الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة عمار ثليجي بالأغواط

UNIVERSITE AMAR TELIDJI LAGHOUAT

كلية العلوم

FACULTE DES SCIENCES

قسم الرياضيات

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique.

Filière : Mathématiques.

Option : Analyse Mathématique.

Par :

DAKCHA Zakhroufa

THEME

opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. Amar BELACEL	PROF	Président
Mme. Nawal ABDESSELAM	MCB	Examinateur
Mr. Amar BOUGOUTAIA	MCA	Encadreur

Année Universitaire : 2021-2022

Remerciements.

Je remercie ***Allah*** *Tout-Puissant de m'avoir donné la santé et la volonté de commencer et de terminer cette lettre.*

Tout d'abord, je tiens à remercier ***Dr. Amar BOUGOUTAIA*** *pour son aide et ses conseils et sans lui ce travail ne serait pas possible.*

Je tiens également a remercier. les professeurs avec qui nous avons passé des années de notre vie à l'université, et les professeurs qui nous ont donné le meilleur d'eux-mêmes.

A cette occasion, je tiens a remercier les membres du jury :
Dr. Amar BELACEL *et* ***Dr.Nawal ABDESSELAM****, pour l'évaluation et l'enrichissement de ce travail. Je suis honoré d'être a la pointe du net aujourd'hui.*

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé et contribué à la réalisation de ce travail.

Dakcha
Zakhroufa.

Dédicace .

Allah soit loue, qui m'a permis d'apprécier cette étape de mon parcours universitaire avec mes mémoires, fruit de l'effort et de la réussite, par la grâce de Allah Tout-Puissant.

Dédié aux honorables parents, que Dieu les préserve et les perpétue comme une lumière sur mon chemin.

A toute l'honorable famille qui ma soutenu et continue de me soutenir, frères et sœur, et aux compagnons de route qui ont partagé ses moments avec moi, que Allah les bénisse et leur accorde le succès.

A tous ceux qui ont eu un impact sur ma vie, et à tous ceux que mon cœur a aimés et oubliés par mon plume.

Dakcha
Zakhroufa.

ملخّص.

يمثل العمل الرئيسي لهذه المذكرة في تطوير مفاهيم و نظريات التجميع، التي بدأها قروثانديك في عام 1950 و التي طورها لاحقا بيتش و العديد من المؤلفين في السنوات التالية. تتعلق هذه التطورات و التعميمات بالتطبيقات متعددي الخطية، حيث قدمنا و درسنا فكرة للمؤثرين متعددي الخطية p جمعية، حيث نقدم العلاقة بين هذه المؤثيرين p جمعية و نثبت نظرية الهيمنة لهذه الفئة.

مفاتيح هذه المذكرة.

تطبيقات متعددة الخطية ـ تطبيقات p جمعية ـ نظرية الهيمنة ـ تطبيقات كوهين متعدد الخطية p جمعي

Résumé :

Le travail principal de ce mémoire, est de présenter des concepts et des théorèmes de sommabilité, initiés par A. Grothendieck en 1950 et développés plus tard par A. Pietsch et plusieurs auteurs dans les années suivantes. Ces développements et généralisations concernent les opérateurs multilinéaires, Ou nous avons introduit et étudié l'idée d'opérateurs m-linéaires fortement p-sommant ou nous présentons la relation entre ceux-ci et les opérateurs p-sommants, et nous prouvons le théorème de domination pour cette classe.

Mots clés : Opérateur multilinéaire- Opérateur p-sommant- Opérateur fortement p-sommant-Théorème de domination- Opérateur multilinéaire Cohen fortement p-sommant.

Abstract :

The main work of this thesis is to develop summability concepts and theorems, initiated by A. Grothendieck in 1950 and later developed by A. Pietsch and several authors in the following years. These developments and generalizations concern multilinear operators, where we introduced and studied the idea of strongly p-summing m-linear operators where we present the relation between these and p-summing operators, and we prove the theorem of dominance for this class.

Key words : Multilinear operator- p-summing operator-Strongly p-summing operator- Domination theorem- Strongly p-summing Cohen multilinear operator.

Table des matières

Notations

X, Y :	Deux espaces de Banach.
X^*, Y^* :	L'espace dual de X, Y respectivement.
$\mathcal{L}(X,Y)$:	L'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$\mathcal{B}_X$:	La boule unité de X.
$p*$:	Le conjugué de p i.e., $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$).
$\pi_p(X,Y)$:	La classe des opérateurs p-sommants de X dans Y.
$\mathcal{D}_p(X,Y)$:	La classe des opérateurs fortement p-sommants de X dans Y.
$\mathcal{L}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$:	L'espace des opérateurs $m-$linéaires bornés.
$\mathcal{B}(X,Y)$:	L'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y.
$l_p(X)$:	L'espace des suites (x_i) dans X absolument p-sommables.
$l_p^\omega(X)$:	L'espace des suites (x_i) dans X faiblement p-sommables.
$L(X,Y)$:	L'espace des opérateurs linéaires.
$\mathcal{D}_p^m(X_1,\ldots,X_m;Y)$:	L'espace des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1,\ldots,$

Introduction

Le travail de ce mémoire se situent dans le cadre de l'analyse multilinéaire et sont dédiés aux développements de quelques théorèmes de sommabilité, ainsi que les théorèmes de dominations dans le cas multilinéaires. Ce travail est basé sur l'étude des opérateurs p-sommants, les opérateurs fortement p-sommants au sens de Cohen. L'idée de l'introduction des ces classes d'opérateurs est motivée par les études suivantes. Dans la théorie des opérateurs p-sommants étudiés en premier lieu par Pietcsh en 1967 , il est défini la classe des opérateurs absolument p-sommants et est montré quelques propriétés intéressantes, parmi les principaux résultats parûs dans [9] on peut trouver les théorèmes des dominations "factorisations", les théorèmes d'inclusions, les propriétés des compositions et les relations avec les autre classes d'opérateurs linéaires. Aussi, Pietsch a montré que l'identité de l_1 dans l_2 est 2 -sommant mais l'opérateur adjoint n'est pas 2-sommant. Pour cela, le concept des opérateurs fortement p-sommants $(1 \leq p \leq \infty)$ a été introduit par Cohen [4] comme une caractérisation des conjugués des opérateurs $p^{*}-$ sommants. Cohen introduit la famille des espaces des suites, tels que l'espace des suites faiblement p-sommables, l'espace des suites absolument p-sommables et l'espace des suites fortement p-sommables. Notre travail est dévisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, dans ce chapitre on définit et étudie les différents concepts de sommabilité dans la catégorie des suites qui s'appellent les espaces des suites. On donnera une comparaison entre ces concepts. Dans une seconde partie, on rappellera la sommabilité de ces opérateurs exactement les opérateurs absolument p-sommants suivis par quelques propriétés utiles, tels que quelques résultats récents relatifs à cette classe d'opérateurs.

