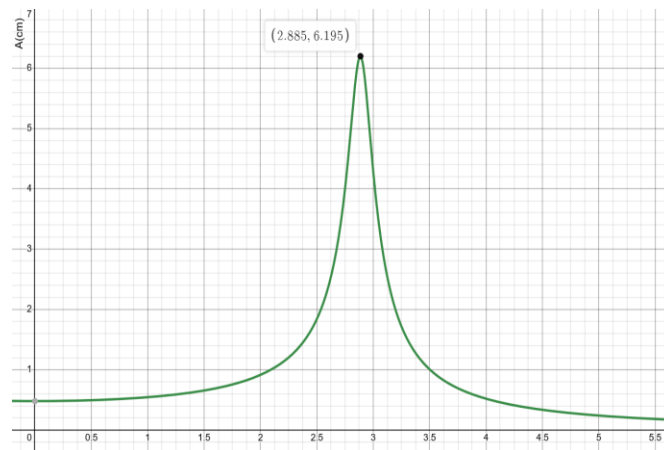


Figure.4. 14 : la variation de l'amplitude $A(\Omega)$ des oscillations du résonateur en fonction de la pulsation Ω de la force excitatrice.

5. La pulsation de résonance est Ω_R telle que : $\frac{\partial A}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

6. Pour $\beta \ll \omega_0$ $\begin{cases} \Omega_{c1} = \omega_0 - \beta \\ \Omega_{c2} = \omega_0 + \beta \end{cases}$

7. AN : $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 2.88 \text{ rd/s}$
 $\Omega_{c1} = 2.78 \text{ rd/s}$
 $\Omega_{c2} = 3.00 \text{ rd/s}$
 $B = 0.22 \text{ rd/s}$

Le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{B} = 13.1$

Exercice 4.3

Soit le circuit électrique RLC en série de la figure 4.15. Le système est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = U_0 \cos(\Omega t)$.

1. Etablir l'équation différentielle (EDQ) qui décrit l'évolution de la charge électrique au borne du condensateur.
2. Pour une charge initiale $Q = Q_0$ et une tension $U_0 = 0V$, donner la pulsation propre et le coefficient d'amortissement du système.
3. Donner le régime de l'évolution de $Q(t)$ et déduire la solution de l'EDQ.
4. Pour une tension $U_0 \neq 0V$, donner la solution du régime permanent
5. Calculer la fréquence de résonance de système

On donne : $L = 16 \text{ mH}$; $R = 80 \text{ ohm}$; $C = 10^{-7} \text{ F}$; $U_0 = 12V$

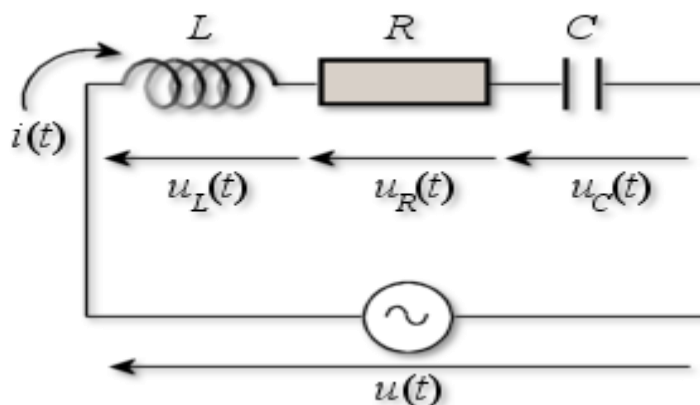


Figure 4.15

Solution 4.3

1. Equation différentielle (EDQ)

En appliquant la loi de mailles :

$$u_L + u_C + u_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2)$$

2. Les expressions de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement du système.

En comparant les deux équations (1) et (2) on trouve :

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{80}{2 \times 16 \times 10^{-3}} = 2500 \text{ rd/s}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{16 \times 10^{-3} \times 10^{-7}}} = 25000 \text{ rd/s}$$

3. Le régime d'oscillation de la charge Q(t) :

$$\beta < \omega_0 \quad ; \text{ régime pseudo-périodique}$$

La solution de l'EDQ est de la forme :

$$q(t) = Q_m e^{-2500t} \cos(\omega_A t + \varphi)$$

$$\text{Avec la pseudo pulsation : } \omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 24874 \text{ rd/s}$$

$$4. \text{ Pour } U_0 \neq 0V, \text{ l'EDQ est : } L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = U_0 \cos(\Omega t)$$

$$\text{Cette équation s'écrit sous la forme : } \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{U_0}{L} \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos(\Omega t)$$

La solution permanente est donnée par l'équation :

$$q(t) = Q \cos(\Omega t - \Psi)$$

$$\text{Avec : } Q = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\Psi = \arctan \left[\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

5. La fréquence de résonance de système

$$\left. \frac{dA(\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

Il existe un maximum pour : $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 24748.7 \text{ rd /s}$

La fréquence de résonance :

$$f_R = \frac{\Omega_R}{2\pi} = 3940.88 \text{ Hz}$$

C

hapitre V

Oscillations linéaires à plusieurs degrés de liberté



Daniel Bernoulli (1700-1782) était un professeur de mathématiques suisse. En 1725, à Saint-Pétersbourg, il a reçu son doctorat en médecine pour sa thèse sur l'action des poumons. Il devint plus tard professeur d'anatomie et de botanique à Bâle. Il a développé la théorie de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique, et le "théorème de Bernoulli". Il a dérivé l'équation du mouvement pour la vibration de poutres (théorie d'Euler-Bernoulli) et a étudié le problème des cordes vibrantes. Bernoulli a été le premier à proposer le principe de superposition des harmoniques en vibration libre [1].

