

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LAGHOUAT



DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Option :Analyse Fonctionnelle Et EDP

THEME DU PROJET :

**Caractérisation concrète des espaces de Besov localisés
uniformes et composition dans les espaces de Besov**

Présenté par :

Mr. Laoudji Elaid

Dirigé par:

Mr. Salah Eddine ALLAOUI

DEVANT LES MEMBRES DU JURY

Mme. Bendaoud Zohra
M. Salah Eddine Allaoui
M. Abdelkader Mokhtari
M. BentobacheMohand

M.C.A, Université de Laghouat
Professeur, Université de Laghouat
Professeur, Université de Laghouat
M.C.A, Université de Laghouat

Présidente
Rapporteur
Examineur
Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019-2020

Remerciements

Avant toute chose, je remercie mon Dieu De nous donné la force

Et le courage d'aboutir à ce travail.

Je remercie notre encadreur Salah Eddine Allaoui.

Je remercie tous les membres de jury d'avoir accepter de présider

et examiner notre travail.

Merci pour toutes les personnes qui nous ont aidée

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à la caractérisation concrète des espaces de Besov localisés uniformes, on établit que les espaces , sont décrits sans utiliser une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et support compact pour $s > 0$. Dans une autre partie on s'intéresse aux opérateurs de composition sur certains espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. On établit la nécessité de la condition de Lipschitz.

Mots-clés : Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Opérateurs de composition, localisation uniformes.

Abstract

In this work we are interested in the concrete characterization of uniform localized Besov spaces, we establish that spaces, are described without using a class function with \mathcal{C}^∞ and compact support for $s > 0$. In another part, we are interested in compositional operators in some areas of Besov and Lizorkin-Triebel. The necessity of the condition of Lipschitz is established.

Keywords: Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Composition operators, localisation uniformes.

Table des matières

Introduction	1
Notation	4
1 Définition et propriétés des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel	6
1.1 La décomposition de Littlewood-Paley	6
1.1.1 Séries de Littlewood-Paley	6
1.2 Une variante de la décomposition de Littlewood-Paley	8
1.3 Opérateur de différences finies	9
1.4 Décomposition du produit $f.g$	10
1.5 Interpolation	10
1.6 Inégalités classiques	11
1.7 Localisation d'un espace de distribution	14
1.8 Espaces de Besov	15
1.8.1 Définition et proposition des espaces de Besov	15
1.8.2 Les espaces homogènes	17
1.8.3 Les espaces non homogènes	18
1.8.4 Espace de Besov généralisé	19
1.8.5 Les espaces à valeur vectorielle	19
1.9 Espace de Lizorkin-Triebel	20

1.9.1	Définition et proposition des espaces de Lizorkin-Triebel . . .	20
1.9.2	Les espaces homogènes	21
1.9.3	Les espaces non homogènes	22
1.9.4	Espace de Lizorkin-Triebel généralisé	23
1.9.5	Les espaces à valeur vectorielle	23
1.10	Exemple de fonctions dans l'espace de Besov	23
2	Composition dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel	26
2.1	Composition dans les espaces de Besov	27
2.1.1	Normes des produits	29
3	Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel et composition dans l'espace de Besov	44
3.1	Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel . . .	45
3.1.1	Généralités sur la localisation uniforme	45
3.1.2	Définitions des espaces fonctionnels	48
3.1.3	Énoncés des théorèmes	50
3.2	Propriété de composition dans l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$	55
3.2.1	Définitions des espaces de Besov	56
3.2.2	Propriétés des espaces de Besov	57
4	Une propriété de composition dans certains espaces de Lizorkin-Triebel localisé uniforme	65
4.1	Quelques fonctions de test	66
4.2	Résultats préliminaires	68
4.3	Preuve du Théorème 4.0.1 et du Théorème 4.0.2	70
	Références	III

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude de localisations uniformes et composition dans les espace de Besov et Lizorkin-Triebel qui est un sujet intéressant et d'actualité. Cette étude utilise des techniques de plusieurs parties d'analyse pour prouver les résultats présentés à savoir la théorie des opérateurs, l'analyse fonctionnelle, la théorie de la mesure.

L'étude des localisations uniformes et composition dans les espace de Besov a été l'objet d'études de plusieurs mathématiciens, voir par exemple les articles [3], [4], [15], [13].

Notre travail est divisé en quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre, on présente quelques propriétés sur les séries de Littlewoodpaley, les espaces de Besov, les espaces de Lizorkin-Triebel, inégalités classiques et nous terminerons par un exemple d'une fonction dans l'espace de Besov.
- Dans le deuxième chapitre, dans cette partie selon la preuve théorème située dans [3], en tenant compte $n = 1$ on obtient :

Théorème 01 On suppose $s = \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. On suppose de plus que les entiers k, n vérifient $k = n = 1$. Si la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ opère sur $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ alors f' appartient à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$, localement uniformément.

- Le troisième chapitre est consacré à la Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel et à des remarques sur la propriété de composition dans l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et dans ce travail, nous avons démontré les trois théorèmes suivants :

Théorème 02 Si $0 < s < 1$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,\mathbb{B}+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (1)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 03 Si $0 < s < 1$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{B}+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (2)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 04 Soient $1 < p \leq q \leq \infty$, $(d + \frac{1}{p}) < s < d + 1$, pour un entier $d \geq 1$. Pour toute fonction $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, on a

$$T_f(g) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

De plus il existe une constante $c = c(s, p, q) > 0$ tel que

$$\|T_f(g)\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} (1 + \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})})^{s-(1/p)}.$$

- Dans le quatrième chapitre on étudie la propriété de composition dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel localisés uniformes, où on a démontré les théorèmes suivants :

Théorème 05 Soient $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$

dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$, alors f est localement lipschitzienne.

Théorème 06 Soient $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu} \not\subseteq L_\infty(\mathbb{R})$ (autrement dit : $L_\infty(\mathbb{R})_{lu} = L_\infty(\mathbb{R})$). Si T_f envoie $F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$, alors f est globalement lipschitzienne.

Notations

- Nous notons $E_{p,q}^s(\mathbb{R}) := B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ ou $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel.
- Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction, le support de f est $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, est appelé espace des distributions sur \mathbb{R} .
- \mathcal{S} est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à décroissance rapide sur \mathbb{R} .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, est appelé espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} .
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sa transformée de fourier est :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un espace de fonctions continues et à support compact.
- $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$ est le produit de convolution des fonctions f et g .
- Le symbole \hookrightarrow désigne l'inclusion avec continuité de l'injection canonique.
- Pour une distribution f définie sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$, on définit l'opérateur de translation par

$$\tau_a f(x) = f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Nous notons T_f l'opérateur de composition, défini par $T_f(g) = f \circ g$.
- $Q = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\}$ est l'intervalle de centre a et de rayon $r > 0$.
- $Q^+ = [0, \frac{1}{2}]$.
- $E_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ l'espace de Besov ou Lizorkin-Triebel localisée uniforme.
- Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, +\infty]$, $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R})$ désigne l'espace des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{R}

$$\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}) = E_{p,q}^s(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}).$$

- Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par \mathcal{P}_m des fonctions polynomiales sur \mathbb{R} , de degré $\leq m$.
- Pour tout $p \in [1, \infty]$, toute fonction mesurable f sur \mathbb{R} et tout $t > 0$, on pose

$$\omega_p(f, t) = \sup_{h \in tQ} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$\eta_p(f, t) = \sup_{h \in tQ} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Chapitre 1

Définition et propriétés des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

Dans ce chapitre, nous aborderons quelques concepts de base et les caractéristiques de chacun des espaces de Besov, espaces de Lizorkin-Teirbel, Littlewood-paley, Besov homogènes, Lizorkin-triebel homogènes, Besov généralisé, Lizorkin-Teirbel généralisé et certaines propriétés importantes.

1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

1.1.1 Séries de Littlewood-Paley

Les séries de Littlewood-Paley jouent un rôle important dans la définition des espaces de Besov homogènes et non homogènes. Nous allons rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit une fonction ρ paire $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \rho \leq 1$. Autrement dit ρ est une fonction de classe C^∞ , positive, radiale sur \mathbb{R}^n

i.e : $\rho(\xi) = \phi(|\xi|)$, avec $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |\xi| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

On définit :

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La fonction $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est telle que :

1. $\text{supp} \gamma \subset \left\{ \xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2} \right\}$.
2. $\gamma(\xi) \geq 0$ pour $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{2}{3}$.
3. $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

On a : $\rho(\xi) = 1 - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi)$, et on obtient la fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est telle que

$$\text{supp} \rho \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{3}{2} \right\} \quad (1.1)$$

Donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a la partition de l'unité non homogène suivante :

$$\rho(\xi) + \sum_{j \geq 1} \gamma(2^{-j}\xi) = 1.$$

Si $\xi \neq 0$, alors $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1$ est appelée partition de l'unité homogène. A la partition (1.1), on associe une suite d'opérateurs de convolutions notés :

$$Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$S_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

définis par

$$Q_j f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-j}\cdot)) * f(x) \quad j \geq 1$$

$$S_k f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-k}\cdot)) * f(x) \quad k \geq 0,$$

où

$$\mathcal{F}(Q_j f)(\xi) = \gamma(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi) \quad j \geq 1$$

$$\mathcal{F}(S_k f)(\xi) = \rho(2^{-k}\xi) \widehat{f}(\xi) \quad k \geq 0.$$

avec la notation : $Q_0 = S_0$

Si dans la relation (1.1) on change ξ par $2^{-j}\xi$ et on multiplie par $\widehat{f}(\xi)$, on obtient

$$\widehat{f}(\xi)\rho(2^{-k}\xi) + \widehat{f}(\xi) \sum_{j \geq k+1} \gamma(2^{-j}\xi) = \widehat{f}(\xi). \quad (1.2)$$

En appliquant l'application \mathcal{F}^{-1} sur (1.2), on obtient

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = f. \quad (1.3)$$

Pour $k = 0$, on trouve

$$S_0 f + \sum_{j \geq 1} Q_j f = f.$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est alors l'identité

$$\sum_{j \geq 0} Q_j f = f. \quad (1.4)$$

La série (1.4) converge au sens des distributions tempérées.

de (1.3) et (1.4) alors

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = \sum_{j=0}^k Q_j f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f$$

Donc

$$S_k f = \sum_{j=0}^k Q_j f.$$

Pour toute $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est donnée par

$$f = Q_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f. \quad (1.5)$$

La série (1.5) converge au sens des distributions tempérées.

1.2 Une variante de la décomposition de Littlewood-Paley

Dans certains cas, il est utile de remplacer les fonctions standard γ et φ par des fonctions produits tensoriels. Telle que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ pour toutes fonctions f, g

définies sur \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^{n-m} , on pose

$$(f \otimes g)(t, x) = f(t)g(x). \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}.$$

Définition 1.2.1.

$$\mu_0 = \varphi_m \otimes \varphi_{n-m}, \quad \mu_1 = \varphi_m(2(\cdot)) \otimes \gamma_{n-m}, \quad \mu_2 = \gamma_m \otimes \varphi_{n-m}$$

Alors, nous avons

$$\mu_0(t, x) - \mu_0(2t, 2x) = \mu_1(t, x) + \mu_2(t, x), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}.$$

Nous définissons les opérateurs U_0 et $U_{\alpha,j}$ ($j \geq 1, \alpha = 1,2$) sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par

$$U_{\alpha,j} = \mu_\alpha(2^{-j}D), U_0 = \mu_0(D).$$

Proposition 1.2.1. Soient $1 \leq m < n$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors une distribution tempérée $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\|U_0 f\|_p + \sum_{\alpha=1,2} \left(\sum_{j \geq 1} (2^{sj} \|U_{\alpha,j} f\|_p)^q \right)^{1/q} < +\infty, \quad (1.6)$$

$$\|U_0 f\|_p + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \left(\sum_{j \geq 1} (2^{sj} |U_{\alpha,j} f|)^q \right)^{1/q} \right\|_p < +\infty. \quad (1.7)$$

les expressions ci-dessus sont des normes équivalentes sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ et $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, respectivement.