Dans le deuxième chapitre, nous allons donner la notion des opérateurs p-sommants introduite par Pietcsh [1] et le théorème de factorisation avec quelques propriétés fondamentales.

Dans le troisème chapitre, nous introduisons la généralisation suivante de la classe d'opérateurs Cohen fortement p-summants définit en 1973 par Cohen [2].

Chapitre 1

espace des suites

Dans ce chapitre on définit et étudie les différents concepts de sommabilité dans la catégorie des suites qui s'appellent les espaces des suites. On donne une comparaison entre ces concepts. Dans une seconde partie, on rappelle la sommabilité de ces opérateurs exactement les opérateurs absolument p-sommants suivis par quelques propriétés utiles, tels que quelques résultats récents relatifs à cette classe d'opérateurs.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *(espace topologique) On appelle* ***espace topologique*** *un couple* $(X, \mathcal{T})$ *ou* X *est un ensemble et* $\mathcal{T}$ *une famille de parties de* X *vérifiant :*

1. $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
2. *Une intersection finie d'éléments de* $\mathcal{T}$ *appartient a* $\mathcal{T}$.
3. *Une réunion quelconque d'éléments de* $\mathcal{T}$ *appartient a* $\mathcal{T}$.

On appelle $\mathcal{T}$ *la topologie sur* X.

Définition 1.1.2. *(espace de Hilbert) Soit* E *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, *un produit scalaire sur* E *est une application, notée* $\langle ., . \rangle$ *de* $E \times E$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$, *telle que pour tout* $x, y, z \in E$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$, *on ait :*

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ *et, si* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$; $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ *et* $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Dans la deuxième point $\overline{\langle y, x \rangle}$ *et* $\overline{\alpha}$ *sont les conjugués dans* $\mathbb{C}$ *de* $\langle y, x \rangle$ *et* α, *lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *ces barres du conjugaison sont inutiles.*

Définition 1.1.3. *(espace de Banach) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (evn) complet.*

1.2 espaces des suites p-sommables

On commence ce paragraphe par introduire quelques définitions, propriétés et notations concernant les espaces des suites. Pour plus de détails voir [2] et [4]. On désigne par X et Y deux espaces de Banach, et X^*, Y^* sont leurs espaces duaux. La boule unité de X sera désignée par $\mathcal{B}_X = \{x \in X / \|x\| < 1\}$.
Soient n un entier, X un espace de Banach et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (où p^* est le conjugué de p i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).
On note par $l_p(X)$(resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i)(resp. $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) dans X absolument p-sommables, muni de la norme :

$$\|(x_i)\|_{l_p(X)} = (\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\|(x_i)\|_{l_p(X)} = \sup_i\|x_i\|,\ \ p = \infty\ .$$
$$(\text{resp. } \|(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\|_{l_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}).$$

D'une façon analogue, on désigne par l_p l'espace des suites scalaires (λ_i) telle que $\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i^p| < \infty$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$||(\lambda_i)||_{l_p} = (\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i^p|)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leqslant p < \infty.$$

L'espace l_∞ est l'espace des suites scalaires (λ_i) bornées, normées par

$$||(\lambda_i)||_{l_\infty} = \sup_i |\lambda_i|.$$

L'espace l_∞ est complet pour cette norme. L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (λ_i) telle que $\lim_i \lambda_i \longrightarrow 0$. C'est un sous espace fermé de l_∞, donc un espace de Banach. On note par $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\,\omega}(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp.$(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) dans X faiblement p-sommables, muni de la norme

$$\|(x_i)\|_{l_p^\omega(X)} = \sup\{(\sum_{i=1}^{\infty}|x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}} : \|x^*\| \leqslant 1\},\ 1 \leqslant p < \infty,$$
$$= \sup\{\sup_i\{|x^*(x_i)| : \|x^*\| \leqslant 1\}\}, p = \infty,$$
$$(\text{resp. } \|(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\|_{l_p^{n\,\omega}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^*}=1}(\sum_{i=1}^{n}\|\langle x_i, \xi\rangle\|^p)^{\frac{1}{p}}).$$

On sait (voir [6]) que $l_p(X) = l_p^\omega(X)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est finie. Si $p = \infty$, on a $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$. Maintenant nous pourrons définir un nouvele espace des suites qui a été introduit par Cohen [4].

Définition 1.2.1.

Soit $1 < p < \infty$. Une suite (x_i) est dite fortement p-sommable, si pour toute suite $(x_i^*) \in l_{p^*}^\omega(X^*)$, la série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i)$ est convergente. Dans ce cas, on note par $l_p^s(X)$ l'espace des suites (x_i) dans X fortement p-sommables.

Théorème 1.2.1.

L'espace $l_p^s(X)$ est un espace normé et la norme est donnée par

$$\|(x_i)\|_{l_p^s(X)} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i)\right| : \|(x_i^*)\|_{l_{p^*}^\omega(X^*)} \leqslant 1\right\}.$$

Démonstration.

Soit $(x_i) \in l_p^s(X)$. On doit montrer que $\|(x_i)\|_{l_p^s(X)}$ est finie. La suite (x_i) peut être considérée comme une forme linéaire T de $l_{p^*}^\omega(X^*)$ définie par

$$T((x_i^*)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x_i).$$

On définit la suite (T_n) des formes linéaires sur $l_{p^*}^\omega(X^*)$ par

$$T_n((x_i^*)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x_i).$$

On peut voir que T_n. D'après l'isométrie de $l_{p^*}^\omega(X^*)$ et $B(l_p^\omega, X^*)$, $l_{p^*}^\omega(X^*)$ est donc complet. Le théorème de Banach-Steinhaus implique que T est continu et

$$\|(x_i)\|_{l_p^s(X)} = \|T\| < \infty.$$

On peut conclure facilement que $\|(x_i)\|_{l_p^s(X)}$ est une norme. Les relations entre les différents espaces sont données par le théorème suivant. □

Théorème 1.2.2. *[4]*

(1) *Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on a $l_p^s(X) \subseteq l_p(X) \subseteq l_p^\omega(X)$, de plus*

$$\|(x_i)\|_{l_p^\omega(X)} \leqslant \|(x_i)\|_{l_p(X)} \leqslant \|(x_i)\|_{l_p^s(X)}.$$

(2) *Si $p = 1$; on a $l_1^s(X) = l_1(X)$ et*

$$\|(x_i)\|_{l_1^s(X)} = \|(x_i)\|_{l_1(X)}.$$

(3) *Si $p = \infty$; on a $l_\infty(X) = l_\infty^\omega(X)$ et*

$$\|(x_i)\|_{l_\infty(X)} = \|(x_i)\|_{l_\infty^\omega(X)}.$$

1.3 Rappels sur les opérateurs linéaires

1.3.1 Opérateurs Continus

Définition 1.3.1. *(Continuité des opérateurs linéaires)*
Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur linéaire u défini de X dans Y est dit continu au point x_0 de X si, on a la propriété suivante :
Pour toute suite (x_n) de X converge vers x_0 ; la suite $(u(x_n))$ converge vers $u(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u(x_n) = u(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n) = u(x_0).$$