V.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié des systèmes oscillatoires ayant un seul degré de liberté qui peuvent être décrits par une seule variable généralisée. Les systèmes à plusieurs degrés de liberté nécessitent plusieurs coordonnées indépendantes pour décrire l'évolution de leurs états avec le temps. Ce chapitre traite des systèmes oscillatoires à deux degrés de liberté qui nécessitent deux coordonnées pour étudier un tel système. Les équations couplées du mouvement du système sont dérivées à l'aide de la méthode de Lagrange

V.2 Systèmes à deux degrés de liberté

V.2.1 Introduction

Les systèmes à deux degrés de liberté (SDDL) sont des systèmes qui nécessitent deux coordonnées (variables généralisées) indépendantes par rapport à deux origines distinctes pour l'étude et la description de tel système. Ce type de système oscillatoire est caractérisé par la présence de deux modes propres de vibrations naturelles.

Pour avoir une idée sur les systèmes à deux degrés de liberté, considérons l'exemple illustré dans la **Figure V.1(a)** qui décrit la vibration d'une voiture dans un plan vertical. Les oscillations de la voiture, sont décrites par un modèle à deux degrés de liberté illustré à la **Fig. V.1(b)**. Le système est modélisé comme une barre de masse m et de moment d'inertie J_0 , appuyée à l'arrière et en avant sur deux ressorts de rigidité k_1 et k_2 . Le déplacement de la voiture à tout moment peut être spécifié par la coordonnée linéaire $x(t)$ qui désigne le déplacement vertical du centre de gravité (C. G.) du système et la coordonnée angulaire $\theta(t)$ qui indique la rotation du corps sur son C.G. Alternativement, le mouvement de la voiture peut être spécifié en utilisant les coordonnées indépendantes, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux points A et B [1].

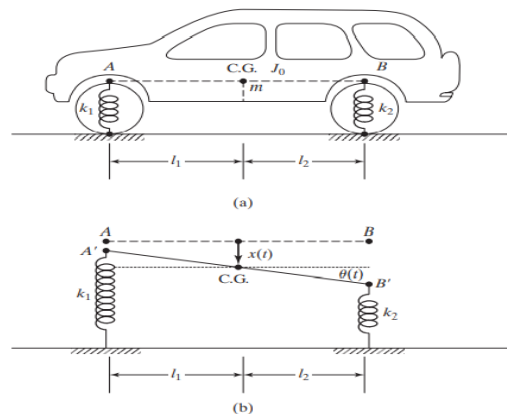


Figure V.1 : la voiture peut être considérée comme un système oscillatoire à deux degrés de liberté [1].

V.2.2 Couplage dans les oscillateurs à deux degrés de liberté

Dans les systèmes à deux degrés de liberté, les oscillateurs sont communément couplés. Ce couplage est manifesté par la présence de plusieurs modes de vibrations. En effet, trois types de couplages existent dans les systèmes oscillatoires à plusieurs degrés de liberté :

- *Couplage par élasticité*

Ce type de couplage est assuré par un ressort pour un système mécanique et par une capacité pour un système électrique (figure V.2).

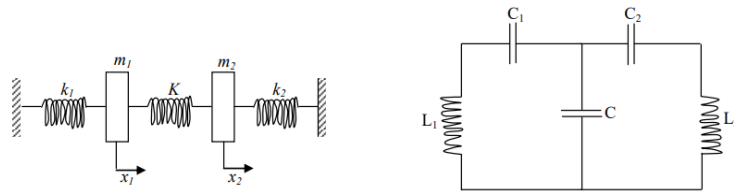


Figure V.2 : Couplage par élasticité pour un système mécanique (à gauche) et électrique (à droite).

- *Couplage par inertie*

Dans les systèmes mécaniques, ce type est assuré par des masses comme le cas d'un pendule double. Pour des systèmes électriques équivalents, les circuits électriques sont couplés par inductance (figure V.3).

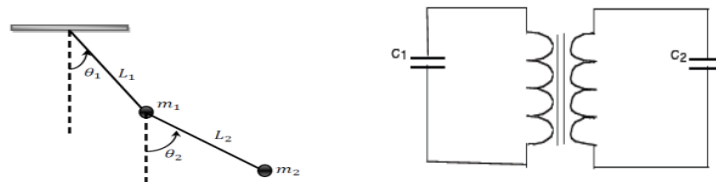


Figure V.3 : Couplage par inertie pour un système mécanique (à gauche) et électrique (à droite).

- *Couplage par viscosité*

Dans les systèmes mécaniques le couplage par viscosité est assuré par un amortisseur. Pour le cas des système électrique équivalent, le couplage est assuré par une résistance (figure V.4).

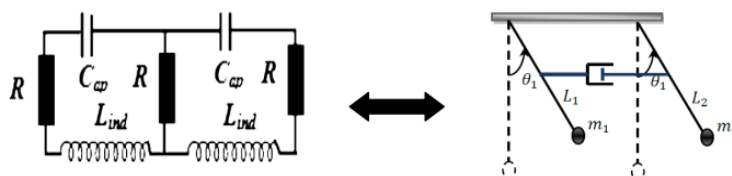


Figure V.4 : Couplage par viscosité pour un système mécanique (à droite) et électrique (à gauche).

V.2.3 Equations de mouvement

Il existe deux équations de mouvement pour un système à deux degrés de liberté, une pour chaque masse (plus précisément, pour chaque degré de liberté). Les deux équations se présentent sous forme de deux équations différentielles couplées, c.-à-d. chaque équation implique toutes les coordonnées du système. La solution est supposée pour chaque coordonnée, ainsi, les équations du mouvement conduisent à deux équation différentielles qui donne deux pulsations propres pour le système. Si nous donnons une excitation initiale appropriée, le système vibre à l'une de ces pulsations naturelles. Pendant les vibrations libres sur l'un des pulsations propres, les amplitudes des deux degrés de liberté sont liées d'une manière spécifique et la configuration est appelée mode normal, mode principal ou mode naturel de vibration. Ainsi, un système à deux degrés de liberté a deux modes normaux de vibration correspondant aux deux pulsations propres [1].