Démonstration. Voir [1]. □

1.3 Opérateur de différences finies

Pour toute distribution f sur \mathbb{R} et tout $h \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta_h = \tau_{-h} f - f$, on considère aussi les puissances successives de l'opérateur Δ_h définie inductivement par

$$\Delta_h^1 = \Delta_h \text{ et } \Delta_h^{m+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie aisément la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x) &= f(x+h) - f(x), \quad x, h \in \mathbb{R} \\ \Delta_h^m f(x) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \tau_{-kh} f. \end{aligned}$$

1.4 Décomposition du produit $f.g$

Soient f et g deux fonctions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit le produit $f.g$ par :

$$f.g = \lim_{j \rightarrow \infty} (Q_j f).(Q_j g),$$

lorsque la limite existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Interpolation

Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach, $0 < \theta < 1$, on dit que $a \in A_{[\theta]} = (A_0.A_1)_\theta$ si et seulement s'il existe une fonction f défini sur \mathbb{C} telle que

- i) $f(z)$ est analytique sur la bonde $z \in \mathbb{C}$ $0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1$ et à valeur dans $A_0 + A_1$, continue et bornée sur la bonde $z \in \mathbb{C}$ $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$.
- ii) $f(k + it)$ (où $k = 0, 1$) continue sur A_k tel que tend 0 si $|t| \rightarrow +\infty$.
- iii) $a = f(\theta)$.

On munit $A_{[\theta]}$ par la norme

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf_f \max(\sup \|f(iy)\|_{A_0}, \sup \|f(1 + iy)\|_{A_1})$$

Proposition 1.5.1. $A_{[\theta]}$ est un espace de Banach.

Démonstration. Voir [15]. □

1.6 Inégalités classiques

Proposition 1.6.1. (Inégalité de Hölder)

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ pour $f \in L_p(\mathbb{R})$ et $g \in L_q(\mathbb{R})$ alors

$$f \cdot g \in L_r(\mathbb{R}),$$

et

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Proposition 1.6.2. (Inégalité de Young)

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors pour toute fonction $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ on a

$$f * g \in L_r(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. On fixe $g \in L_q(\mathbb{R})$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$, on a

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(y))^{\frac{1}{q}}g(x-y)(f(y))^{\frac{1}{q'}}dy \end{aligned}$$

Alors

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}}|g(x-y)||f(y)|^{\frac{1}{q'}}dy,$$

par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|Tf(x)|^q \leq \|f\|_1^{\frac{q}{q'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|^q dy,$$

donc

$$\|Tf\| \leq \|g\|_q \|f\|_1.$$

D'autre part l'inégalité de Hölder, donne

$$|Tf(x)| \leq \|g\|_q \|f\|_{q'}.$$

En appliquant le théorème de Riesz-Thorin on obtient

$$\begin{aligned} T &: L_1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n) \\ &: L_{q'}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Il vient $T : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_r(\mathbb{R}^n)$, avec $\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$, $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}$, $\theta \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'} &\Rightarrow \frac{1}{p} = \theta + (1+\theta)\left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{p} = \theta + 1 - \frac{1}{q} - \theta + \frac{\theta}{q} \\ &\Rightarrow \frac{1}{p} = +1 - \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q} \\ &\Rightarrow \frac{\theta}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.6.3. (Inégalité de Minskowski)

Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour toutes fonctions mesurables $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Démonstration. On démontre d'abord l'inégalité de Hölder. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Pour tous $x, y \geq 0$ on a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Il s'ensuit que

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq \int_X |fg| d\mu \leq \int_X \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = 1.$$

Montrons maintenant l'inégalité de Minkowski. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right\}. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique immédiatement le résultat recherché. \square

Proposition 1.6.4. (Inégalité de Bernstein)

Soient $1 \leq p \leq r \leq \infty$, il existe $c > 0$ telle que

$$\forall R > 0 \text{ et toute } f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{R}^n),$$

avec

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R \},$$

on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_r \leq c R^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+|\alpha|} \|f\|_p, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$, on pose

$$\phi_R(\xi) = \phi\left(\frac{\xi}{R}\right),$$

alors :

$$\hat{f} = \phi_R \hat{f},$$

et :

$$f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1} \phi_R)^{(\alpha)} * f.$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|(\mathcal{F}^{-1}\phi_R)^{(\alpha)}\|_r \|f\|_p, \text{ avec } 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi_R)^{(\alpha)}(x) = R^n((\mathcal{F}^{-1}\phi)^{(\alpha)}(Rx)),$$

il vient

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\phi_R)^{(\alpha)}\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \|(\mathcal{F}^{-1}\phi)^{(\alpha)}\|_r.$$

Ce qui donne le résultat. □

1.7 Localisation d'un espace de distribution

Définition 1.7.1. Soit E un $E.B.D$ sur \mathbb{R}^n . On dit qu'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ appartient localement à E si $\phi f \in E$ pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des telles distributions est notée E_{loc} .

Proposition 1.7.1. Soit E un $E.B.D$ sur \mathbb{R}^n , si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ module et si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $f \in E_{loc}$.
- (ii) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que $(\tau_a \varphi_0) f \in E$ pour toute $a \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Pour toute $a \in \mathbb{R}^n$, il existe une boule ouverte B , contenant a et $g \in E$ tels que $g|_B = f|_B$.

Un $E.B.D$ E est isométriquement invariant par translation, si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$. Si E est plus un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module on a la propriété suivante

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in \mathbb{R}^n, \quad \|\tau_a \phi\|_{M(E)} = \|\phi\|_{M(E)}. \quad (1.8)$$

Démonstration. Voir [3]. □

Proposition 1.7.2. Soit E un $E.B.D$ sur \mathbb{R}^n . Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ module, alors l'opérateur linéaire $f \mapsto \phi f$ est borné sur E , pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Sous les hypothèses de la Proposition 1.7.2, on posera :

$$\|\phi\|_{M(E)} = \sup\{\|\phi f\|_E : f \in E, \|f\|_E = 1\}.$$

Démonstration. Voir [3]. □

Proposition 1.7.3. Soit E un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module isométriquement invariant par translation. Pour toute distribution f , les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) Il existe une fonction positive non nulle $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que $(\tau_a \varphi_0) f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_E < +\infty.$$

- (ii) Pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\tau_a \phi) f \in E$ pour toute $a \in \mathbb{R}^n$, et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \phi) f\|_E < +\infty.$$

Définition 1.7.2. Un espace de Banach de distributions ($E.B.D$) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est un sous espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ muni d'une norme complète $\| - \|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soit continue.

1.8 Espaces de Besov

1.8.1 Définition et proposition des espaces de Besov

Définition 1.8.1. Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$, l'espace de Besov noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} < \infty$ où

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \begin{cases} (\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \|Q_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} 2^{sk} \|Q_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.8.2. Soient $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, +\infty]$. l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|Q_j f\|_p)^q \right)^{1/q} < +\infty.$$

Proposition 1.8.1. Soient ℓ un entier, et $p, q \in [1, \infty]$, si $0 < s < \ell$, alors l'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^\ell f(x)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Voir [16]. □

Proposition 1.8.2. Soit $s > 0$, alors une distribution $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ si est seulement si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_j f \in B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ pour toute $j = 1, \dots, n$. De plus l'expression

$$\|f\|_p + \sum_{j=1}^n \|\partial_j f\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^n)},$$

est une norme équivalente dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir [2]. □

Proposition 1.8.3. Soit $s \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Voir [17]. □

Proposition 1.8.4. - Soient $s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors

$$B_{p,\min(p,q)}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,\max(p,q)}^s(\mathbb{R}^n),$$

- Soient $-\infty < \sigma < s < \infty$ et $1 \leq p, r, t \leq \infty$, alors

$$B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,t}^\sigma(\mathbb{R}^n),$$

- soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq t \leq \infty$ et $1 \leq p \leq \infty$, alors

$$B_{p,r}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,t}^s(\mathbb{R}^n),$$

- Soient $1 \leq p_0 < p \leq \infty$ et $s - \frac{n}{p} \geq s_0 - \frac{n}{p_0}$, alors

$$B_{p_0,q}^{s_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n),$$

- soient $s > \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$ et $1 \leq p < \infty$ ou $s = \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$ et $q \leq r$, alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Voir [2]. □

Définition 1.8.3. Soit $B_{p,q}^s$ est l'espace de Besov. On dit que $B_{p,q}^s$ est une algèbre de Banach si $B_{p,q}^s \cdot B_{p,q}^s \hookrightarrow B_{p,q}^s$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute f et g appartenant à $B_{p,q}^s$ on a

$$\|f \cdot g\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s} \cdot \|g\|_{B_{p,q}^s}.$$

Proposition 1.8.5. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- $B_{p,q}^s$ est une algèbre
- $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $s > n/p$ ou $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq 1$ et $s = n/p$.

1.8.2 Les espaces homogènes

Définition 1.8.4. Soient $0 < s < 1$, $p, q \in [1, +\infty]$, alors l'espace de Besov homogènes $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_0^{+\infty} (t^{-s} \omega_p(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty. \quad (1.9)$$

Définition 1.8.5. Soient $s > 1$ et m l'entier tel que $m < s \leq m + 1$, alors $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

Ce espace est qualifié d'homogène en raison de l'importante propriété suivante

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s-(n/p)} \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.10)$$

Définition 1.8.6. On dit qu'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0 à l'infini, si on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.8.6. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s < n/p$. Désignons par $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ qui tendent vers 0 au sens des distribution, suivant la définition précédente alors

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{P}_{[s]}.$$

Muni de la norme $\|-\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$, l'espace $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un *E.B.D* sur \mathbb{R}^n , et c'est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module, invariant isométriquement par translation.

Démonstration. Voir [3]. □

1.8.3 Les espaces non homogènes

Définition 1.8.7. Soient $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$, l'espace de Besov inhomogène est

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n),$$

il est muni de la norme

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition 1.8.7. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $0 < s < n/p$. Alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge continûment dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir [3]. □

1.8.4 Espace de Besov généralisé

Définition 1.8.8. Soit $v : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et $0 < p, q \leq \infty$, l'espace de Besov généralisé noté $B_{p,q}^v(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_{B_{p,q}^v(\mathbb{R})} < \infty$, où

$$\|f\|_{B_{p,q}^v(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (v(2^{-k}) \|Q_k f\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \sup_{k \geq 0} v(2^{-k}) \|Q_k f\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.8.5 Les espaces à valeur vectorielle

Définition 1.8.9. On désigne par $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ l'ensemble des fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)), \end{aligned}$$

pour lesquelles les fonctions coordonnées f_1, \dots, f_k appartiennent à $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, la norme de f dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ étant définie par $\left(\sum_{j=1}^k \|f_j\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.8.10. Pour $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, on définit l'espace $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{R}^m , f telles que

$$\|f\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} + \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} < +\infty.$$

On pose $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1.9 Espace de Lizorkin-Triebel

1.9.1 Définition et proposition des espaces de Lizorkin-Triebel

Définition 1.9.1. Soit $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$, l'espace de Lizorkin-Triebel, noté $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$, est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que :

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} < \infty,$$

où

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |Q_k f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \left\| \sup_{k \geq 0} 2^{sk} |Q_k f| \right\|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.9.2. Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$, l'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sjq} |Q_j f|^q)^{1/q} \right) \right\|_p < +\infty.$$

Proposition 1.9.1. Soient ℓ un entier, et $q \in [1, \infty]$, et $1 \leq p < \infty$ si $0 < s < \ell$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel $F_p^{s,q}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées f vérifiant

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \left\| \left(\int_0^1 t^{-s-n} \left(\int_{|h| \leq t} |\Delta_h^\ell f(\cdot)|^q dh \right) \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right\| < \infty.$$

Démonstration. Voir [16]. □

Proposition 1.9.2. soit $s \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Démonstration. Voir [2]. □

Proposition 1.9.3. Soient $s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{r}$, $1 \leq q \leq \infty$ et $1 \leq p < r < \infty$, alors