L'opérateur linéaire u est dit continu sur X ; s'il est continue en chaque point de l'ensemble X. On note $L(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y . On écrira $L(X)$ à la place de $L(X,X)$.
On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans Y.
On écrira $\mathcal{L}(X)$ à la place de $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, l'ensemble des formes linéaires sur X. Le triplet $(\mathcal{L}(X,Y),+,\times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.2.
1) *Un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$ est inversible s'il existe un opérateur linéaire noté $u^{-1} : Y \longrightarrow X$ tel que $u^{-1}\circ u = id_X$, et $u \circ u^{-1} = id_Y$, où $id_X(id_Y)$ est un opérateur d'identité sur X (sur Y) .*
2) *Un opérateur linéaire $u : X \longrightarrow Y$ entre deux espace normés X et Y est un isomorphisme si u est une bijection continue dont l'inverse u^{-1} est également continu. Dans ce cas les espaces X et Y sont isomorphes, de plus si*
$\|u(x)\| = \|x\|$; pour tout $x \in X$; alors u est un isomorphisme isométrique.

1.3.2 Adjoint d'un opérateur borné

Soit u un opérateur linéaire borné défini d'un espace normé X à valeurs dans un espace normé Y ; alors pour tous $x \in X$ et $y \in Y$; on définit les fonctionnelles linéaires bornées $U \in Y^* = \mathcal{L}(Y;\mathbb{K})$ et $V \in X^* = \mathcal{L}(X;\mathbb{K})$ comme suit

$$\begin{aligned} U : Y &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\mapsto U(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V : X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto V(x) \end{aligned}$$

L'opérateur noté u^* défini de Y^* dans X^* est dit opérateur adjoint de u si l'on a, pour tous $U \in Y^*$ et $V \in X^*$

$$\begin{aligned} u^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ U &\mapsto u^*(U) \ \textit{tel que} \ u^*(U)(x) = U(u(x)) = V(x), \end{aligned}$$

De sorte que $\|u^*\| = \|u\|$.

Les opérateurs m-linéaires

On considère le produit cartésien

$$X_1 \times \ldots \times X_m = \{(x^1, \ldots, x^m) : x^j \in X_j, 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

qui est un espace normé muni de la norme

$$\|(x^1, \ldots, x^m)\| := \max\{\|x^j\| : x^j \in X_j\}.$$

L'opérateur $T : X_1 \times \ldots \times X_m \longrightarrow Y$ est appelé multilinéaire (ou m-linéaire) si les opérateurs

$$\begin{aligned} T_j : X_j &\longrightarrow Y \\ x^j &\mapsto T(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^m) \end{aligned}$$

sont linéaires pour chaque $x^j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, en d'autres termes

$$T(x^1, \ldots, \lambda x^j + y^j, \ldots, x^m) = \lambda T(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^m) + T(x^1, \ldots, y^j, \ldots, x^m),$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et x^j, $y^j \in X_j$.
$L(X_1, \ldots, X_m, Y)$ est l'espace vectoriel de tous les opérateurs m-linéaires de $X_1 \times \ldots \times X_m$ de Y , muni par les deux opérations

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(x^1, \ldots, x^m) =& T_1(x^1, \ldots, x^m) + T_2(x^1, \ldots, x^m). \\ (\lambda T_1)(x^1, \ldots, x^m) =& \lambda T_1(x^1, \ldots, x^m). \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $L(X^1, \ldots, X^m)$, l'espace des formes multilinéaires.

Définition 1.3.3.

L'opérateur m-linéaire $T : X_1 \times \ldots \times X_m \longrightarrow Y$ est continu s'il est continu comme une fonction entre deux espaces normés. Une conséquence de cette définition est l'égalité suivante :

$$T(x_1, \ldots, x_m) - T(y_1, \ldots, y_m) =$$
$$T(x^1 - y^1, x^2, \ldots, x^m) + T(x^1, x^2 - y^2, x^3, \ldots, x^m) + \ldots + T(x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m - y^m).$$

Similaire au cas linéaire. Nous avons ce théorème qui caractérise les opérateurs multilinéaires continu :

Théorème 1.3.1. *(Multilinéaire continu)*

Pour tout $T \in L\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) T est continu pour $X_1 \times \ldots \times X_m$;

2) T est continu en $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ fois}})$;

3) Il existe une constante $C > 0$, telle que :

$$\left\|T\left(x^1, \ldots, x^m\right)\right\| \leq C\left\|x^1\right\| \times \cdots \times\left\|x^m\right\|, \tag{1.1}$$

pour tout $x^j \in X_j$. Dans ce cas, on pose

$$\|T\| = \sup_{\substack{x^j \in B_{X_j} \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} \left\|T\left(x^1, \ldots, x^m\right)\right\|.$$

On note par $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ l'espace vectoriel de tous les opérateurs m -linéaires continus (ou bornés) de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m\right)$, et pour simplification si $X_1 = \cdots = X_m = X$ on écrit $\mathcal{L}\left({ }^m X; Y\right)$. On peut voir que $\|T\| = \inf\{C : C$ vérifiant l'inégalité (1.1)$\}$.

Dans [10], l'adjoint d'un opérateur m -linéaire $T \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$ est défini par :

$$T^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m\right), y^* \longmapsto T^*\left(y^*\right) : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\text{tel que } T^*\left(y^*\right)\left(x^1, \ldots, x^m\right) = y^*\left(T\left(x^1, \ldots, x^m\right)\right).$$

1.4 Topologie faible et faible$-*$

Soit X un espace de Banach, La boule unité de X sera notée $\mathcal{B}_X$. On désigne par X le dual topologique de X, l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x\in\mathcal{B}_X} |f(x)|.$$

Les éléments de X^* seront le plus généralement notés par x^* .
On note par X^{**} le bidual de $X^*(X^{**} = (X^*)^*)$. Soit $x \in X$ l'application
$x^* \longrightarrow \langle x^*, x\rangle$ de X dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur X^* ; donc un élément de X^{**}
, on désignera souvent $\langle x^*, x\rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

La topologie faible $\sigma(X, X^*)$

La topologie faible sur X est la topologie la plus faible sur X rendant continues toutes les applications $\varphi \in X^*$. On la note $\sigma(X; X^*)$.

La topologie faible-$*$ $\sigma(X^*, X)$

Pour chaque $x \in X$, on considère l'application $\varphi_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_x(f) = \langle f, x\rangle \text{ avec } f \in X^* .$$

La topologie faible-$*$ sur X est la topologie la plus faible sur X qui rend continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in X}$. On la note $\sigma(X^*, X)$.
On définit sur X^* trois topologies. la topologie forte, la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$ et la topologie faible-$*$ $\sigma(X^*, X)$.
Notons que chaque φ_x est continue comme forme linéaire sur X^* (avec la topologie forte) et donc $\varphi_x \in X^{**}$. Ainsi φ_x est continue pour la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$ et par définition de la topologie $*$-faible, on obtient que la topologie faible-$*$ est plus faible que la topologie faible qui elle-même est plus faible que la topologie forte L'importance de la topologie faible-$*$ est sans aucun doute contenue dans le théorème de Alaoglu-Banach-Bourbaki voir [3].