V.3 Systèmes libres à deux degrés de liberté libre non amorti

V.3.1 Description du système

Le système de la **figure V.5** présente deux oscillateurs couplés par un ressort de constante de raideur k_0 . Ce type de couplage est appelée couplage élastique. les deux variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ désignent l'écart par rapport à la position d'équilibre horizontale des deux masses m_1 et m_2 et constituent les coordonnées généralisées à utiliser pour décrire le mouvement oscillatoire du système. Pour étudier ce système, on utilise le formalisme de Lagrange.

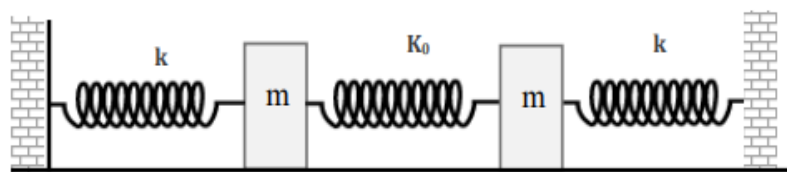


Fig.V.5 : Système oscillatoire à deux degrés de liberté composé de deux oscillateurs identiques couplés par un ressort de constante de raideur k (couplage élastique) [11].

V.3.2 Mise en équations

Le système est considéré libre non amorti. L'équation de mouvement est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{V.1})$$

Le système est décrit par deux coordonnées : $q_i \equiv \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

Le Lagrangien du système: $L = T - U$

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des deux masses m_1 et m_2 :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

L'énergie potentielle : $U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$

On se met dans le cas simple :

$$\begin{cases} k_1 = k_2 = k \\ m_1 = m_2 = m \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2} (k + k_0) x_1^2 + \frac{1}{2} (k + k_0) x_2^2 - k_0 x_1 x_2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k + k_0) x_1^2 - \frac{1}{2} (k + k_0) x_2^2 + k_0 x_1 x_2 \quad (\text{V.3})$$

L'utilisation des équations (V.2) et (V.3), mène aux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + (k + k_0) x_1 - k_0 x_2 = 0 & (1) \\ m \ddot{x}_2 + (k + k_0) x_2 - k_0 x_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

La sommation des deux équations (1) + (2) et (1) - (2) donne:

$$\begin{cases} m (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \\ m (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k + 2k_0)(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

Faisant le changement des variables : $\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$ et l'on obtient :

$$\begin{cases} m \ddot{X}_1 + k X_1 = 0 \\ m \ddot{X}_2 + (k + 2k_0) X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{X}_1 + \frac{k}{m} X_1 = 0 & (3) \\ \ddot{X}_2 + \frac{(k+2k_0)}{m} X_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Les deux équations (3) et (4) ont pour solutions : $\begin{cases} X_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ X_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_0}{m}} \end{cases}$$

Revenons aux expressions de x_1 et x_2 , la solution des deux équations s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \\ x_2 = \frac{X_1 - X_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)] \\ x_2(t) = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)] \end{cases}$$

Les paramètres A_1 , A_2 , ϕ_1 et ϕ_2 peuvent être déterminés à partir des conditions initiales.

Soit les conditions initiales suivantes : $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = x_0$; $\dot{x}_1(0) = 0$ et $\dot{x}_2(0) = 0$

$$x_1(0) = 0 : \quad \frac{A_1}{2} \cos \phi_1 + \frac{A_2}{2} \cos \phi_2 = 0 \quad (5)$$

$$x_2(0) = x_0 : \quad \frac{A_1}{2} \cos \phi_1 - \frac{A_2}{2} \cos \phi_2 = x_0 \quad (6)$$

La somme (5) +(6) et la différence (5) -(6) donne :

$$A_1 \cos \phi_1 = x_0 \quad (7)$$

$$A_2 \cos \phi_2 = -x_0 \quad (8)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 : \quad \frac{A_1}{2} \omega_1 \sin \phi_1 + \frac{A_2}{2} \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (9)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 : \quad \frac{A_1}{2} \omega_1 \sin \phi_1 - \frac{A_2}{2} \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} (9) + (10) \\ (9) - (10) \end{cases} : \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 \omega_1 \sin \phi_1 = 0 \\ A_2 \omega_2 \sin \phi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = 0$$

Revenons aux équations (7) et (8), on obtient :

$$A_1 = -A_2 = x_0$$

On aboutit en fin aux solutions suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \left[\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \right] \\ x_2(t) = x_0 \left[\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \times \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \right] \end{cases}$$

Pour illustrer l'allure des deux courbes $x_1(t)$ et $x_2(t)$, nous avons choisi les données numériques suivantes : $\omega_1 = \frac{15}{4}\pi$, $\omega_2 = \frac{17}{4}\pi$; $x_0 = 15$

Ce qui correspond aux équations :

$$\begin{cases} x_1(t) = 15 \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) \times \sin(4\pi t) \right] \\ x_2(t) = 15 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) \times \cos(4\pi t) \right] \end{cases}$$

Les deux courbes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont présentées dans les **figure V.6 et V.7**, respectivement.

Remarques :

Des deux **figures V.6 et V.7**, on peut constater le suivant :

- Les deux courbes décrivent deux mouvements sinusoidales avec des amplitudes modulées par la pulsation $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.
- Les amplitudes des deux masses varient en quadrature l'une par rapport à l'autre. Ce comportement se traduit par un échange d'énergie d'un pendule à l'autre.
- Pendant que l'un des pendules oscille avec une amplitude maximale, l'autre est arrêté, et inversement. Ce mouvement est nommé *battement*.