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_r(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.9.3. Soit $F_{p,q}^s$ est l'espace de Lizorkin-Triebel. On dit que $F_{p,q}^s$ est une algèbre si $F_{p,q}^s \cdot F_{p,q}^s \hookrightarrow F_{p,q}^s$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute f et g appartenant à $F_{p,q}^s$ on a

$$\|f \cdot g\|_{F_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s} \|g\|_{F_{p,q}^s}.$$

Proposition 1.9.4. Soient $s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$, alors $F_{p,q}^s$ est une algèbre si et seulement si

$$1 < p < q \leq \infty \text{ et } s > n/p$$

ou

$$1 < q \leq p < \infty \text{ et } s > n((1/p) + (1/q))/2.$$

1.9.2 Les espaces homogènes

Définition 1.9.4. Soient $0 < s < 1, p \in [1, +\infty[, q \in [1, +\infty]$, alors l'espace de Lizorkin-Triebel homogène $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{-s-n} \int_{tQ_n} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad (1.11)$$

Définition 1.9.5. Soient $s > 1$ et m l'entier tel que $m < s \leq m + 1$, alors $\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^n)} < +\infty. \quad (1.12)$$

Ce espace est qualifié d'homogène en raison de l'importante propriété suivante

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall f \in \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \quad \|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{s-(n/p)} \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.13)$$

La fonctionnelle $\| \cdot \|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$ n'est pas une norme, puisque $\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} = 0$ si et seulement si $f \in \mathcal{P}_{[s]}$. Pour éliminer cette difficulté, il est utile d'introduire la notion suivante :

Définition 1.9.6. On dit qu'une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tend vers 0 à l'infini, si on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 1.9.5. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s < n/p$. Désignons par $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ qui tendent vers 0 au sens des distribution, suivant la définition précédente, alors

$$\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{P}_{[s]}.$$

Muni de la norme $\| - \|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$, l'espace $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est un *E.B.D* sur \mathbb{R}^n , et c'est un $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ -module, invariant isométriquement par translation.

1.9.3 Les espaces non homogènes

Définition 1.9.7. Soient $s > 0$, $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$, l'espace de Lizorkin-triebel inhomogène est

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \cap L_p(\mathbb{R}^n),$$

il est muni de la norme

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_p + \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Proposition 1.9.6. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $0 < s < n/p$. Alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ se plonge continûment dans $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir [3]. □

Proposition 1.9.7. Pour tous $s > 0$, $p, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ ($p < +\infty$ dans le cas de Lizorkin-Triebel), et $\theta \in]0, 1[$, il existe $c > 0$ tel que

$$\forall f \in (L_p \cap F_{p,q_1}^s)(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{B_{p,q_2}^{s\theta}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{F_{p,q_1}^s(\mathbb{R}^n)}^\theta \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}.$$

Démonstration. Voir [3]. □

1.9.4 Espace de Lizorkin-Triebel généralisé

Définition 1.9.8. Soit $v : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel généralisé noté $F_{p,q}^v(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_{F_{p,q}^v(\mathbb{R})} < \infty$, où

$$\|f\|_{F_{p,q}^v(\mathbb{R})} = \begin{cases} (\| \sum_{k=0}^{\infty} (v(2^{-k})|Q_k f|)^q)^{\frac{1}{q}} \|_p, & \text{pour } q \neq \infty, \\ \| \sup_{k \geq 0} v(2^{-k})|Q_k f| \|_p, & \text{pour } q = \infty. \end{cases}$$

1.9.5 Les espaces à valeur vectorielle

Définition 1.9.9. On désigne par $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ l'ensemble des fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x)). \end{aligned}$$

Pour lesquelles les fonctions coordonnées f_1, \dots, f_k appartiennent à $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, la norme de f dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ étant définie par $\left(\sum_{j=1}^k \|f_j\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.9.10. Pour $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, +\infty]$, on définit l'espace $\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ comme l'ensemble des distributions tempérées à valeurs dans \mathbb{R}^m , f telles que :

$$\|f\|_{\varepsilon_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} + \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} < +\infty.$$

On pose $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1.10 Exemple de fonctions dans l'espace de Besov

Exemple 1.10.1. Si $f = \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (la masse de Dirac)

$$Q_j f = \langle f, \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x - \cdot)) \rangle ,$$

alors

$$\begin{aligned} Q_j \delta &= \langle \delta, \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x - \cdot)) \rangle \\ &= \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j(x - 0)) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j x) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|Q_j \delta\|_p &= 2^{nj} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}^{-1} \gamma(2^j x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{nj(1-\frac{1}{p})} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}^{-1} \gamma(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{nj(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{F}^{-1} \gamma\|_p, \end{aligned}$$

Alors

$$\|Q_j \delta\|_p = c 2^{nj(1-\frac{1}{p})}, \quad 0 < p \leq \infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \|Q_j \delta\|_p &= c 2^{nj(1-\frac{1}{p})} \\ 2^{sj} \|Q_j \delta\|_p &= c 2^{(s+n(1-\frac{1}{p}))j} \\ \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|Q_j \delta\|_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} &= c \left(\sum_{j \geq 0} 2^{(s+n(1-\frac{1}{p}))jq} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{(s+n(1-\frac{1}{p}))jq} \right)^{\frac{1}{q}}$ converge

1. Si $s + n \left(1 - \frac{1}{p}\right) < 0$ alors $s < n \left(\frac{1}{p} - 1\right)$, alors $\delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.
2. Si $s + n \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$ alors $s = n \left(\frac{1}{p} - 1\right)$, alors

$$\begin{aligned} 2^{sj} \|Q_j \delta\|_p &= c \quad \forall j \geq 0. \\ &= \sup_{\forall j \geq 0} 2^{sj} \|Q_j \delta\|_p \\ &= \|\delta\|_{B_{p,q}^s}, \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \in B_{p,q}^s \quad \text{Si} \quad s < n \left(\frac{1}{p} - 1 \right), 1 \leq p, q \leq \infty. \\ \delta \in B_{p,q}^s \quad \text{Si} \quad s = n \left(\frac{1}{p} - 1 \right), 1 \leq p \leq \infty, q = \infty. \end{array} \right.$$

Chapitre 2

Composition dans les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

On considère les opérateurs de composition $T_f := f \circ g$ agissant sur les espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel à valeurs vectorielles. On suppose que les entiers, $p, q \in [1, +\infty]$ et que $s = \frac{1}{p}$. Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, alors f' appartient localement uniformément à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$. La même assertion est vraie en remplaçant $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ par $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$. Dans ce chapitre, on abordera la démonstration de la théorie suivante :

Théorème 2.0.1. [3] On suppose $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. On suppose de plus que les entiers k, n vérifient $1 \leq k \leq n$. Si fonction $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ opère sur $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ alors ∇f appartient à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, localement uniformément.

On prend $n = k = 1$, où le théorème précédent devient de la forme suivante :

Théorème 2.0.2. On suppose $s = \frac{1}{p}$ et $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Triebel. On suppose de plus que les entiers k, n vérifient $k = n = 1$. Si fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ opère sur $E_{p,q}^s(\mathbb{R})$ alors f' appartient à $E_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$, localement

uniformément .

2.1 Composition dans les espaces de Besov

Lemme 2.1.1. pour tout réel a et tout $q \in]1, +\infty[$, il existe une constante $c = c(a, q) > 0$ telle que

$$\left(\int_0^{+\infty} (t^a h(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \int_0^{+\infty} t^a h(t) \frac{dt}{t},$$

pour toute fonction positive monotone h sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. Voir [3]. □

Lemme 2.1.2. soient $\theta \in]0, 1[$ et $b > 0$. Il existe une fonction k , de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans lui-même, telle que

$$\forall a > 0, \forall t > 0 : (t \leq a(1 + bt^\theta) \Leftrightarrow t \leq k(a)).$$

Démonstration. Il suffit d'observer que la fonction

$$u(t) = t(1 + bt^\theta)^{-1},$$

est continue, strictement croissante, de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans lui-même, et qu'elle vérifie $u(0) = 0, \quad u(+\infty) = +\infty$.

On montre que u est continue, on a

$$u(t) = \frac{t}{1 + bt^\theta},$$

On pose $f(t) = t$, f est continue sur $]0, +\infty[$.

On pose,

$$g(t) = 1 + bt^\theta,$$

on a aussi g est continue sur $]0, +\infty[$.

Alors $u(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ continue sur $]0, +\infty[$.

croissante

$$u(t) = \frac{t}{1 + bt^\theta},$$

$$u'(t) = \frac{1 + bt^\theta - t(b\theta t^{\theta-1})}{(1 + bt^\theta)^2}.$$

On a $(1 + bt^\theta)^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$.

nous avons $1 + bt^\theta - b\theta t^\theta > 0$, car

$$1 + bt^\theta - b\theta t^\theta = 1 + bt^\theta(1 - \theta) > 0.$$

Puisque $bt^\theta > 0$ et $(1 - \theta) > 0$, alors $u'(t) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Donc $u(t)$ strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$u(0) = 0$ et $u(+\infty) = +\infty$, car

$$u(0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + bt^\theta} = 0,$$

$$u(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1 + bt^\theta} = +\infty.$$

Alors

$$\begin{cases} u(0) &= 0, \\ u(+\infty) &= +\infty \end{cases}$$

□

Lemme 2.1.3. Soit $0 < r < 1$. Soit f une fonction de classe C^1 , à support compact sur \mathbb{R} . Alors la fonction

$$F(x) = \sup_{t>0} t^{-r-1} \int_{tQ} |\Delta_h f(x)| dh,$$

appartient à $L_p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Démonstration. Voir [3].

□

2.1.1 Normes des produits

Définition 2.1.1. Les différences premières et secondes des produits tensoriels obéissent aux règles de calcul suivantes. Pour tous x et h , éléments de \mathbb{R} , on a

$$(\Delta_h f.g)(x) = f(x+h).g(x) - (f.g)(x). \quad (2.1)$$

$$(\Delta_h^2 f.g)(x) = \Delta_h f(x+h).g(x) - \Delta_h f(x).g(x). \quad (2.2)$$

Proposition 2.1.1. Si f, g sont des fonctions définies respectivement sur \mathbb{R} , on a

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})} |g| \leq \|f.g\|_{\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R})}. \quad (2.3)$$

Démonstration. À tout $x \in \mathbb{R}$, on associe $\bar{x} := x \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. On a $(f.g)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}.g$. Les formules (2.1) et (2.2) se simplifient en

$$\forall h \in \mathbb{R} : \Delta_h^r ((f.g)^{(\bar{\alpha})}) = \Delta_h^r (f^{(\alpha)}) \cdot g. \quad (2.4)$$

pour $r = 1, 2$. Du théorème de Fubini et de la formule (2.4), il résulte que

$$\forall h \in \mathbb{R} : \|\Delta_h^r f^{(\alpha)}\|_{L_p(\mathbb{R})} |g| = \|\Delta_h^r ((f \times g)^{(\bar{\alpha})})\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

En prenant la borne supérieure pour les $h \in tQ$, on obtient

$$\forall t > 0 : \omega_p (f^{(\alpha)}, t) |g| \leq \omega_p ((f \times g)^{(\bar{\alpha})}, t)$$

. La même estimation est satisfaite par η_p . L'inégalité (2.3) en résulte aussitôt. \square

Proposition 2.1.2. On suppose $s > 0$ non entier, $1 < p < +\infty$. Soit $m = [s]$.