Théorème 1.4.1. *(Alaoglu-Banach-Bourbaki)*
L'ensemble $\mathcal{B}_{X^*} = \{\varphi \in X^* : \|\varphi\| \leqslant 1\}$ *est compacte pour la topologie faible-*$*$ $\sigma(X^*, X)$.

Chapitre 2

opérateurs fortement p-sommants

2.1 opérateurs p-sommants

Nous allons donner la notion des opérateurs p-sommants introduite par Pietcsh [1] et le théorème de factorisation avec quelques propriétés fondamentales.

Définition 2.1.1. *Soient X, Y deux espaces Banach et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On dira que T est p-sommant pour $0 < p < \infty$ si :*

$$\begin{cases} \exists\, C > 0,\ \textit{telle que}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \{x_i, \dots, x_n\} \subset X \\ \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \tag{2.1}$$

On note par

$$\pi_p(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \ \textit{linéaires } p\textit{-sommants}\}.$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C,\ \textit{vérifiant l'inégalité (2.1)}\ \}.$$

Exemple 2.1.1. *Soit K un espace compact de Hausdorff, soit μ une mesure sur K et soit $1 \leqslant p < \infty$.*

(1) *Pour chaque $\varphi \in L_p(\mu)$; on définit l'opérateur de multiplication*

$$T_\varphi : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$$
$$f \mapsto f \cdot \varphi$$

cet opérateur est p-sommant de plus $\pi_p(T) = \|\varphi\|_p$.

(2) L'opérateur canonique

$$J_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$$
$$f \mapsto f$$

est p-sommant de plus $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

2.1.1 Propriété d'idéal

Proposition 2.1.1.

Soient $T \in \pi_p(X, Y)$, $v : E \longrightarrow X$ *linéaire continu et* $\omega : Y \longrightarrow F$ *linéaire continu (*X, Y, E, *et* F *sont des espaces de Banach quelconques). Alors,*
$\omega T v$ *est p-sommant et*

$$\pi_p(\omega T v) \leqslant \|\omega\| \pi_p(T) \|v\|.$$

Démonstration.
On a

$$\|wTv(x)\| \leqslant \|w\| \|T(v(x))\| \ , \forall x \in E.$$

Soit $n \in N$ et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans E alors $\{v(x_1), \ldots, v(x_n)\} \subset X$, donc

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} \|T(v(x_i))\|^p)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \pi_p(T) \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^\star}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle v(x_i), \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leqslant \pi_p(T) \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^\star}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, v^\star(\xi) \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On pose $\eta = \frac{v^\star(\xi)}{\|v\|} \in \mathcal{B}_{E^\star}$, donc

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(v(x_i))\|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \pi_p(T) \|v\| \sup_{\eta \in \mathcal{B}_{X^\star}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \eta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

d'où

$$(\sum_{i=1}^{n} \|wT(v(x_i))\|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|w\| \pi_p(T) \|v\| \sup_{\eta \in \mathcal{B}_{X^\star}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \eta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

et par conséquent $wTv \in \pi_p(E, Z)$ et

$$\pi_p(wTv) \leqslant \|w\| \pi_p(T) \|v\|.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 2.1.1.

Soit X_0 un sous espace d'un Banach X et $T \in \pi_p(X,Y)$. Alors

$$T/X_0 \in \pi_p(X_0, Y) \text{ et } \pi_p(T/X_0) \leqslant \pi_p(T).$$

Corollaire 2.1.2. *(Injectivité)*

Si $i : Y_0 \longrightarrow Y$ est une isométrie, alors

$$T \in \pi_p(X, Y_0) \Leftrightarrow iT \in \pi_p(X,Y).$$

Dans ce cas, on a $\pi_p(T) = \pi_p(iT)$.

Proposition 2.1.2.

Soient $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et X, Y deux espaces de Banach. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *l'opérateur $T \in \pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T) \leqslant C$.*

(2) *Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, on a*

$$\pi_p(Tv) \leqslant C\|v\|.$$

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Supposons $T \in \pi_p(X,Y)$ et $\pi_p(T) \leqslant C$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v : l_{p^*}^n \longrightarrow X$, d'après la propriété d'idéale on a

$$Tv \in \pi_p(l_{p^*}^n, Y) \text{ et } \pi_p(Tv) \leqslant C\|v\|.$$

(2) $\Rightarrow$ **(1)** On définit v par $v(e_i) = x_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x_i \in X$, où (e_i) est la base canonique de l_p^n . On a

$$\|v\| = \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \|T(v(e_i))\|^p)^{\frac{1}{p}}, \\
&\leqslant C\|v\|, \\
&\leqslant C \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où T est p-sommant et $\pi_p(T) \leqslant C$. □

Théorème 2.1.1. ***(Théorème d'inclusion)***
Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, on a

$$\pi_p(X,Y) \subset \pi_q(X,Y).$$

et

$$\forall\, T \in \pi_p(X,Y),\ \pi_q(T) \leqslant \pi_p(T).$$

où $0 < p < q < \infty$.

2.2 Caractérisations des opérateurs p-sommants

Dans cette section, nous donnons le théorème fondamental de Domination de Pietsch pour les opérateurs p-sommants. Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur aux références [6, 9, 10]

Théorème 2.2.1.
Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p-sommant et $0 < p < \infty$. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(\mathcal{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X))$telle que

$$\forall x \in X, \|T(x)\| \leqslant \pi_p(T)(\int_{\mathcal{B}_{X^*}} |\langle x_i, \xi\rangle| d\lambda(\xi))^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(\mathcal{B}_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ et $C > 0$ telle que la formule citée au dessus est vérifiée, alors T est p-sommant et $\pi_p(T) \leqslant C$.

Théorème 2.2.2.
Soient $1 \leqslant p < \infty$, $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire (où X, Y sont des espace de Banach), est p-sommant si et seulement si $T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ est p-sommant de plus, on a $\pi_p(T) = \pi_p(T^{**})$.

2.3 opérateurs fortement p-sommants

2.3.1 Définitions et propriétés

Définition 2.3.1.
Un opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ (X, Y sont des espaces de Banach arbitraires) est

fortement p-sommant, $1 < p \leqslant \infty$ si et seulement si, il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1, \ldots, x_n \in X$, et tout $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\|(\langle T(x_i); y_i^* \rangle)\|_{l_1^n} \leqslant C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{P}} \sup_{y \in \mathcal{B}_Y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n}. \tag{2.3}$$

Encore une fois la classe d'opérateurs fortement p-sommants de X dans Y , qui est notée par $\mathcal{D}_p(X,Y)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.3)\}.$$

Théorème 2.3.1.