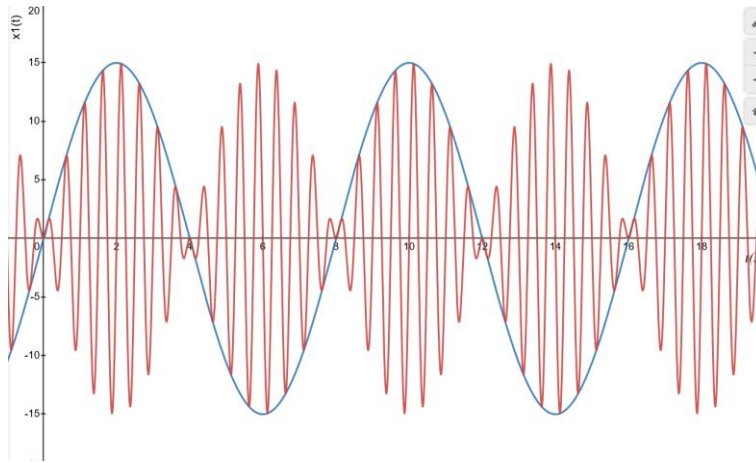


Fig.V.6 : Courbe tracer pour la fonction $x_1(t) = 15 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \sin(4\pi t)$.

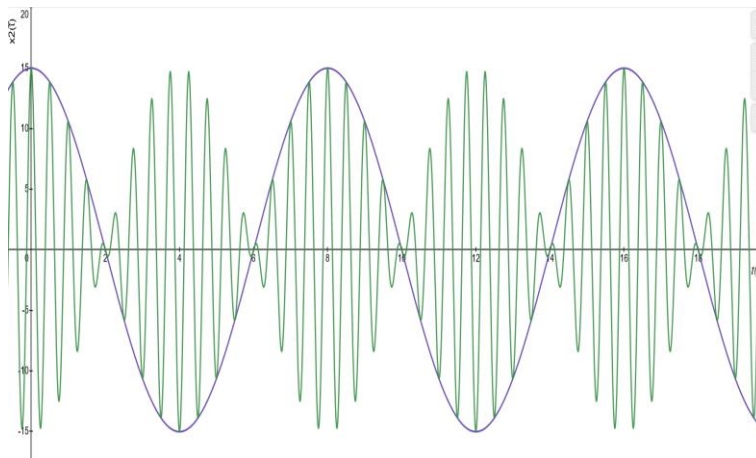


Fig.V.7 : Courbe tracer pour la fonction $x_2(t) = 15 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \times \cos(4\pi t) \right]$.

V.4 Systèmes oscillatoire forcé non amorti à deux degrés de liberté

V.4.1 Description du système

Le système de la **figure V.8** présente deux oscillateurs de constante de raideur k_1 et k_2 couplés élastiquement par un ressort de constante de raideur k_0 . La masse m_1 subit une force extérieure sinusoïdale $\vec{F}(t) = F_0 \cos \Omega t \vec{i}$. On veut déterminer les équations qui décrivent le mouvement des deux masses avec le temps.

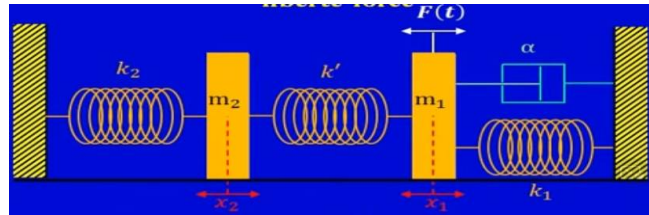


Fig.V.8 : système vibratoire à deux degrés de liberté forcé non amorti.

V.4.2 Mise en équations

Les deux variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ désignent les coordonnées généralisées à utiliser pour décrire le mouvement oscillatoire des deux masses m_1 et m_2 . Pour étudier le mouvement du système on va utiliser la méthode de Lagrange. Les équations de Lagrange sont:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_0 \cos \Omega t \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

Le Lagrangien du système: $L = T - U$

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des deux masses m_1 et m_2 :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_0 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} (k_1 + k_0) x_1^2 + \frac{1}{2} (k_2 + k_0) x_2^2 - k_0 x_1 x_2$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_0) x_1^2 - \frac{1}{2} (k_2 + k_0) x_2^2 + k_0 x_1 x_2 \quad (\text{V.5})$$

L'utilisation des équations (V.4) et (V.5), mène aux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_0) x_1 - k_0 x_2 = F_0 \cos \Omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_0) x_2 - k_0 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{(k_1 + k_0)}{m_1} x_1 - \frac{k_0}{m_1} x_2 = \frac{F_0}{m_1} \cos \Omega t & (9) \\ \ddot{x}_2 + \frac{(k_2 + k_0)}{m_2} x_2 - \frac{k_0}{m_2} x_1 = 0 & (10) \end{cases}$$

On pose :

$$\frac{(k_1 + k_0)}{m_1} = \omega_{01}^2 ; \quad \frac{(k_2 + k_0)}{m_2} = \omega_{02}^2$$

On propose des solutions complexe de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 e^{i\Omega t} e^{i\varphi} = \bar{X}_1 e^{i\Omega t} \\ x_2(t) = X_2 e^{i\Omega t} e^{i\varphi} = \bar{X}_2 e^{i\Omega t} \end{cases} ; \begin{cases} \dot{x}_1(t) = i \Omega \bar{X}_1 e^{i\Omega t} \\ \dot{x}_2(t) = i \Omega \bar{X}_2 e^{i\Omega t} \end{cases} ; \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \bar{X}_1 e^{i\Omega t} \\ \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \bar{X}_2 e^{i\Omega t} \end{cases}$$

On remplace ces solutions dans les équations (9) et (10), le système d'équations (9) et (10) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & -\frac{k_0}{m_1} \\ -\frac{k_0}{m_2} & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_0}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & -\frac{k_0}{m_1} \\ -\frac{k_0}{m_2} & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_{01}^2 - \Omega^2)(\omega_{02}^2 - \Omega^2) - \frac{k_0^2}{m_1 m_2}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F_0}{m_1} & -\frac{k_0}{m_1} \\ 0 & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}}{\text{Dét}}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & \frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k_0}{m_2} & 0 \end{vmatrix}}{\text{Dét}}$$