Il existe une constante $c = c(p) > 0$ telle que, pour toutes fonctions f, g définies respectivement sur \mathbb{R} , on a

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R})} |g| \leq c \left(\|f \times g\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R})} + \|f\|_{\dot{W}_p^m(\mathbb{R})} |g| \right). \quad (2.5)$$

Démonstration. On utilisera l'opérateur de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) := \sup_{t>0} t^{-1} \int_{[-t,t]} |f(x+h)| dh,$$

et l'inégalité maximale

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq c_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (2.6)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha| = m$. La relation (2.1) nous conduit à l'inégalité $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} + \mathcal{C}$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{m-s-1} \int_{[-t,t]} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x)g(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \mathcal{B} &:= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{m-s-1} \int_{[-t,t]} |\Delta_h(f^{(\alpha)} \times g)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \mathcal{C} &:= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{m-s-1} \int_{[-t,t]} |f^{(\alpha)}(x+h)g(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

Une double application du théorème de Fubini nous donne

$$\mathcal{A} = |g|_{L_p(\mathbb{R})} \times \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{m-s-1} \int_{tQ} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

pour estimer \mathcal{C} , on observe que

$$\begin{aligned} t^{m-s-1} \int_{tQ} |f^{(\alpha)}(x+h)\Delta_h g(x)| dh &= \left(t^{-1} \int_{tQ} |f^{(\alpha)}(x+h)\Delta_h| dh \right) \left(t^{m-s} \int_{tQ_0} |\Delta_h g(x)| dh \right) \\ &\leq M_1(f^{(\alpha)})(x) \left(t^{m-s} \int_{tQ_0} |\Delta_h g(x)| dh \right). \end{aligned}$$

En appliquant (2.6), on conclut que

$$\mathcal{C} \leq c \|f^{(\alpha)}\|_{L_p(\mathbb{R})} |g|.$$

En sommant sur tous les α , on obtient l'inégalité (2.5). \square

Proposition 2.1.3. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $1 < p < +\infty$. Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. Il existe une constante $c = c(p, \varepsilon) > 0$ telle que, pour toutes fonctions f, g définies respective-

ment sur \mathbb{R} , on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{F}_{p,q}^{m+1}(\mathbb{R})} |g| &\leq c \left(\|f \times g\|_{\dot{F}_{p,q}^{m+1}(\mathbb{R})} + \|f\|_{\dot{W}_p^m(\mathbb{R})} |g| \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{m+\varepsilon}(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{t>0} t^{\varepsilon-1} \int_{tQ_0} |\Delta_h g(x)| dh \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha| = m$. En utilisant la relation (2.2), on obtient

$$|f^{(\alpha)}| |g| \leq c \|(f \times g)^{\bar{\alpha}}\|_{\dot{F}_{p,q}^1(\mathbb{R})} + \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{-2} \int_{tQ} |f^{(\alpha)}(x+2h) \Delta_h^2 g(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \mathcal{B} &:= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{-2} \int_{tQ} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h) \Delta_h g(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

pour estimer \mathcal{A} , on procède comme pour estimer \mathcal{C} dans la preuve de la [Proposition 2.1.2](#) il vient

$$\mathcal{A} \leq c \|f^{(\alpha)}\|_{L_p(\mathbb{R})} |g|.$$

pour estimer \mathcal{B} , on utilise le [Lemme 2.1.1](#), ce qui revient à remplacer \mathcal{B} par

$$\mathcal{B}_1 := \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} t^{-2} \int_{tQ} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h) \Delta_h g(x)| dh \frac{dt}{t} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Posons

$$G(x) := \sup_{t>0} t^{\varepsilon-1} \int_{tQ_0} |\Delta_h g(x)| dh.$$

Il vient

$$\mathcal{B}_1 \leq |G| \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} t^{-\varepsilon-1} \int_{tQ} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)| dh \frac{dt}{t} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on pose $|h|_\infty = \max(|h|)$. On a

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} t^{-\varepsilon-1} \int_{tQ} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)| dh \frac{dt}{t} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= (\varepsilon + 1)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)| |h|^{-\varepsilon-1} dh \frac{dt}{t} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq (\varepsilon + 1)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h(f^{(\alpha)})(x+h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |h|^{-\varepsilon-1} dh \\
 &= (\varepsilon + 1)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\Delta_h(f^{(\alpha)})_{L_p(\mathbb{R})}\| |h|^{-\varepsilon-1} dh \right).
 \end{aligned}$$

La dernière expression est estimée par $\|f^{(\alpha)}\|_{\dot{B}_{p,1}^\varepsilon(\mathbb{R})}$, ce qui permet conclure. \square

Dans l'application que nous ferons des deux propositions précédentes, la situation sera plus simple, car on supposera $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Corollaire 2.1.1. Soit $s > 0$, $1 < p < +\infty$. Il existe $\varepsilon > 0$ $c = c(p, \varepsilon) > 0$ et une semi-norme N sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, invariante par translation, tels que, pour toutes fonctions $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\|f\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R})} |g| \leq c \|f \times g\|_{\dot{F}_{p,q}^s(\mathbb{R})} + N(g) \|f\|_{B_{p,1}^{s-\varepsilon}(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Supposons d'abord s non entier. On pose $m = [s]$ et $\varepsilon = s - m$.

On définit la semi-norme N par

$$N(g) := |g|.$$

L'inégalité souhaitée résulte alors de la [Proposition 2.1.2](#) et des plongements classiques :

$$B_{p,1}^{s-\varepsilon} = B_{p,1}^m \hookrightarrow W_m^p \hookrightarrow \dot{W}_m^p.$$

Supposons maintenant s entier. On pose $m = s - 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On définit la semi-norme N par

$$N(g) := |g| + \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sup_{t>0} t^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{tQ_0} |\Delta_h g(x)| dh \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le fait que N soit une semi-norme sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ résulte du [Lemme 2.1.3](#) L'invariance de N par translation se vérifie aisément. L'inégalité souhaitée résulte de [Proposition 2.1.3](#) et des plongements :

$$\begin{aligned} B_{p,1}^{s-\frac{1}{2}} &\hookrightarrow W_p^{s-1} \hookrightarrow \dot{W}_m^p, \\ B_{p,1}^{s-\frac{1}{2}} &= B_{p,1}^{m+\frac{1}{2}} \hookrightarrow \dot{B}_{p,1}^{m+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

du Théorème : le cas des espaces de Besov

Soient donc $s = \frac{1}{p}$, $q > 1$ (dans le cas Besov), $p > 1$ (dans le cas Lizorkin-Triebel) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que T_f envoie $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$. Dans un travail antérieur [1] on a établi que f est lipschitzienne et que f appartient localement à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$. On va maintenant prouver que f' appartient à $B_{p,q}^{s-1}$ localement uniformément.

D'un lemme classique, résulte l'existence de $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_1 \Rightarrow \|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_2, \quad (2.7)$$

Pour toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $2Q$.

Considérons maintenant une suite $(\gamma_\nu)_{\nu \geq 0}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par $2Q$, telle que $\gamma_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\gamma_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = 0, \quad (2.8)$$

On définit la fonction $\phi \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\phi(x) = \psi_n\left(\frac{x}{2}\right)x.$$

Par définition de ψ_n , on a

$$\forall x \in Q : \phi(x) = x. \quad (2.9)$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g_a par

$$g_a(x) = b\phi(2^\nu x) + \gamma_\nu(x)a. \quad (2.10)$$

On peut déterminer $b > 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\forall a \in \mathbb{R} : \|g_a\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_1. \quad (2.11)$$

Il suffit pour cela de définir b par l'égalité

$$2b\|\phi\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = c_1,$$

puis, grâce à la (2.8), de choisir $\nu = \nu(a) \geq 0$ tel que

$$2|a|\|\gamma_\nu\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_1.$$

L'estimation (2.11) résulte alors de la Proposition 1.8.6, compte tenu de la condition

$$s = \frac{1}{p}.$$

On calcule l'image d'un nombre $2^\nu x$ par une fonction ϕ c'est a dire : de la (2.9) et du choix de la fonction γ_ν , pour tout $x \in 2^\nu Q$. Il résulte que :

$$\phi(2^\nu x) = 2^\nu x$$

$$\gamma_\nu(x) = 1$$

De la (2.10) alors

$$g_a(x) = b\phi(2^\nu x) + \gamma_\nu(x)a.$$

par remplacer, on trouve :

$$g_a(x) = b2^\nu x + a,$$

puis on calcule $(f \circ g_a)(x)$, telle que

$$\begin{aligned} (f \circ g_a)(x) &= f(g_a(x)) \\ &= f(b2^\nu x + a), \end{aligned}$$

après ça on dérive la composons de deux fonctions :

$\forall x \in 2^\nu Q$,

$$\begin{aligned} (f \circ g_a)'(x) &= g_a'(x) f'(g_a(x)) \\ &= b2^\nu f'(b2^\nu x + a), \end{aligned}$$

et donc

$$(f \circ g_a)'(x) \psi_k(2^\nu x) = b2^\nu f'(b2^\nu x + a) \psi_k(2^\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

On introduit alors les fonctions

$$\begin{aligned} \mu_a(y) &= f'(y) \psi(b^{-1}(y - a)), \\ \nu_a(y) &= (f \circ g_a)'(b^{-1}(y - 2^{-\nu} a)), \\ \omega_a(y) &= \psi(b^{-1}(y - a)). \end{aligned}$$

On put

$$g_a(x) = y,$$

et on a :

$$\begin{aligned} g_a(x) &= b2^\nu x + a, \\ y &= b2^\nu x + a, \\ y - a &= b2^\nu x, \\ 2^\nu x &= b^{-1}(y - a). \end{aligned}$$

Puis le premier nombre de légalité : (2.12) on a :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (f \circ g_a)'(x)\psi(2^\nu x) = f'(g_a(x))\psi(2^\nu x) \quad (2.13)$$

$$= \mu_a(y), \quad (2.14)$$

et le deuxième nombre parmi les on a

$$\psi(2^\nu x) = \psi(b^{-1}(y - a)) = \omega_a(y), \quad (2.15)$$

et on a :

$$y = b2^\nu x + a$$

$$y_2 = 2^\nu x_2,$$

alors

$$x = b^{-1}(2^{-\nu}y - 2^{-\nu}a),$$

on a :

$$(f \circ g_a)'(x) = (f \circ g_a)'(b^{-1}(2^{-\nu}y_1 - 2^{-\nu}a))$$

$$= v_a(2^{-\nu}y),$$

on obtient

$$(f \circ g_a)'(x) = b2^\nu f'(b2^\nu x + a)$$

$$f'(b2^\nu x + a) = b^{-1}2^{-\nu}(f \circ g_a)'(x),$$

$$f'(b2^\nu x + a) = b^{-1}2^{-\nu}v_a(2^{-\nu}y), \quad (2.16)$$

donc par (2.13) , (2.15) et (2.16) on a :

$$\forall y \in \mathbb{R} : \mu_a(y) = b^{-1}2^{-\nu}v_a(2^{-\nu}y)\omega_a(y). \quad (2.17)$$

Du fait que f appartient localement à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, il résulte que μ_a appartient à $B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$ puisque f est lipschitzienne, on a $f' \in L_\infty$ et

$$\|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq b^{\frac{1}{p}} \|f'\|_\infty \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (2.18)$$

Compte tenu de la Proposition 1.8.6 et de la relation (1.8), appliquée $B = \varepsilon_{p,q}^s$, il existe une constante $C > 0$ tell que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \chi \in \varepsilon_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}) : \|\omega_a \chi\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq C \|\chi\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}. \quad (2.19)$$

Grâce à (2.11), (2.8), et à la Proposition 1.8.7, il vient

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|v_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} < +\infty. \quad (2.20)$$

En combinant la Proposition 2.1.1 et les propriétés (1.10), (2.17) et (2.19), il vient

$$\|\mu_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq \|\mu_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq Cb^{-1} \|v_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}$$

alors

$$\|\mu_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq Cb^{-1} \|v_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}$$

alors la propriété (2.20) nous donne :

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|\mu_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} (Cb^{-1} \|v_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}) \\ &\leq Cb^{-1} \sup_{a \in \mathbb{R}} (\|v_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}) \\ &\leq C' \sup_{a \in \mathbb{R}} (\|v_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}) \\ &\leq \infty. \end{aligned}$$

en combinant propriété à (2.18) , il vient

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} (\|\mu_a\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}) &\leq +\infty, \\ \sup_{a \in \mathbb{R}} (\|f'\psi\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}) &\leq +\infty, \\ \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R})} &\leq +\infty, \\ \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &\leq +\infty. \end{aligned}$$

Preuve du Théorème : le cas des espaces de Lizorkin-Triebel

Soient donc $s = \frac{1}{p}$, $p > 1$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que T_f envoie $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dans $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$. Dans un travail antérieur [1] on a établi que f est lipschitzienne et que f appartient localement à $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$. On va maintenant prouver que f' appartient à $F_{p,q}^{s-1}$ localement uniformément.