Soit $1 < p \leqslant \infty$ et X, Y deux espaces de Banach

(1) *$\mathcal{D}_p(X,Y)$ est un espace normé.*

(2) *Si $T \in \mathcal{D}_p(X,Y)$, alors T est continu et $\|T\| \leqslant d_p(T)$.*

Proposition 2.3.1.

Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $v : l_p^n \longrightarrow Y^*$ un opérateur linéaire borné, l'opérateur T est fortement p-sommant si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), v(e_i) \rangle| \leqslant C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{P}} \|v\|. \tag{2.4}$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposition 2.3.2.

Soient $T \in B(X,Y)$, $R \in B(Y,Z)$ et $S \in B(E,X)$.

(1) *Si T est fortement p-sommant, alors $R \circ T$ est fortement p-sommant et $d_p(R \circ T) \leqslant \|R\| d_p(T)$.*

(2) *Si T est fortement p-sommant, alors $T \circ S$ est fortement p-sommant et $d_p(T \circ S) \leqslant \|T\| d_p(S)$.*

Démonstration.

(1) Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $z_1^*, \ldots, z_n^* \in Z^*$. Il suffit de montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle R \circ T(x_i), z_i^* \rangle| \leqslant C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{p}} \|v\|.$$

où $v : Z \longrightarrow l^n_{p^*}$ tel que $v(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i^*(z)e_i$.
On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\langle R\circ T(x_i), z_i^*\rangle| &= \sum_{i=1}^{n}|\langle T(x_i), R^*(z_i^*)\rangle|,\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_X^p)^{\frac{1}{p}}\|w\|.\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}w(y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle R^*(z_i^*), y\rangle e_i,\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle z_i^*, R(y)\rangle e_i,\\ &= \|R(y)\|\sum_{i=1}^{n}\langle z_i^*, \frac{R(y)}{\|R(y)\|}\rangle e_i.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\|w\| &\leqslant \|R\|\sup_{z\in\mathcal{B}_Z}\|(z_i^*(z))_{1\leqslant i\leqslant n}\|_{l_1^n},\\ &\leqslant \|R\|\|v\|.\end{aligned}$$

(2) Soient $n\in\mathbb{N}$, $e_1,\ldots,e_n\in E$, et $y_1^*,\ldots y_n^*\in Y^*$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\langle T\circ S(e_i), y_i^*\rangle| &= \sum_{i=1}^{n}|\langle T(S(e_i)), y_i^*\rangle|,\\ &\leqslant d_p(T)(\sum_{i=1}^{n}\|S(e_i)\|_X^p)^{\frac{1}{p}}\|v\|)(v(y) = \sum_{i=1}^{n}y_i^*(y)e_i),\\ &\leqslant d_p(T)(\|S\|^p\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}}\|v\|,\\ &\leqslant d_p(T)\|S\|(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}}\|v\|.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que, $d_p(T\circ S)\leqslant d_p(T)\|S\|$ ceci termine la démonstration. □

2.4 La Relation entre $\mathcal{D}_p(X,Y)$ et $\pi_p(X,Y)$

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs fortement p^*-sommants.

Théorème 2.4.1. *Soit X, Y deux espaces de Banach. Alors,*

(1) *Soit $1 \leqslant p < \infty$. L'opérateur T est p-sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est fortement p^*-sommant de Y^* dans X^* et $d_{p^*}(T^*) = \pi_p(T)$.*

(2) *Soit $1 < p \leqslant \infty$. L'opérateur T est fortement p-sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est p-sommant de Y^* dans X^* et $d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*)$.*

Démonstration.

(1) Soit $1 \leqslant p < \infty$ et soit $T \in \pi_p(X,Y)$. On va montrer que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*,X^*)$. Si $y_1^*,\dots,y_n^* \in Y^*$ et $(x_i^{**}) \subset X^{**}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle T^*(y_i^*), x_i^{**}\rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle y_i^*, T^{**}(x_i^{**})\rangle|, \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\| \|T^{**}(x_i^{**})\|, \quad (2.4) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\|T^{**}(x_i^{**})\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Puisque T est p-sommant, il résulte que T^{**} est p-sommant, de plus $\pi_p(T) = \pi_p(T^{**})$. On trouve

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T^{**}(x_i^{**})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \pi_p(T) \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i^{**}, \xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{P}}. \tag{2.5}$$

En remplaçant l'inégalité (2.4) dans (2.5), on aura

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T^*(y_i^*), x_i^{**}\rangle| \leqslant \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{X^*}} \|(x_i^{**}(\xi))\|_{l_p^n}$$

Ce qui implique que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*,X^*)$ et $d_{p^*}(T^*) \leqslant \pi_p(T)$.

Inversement. On suppose que $T^* \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*,X^*)$, soit $x_1,\dots,x_n \in X$, et soit (y_i^*) une suite finie dans Y^*, on a

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^{n} \langle Tx_i, y_i^*\rangle\Big| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, T^*(y_i^*)\rangle|, \\ &\leqslant d_{p^*}(T^*) \Big(\sum_{i=1}^{n} \|y_i^*\|^{p^*}\Big)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{x^* \in \mathcal{B}_{X^*}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^*\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Puisque $(l_p^n(X))^* = l_{p^*}^n(X^*)$,

(i.e.,$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{ \left|y_i^*(Tx_i)\right| : y_1^*,\dots,y_n^* \in Y^*,\ \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^*\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1 \right\}$

Nous faisons entrer le suprême sur la boule unité sur $l_{p^*}^n(X^*)$, on trouve

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant d_{p^*}(T^*) \sup_{x^*\in\mathcal{B}_{X^*}} \Big(\sum_{i=1}^{n}|\langle x_i, x^*\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui implique que T est p-sommant et $\pi_p(T) \leqslant d_{p^*}(T^*)$.

(2) De la même façon que (1).

□

2.5 Caractérisations des opérateurs fortement p-sommants

On va maintenant présenter le théorème de domination concernant cette classe d'opérateurs.

Théorème 2.5.1. *Un opérateur $T \in B(X,Y)$ est fortement p-sommant, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, si et seulement si , il existe une probabilité de Radon μ sur $\mathcal{B}_{Y^{**}}$ et une constante positive C, telle que pour tout $x \in X$, on a*

$$|\langle T(x), y^*\rangle| \leqslant C\|x\|\Big(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\Big)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Premièrement on commence par montrer la réciproque. Soient $(x_i) \subset X$ et $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$. D'après (2.6), on a

$$|\langle T(x_i), y_i^*\rangle| \leqslant C\|x_i\|\Big(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\Big)^{\frac{1}{p^*}}.$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ On aura donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|\langle T(x_i), y_i^*\rangle| &\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i\|\Big(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\Big)^{\frac{1}{p^*}}\Big),\\
&\leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}} |y_i^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**})\Big)^{\frac{1}{p^*}}\Big),\\
&\leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{y\in\mathcal{B}_Y} \|y_i^*(y)_{1\leqslant i\leqslant n}\|_{l_{p^*}^n}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $T \in \mathcal{D}_p(X,Y)$ et $d_p(T) \leqslant C$.