V.4.2 Fréquences de Résonance

Selon la valeur du déterminant (Dét), le système peut atteindre des amplitudes maximales:

Lorsque l'amplitude $X_1 \rightarrow \infty$, cela implique que $\text{Dét} = 0$

$$(\omega_{01}^2 - \Omega^2)(\omega_{02}^2 - \Omega^2) - \frac{k_0^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\Omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\Omega^2 + \left[\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \frac{k_0^2}{m_1 m_2} \right] = 0$$

Posant : $\Omega^2 = r$; $b = -(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)$; $c = \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 - \frac{k_0^2}{m_1 m_2}$

$$r^2 + br + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4c$$

Les solutions $\begin{cases} \Omega_1 = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}} \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases}$ sont appelées fréquences de résonances

Remarque :

Comme les pulsations sont des quantités positives réelles, on ne garde que les solutions positives.

EXERCICES DU CHAPITRE V

Exercice V.1 [12]

On considère le système à deux degrés de liberté de la figure V.9.

1. Déterminer le lagrangien du système.
2. Donner les équations différentielles du mouvement.
3. Déduire la nature du couplage.
4. Déterminer les modes propres du mouvement du système.
5. Déduire la solution générale qui donne l'évolution du système avec le temps.
6. On donne : $K = 10 \frac{N}{cm}$; $m = 0.1 Kg$, $x_0 = 5cm$.
 - a. Calculer les deux pulsations des modes propres du système.
 - b. Déterminer la solution particulière qui correspond aux conditions initiales $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = x_0$; $\dot{x}_1(0) = 0$ et $\dot{x}_2(0) = 0$

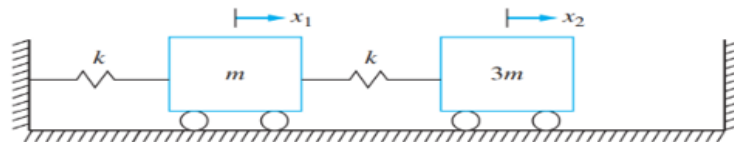


Fig.V.9 : système vibratoire à deux degrés de liberté libre non amorti

Solution V.1

1. Le Lagrangien du système: $L = T - U$

L'énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des deux masses m_1 et m_2 :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 3m \dot{x}_2^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2$$

$$U = \frac{1}{2} 2kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 - kx_1x_2$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 3m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} 2kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 + kx_1x_2 \quad (1)$$

2. Equation différentielles de mouvement :

Dans le cas d'un système libre à 2 degrés liberté, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

L'utilisation des équations (1) et (2), mène aux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 & (3) \\ 3m \ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 & (4) \end{cases}$$

3. La nature du couplage :

Le terme de couplage est le coefficient qui apparaît dans les variables x_2 de l'équation (3) et x_1 de l'équation (4). Ce coefficient (k) désigne la constante de raideur d'un ressort. Ce qui indique que le couplage est d'une nature élastique.

4. Pour résoudre les EDM on propose des solutions de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{i\omega t} \\ x_2(t) = A_2 e^{i\omega t} \end{cases}; \quad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 x_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) = -\omega^2 x_2(t) \end{cases}$$

$$\{(-\omega^2 m + 2k)A_1 - kA_2 = 0 \quad (5)$$

$$\{-kA_1 + (-\omega^2 3m + k)A_2 = 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 3m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dernière équation possède une solution non triviale si le déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 3m \end{vmatrix} = 0$$

L'évaluation de cette équation mène à :

$$(3m)\omega^4 - (7mk)\omega^2 + (k^2) = 0$$

La solution de cette équation désigne les deux pulsations propres du système qui sont:

$$\omega_1 = 0.391 \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_2 = 1.47 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5. La solution générale du système qui donne l'évolution des deux coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec le temps est :

$$x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (7)$$

$$x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (8)$$

6. Application numérique :

a. Les deux pulsations des modes propres

$$\omega_1 = 0.391 \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.391 \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 3.91 \text{ rd/s}$$

$$\omega_2 = 1.47 \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_2 = 1.47 \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 14.7 \text{ rd/s}$$

7. La solution particulière des équations (7) et (8)

Le système d'équation (7) et (8) possède 6 inconnus. Pour diminuer ce nombre on cherche une relation entre les constantes A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22}

• Mode 1 : $\omega = \omega_1$

$$x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}; \quad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \ddot{x}_2(t) = -\omega^2 A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

On remplace ces expressions dans les équations (5) et (6) on trouve :

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_1^2 m & -k \\ -k & k - \omega_1^2 3m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(2k - 0.153 \frac{k}{m} m\right) A_{11} - k A_{21} = 0$$

$$(2k - 0.153 k) A_{11} = k A_{21}$$

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = 0.54$$

• Mode 2 : $\omega = \omega_2$

$$x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \end{cases}; \quad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\omega_2^2 A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \\ \ddot{x}_2(t) = -\omega_2^2 A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \end{cases}$$

On remplace ces expressions dans les équations (5) et (6) on trouve :

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_2^2 m & -k \\ -k & k - \omega_2^2 3m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(2k - 2.161 \frac{k}{m} m\right) A_{12} - kA_{22} &= 0 \\ (2k - 2.161 k) A_{12} &= kA_{22} \\ \frac{A_{22}}{A_{12}} &= -6.21 \end{aligned}$$

Les système d'équations (7) et (8) devient de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) & (9) \\ x_2(t) = 0.54 A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - 6.21 A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) & (10) \end{cases}$$