D'un lemme classique, résulte l'existence de $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$\|g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_1 \Rightarrow \|f \circ g\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_2, \quad (2.21)$$

pour toute fonction $g \in F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $2Q$.

Considérons maintenant une suite $(\gamma_\nu)_{\nu \geq 0}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par $2Q$ telle que $\gamma_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|\gamma_\nu\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} = 0, \quad (2.22)$$

On définit la fonction $\phi \in D(\mathbb{R})$ par

$$\phi(x) = \psi\left(\frac{x}{2}\right)x.$$

Par définition de ψ , on a :

$$\forall x \in Q : \phi(x) = x. \quad (2.23)$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g_a par

$$g_a(x) = b\phi(2^\nu x) + \gamma_\nu(x)a. \quad (2.24)$$

On peut déterminer $b > 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\forall a \in \mathbb{R} : \|g_a\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_1. \quad (2.25)$$

Il suffit pour cela de définir b par l'égalité

$$2b\|\phi\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} = c_1,$$

puis, grâce à la (2.22), de choisir $\nu = \nu(a) \geq 0$ tel que

$$2|a|\|\gamma_\nu\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c_1.$$

L'estimation (2.25) résulte alors de la Proposition 1.9.5, compte tenu de la condition

$$s = \frac{1}{p}.$$

On calcul l'image d'un nombre $2^\nu x$ par une fonction ϕ c'est à dire : de la (2.23) et du choix de la fonction γ_ν , pour tout $x \in 2^\nu Q$. Il résulte que :

$$\phi(2^\nu x) = 2^\nu x,$$

$$\gamma_\nu(x) = 1.$$

De la (2.24), alors

$$g_a(x) = b\phi(2^\nu x) + \gamma_\nu(x)a.$$

Par remplacer, on trouve :

$$g_a(x) = b2^\nu x + a,$$

puis on calcule

$$(f \circ g_a)(x)$$

telle que

$$\begin{aligned} (f \circ g_a)(x) &= f(g_a(x)) \\ &= f(b2^\nu x + a) \end{aligned}$$

après ça on dérive la composante de deux fonctions :

$$\begin{aligned} \forall x \in 2^\nu Q : \quad (f \circ g_a)'(x) &= g_a'(x) f'(g_a(x)) \\ &= b2^\nu f'(b2^\nu x + a), \end{aligned}$$

et donc

$$(f \circ g_a)'(x) \psi(2^\nu x_1) = b2^\nu f'(b2^\nu x + a) \psi(2^\nu x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

On introduit alors les fonctions

$$\begin{aligned} \mu_a(y) &= f'(y) \psi(b^{-1}(y - a)), \\ \nu_a(y) &= (f \circ g_a)'(b^{-1}(y - 2^{-\nu} a)), \\ \omega_a(y) &= \psi(b^{-1}(y - a)). \end{aligned}$$

on a :

$$g_a(x) = y$$

on obtint :

$$\begin{aligned} g_a(x) &= b2^\nu x + a, \\ y &= b2^\nu x + a, \\ y - a &= b2^\nu x, \\ 2^\nu x &= b^{-1}(y - a). \end{aligned}$$

Puis le premier nombre de légalité (2.26), on a

$$\forall y \in \mathbb{R} : (f \circ g_a)'(x)\psi(2^\nu x) = f'(g_a(x))\psi(2^\nu x) \quad (2.27)$$

$$= \mu_a(y), \quad (2.28)$$

et le deuxième membre parmi les on a donné

$$\psi(2^\nu x) = \psi(b^{-1}(y_1 - a)) = \omega_a(y), \quad (2.29)$$

et on a :

$$y = b2^\nu x + a,$$

alors

$$x = b^{-1}(2^{-\nu}y - 2^{-\nu}a),$$

on obtient

$$\begin{aligned} (f \circ g_a)'(x) &= (f \circ g_a)'(b^{-1}(2^{-\nu}y - 2^{-\nu}a)) \\ &= v_a(2^{-\nu}y), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} (f \circ g_a)'(x) &= b2^\nu f'(b2^\nu x + a) \\ f'(b2^\nu x + a) &= b^{-1}2^{-\nu}(f \circ g_a)'(x) \\ f'(b2^\nu x + a) &= b^{-1}2^{-\nu}v_a(2^{-\nu}y), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donc par (2.27), (2.29) et (2.30) on a :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \mu_a(y) = b^{-1}2^{-\nu}v_a(2^{-\nu}y)\omega_a(y). \quad (2.31)$$

Du fait que f appartient localement à $F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$, il résulte que μ_a appartient à $F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$ puisque f est lipschitzienne, on a $f' \in L_\infty$ et

$$\|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq b^{\frac{1}{p}} \|f'\|_\infty \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R})}. \quad (2.32)$$

Compte tenu de la Proposition 1.9.5 et de la relation (1.8), appliquée $F = \varepsilon_{p,q}^s$, il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \chi \in \varepsilon_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R}) : \|\omega_a \chi\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq C \|\chi\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}. \quad (2.33)$$

Grâce à (2.25), (2.22), et à la Proposition 1.9.6, il vient

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|v_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} < +\infty. \quad (2.34)$$

On utilise à nouveau (2.31) et (2.33), ainsi que le Corollaire 2.1.1. Il existe $\epsilon > 0$ et une constante $c = c(f) > 0$ tels que

$$\forall a \in \mathbb{R} : \|\mu_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \leq c(\|v_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} + \|\mu_a\|_{B_{p,q}^{s-1-\epsilon}(\mathbb{R})}).$$

En combinant la Proposition 1.9.7 et les estimations (2.32) et (2.34), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mu_a\|_{F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &= \|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + \|\mu_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + c(\|v_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} + \|\mu_a\|_{B_{p,q}^{s-1-\epsilon}(\mathbb{R})}) \\ &\leq \|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + c\|\mu_a\|_{B_{p,q}^{s-1-\epsilon}(\mathbb{R})} + c\|v_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + C\|\mu_a\|_{B_{p,q}^{s-1-\epsilon}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On suppose $s - 1 - \epsilon = (s - 1)\theta$

$$\begin{aligned} C\|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + C\|\mu_a\|_{B_{p,q}^{s-1-\epsilon}(\mathbb{R})} &\leq C\|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + C\|\mu_a\|_{B_{p,q}^{(s-1)\theta}(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} + C\|\mu_a\|_{F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}^\theta \|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})}^{1-\theta} \\ &\leq \|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})} (1 + \|\mu_a\|_{F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}^\theta \|\mu_a\|_{L_p(\mathbb{R})}^{-\theta}) \\ &\leq C(1 + \|\mu_a\|_{F_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}^\theta). \end{aligned}$$

Grâce au [Lemme 2.1.2](#) , on en déduit que

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|\mu_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}} C(1 + \|\mu_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})}^\theta) \\ &\leq C \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|\mu_a\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &< +\infty \\ \sup_{a \in \mathbb{R}} \|f'\psi\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &< +\infty \\ \|f'\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R})} &< +\infty \\ \|f'\|_{\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} &< +\infty. \end{aligned}$$

alors f' appartient localement uniformément à $\dot{F}_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})$.

Chapitre 3

Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel et composition dans l'espace de Besov

Ce chapitre est consacré à l'étude sur la Localisation uniforme et la composition dans l'espace de Besov telle que

1. On établit des caractérisations intrinsèques des versions localisées-uniformes des espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, avec $p, q \in [1, +\infty]$, et de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ avec $q \in [1, +\infty]$ et $p \in [1, +\infty[$, quel que soit le nombre réel $s > 0$.
2. On s'intéresse aux opérateurs de composition $T_f(g) = f \circ g$ sur certains espaces de Besov. Nous donnons des conditions suffisantes pour que l'opérateur T_f opère sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$.

3.1 Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel

3.1.1 Généralités sur la localisation uniforme

Un espace de Banach de distributions (*E.B.D.*) sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel E de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ muni d'une norme complète $\| - \|_E$ telle que l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ soit continue.

On dit que l'espace E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module si $\phi f \in E$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in E$. Un *E.B.D.* est isométriquement invariant par translation si $\tau_a f \in E$ et $\|\tau_a f\|_E = \|f\|_E$ pour tout $f \in E$ et tout $a \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.1.1. pour tout $q \in [1, +\infty[$ et tout réel α , il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{2}} t^\alpha u(t) \leq c \left(\int_0^1 (t^\alpha u(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

pour toute fonction positive croissante u sur l'intervalle $]0, 1]$.

Démonstration. Voir [16]. □

Proposition 3.1.1. soient l une entier et $0 < s < l$, alors l'expression

$$\|f\|_p + \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_{p,l}(f,t)}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

est une norme équivalent dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, où

$$\omega_{p,l}(f;t) := \sup_{h \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h^l f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Démonstration. Voir [19]. □

Proposition 3.1.2. Soit E un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module isométriquement invariant par translation. Pour toute distribution f les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une fonction positive non identiquement nulle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\|f\|_{E_{lu}} = \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi) f\|_E < +\infty. \quad (3.1)$$

ii) Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $(\tau_a \phi) f \in E$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \phi) f\|_E < +\infty.$$

Démonstration. Voir [4]. □

Remarque 3.1.1.

1. On dit que f appartient localement uniformément à E , s'il satisfait l'une des deux conditions équivalentes de la [Proposition 3.1.2](#).
l'ensemble de ces distributions est noté E_{lu} .
2. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fonction positive non identiquement nulle, E_{lu} est un *E.B.D.* pour la norme

$$\|f\|_{E_{lu}} := \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi) f\|_E.$$

Remarque 3.1.2.

1. De la preuve de la [Proposition 3.1.2](#), il résulte qu'à équivalence près, la norme de E_{lu} ne dépend pas du choix de la fonction φ .
2. Si E est un *E.B.D.* et m un entier positif, on peut considérer l'espace de Sobolev $W^m(E)$ d'ordre m de base E , à savoir

$$W^m(E) := \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f^{(\alpha)} \in E \text{ pour tout } |\alpha| \leq m\}.$$

$W^m(E)$ est un *E.B.D.* Pour la norme

$$\|f\|_{W^m(E)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_E.$$

Proposition 3.1.3. Si E est un $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ -module, isométriquement invariant par translation, il en est de même pour $W^m(E)$ et on a

$$(W^m(E))_{lu} = W^m(E_{lu}),$$

avec des normes équivalentes.

Démonstration. Voir[4]. □

Proposition 3.1.4. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit I un intervalle ouvert dans \mathbb{R} . Alors une fonction mesurable f sur \mathbb{R} appartient à $L_p(\mathbb{R})_{lu}$ si et seulement si

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty, \quad (3.2)$$

de plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}}$.

Démonstration.

Soit I un intervalle ouvert.