On démontre la première implication. On a, T est fortement p-sommant $\Longleftrightarrow$ T^* est p^*-sommant et $d_p(T) = \pi_{p^*}(T^*)$,

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &\leqslant |\langle x, T^*(y^*) \rangle| \\ &\leqslant \|x\| \|T^*(y^*)\| \\ &\leqslant d_p(T) \|x\| (\int\limits_{\mathcal{B}_{Y^{**}}} |y_i^{**}(y^*)|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Chapitre 3

opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants

3.1 opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants

Nous introduisons la généralisation suivante de la classe d'opérateurs Cohen fortement p-summants définit en 1973 par Cohen [2].

Définition 3.1.1. *Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times \ldots \times X_m \longrightarrow Y$ (X_j, $((j = 1, \ldots, m), Y$ sont des espaces de Banach arbitraire et $m \in \mathbb{N}$) est Cohen fortement p-sommant, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ si, il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, \ldots, x_n^j \in X_j$, et tout $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$, on a :*

$$\left\| \left(\left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right) \right\|_{l_1^n} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in \mathcal{B}_Y} \left\| \left(y_i^*(y) \right) \right\|_{l_{p^*}^n}. \tag{3.1}$$

Encore une fois la classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times \ldots \times X_m$ dans Y, qui sera noté par $\mathcal{D}_p^m(X_1, \ldots, X_m; Y)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$d_p^m(T) = inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (3.1)\}.$$

Exemple 3.1.1.
L'opérateur $T : l_1 \times l_1 \longrightarrow l_1$ donne par $T(x,\ y) = (x_k y_k)_k$ est Cohen fortement 1-sommant.

Démonstration.

Soit

$$T : l_1 \times l_1 \longrightarrow l_1$$
$$(x, y) \mapsto (x_k y_k)_k$$

Pour tout $x = (x_i^1)_i, y = (x_i^2)_i \subset l_1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y_1^*, \ldots, y_n^* \in l_\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, x_i^2\right), y_i^*\right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1, x_i^2\right)\right\| \|y_i^*\|, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\|\left(x_{i,k}^1 x_{i,k}^2\right)_k\right\|_{l_1} \|y_i^*\|, \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{i,k}^1 x_{i,k}^2\right|\right) \sup_i \|y_i^*\|\right), \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{i,k}^1\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_{i,k}^2\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_i \left(\sup_{y \in \mathcal{B}_{l_1}} |y_i^*(y)|\right), \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{2} \left\|x_i^j\right\|_{l_2} \cdot \sup_{y \in \mathcal{B}_{l_1}} \left(\sup_i |y_i^*(y)|\right), \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{2} \left\|x_i^j\right\|_{L_1} \cdot \sup_{y \in \mathcal{B}_{l_1}} \|y_i^*(y)\|_{l_\infty}.
\end{aligned}$$

Alors T est Cohen fortement 1-sommant. □

Proposition 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m, Y)$ et $v : l_p^n \longrightarrow Y^*$ un opérateur linéaire borné. L'opérateur T est Cohen fortement p-sommant si est seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), v\left(e_i\right)\right\rangle\right| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\|. \tag{3.2}$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m\left(X_1, \ldots, X_m, Y\right) = \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right)$.

On va donné maintenant propriété d'idéal des opérateurs Cohen fortement $p-$sommant.

Proposition 3.1.2. *(propriété d'idéal)*

Soient $T \in \mathcal{L}\left(X_1, \ldots, X_m; Y\right), R \in B(Y, Z)$ et $S_j \in B\left(E_j, X_j\right) (1 \leq j \leq m)$

(1) *Si T est Cohen fortement $p-$sommant, alors $R \circ T$ est Cohen fortement $p-$sommant et $d_p^m(R \circ T) \leq \|R\| d_p^m(T)$.*

(2) *Si T est Cohen fortement $p-$sommant, alors $T \circ (S_1, \ldots, S_m)$ est Cohen fortement $p-$sommant et $d_p^m\left(T \circ \left(S_1, \ldots, S_m\right)\right) \leq \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \, d_p^m(T)$.*

Démonstration.

(1) Soient $n \in \mathbb{N}, x_1^j, \ldots, x_n^j \in X_j$ et $z_1^*, \ldots, z_n^* \in Z^*$. Il suffit d'après (3.2) de montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle RT\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), z_i^*\right\rangle\right| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\|.$$

Où $v : Z \longrightarrow l_{p^*}^n$ tel que $v(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i^*(z) e_i$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle RT\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), z_i^*\right\rangle\right| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), R^*\left(z_i^*\right)\right\rangle\right|, \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|w\|.
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
w(y) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle R^*\left(z_i^*\right), y\right\rangle e_i, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, R(y)\right\rangle e_i, \\
&= \|R(y)\| \sum_{i=1}^{n} \left\langle z_i^*, \frac{R(y)}{\|R(y)\|}\right\rangle e_i.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|w\| &\leq \|R\| \sup_{z \in \mathcal{B}_z} \left\|\left(z_i^*(z)\right)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{l_1^n}, \\
&\leq \|R\| \|v\|.
\end{aligned}$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}, e_1^j, \ldots, e_n^j \in E_j$ et $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T \circ \left(S_1, \ldots, S_m\right)\left(e_i^1, \ldots, e_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(S_1\left(e_i^1\right), \ldots, S_m\left(e_i^m\right)\right), y_i^*\right\rangle\right|, \\
&\leq d_p^m(T) \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|S_j\left(e_i^j\right)\right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\| \left(v(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(y) e_i\right), \\
&\leq d_p^m(T) \left(\prod_{j=1}^{m} \|S_j\|^p \sum_{i=1}^{n} \left\|e_i^j\right\|_{E_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\|, \\
&\leq d_p^m(T) \prod_{j=1}^{m} \|S_j\| \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|e_i^j\right\|_{E_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|v\|.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne $d_p^m\left(T\circ(S_1,\ldots,S_m)\right)\leq\prod_{j=1}^{m}\|S_j\|\,d_p^m(T)$ et ceci terminé la démonstration. $\square$

3.1.1 Théorème de Domination

On présente maintenant le théorème de domination . Avant ceci, on donne le lemme de Ky Fan pour utilité dans la démonstration du théorème. Pour la preuve le lecteur pourra consulter [6].