Maintenant, pour déterminer les paramètres A_{11} , A_{12} , φ_1 et φ_2 on utilise les conditions initiales : $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = x_0$; $\dot{x}_1(0) = 0$ et $\dot{x}_2(0) = 0$

$$x_1(0) = 0 : \quad A_{11} \cos \varphi_1 + A_{12} \cos \varphi_2 = 0 \quad (11)$$

$$x_2(0) = x_0 : \quad 0.54 A_{11} \cos \varphi_1 - 6.21 A_{12} \cos \varphi_2 = x_0 \quad (12)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 : \quad A_{11} \omega_1 \sin \varphi_1 + A_{12} \omega_2 \sin \varphi_2 = 0 \quad (13)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 : \quad 0.54 A_{11} \omega_1 \sin \varphi_1 - 6.21 A_{12} \omega_2 \sin \varphi_2 = 0 \quad (14)$$

On remplace ω_1 et ω_2 par leurs valeurs , les équations (11, 12, 13, 14) deviennent:

$$\begin{cases} A_{11} \cos \varphi_1 + A_{12} \cos \varphi_2 = 0 \\ 0.54 A_{11} \cos \varphi_1 - 6.21 A_{12} \cos \varphi_2 = x_0 \\ 3.91 A_{11} \sin \varphi_1 + 14.7 A_{12} \sin \varphi_2 = 0 \\ 2.11 A_{11} \sin \varphi_1 - 91.29 A_{12} \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

La résolution du système d'équations (15) permet de définir les paramètres des fonction $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice V.2 [13]

Soit le système mécanique de la **figure V.10** composé de deux pendules de masses m_1 et m_2 associés par un ressort de raideur k . les deux masses sont égaux $m_1 = m_2 = m$. Pour étudier ce système, on utilise le formalisme de Lagrange.

1. Déterminer les variables nécessaires pour la description du mouvement du système.
2. Ecrire les deux équations de Lagrange qui correspond à ces variables.
3. Déterminer le Lagrangien du système.
4. Dédire les équations différentielles du système (EDM).
5. Déterminer les deux pulsations propres du système
6. Démontrer que les deux solutions générales des équations différentielles du mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\theta_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\theta_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

7. Supposons que le système oscille avec le mode propre ω_1 puis le mode ω_2 , trouver dans ce cas une relation entre les paramètres A_{11}, A_{12}, A_{21} et A_{22} et déduire les nouvelles expressions de la solutions du système.

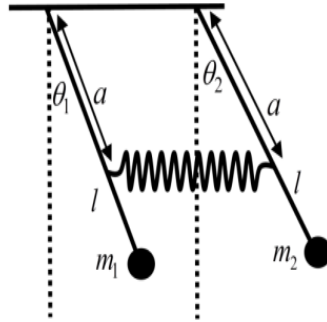


Fig.V.10 : Système oscillatoire à deux degrés de liberté couplé par un ressort.

Solution V.2

1. Les deux variables $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ qui désignent l'écart angulaire par rapport à la position d'équilibre verticale(en pointiller) et constituent les coordonnées généralisées à utiliser pour décrire le mouvement oscillatoire du système.

2. Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

3. Le Lagrangien du système: $L = T - U$

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_2^2$$

L'énergie potentielle : $U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_k = mgh_1 + mgh_2 + \frac{1}{2} kx^2$

$$U = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2} ka^2(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2$$

Pour des valeurs de $\theta \ll 1$: $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{1}{2} mgl \theta_1^2 + \frac{1}{2} mgl \theta_2^2 + \frac{1}{2} ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_1^2 - \frac{1}{2}mgl\theta_2^2 - \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2 \quad (2)$$

4. Les équations différentielles du mouvement :

Les équations (1) et (2) permettent d'obtenir les EDM:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + ka^2)\theta_2 - ka^2\theta_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

5. Solution de l'EDM :

En absence d'amortissement, le mouvement d'un système à 2 degrés de liberté est la superposition de deux mouvement harmoniques simple. Donc, on cherche des solutions de type harmoniques de la forme:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ces deux solutions satisfaire le système d'équations :

$$\begin{aligned} (-ml^2\omega^2 + mgl + ka^2)A_1 - ka^2A_2 &= 0 \\ -ka^2A_1 + (-ml^2\omega^2 + mgl + ka^2)A_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -ml^2\omega^2 + mgl + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -ml^2\omega^2 + mgl + ka^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système est en mouvement, par conséquent, les deux amplitudes A_1 et A_2 sont non nulles.

Le système d'équation admet donc des solutions non nulles si le déterminant est nul:

$$\begin{vmatrix} -ml^2\omega^2 + mgl + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -ml^2\omega^2 + mgl + ka^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne: $(-ml^2\omega^2 + mgl + ka^2)^2 - (ka^2)^2 = 0$

$$\omega^4 - \left[2\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}\right]\omega^2 + \left[\frac{g^2}{l^2} + 2\frac{gka^2}{ml^3}\right] = 0$$

Faisant le changement suivant : $x = \omega^2$ $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$;

$$x^2 - \left[2\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}\right]x + \left[\frac{g^2}{l^2} + 2\frac{gka^2}{ml^3}\right] = 0 \quad (4)$$

L'équation (4) possède deux solutions qui sont les pulsations propres du système:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{ka^2}{ml^2}}$$

6. La solution du système s'écrit alors:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

7. Relation entre A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22}

Pour une pulsation $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \theta_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\end{aligned}$$

On remplace ces deux équations dans (3) on trouve : $A_{11} = A_{21}$

Pour une pulsation $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{ka^2}{ml^2}}$

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_1) \\ \theta_2(t) &= A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_1)\end{aligned}$$

On remplace ces deux équations dans (3) on trouve : $A_{12} = -A_{22}$

La nouvelle solution s'écrit donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les quatre paramètres A_{11} , A_{12} , φ_1 , φ_2 peuvent être déterminés à partir des conditions initiales