Étape 1

Supposons que f vérifie la propriété (3.2). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction non nulle à support dans l'intervalle I , on obtient

$$\begin{aligned} \|(\tau_a \varphi) f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |(\tau_a \varphi) f|^p dx \right)^{1/p}, \\ &\leq \left(\int_{I+a} |\varphi(x-a)|^p |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\ &\leq \left(\int_{I+a} \|\varphi\|_\infty^p |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.1.2, nous obtient

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi) f\|_{L_p} < +\infty.$$

Alors d'après la [Remarque 3.1.1](#), $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$

Étape 2

Supposons que $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. En choisissant la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de telle sorte que $\varphi(x) = 1$ sur I . On obtient

$$\begin{aligned} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{I+a} |f(x)\varphi(x-a)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{I+a} |f(x)(\tau_a\varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \|(\tau_y\varphi)f\|_p. \end{aligned}$$

□

3.1.2 Définitions des espaces fonctionnels

A toute fonction f et g , définie sur \mathbb{R} et tout $h \in \mathbb{R}$, on associe la fonction $\Delta_h f$, définie par :

$$\Delta_h f := \tau_{-h}f - f; \quad (3.3)$$

$$\Delta_h(fg) = (\Delta_h f)(\tau_{-h}g) + f(\Delta_h g); \quad (3.4)$$

$$\Delta_h^2(fg) = (\Delta_h^2 f)(\tau_{-2h}g) + (\Delta_h^2 g)(\tau_{-h}f) + (\Delta_h f)(\Delta_h g). \quad (3.5)$$

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, et tout ensemble borélien A de \mathbb{R} , toute fonction mesurable f sur \mathbb{R} et tout $t > 0$, on pose

$$\begin{aligned} \omega_{p,A}(f, t) &= \sup_{|h| \leq t} \left(\int_A |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \sup_{|h| \leq t} \left(\int_A |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \\ \eta_{p,A}(f, t) &= \sup_{|h| \leq t} \left(\int_A |\Delta_h^2 f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On note simplement que :

$$\omega_p = \omega_{p,\mathbb{R}},$$

$$\eta_p = \eta_{p,\mathbb{R}}.$$

Définition 3.1.1. Soient $0 < s < 1$, $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$. L'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f vérifiant

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_p(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty.$$

Définition 3.1.2. Soient $s > 1$ et m un entier tel que $m < s \leq m+1$. Alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f telles que $f^{(\alpha)} \in B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})$ pour tout $|\alpha| \leq m$. Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})}.$$

Remarque 3.1.3. Venons-en à la description intrinsèque des espaces localisés-uniformes. On se limitera au cas $0 < s \leq 1$, puisqu'il suffit d'appliquer la [Proposition 3.1.3](#) pour obtenir le cas général. On supposera $p, q \in [1, +\infty]$.

Définition 3.1.3. Soient $0 < s < 1$, $q \in [1, +\infty]$, $1 \leq p < \infty$. L'espace de Lizorkin-Triebel $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f vérifiant :

$$\|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \|f\|_p + \left(\left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)|^q dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Définition 3.1.4. Soient $s > 1$ et m l'entier tel que $m < s \leq m+1$. Alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions f telles que $f^{(\alpha)} \in F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})$ pour tout $|\alpha| \leq m$. Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{F_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R})}.$$

Remarque 3.1.4. Venons-en à la description intrinsèque des espaces localisés-uniformes. On se limitera au cas $0 < s \leq 1$, puisqu'il suffit d'appliquer la [Proposition 3.1.3](#) pour obtenir le cas général. Dans les énoncés suivants I désignera une intervalle fixé de \mathbb{R} . On supposera $p < \infty$ et $q \in [1, +\infty]$.

3.1.3 Énoncés des théorèmes

Dans cette section, nous allons démontrer les résultats suivantes :

Théorème 3.1.1. [4] Si $0 < s < 1$, alors $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (3.6)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Théorème 3.1.2. [4] Si $0 < s < 1$, alors $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} < +\infty. \quad (3.7)$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalente sur $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$.

Preuves des théorèmes

Sans perte de généralité, on peut supposer que I est l'intervalle unité de \mathbb{R} . Dans cette section, on fixe deux fonctions φ_0 et φ_1 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, telles que :

- $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, φ_0 est non identiquement nulle et portée par $I/4$,
- $\varphi_1 = 1$ sur $4I$.

Preuves des Théorème 3.1.1

On utilisera la formule suivante, valable pour tout $h \in \mathbb{R}$ et toutes fonctions f et g sur \mathbb{R} :

$$\Delta_h(f(x)g(x)) = (\Delta_h f(x))(\tau_{-h}g(x)) + f(x)(\Delta_h g(x)). \quad (3.8)$$

Étape 1 :

Soit f une fonction telle que $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. Par la formule (3.8), on a pour tous

$a, h \in \mathbb{R}$ et $|h| \leq t \leq 1/2$ nous avons

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h f(x)(\tau_{-h}(\tau_a \varphi_0)(x)) + f(x)(\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x))|^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h f(x)(\tau_{-h+a} \varphi_0)(x) + f(x)(\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x))|^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|\Delta_h f(x) \varphi_0(x+h-a)|^p + |f(x)|^p |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)|^p) dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h f(x) \varphi_0(x+h-a)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{I+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{1/p} + t \|\varphi'_0\|_{\infty} \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq c \sup_{h \leq t} \left(\int_{I+a} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{1/p} + t \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\
 & \leq c(\omega_{p, I+a}(f, t) + t \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}}).
 \end{aligned}$$

Par la condition $s < 1$, on a donc

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^{1/2} (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_0) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} \sup_{h \leq t} \left(\int_{\mathbb{R}} |\Delta_h f(x)|^p dx \right)^{1/p} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} (c(\omega_{p, I+a}(f, t) + t \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}})) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} c(\omega_{p, I+a}(f, t) + t^{1-s} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}}) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 & \leq c \left(\int_0^{1/2} (t^{-s} \omega_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \left(\int_0^{1/2} (t^{1-s})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}} \\
 & \leq c \left(\left(\int_0^{1/2} (t^{-s} \omega_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}} \right).
 \end{aligned}$$

Par les Proposition 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.4, en déduit

$$\|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \left(\left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p, I+a}(f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R})_{lu}} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} &\leq c \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,I+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \right) \\ &\leq c \left(\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,I+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \right). \end{aligned}$$

Étape 2 :

soit $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$. On voit aussitôt que

$$\Delta_h((\tau_a \varphi_1) f)(x) = \Delta_h f(x), \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ et tout } x \in I + a, \text{ et tout } |h| \leq 1.$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$\omega_{p,I+a}(f,t) \leq \omega_p((\tau_a \varphi_1) f, t),$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq 1$. D'où

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,I+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_1^0 (t^{-s} \omega_p((\tau_a \varphi_1) f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq \|(\tau_a \varphi_1) f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. On peut conclure que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^{-s} \omega_{p,I+a}(f,t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq c_2 \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}}.$$

Preuves du Théorème 3.1.2

Étape 1 :

Soit f une fonction telle que $f \in L_p(\mathbb{R})_{lu}$. Par la formule (3.8) nous avons

$$\begin{aligned}
 & \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \\
 & \leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x) (\tau_{-h}(\tau_a \varphi_0)(x)) + f(x) (\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x))| dh \\
 & \leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x) (\tau_{a-h} \varphi_0)(x) + f(x) (\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x))| dh \\
 & \leq \int_{|h| \leq t} (|\Delta_h f(x) \varphi_0(x + h - a)| + |f(x)| |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)|) dh \\
 & \leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\varphi_0(x + h - a)| dh + \int_{|h| \leq t} |f(x)| |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh \\
 & \leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| \varphi_0(x + h - a) dh + |f(x)| \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \\
 & \leq \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| \varphi_0(x + h - a) dh + |f(x)| \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh.
 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\varphi_0(x + h - a)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\
 & + \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} |f(x)| \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p},
 \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| |\varphi_0(x + h - a)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\int_{I+a} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}
 \end{aligned}$$

$$\leq c \left(\int_{I+a} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}, \quad (3.9)$$

et

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} |f(x)| \int_{|h|\leq t} |\Delta_h(\tau_a \varphi_0(x))| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_{I+a} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s} \|\varphi'_0\|_{\infty} |f(x)| \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\ & \leq c \left(\int_{I+a} (|f(x)|)^q dx \right)^{1/p} \\ & \leq c \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Par la formule (3.9) et (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_0) f)(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\ & \leq c \left(\int_{I+a} \left(\int_0^{1/2} \left(t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(x)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} \\ & + c \left(\int_{I+a} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} < +\infty,$$

alors

$$\begin{aligned} & \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \\ & \leq C \left(\left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \right), \end{aligned}$$

on voit que

$$\begin{aligned} & \sup_{a \in \mathbb{R}} \|(\tau_a \varphi_0) f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R})} \\ & \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} C \left(\left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^1)_{lu}} \right) \\ & \leq C \left(\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h|\leq t} |\Delta_h f(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R})_{lu}} \right). \end{aligned}$$

Étape 2 :

Supposons que $f \in F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$. On voit aussitôt que

$$\Delta_h((\tau_a \varphi_1)f)(x) = \Delta_h f(x), \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ et tout } x \in I + a, \text{ et tout } |h| \leq 1.$$

On a

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(f)(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} \\ & \leq \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h((\tau_a \varphi_1)f)(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_p, \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. On conclut que

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\| \left(\int_0^1 \left(t^{-s-1} \int_{|h| \leq t} |\Delta_h(f)(\cdot)| dh \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{L_p(I+a)} \leq c_3 \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|(\tau_a \varphi_1)f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

3.2 Propriété de composition dans l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$

Notre objectif est ici de donner des conditions suffisantes pour les fonctions qui opèrent par composition à gauche, sur les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, avec $p, q \in [1, +\infty]$. On se limitera la preuve du [Théorème 3.2.1](#), au cas $\frac{1}{p} < d + \frac{1}{p}$. car l'existence de fonctions non triviales opérant sur $B_{p,q}^{d+(1/p)}(\mathbb{R})$, dans le cas où $\frac{1}{p} > d + \frac{1}{p}$, et $d = 1, 2, \dots$, est une question ouverte. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.1. [11] Soient $1 < p \leq q \leq \infty$, $d + \frac{1}{p} < s < d + 1$, pour un entier $d \geq 1$. Pour toute fonction $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et toute fonction $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$, à valeurs réelles, on a

$$T_f(g) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

De plus il existe une constante $c = c(s, p, q) > 0$ tel que

$$\|T_f(g)\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} = \|f \circ g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})} \leq c \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} (1 + \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})})^{s-(1/p)}.$$

Corollaire 3.2.1. Sous les hypothèses du [Théorème 3.2.1](#), si les fonction f_1 et f_2 , à valeurs réelles, appartiennent à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})_{loc}$, il en est de même pour $f_1 \circ f_2$.

3.2.1 Définitions des espaces de Besov

Définition 3.2.1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace $\mathcal{L}_{p,\infty}(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui vérifient

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty,$$

Définition 3.2.2. Soient $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h > 0$, on note $\nu_p(g, h)$ la borne supérieure des nombres

$$\left(\sum_{k=1}^N |g(t_k) - g(t_{k-1})|^p \right)^{1/p},$$

pour toutes les suites $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ telles que $t_k - t_{k-1} \leq h$, pour $k = 1, \dots, N$. On dit que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est à p-variation bornée si

$$\|u\|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}_p(\mathbb{R})} = \sup_{h>0} \nu_p(g, h) < \infty.$$

On désigne par $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_p^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions boréliennes

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

telles que $u' \in \mathfrak{B}\mathfrak{B}_p(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_p^1(\mathbb{R})$ de la semi-norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}_p^1(\mathbb{R})} &:= \|u'\|_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}_p(\mathbb{R})} \\ &:= \sup_{h>0} \nu_p(g, h) \\ &:= \sup_{h>0} \left(\sup \left(\sum_{k=1}^N |g(t_k) - g(t_{k-1})|^p \right)^{1/p} \right) \end{aligned}$$

Définition 3.2.3. Si f est une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} , on définit le module de continuité

$$\Omega_p(f, t) := \left(\int_{\mathbb{R}} \sup_{0 < |h| \leq t} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

3.2.2 Propriétés des espaces de Besov

pour $t > 0$, on dispose de la caractérisation suivante :

Proposition 3.2.1. Pour tous $p > 1$, $\frac{1}{p} < s < 1$, $q \in [1, \infty]$, alors une fonction $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\|f\|_p + \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Omega_p(f, t)}{t^s} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est équivalente à la norme $\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}$.