Lemme 3.1.1. *Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de E. Soit M un ensemble des fonctions définies sur C à valeurs dans $(-\infty,\infty)$ vérifiantes les propriétés suivantes :*

(a) *Tout $f\in M$ est convexe et semi continue inferierment.*

(b) *Si $g\in conv(M)$, il existe $f\in M$ telle que $g(x)\leqslant f(x)$, $\forall x\in C$.*

(c) *S'il existe $r\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $f\in M$, $f(x)\leqslant r$. Alor il existe $x_0\in C$ telle que $f(x_0)\leqslant r$ pour tout $f\in M$.*

Théorème 3.1.1. *Un opérateur m-linéaire $T\in\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;Y)$ est Cohen fortement p-sommant, $1<p<\infty$ s'il existe une probabilité de Radon μ sur $\mathcal{B}_{Y^{**}}$ telle que pour tout $(x^1,\ldots,x^m)\in X_1\times\ldots\times X_m$, on a :*

$$\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq d_p^m(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\|y^*\|_{L_{p^*}(\mathcal{B}_{Y^{**}},\mu)}. \tag{3.3}$$

Inversement, s'il existe une constante positive C et une probabilité de Radon μ sur $\mathcal{B}_{Y^{**}}$ telles que pour tout $(x^1,\ldots,x^m)\in X_1\times\ldots\times X_m$, on a :

$$\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right|\leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\left(\int_{B_{Y^*}}|y^*\left(y^{**}\right)|^{p^*}d\mu\right)^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.4}$$

alors $T\in\mathcal{D}_p^m\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$ et $d_p^m(T)\leq C$.

Démonstration. Premièrement on commence par montrer la réciproque. Soient $x_1^j,\ldots,x_n^j\in X_j$, $j=1,\ldots,m$ et $y_1^*,\ldots,y_n^*\in Y^*$. On a :

$$\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|\leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^*}}|y_i^*\left(y^{**}\right)|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

pour tout $1\leqslant i\leqslant n$. Donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|,\\
&\leq C\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}}\left|y_i^*\left(y^{**}\right)\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}\right),\\
\text{(par Hölder)}\ &\leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}}\left|y_i^*\left(y^{**}\right)\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p^*}},\\
&\leq C\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\left\|x_i^j\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{y\in\mathcal{B}_Y}\left\|\left(y_i^*(y)\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{l_{p^*}^n}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $T\in\mathcal{D}_p^m\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$ et $d_p^m(T)\leq C$. Pour prouver la première implication, soit $K=\mathcal{B}_{Y^{**}}$. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des mesures de probabilité sur $C(K)^*$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est un convexe compact dans $C(K)^*$ muni de sa topologie $*$ faible $\sigma\left(C(K)^*,C(K)\right)$. Soit M un ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f_{\left(\left(x_i^j\right),\left(y_i^*\right)\right)}(\mu)=\sum_{i=1}^{k}\left(\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right|-\frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^{p}-\frac{C}{p^*}\int_K\left|\left\langle y_i^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right).\tag{3.5}$$

où $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\subset X_j\ 1\leq j\leq m$ et $\left(y_i^*\right)_{1\leq i\leq n}\subset Y^*$. Ces fonctions sont convexes et continues. On applique le lemme de Ky Fan avec $E=C(K)^*$. Soient f,g dans M et $\alpha\in[0,1]$, telle que :

$$f_{\left(\left(x_i'^j\right),\left(y_i'^*\right)\right)}(\mu)=\sum_{i=1}^{k}\left(\left|\left\langle T\left(x_i'^1,\ldots,x_i'^m\right),y_i^*\right\rangle\right|-\frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i'^j\right\|^{p}-\frac{C}{p^*}\int_K\left|\left\langle y_i'^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right),$$

$$g\left(\left(x_i''^j\right),\left(y_i''^*\right)\right)(\mu)=\sum_{i=1}^{l}\left(\left|\left\langle T\left(x_i''^1,\ldots,x_i''^m\right),y_i^*\right\rangle\right|-\frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i''^j\right\|^{p}-\frac{C}{p^*}\int_K\left|\left\langle y_i''^*,y^{**}\right\rangle\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right).$$

Il s'ensuit que :

$$\alpha f =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \alpha \left(\left| \left\langle T\left(x_i'^1, \ldots, x_i'^m\right), y_i^* \right\rangle \right| - \frac{C}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i'^j \right\|^p - \frac{C}{p^*} \int_K \left| \left\langle y_i'^*, y^{**} \right\rangle \right|^{p^*} d\mu\left(y^{**}\right) \right) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \left(\left| \left\langle T\left(\alpha^{\frac{1}{mp}} x_i'^1, \ldots, \alpha^{\frac{1}{mp}} x_i^m\right), \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i^* \right\rangle \right| \right.$$
$$\left. -\frac{C}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| \alpha^{\frac{1}{mp}} x_i'^j \right\|^p - \frac{C}{p^*} \int_K \left| \left\langle \alpha^{\frac{1}{p^*}} y_i'^*, y^{**} \right\rangle \right|^{p^*} d\mu\left(y^{**}\right) \right).$$

et

$$(1-\alpha) g =$$
$$\sum_{i=1}^{l} (1-\alpha) \left(\left| \left\langle T\left(x_i''^1, \ldots, x_i''^m\right), y_i^* \right\rangle \right| - \frac{C}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i''^j \right\|^p \right.$$
$$\left. -\frac{C}{p^*} \int_K \left| \left\langle (1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^*, y^{**} \right\rangle \right|^{p^*} d\mu\left(y^{**}\right) \right) =$$
$$\sum_{i=1}^{l} \left(\left| \left\langle T\left((1-\alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i''^1, \ldots, (1-\alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i''^m\right), (1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i^* \right\rangle \right| \right.$$
$$\left. -\frac{C}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| (1-\alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i''^j \right\|^p - \frac{C}{p^*} \int_K \left| \left\langle (1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^*, y^{**} \right\rangle \right|^{p^*} d\mu\left(y^{**}\right) \right).$$

Finalement on a

$$\alpha f + (1-\alpha) g =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left| \left\langle T\left(x_i^1, \ldots, x_i^m\right), y_i^* \right\rangle \right| - \frac{C}{p} \prod_{j=1}^{m} \left\| x_i^j \right\|^p - \frac{C}{p^*} \int_K \left| \left\langle y_i^*, y^{**} \right\rangle \right|^{p^*} d\mu\left(y^{**}\right) \right).$$

avec $n = k + l$,

$$x_i^j = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{mp}} x_i'^j & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{mp}} x_i''^j & \text{si} \quad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

et

$$y_i^* = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{p^x}} y_i'^* & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{p^*}} y_i''^* & \text{si} \quad k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Soit $y_0 \in \mathcal{B}_{Y^{**}}$ tel que :

$$\sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle y_i^*, y \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle y_i^*, y_0 \right\rangle \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

et f de la forme (3.5). On a :

$$f(\delta_{y_0}) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\int_K \left|\langle y_i^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*} d\delta_{y_0}(y^{**})\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\sum_{i=1}^{n}\left|\langle y_i^*, y_0\rangle\right|^{p^*}\right).$$

(δ_{y_0} est la mesure de Dirac supportée par y_0). En utilisant l'identité élémentaire