ANEXE

1. Quelques formules utiles

1.1. Fonction trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

1.2. Nombre complexe

$$i^2 = -1$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

1.3. Développement en série

Pour $x \ll 1$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

1.4. Développement en série de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=x_0} + \dots \\ + \frac{1}{n!} (x - x_0)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=x_0}$$

2. Equation différentielle linéaire d'ordre deux

a. Solution des équations différentielles de type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On cherche une équation de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les constantes A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

b. Solution des équations différentielles de type :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On choisit une solution de la forme : $x(t) = C e^{rt}$

On trouve : $r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$

Cherchons C et r :

$$\Delta = \beta^2 - \omega_0^2$$

✓ 1^{er} cas :

$$\beta^2 - \omega_0^2 > 0 \rightarrow \beta > \omega_0$$

Deux solutions : $\begin{cases} r_1 = -\beta - \lambda \\ r_2 = -\beta + \lambda \end{cases}$ ($\lambda = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{(-\beta-\lambda)t} \\ x_2 = C_2 e^{(-\beta+\lambda)t} \end{cases}$$

La solution est la somme des deux solutions x_1 et x_2 :

$$x(t) = e^{-\beta t} [C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}]$$

✓ 2^{ème} cas :

$$\beta^2 - \omega_0^2 = 0 \rightarrow \beta = \omega_0$$

Solution multiple :

$$r = -\beta$$

La solution particulière

$$x_1 = e^{-\beta t}$$

On choisit la solution générale sous la forme : $x(t) = x_1(C_1 x + C_2)$

Soit :

$$x(t) = e^{-\beta t}(C_1 x + C_2)$$

✓ 3^{ème} cas :

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0 \rightarrow \beta < \omega_0$$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{cases} r_1 = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta + i\omega_A \\ r_2 = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta - i\omega_A \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 e^{r_1 t} \\ x_2 = \overline{C_1} e^{\overline{r_1} t} \end{cases}$$

La solution :

$$x(t) = x_1 + x_2 = C_1 e^{r_1 t} + \overline{C_1} e^{\overline{r_1} t} = 2\text{Re}(C_1 e^{r_1 t}) \quad (z + \bar{z} = 2\text{Re}(z))$$

$$x(t) = 2e^{-\beta t} \text{Re}[C_1 e^{r_1 t}]$$

Si : $C_1 = a + ib$

$$x(t) = 2e^{-\beta t} [a \cos(\omega_A t) - b \sin(\omega_A t)]$$

$$x(t) = 2e^{-\beta t} [a \cos(\omega_A t) - b \sin(\omega_A t)]$$

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega_A t - \varphi)$$

c. Résolution de l'équation de type :

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

Cette équation admet deux solutions ;

- Une solution transitoire sans second membre, déjà étudiée dans le cas précédent (cette solution tend vers zéro).
- Une solution avec second membre dite permanente.

Pour résoudre cette équation, on cherche $x(t)$ sous la forme complexe :

L'équation différentielle (1) peut s'écrire de la forme :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = A_0 \cos(\Omega t) \quad (2)$$

On cherche une solution de la forme :

$$X(t) = A \cos(\Omega t - \Phi)$$

Pour résoudre l'équation (2), on lui associe une solution de la forme :

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\beta \frac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = A_0 \sin(\Omega t) \quad (3)$$

On pose :

$$Z(t) = X(t) + i Y(t)$$

La fonction complexe $Z(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + 2\beta \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = A_0 e^{i\Omega t} \quad (4)$$

Pour résoudre l'équation (4) on cherche une solution de la forme :

$$Z(t) = Z_0 e^{i\Omega t}$$

On reporte la fonction $Z(t)$ dans l'équation (4), on trouve :

$$(-\Omega^2 + i2\beta \Omega + \omega_0^2)Z_0 e^{i\Omega t} = A_0 e^{i\Omega t}$$

Et :

$$Z_0 = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\beta \Omega}$$

$$Z(t) = Z_0 e^{i\Omega t}$$

$$\dot{Z}(t) = (i\Omega)Z_0 e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{Z}(t) = (-\Omega^2)Z_0 e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2)Z_0 e^{i\Omega t} + 2\beta (i\Omega)Z_0 e^{i\Omega t} + \omega_0^2 Z_0 e^{i\Omega t} = A_0 e^{i\Omega t}$$

$$Z_0[-\Omega^2 + 2\beta (i\Omega) + \omega_0^2] = A_0$$

$$Z_0 = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\beta \Omega}$$

$$Z_0 = A_0 \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i2\beta \Omega}{[\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\beta \Omega][\omega_0^2 - \Omega^2 - i2\beta \Omega]}$$

$$Z_0 = A_0 \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} + \frac{-i2\beta \Omega}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2}$$

$$Z_0 = A_0 \left[\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right] + i A_0 \left[\frac{-2\beta \Omega}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right]$$

Le nombre complexe Z_0 peut s'écrire sous la forme :

$$Z_0 = A e^{i\phi} = A [\cos \phi + i \sin \phi] = \text{Re} [Z_0] + i \text{Im} [Z_0]$$

D'où la valeur du module A est :

$$A = A_0 \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}{([\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2)^2}}$$

$$A = A_0 \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

L'argument ϕ du nombre complexe Z_0 vérifie l'égalité :

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{A_0 \left[\frac{-2\beta\Omega}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right]}{A_0 \left[\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right]}$$

$$\tan \phi = \left[\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right]$$