Théorème 3.2.2. [14] Soit $p \in]1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \dot{B}_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R}) &\hookrightarrow (L_\infty(\mathbb{R}, BV_1\mathbb{R}))_{1/p,p} \\ &= (BV_\infty(\mathbb{R}), BV_1(\mathbb{R}))_{1/p,p} \hookrightarrow BV_1(\mathbb{R}) \hookrightarrow U_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{1/p}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Démonstration. Voir [14]. □

Proposition 3.2.2. Pour tous $p > 1$, $\frac{1}{p} < s < 1$, $q \in [1, \infty]$, il existe $c = c(s, p, q) > 0$ tel que

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{\nu_p(g, h)}{h^{s-(1/p)}} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}, \quad \forall g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}).$$

Démonstration. D'après le théorème de plongement de Peetre [Théorème 3.2.2](#), il existe $c = c(s, p, q) > 0$ tel que

$$\nu_p(g, h) \leq c \|g\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})}, \quad \forall g \in B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R}). \quad (3.11)$$

En raisonnant comme dans la preuve du [Proposition 3.2.2](#), nous obtenons

$$\nu_p(g, h) \leq h^{1-(1/p)} \|g\|_{W_p^1(\mathbb{R})}, \quad \forall h > 0, \quad \forall g \in W_p^1(\mathbb{R}). \quad (3.12)$$

L'inégalité de Hölder, nous donnera

$$\begin{aligned} & |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &= |1(g(t_k) - g(t_{k-1}))| \\ &\leq \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |1|^{1/(1-(1/p))} dx \right)^{1-(1/p)} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |g'(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq (t_k - t_{k-1})^{1-(1/p)} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} |g'(x)|^p dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

pour tout $g \in W_p^1(\mathbb{R})$. Si on définit $\theta \in]0, 1[$ par l'égalité $\theta(1 - (1/p)) = s - (1/p)$, on a

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}) = (B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R}), W_p^1(\mathbb{R}))_{\theta,q},$$

par définition, il existe des familles des fonctions $(u_t)_{t>0}$ et $(v_t)_{t>0}$ telles que $g = u_t + v_t$ et

$$\|u_t\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} + t\|v\|_{W_p^1(\mathbb{R})} \leq 2K(t, g), \quad \forall t > 0,$$

où $t \rightarrow K(t, g)$ est la K-fonctionnelle de g relative au couple $(B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R}), W_p^1(\mathbb{R}))$.

D'après les inégalités [\(3.11\)](#) et [\(3.12\)](#) on a

$$\begin{aligned} \nu_p(g, h) &\leq c\|g\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})}, \quad \forall h > 0, \quad \forall g \in W_p^1(\mathbb{R}) \\ h^{(1/p)-s}\nu_p(g, h) &\leq h^{(1/p)-s}c\|g\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} \\ h^{(1/p)-s}\nu_p(g, h) &\leq h^{(1/p)-s}c\|u_t + v_t\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$h^{(1/p)-s}\nu_p(g, h) \leq h^{(1/p)-s}c \left(\|u_t\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} \right), \quad (3.13)$$

et

$$\begin{aligned}
 \nu_p(g, h) &\leq h^{1-(1/p)} \|g\|_{W_p^1(\mathbb{R})}, \quad \forall h > 0, \quad \forall g \in W_p^1(\mathbb{R}) \\
 h^{(1/p)-s} \nu_p(g, h) &\leq h^{(1/p)-s} h^{1-(1/p)} \|g\|_{W_p^1(\mathbb{R})} \\
 &\leq h^{1-s} \|g\|_{W_p^1(\mathbb{R})} \\
 &\leq h^{1-s} \|u_t + v_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})} \\
 &\leq t^{-1} h^{1-s} t \left(\|u_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})} \right).
 \end{aligned}$$

Donc, on a

$$h^{(1/p)-s} \nu_p(g, h) \leq t^{-1} h^{1-s} \left(t \|u_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})} + t \|v_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})} \right), \quad (3.14)$$

D'après les inégalités (3.13) et (3.14) on a

$$\begin{aligned}
 &h^{(1/p)-s} \nu_p(g, h) \\
 &\leq \left(h^{(1/p)-s} c + t^{-1} h^{1-s} \right) \left((\|u_t\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} + t \|v_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})}) + (\|v_t\|_{B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R})} + t \|u_t\|_{W_p^1(\mathbb{R})}) \right) \\
 &\leq \max(1, c) \left(h^{(1/p)-s} + t^{-1} h^{1-s} \right) (2K(t, g) + 2K(t, g)) \\
 &\leq 4 \max(1, c) \left(h^{(1/p)-s} + t^{-1} h^{1-s} \right) K(t, g) \\
 &\leq c_2 K(t, g) (h^{(1/p)-s} + h^{1-s} t^{-1}),
 \end{aligned}$$

on conclut que

$$h^{(1/p)-s} \nu_{p,m}(g, h) \leq c_2 K(t, g) (h^{(1/p)-s} + h^{1-s} t^{-1}), \quad \forall h, t > 0.$$

Grâce au choix $t := h^{1-(1/p)}$, on a

$$\begin{aligned}
 h^{(1/p)-s} \nu_{p,m}(g, h) &= \frac{\nu_{p,m}(g, h)}{h^{s-(1/p)}} \\
 &\leq c_2 K(h^{1-(1/p)}, h) (h^{(1/p)-s} + h^{1-s} h^{(1/p)-1}) \\
 &\leq c_2 K(h^{1-(1/p)}, h) (h^{(1/p)-s} + h^{(1/p)-s}) \\
 &\leq c_2 2 h^{(1/p)-s} K(h^{1-(1/p)}, h) \\
 &\leq c_3 \frac{K(h^{1-(1/p)}, h)}{h^{s-(1/p)}}.
 \end{aligned}$$

Par intégration, nous avons :

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{\nu_{p,m}(g, h)}{h^{s-(1/p)}} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \leq c_3 \left(\int_0^\infty \left(\frac{K(h^{1-(1/p)}, g)}{h^{s-(1/p)}} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{1/q}.$$

On a

$$\begin{aligned} t &= h^{1-(1/p)} \\ dt &= (1 - (1/p))h^{-1/p} dh \\ dh &= \frac{dt}{(1 - (1/p))h^{-1/p}} \\ h = 0 &\Rightarrow t = 0 \\ h = \infty &\Rightarrow t = \infty. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\nu_{p,m}(g, h)}{h^{s-(1/p)}} \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{1/q} &\leq c_3 \left(\int_0^\infty \left(\frac{K(t, g)}{h^{\theta(1-(1/p))}} \right)^q \frac{\frac{dt}{(1-(1/p))h^{-1/p}}}{h} \right)^{1/q} \\ &\leq c_3 \left(\int_0^\infty \left(\frac{K(t, g)}{t^\theta} \right)^q \frac{dt}{(1 - (1/p))h^{1-(1/p)}} \right)^{1/q} \\ &\leq c_4 \left(\int_0^\infty \left(\frac{K(t, g)}{t^\theta} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq C \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

Preuve du Théorème 3.2.1

Lemme 3.2.1. Soient $p \in [1, +\infty]$, $h > 0$, et $x \rightarrow g(x)$, une fonction analytique réelle. Alors

$$\left(\int_{I_l \setminus [\sup I_l - h, \sup I_l]} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq (a_l)^{1-(1/p)} \Omega_p(f', a_l h).$$

Où le complémentaire de l'ensemble des zéros de g' est la réunion d'une famille $\{I_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts disjoints et $a_l = \sup_{x \in I_l} |g'|$.

Preuve 3.2.1. On a $g_l := g \mid I_l$ est un difféomorphisme de I_l dans $g(I_l)$. posons

$$I'_l := I_l \setminus [\sup I_l - h, \sup I_l] \neq \emptyset,$$

il vient alors

$$|g(g^{-1}(x) + h) - x| \leq a_l h \text{ pour } x \in g(I'_l)$$

où g_l^{-1} la fonction réciproque de g_l , ce qui donne

$$\begin{aligned} (|f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)| dx)^{1/p} &\leq \left(\int_{I'_l} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)| dx \right)^{1/p} \\ &\leq a_l^{1-(1/p)} \left(\int_{\mathbb{R}} \sup_{0 < |t| \leq a_l h} |f'(x+t) - f'(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Venons-en à la preuve du [Théorème 3.2.1](#) dans le cas $d = 1$.

Etape 1 : Par l'hypothèse sur f , nous obtenons

$$\|f \circ g\|_p \leq \|\nabla f\|_\infty \|g\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \Delta_h((f \circ g)')(x) &= \Delta_h(g'(x) f' \circ g(x)) \\ &= g'(x+h) f' \circ g(x+h) - g'(x) f' \circ g(x) \\ &= (g'(x+h) - g'(x) + g'(x)) f' \circ g(x+h) - g'(x) f' \circ g(x) \\ &= (g'(x+h) - g'(x)) f' \circ g(x+h) + g'(x) (f'(x+h) - f'(x)) \\ &= f' \circ g(x+h) \cdot \Delta_h g'(x) + \Delta_h(f' \circ g)(x) \cdot g'(x), \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\nu_p((f \circ g)', h) \leq \|f'\|_\infty \nu_p(g', h) + U(h),$$

où

$$\begin{aligned} U(h) &= \|\Delta_h(f' \circ g) \cdot g'\|_{\infty, p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(g(x+h)) - f'(g(x))|^p |g'(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Etape 2 : Nous définissons les intervalles $(I'_l)_{l > 0}$ suivant le [Lemme 3.2.1](#). La condition $q \geq p$ permettant d'utiliser l'inégalité de Minkowski, et par le [Lemme 3.2.1](#), on

a

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \int_{I'_l} |\Delta_h(f' \circ g)(x)|^p |g'(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \int_{I'_l} |(f'(g(x+h)) - f'(g(x)))|^p |g'(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \left(\left(\int_{I'_l} |(f'(g(x+h)) - f'(g(x)))|^p |g'(x)|^p dx \right)^{1/p} \right)^p \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l (a_l^{1-(1/p)} \Omega_p(f', a_l h))^p \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l a_l^{p-1} \Omega_p^p(f', a_l h) \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\sum_l \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} a_l^{p-1} \Omega_p^p(f', a_l h) \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{p/q} \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Posons

$$a_l h = t$$

$$h = \frac{t}{a_l}$$

$$dh = \frac{dt}{a_l}$$

$$h = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$h = \infty \Rightarrow t = \infty.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \int_{I_l'} |\Delta_h(f' \circ g)(x)|^p |g'(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq \left(\sum_l \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} a_l^{p-1} \Omega_p^p(f', a_l h) \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{p/q} \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\sum_l \left(\int_0^\infty \left(\frac{a_l^{(s-1)p}}{t^{(s-1)p}} a_l^{p-1} \Omega_p^p(f', t) \right)^{q/p} \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \right)^{1/p} \\
 & \leq \left(\sum_l \left(\int_0^\infty \left(a_l^{(s-1)p+(p-1)} \frac{\Omega_p^p(f', t)}{t^{(s-1)p}} \right)^{q/p} \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \right)^{1/p} \\
 & = \left(\sum_l a_l^{p-1+(s-1)p} \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Omega_p(f', t)}{t^{s-1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 & = \left(\sum_l a_l^{sp-1} \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Omega_p(f', t)}{t^{s-1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
 & \leq c \|f'\|_{B_{p,q}^{s-1}(\mathbb{R})} \sum_l \left(\sup_{y \in I_l} |g'(y)|^{s-(1/p)} \right).
 \end{aligned}$$

Le fait que g' s'annule aux extrémités de I_l , donc il existe $x_l \in I_l \cap [\sup I_l - h, \sup I_l]$ tel que $g'(x_l) = 0$, et par l'inégalité (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_l \sup_{x \in I_l} |g'(x)|^{s-(1/p)} &= \sum_l |g'(x) - g'(x_l)|^{s-(1/p)} \\
 &\leq \|g'\|_{\mathcal{BB}_p(\mathbb{R})}^{s-(1/p)} \\
 &\leq \|g\|_{B_{p,1}^{1+(1/p)}(\mathbb{R})}^{s-(1/p)}.
 \end{aligned}$$

Maintenant par la condition $sp - 1 > p$, on a le plongement

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{sp-1,1}^{1+\frac{1}{sp-1}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{BB}_{sp-1}^1(\mathbb{R}), \quad (3.15)$$

on conclut que

$$\sum_l \sup_{x \in I_l} |g'(x)|^{s-(1/p)} \leq c \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}^{s-(1/p)}$$

Etape 3 : On note I_l'' l'ensemble des éléments de I_l dont la distance à l'extrémité droit de I_l est au plus h et on pose $I_l' = I_l \setminus I_l''$. Puisque $|I_l \cap [\sup I_l - h, \sup I_l]|$, pour

tout $l \in \mathbb{N}$, on peut appliquer la [Proposition 3.2.2](#), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \int_{I_l''} |f'(g(x+h)) - f(g(x))|^p |g'(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq c \|f'\|_\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p}} \sum_l \sup_{I_l''} |g'|^p \int_{I_l''} 1 dx \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq c \|f'\|_\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{(s-1)p-1}} \sum_l \sup_{I_l''} |g'|^p \right)^{q/p} \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq c \|f'\|_\infty \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{h^{s-1-(1/p)}} \nu_p(g', h) \right)^q \frac{dh}{h} \right)^{1/q} \\
 & \leq c \|f'\|_\infty \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}.
 \end{aligned}$$

Par les étapes 1, 2 et 3, et les [Proposition 3.2.1](#) et [\(3.2.2\)](#), la preuve du [Théorème 3.2.1](#) en découle aussitôt.