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^* \quad \alpha\beta = \inf_{\epsilon>0}\left\{\frac{1}{p^*}\left(\frac{\alpha}{\epsilon}\right)^p + \frac{1}{p^*}(\epsilon\beta)^{p^*}\right\}. \tag{3.6}$$

nous trouvons

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\sum_{i=1}^{n}\left|\langle y_i^*, y_0\rangle\right|^{p^*}\right)\leq$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle T\left(x_i^1,\ldots,x_i^m\right),y_i^*\right\rangle\right| - C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}\left\|x_i^j\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\langle y_i^*, y_0\rangle\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)\right).$$

et ceci d'après (3.3) est inférieur ou égale à zero. D'après le lemme de Ky Fan, il existe $\mu\in\mathcal{C}$ telle que $f(\mu)\leq 0$ pour tout $f\in M$. Si on prend $x=(x^1,\ldots,x^m)\in X_1,\ldots,X_m$ et $y^*\in Y^*$ on a :

$$f(\mu) = f_{(x,y^*)}(\mu) =$$
$$\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right| - \frac{C}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|^p - \frac{C}{p^*}\int_K \left|\langle y^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*} d\mu \leq 0.$$

D'où

$$\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right| \leq C\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|^p + \frac{1}{p^*}\int_K \left|\langle y^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}\right) d\mu.$$

Fixant $\epsilon>0$ et en remplaçant x^j par $\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{m}}}x^j$, y^* par ϵy^* et en prenant l'inf pour $\epsilon>0$ voir (3.6), on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle T\left(x^1,\ldots,x^m\right),y^*\right\rangle\right| \leq & C\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|^p + \frac{1}{p^*}\int_K \mid \langle y^*, y^{**}\rangle^{p^*} d\mu\right),\\
\leq & C\left(\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{m}\left\|\frac{x^j}{\epsilon^{\frac{1}{m}}}\right\|^p + \frac{1}{p^*}\int_K \left|\langle \epsilon y^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*} d\mu\right),\\
\leq & C\left(\frac{1}{p}\left[\frac{\prod_{j=1}^{m}\|x^j\|}{\epsilon}\right]^p + \frac{1}{p^*}\left(\epsilon\left(\int_K \left|\langle y^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\right)^{p^*}\right).\\
\leq & \, C\prod_{j=1}^{m}\left\|x^j\right\|\left(\int_K \left|\langle y^*, y^{**}\rangle\right|^{p^*}\right))^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left|\left\langle T\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right),y^{*}\right\rangle\right| \leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|x^{j}\right\|\left\|y^{*}\right\|_{L_{p^{*}}\left(\mathcal{B}_{Y^{**}},\mu\right)}.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 3.1.1.

Soient $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ *tels que* $p_1 \leq p_2$. *Si* $T \in \mathcal{D}_{p_2}^{m}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$ *alors* T *dans* $\mathcal{D}_{p_1}^{m}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$ *et*

$$d_{p_1}^{m}(T) \leq d_{p_2}^{m}(T).$$

Démonstration. Elle est immédiate par l'inégalité (3.3). □

Théorème 3.1.2. *Soit* $1 < p \leq \infty$. *Soit* $T \in \mathcal{L}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$ *et* T^* *son adjoint. On a* $T \in \mathcal{D}_{p}^{m}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$ *si, et seulement si,* $T^* \in \pi_{p^*}\left(Y^*,\mathcal{L}\left(X_1,\ldots,X_m\right)\right)$ *et on a :* $d_{p}^{m}(T) = \pi_{p^*}\left(T^*\right)$.

Démonstration. Supposons que $T \in \mathcal{D}_{p}^{m}\left(X_1,\ldots,X_m;Y\right)$. Par (3.4) on a

$$\left|\left\langle T\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right),y^{*}\right\rangle\right| \leq d_{p}^{m}(T)\prod_{j=1}^{m}\left\|x^{j}\right\|\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}}\left|y^{**}\left(y^{*}\right)\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

pour tout $x^j \in X_j (1 \leq j \leq m)$ et $y^* \in Y^*$. En prenant le supremum sur toutes les séquences $(x^j)_{1\leq j\leq m}$ avec $\|x^j\| \leq 1$, on obtient

$$\sup_{\|x^1\|\ldots,\ldots,\|x^m\|\leq 1}\left|T^*\left(y^*\right)\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right)\right| \leq d_{p}^{m}(T)\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^{*}}}\left|y^{**}\left(y^{*}\right)\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

puis

$$\left\|T^*\left(y^*\right)\right\| \leq d_{p}^{m}(T)\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}}\left|y^{**}\left(y^{*}\right)\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

D'après le théorème de Domination Pietsch, $T^* \in \pi_{p^*}\left(Y^*,\mathcal{L}\left(X_1,\ldots,X_m\right)\right)$ et on a $\pi_{p^*}\left(T^*\right) \leq d_{p}^{m}(T)$. L'inverse, supposons que $T^* \in \pi_{p^*}\left(Y^*,\mathcal{L}\left(X_1,\ldots,X_m\right)\right)$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\left\langle T\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right),y^{*}\right\rangle\right| &= \left|T^*\left(y^*\right)\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right)\right|,\\ &\leq \left\|T^*\left(y^*\right)\right\|\prod_{j=1}^{m}\left\|x^{j}\right\|.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Domination pour Pietsch les opérateur multilinéaire p^*-sommant, nous obtenons :

$$\left|\left\langle T\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right),y^{*}\right\rangle\right| \leq \pi_{p^*}\left(T^*\right)\prod_{j=1}^{m}\left\|x^{j}\right\|\left(\int_{\mathcal{B}_{Y^{**}}}\left|y^{**}\left(y^{*}\right)\right|^{p^*}d\mu\left(y^{**}\right)\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

ainsi par (3.4) T et Cohen fortement p^*-sommant $d_{p}^{m}(T) \leq \pi_{p^*}\left(T^*\right)$. □

Bibliographie

[1] Achour, D. and L. Mezrag, On the Cohen strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal.App.327,550-563(2007).

[2] Apiola, H. Duality between spaces of p-summable sequences, (p ; q)-summing operators and characterizations of nuclearity. Math. Ann. 219 (1976), 53-64.

[3] Brezis, H. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Dunod, 1983.

[4] Cohen,J. S. Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates. Math. Ann. 201 (1973), 177-200.

[5] Defant and K, A. Floret, Tensor norms and operator ideals. North-Holland Mathematics Studies, 1993.

[6] Diestel, J. H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators. Cam- bridge University Press, 1995.

[7] Geiss, S. Ideale multilinearer Abbildungen. Diplomarbeit, 1984.

[8] Pietsch, A. Absolut p-summierende in Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28 (1967), 333-353.

[9] Pietsch, A. Ideals of multilinear functionals (designsof a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leibzig), Teubner-Texte, 185-199, (1983).

[10] Ramanujan,S. M. Schock. E, Operator ideals and spaces of bilinear operators, Lin Multilin. Alg.18,307-318(1985).