3. La valeur moyenne de la puissance

La puissance est le produit de la force avec la vitesse :

$$P_F(t) = F(t) \cdot \dot{X} \begin{cases} F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \\ \dot{X} = V \cos(\Omega t - \Phi) \end{cases}$$

$$P_F(t) = F_0 \cdot V \cdot \cos(\Omega t) \cdot \cos(\Omega t - \Phi)$$

La valeur moyenne de la puissance $P_F(t)$ sur une période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} P_F(t) \cdot dt$$

$$\langle P_F \rangle = \frac{F_0 \cdot V}{T} \int_0^T [\cos^2(\Omega t) \cos(\Phi) + \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \sin(\Phi)] dt$$

$$\langle P_F \rangle = F_0 \cdot V \cdot \left[\cos(\Phi) \frac{1}{T} \int_0^T [\cos^2(\Omega t) dt] dt + \sin(\Phi) \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(\Omega t) \sin(\Omega t) dt] dt \right]$$

$$\langle \cos^2(\Omega t) \rangle = 1/2$$

$$\langle \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \rangle = 0$$

$$\langle P_F \rangle = \frac{1}{2} F_0 \cdot V \cdot \cos(\Phi)$$

$$\int_0^T \cos^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^T ; \quad \int_0^T \sin^2(x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^T$$

4. Système forcé amorti (cas d'une excitation périodique quelconque)

a. Les séries de Fourier :

Une fonction périodique de période T peut être écrite sous la forme d'une somme série de fonctions appelées série de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

b. Mise en équations

Soit une excitation périodique appliquée à un système amorti à un degré de liberté. L'équation différentielle qui régit ce système s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$$

La fonction A(t) étant périodique, de période T, son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

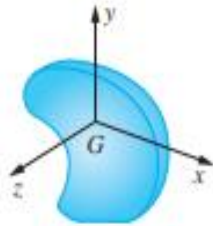
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière, pour t suffisamment élevé, peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation $a_n \cos(n\omega t)$ et $b_n \sin(n\omega t)$. On obtient alors par superposition [1]:

$$q(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\omega_n t + \Psi_n) + b_n \sin(\omega_n t + \Psi_n)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_n^2}}$$

5. Moment d'inertie de certains systèmes

General shape

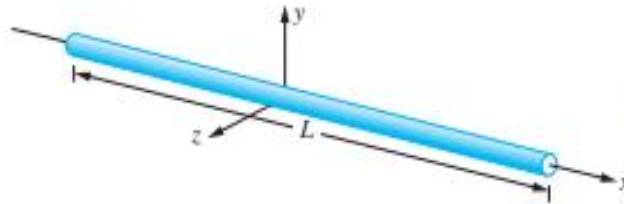


$$\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$\bar{I}_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$\bar{I}_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

Slender rod

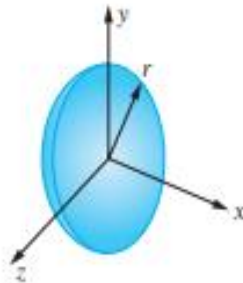


$$\bar{I}_x \approx 0$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} mL^2$$

$$\bar{I}_z = \frac{1}{12} mL^2$$

Thin disk

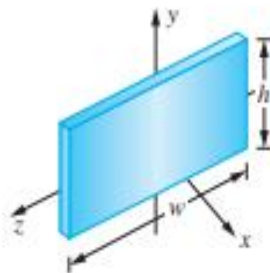


$$\bar{I}_x = \frac{1}{2} mr^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{4} mr^2$$

$$\bar{I}_z = \frac{1}{4} mr^2$$

Thin plate

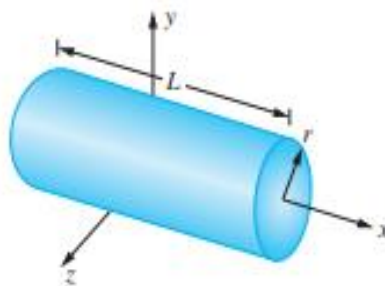


$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} m(w^2 + h^2)$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} mw^2$$

$$\bar{I}_z = \frac{1}{12} mh^2$$

Circular cylinder

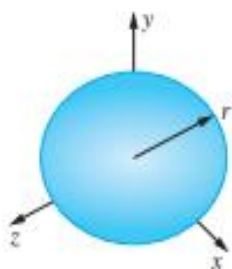


$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} mr^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} m(3r^2 + L^2)$$

$$\bar{I}_z = \frac{1}{12} m(3r^2 + L^2)$$

Sphere



$$\bar{I}_x = \frac{2}{5} mr^2$$

$$\bar{I}_y = \frac{2}{5} mr^2$$

$$\bar{I}_z = \frac{2}{5} mr^2$$

REFERENCES

- [1] Singiresu S. Rao and Philip Griffin; **Mechanical vibrations**; Publisher: Pearson Education / Prentice Hall (2018).
- [2] Leslie, M., *Good vibrations: A bit of shaking can burn fat, combat diabetes* Health, 2017.
- [3] Mathieu Deschamps et Anouk Noël; *Mécanique et biomécanique en techniques de physiothérapie* ; Québec (2020).
- [4] <https://www.universalis.fr/encyclopedie/joseph-louis-lagrange/>
- [5] Ph. Chen et R. Guillemard; PHYSIQUE, Oscillations ; Vuibert (1992).
- [6] Catherine Potel et Philippe Gatugnot ; Cours de Mécanique-Vibrations ; université du Maine.
- [7] https://uel.unisciel.fr/physique/sys_oscillant
- [8] François Rigaud, Jean Gounot, Stephan Dilhaire, Marc Valat, Sébastien Jorez ; *Oscillateur harmonique amorti, oscillations libres amorties*; Université Bordeaux 1 (2003).
- [9] Janine Bruneaux et Jean Matricon; *Vibrations, ondes*; PHYSIQUE-LMD Universités-Ecoles d'ingénieurs (2008).
- [10] Georgi, H., *The physics of waves*. 1993: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ
- [11] A. Ouatzerga, Oscillations libres à 2DDL ; USTHB ; (2020)
- [12] S. Graham Kelly; *Mechanical Vibrations Theory and application*; The University of Akron.
- [13] S. Aoulmit, Cours de Vibrations et Ondes Première Partie Vibration (2018).