Remarque 3.2.1. Le cas général $d > 1$ est immédiat car $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach pour $s > \frac{1}{p}$.

Chapitre 4

Une propriété de composition dans certains espaces de Lizorkin-Triebel localisé uniforme

Dans ce chapitre on va étudier la composition dans l'espace de Lizorkin-Triebel localisé uniforme $F_{p,q}^s(\mathbb{R})_{lu}$ où $s = \frac{1}{2}$, $p = 2$ et $q = 1$.

On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent, par composition à gauche sur l'espace $F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$. On montrera que les conditions de Lipschitz sont nécessaires pour $s = \frac{1}{2}$.

Nous notons que $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $I^+ = [0, \frac{1}{2}]$.

Nous allons alors démontrer les résultats suivants :

Théorème 4.0.1. Soient $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$, alors f est localement lipschitzienne.

Théorème 4.0.2. Soient $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu} \not\subset L_\infty(\mathbb{R})$ (autrement dit : $L_\infty(\mathbb{R})_{lu} = L_\infty(\mathbb{R})$). Si T_f envoie $F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$, alors f est globalement lipschitzienne.

4.1 Quelques fonctions de test

Lemme 4.1.1. Soit $s = \frac{1}{2}$, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une constante $c = c(u) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{jk} u(2^j(\cdot) - k) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\leq c \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{jk} 2^{\frac{1}{2}j} u(2^j(\cdot) - k) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\ &\leq c' \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_{jk}|^2 \right)^{(1/2)} \right) \\ \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{jk} u(2^j(\cdot) - k) \right\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\leq \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{jk} u(2^j(\cdot) - k) \right\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\ &\leq c \left\| \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|\alpha_{jk}| 2^{(j/2)} \mathcal{X}(2^j(\cdot) - k)) \right\|_2. \end{aligned}$$

où \mathcal{X} désigne la fonction caractéristique de I .

Démonstration. Voir [1]. □

Lemme 4.1.2. Pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une constante $c = c(u) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k u(\cdot - k) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k u(\cdot - k) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\ &\leq c \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 \right)^{(1/2)}. \end{aligned}$$

Démonstration. En faisant $j = 0$ dans le [Lemme 4.1.1](#), on a le résultat. □

Lemme 4.1.3. Soit $s = \frac{1}{2}$, on suppose que $E_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu} \not\subseteq L_\infty(\mathbb{R})_{lu}$ (autrement dit : $q > 1$ dans le cas Besov, $p > 1$ dans le cas Lizorkin-Tribel), alors il existe une suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de classe C^∞ , portées par I , telles que $\phi_n(x) = 1$ sur l'intervalle $2^{-n}I$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{E_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} = 0.$$

Démonstration. posons

$$\phi_n(x) = n^{-1} \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi(2^j x).$$

On a donc $\phi_n(x) = 1$ sur $2^{-n}I$ et $\phi_n(x) = 0$ hors de I .

Le Lemme 4.1.1 donne les inégalités

$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_{B_{2,2}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &= \|n^{-1} \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi(2^j x)\|_{B_{2,2}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \\ &\leq \|n^{-1} \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi(2^j x)\|_{B_{2,2}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\ &\leq cn^{(-1/2)}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &= \|n^{-1} \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi(2^j x)\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \\ &\leq \|n^{-1} \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi(2^j x)\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\ &\leq cn^{-1} \left\| \sum_{1 \leq j \leq n} 2^{(j/2)} \chi_j \right\|_2. \end{aligned}$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique du cube $2^{-j}I$. Pour estimer la norme L_2 qui apparaît au second membre, on pose

$$S_k = 2^{-k}I \setminus 2^{-k-1}I, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

et

$$S_n = 2^{-n}I.$$

La fonction $\sum_{1 \leq j \leq n} 2^{(j/2)} \chi_j$ valant constamment $\sum_{1 \leq j \leq n} 2^{(j/2)}$ sur S_k , on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\leq cn^{-1} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} 2^k |S_k| \right)^{(1/2)} \\ &\leq cn^{-(1/2)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{E_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} = 0.$$

□

4.2 Résultats préliminaires

Lemme 4.2.1. Soit $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

T_f envoie $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\|_{(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}} \leq \delta \Rightarrow \|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M.$$

Soit vérifiée par toute fonction g portée par I .

Démonstration. ,

Supposons, au contraire, que, pour tout intervalle J et tous nombres M et δ , on puisse trouver une fonction g , portée par J , telle que

$$\|g\|_{(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}} \leq \delta \text{ et } \|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} > M.$$

Donnons-nous une suite $(J_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de intervalles disjoints et des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ($j \geq 0$) telles que $\varphi_j(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}J_j$, et $\varphi_j(x) = 0$ hors de J_j . On note M_j la norme de l'opérateur $g \rightarrow \varphi_j g$, agissant sur $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$, et on choisit des fonctions

$$g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

telles que

$$\text{supp } g_j \subset \frac{1}{2}J_j, \quad \|g\|_{(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}} \leq 2^{-j}, \quad \|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} > jM_j.$$

Alors la fonction $g = \sum_{j \geq 0} g_j$ appartient à $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$ et on a $\varphi_j(f \circ g) = f \circ g_j$. Donc

$$jM_j \leq \|(f \circ g)\varphi_j\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M_j \|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}}, \text{ pour tout } j,$$

ce qui est absurde. □

Lemme 4.2.2. Soit $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

T_f envoie $F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq \delta \Rightarrow \|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M.$$

soit vérifiée par toute fonction g portée par I .

Démonstration. En utilisant la même démonstration comme le [Lemme 4.2.1](#). \square

Lemme 4.2.3. Soient $s = \frac{1}{2}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que T_f envoie $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$, alors quel que soit $a' \in \mathbb{R}$, il existe un opérateur non linéaire

$$U_{a'} : (F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu} \rightarrow B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu},$$

et des nombres $\delta, M > 0$ tels que

$$U_{a'}g(x) = f(a' + g(x)) - f(a'), \quad \forall x \in I,$$

et

$$\|U_{a'}g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à support dans I , satisfaisant

$$\|g\|_{(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}} \leq \delta.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur non linéaire

$$V_{a'}g(x) = \varphi(x)(f(a' + g(x)) - f(a')), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$V_{a'}g(x) = \varphi(x)(f(\varphi(x/2))(a' + g(x))) - f(\varphi(x/2)a')), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$V_{a'}$ envoie donc $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ et, en raisonnant comme dans la preuve du [Lemme 4.2.1](#), on voit qu'il existe un intervalle $J \subset I$ et des nombres $\delta, M > 0$ tels que

$$\|g\|_{(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}} \leq \delta \Rightarrow \|V_{a'}g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}g \subset J$. Posons $J = rI + b$, avec $r > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, et

$$U_{a'}g(x) = V_{a'}(g(r^{-1}(\cdot - b))(rx + b)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$U_{a'}g(x) = \varphi(rx + b)f(a' + g(x)) - f(a'), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par l'inclusion $J \subset I$, nous avons $\varphi(rx + b) = 1$ sur I ,

Donc

$$U_{a'}g(x) = f(a' + g(x)) - f(a'), \forall x \in I.$$

□

4.3 Preuve du [Théorème 4.0.1](#) et du [Théorème 4.0.2](#)

Soient b, b' dans \mathbb{R} , $N \geq 1$ et r, ν qui seront choisis en fonction de b et b' . Nous considérons l'ensemble.

$$A_N = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \leq N\},$$

et nous définissons

$$\alpha = \frac{1}{2l + 1},$$

où l est un entier fixé tel que $l > \frac{1}{2}$, et la fonction

$$g(x) = \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right) (b' - b) + \phi_n(x)b. \quad (4.1)$$

Le [Lemme 4.1.2](#) donne l'inégalité

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \quad (4.2)$$

$$\leq cN^{(1/2)} \quad (4.3)$$

Preuve du [Théorème 4.0.1](#)

Supposons que l'opérateur T_f envoie l'espace de Besov localisé uniforme $B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ dans $B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ (c'est suffisant puisque l'espace $B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}$ se plonge dans tous les $(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L_\infty)(\mathbb{R})_{lu}$). Soit un nombre réel a' qui reste fixé dans la suite de la preuve. Alors nous obtenons un opérateur $U_{a'}$ et des constantes δ, M selon le [Lemme 4.2.3](#).

On prend $n = 1$ et

$$r = \frac{1}{6N}.$$

Puisque $\alpha < \frac{1}{2}$, les intervalles $r(2\alpha I + k), k \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux disjoints. Par définition de r , nous avons $r(I + k) \subset I/2$, pour tout $k \in A_N$. Alors

$$U_{a'}g(x) = f(a' + b') - f(a'), \text{ si } x \in r(\alpha I + k) \text{ pour } k \in A_N, \quad (4.4)$$

$$U_{a'}g(x) = f(a' + b) - f(a'), \text{ si } x \in (I/2) \setminus \cup_{k \in A_N} r(2\alpha I + k). \quad (4.5)$$

Grâce au choix de r , on a

$$c^{-1}N^{-(1/2)} \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) \right\|_\infty = c^{-1}N^{(-1/2)} \|\varphi\|_\infty \leq c'.$$

On obtient

$$\left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq c_1 N^{(1/2)}.$$

En utilisant la relation entre r et N , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &= \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) (b' - b) + \phi_n(x)b \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \\
 &\leq \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) (b' - b) + \phi_n(x)b \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\
 &\leq |b' - b| \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} + |b| \|\phi_1\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\
 &\leq |b' - b| (c_1 N^{(1/2)}) + c|b| \\
 &\leq c_2 N^{(1/2)} |b' - b| + c_2 |b| \\
 &\leq c_2 (\sqrt{N} |b' - b| + |b|).
 \end{aligned}$$

Maintenant on suppose

$$\max(|b|, |b - b'|) \leq \frac{\delta}{2c_2}, \tag{4.6}$$

et on définit N par la propriété :

$$N^{(1/2)} \leq \frac{\delta}{2c_2 |b - b'|} < (N + 1)^{(1/2)}.$$

Remarquons que la définition de N implique

$$N^{(1/2)} \geq \frac{\delta}{2^{(3/2)} c_2 |b - b'|}. \tag{4.7}$$

Par la condition (4.6) et par définition de N , nous avons

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\leq \|g\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\
 &\leq c_2 (\sqrt{N} |b' - b| + |b|) \\
 &\leq c_2 N^{(1/2)} |b' - b| + c_2 |b| \\
 &\leq \frac{\delta}{2 |b' - b|} |b' - b| + c_2 \frac{\delta}{2c_2} \\
 &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
 &\leq \delta
 \end{aligned}$$

Puisque le support de g est inclus dans I , on en déduit

$$\|U_{a'}g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M. \quad (4.8)$$

Pour tout $x \in r(\alpha I^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\alpha \in r(I + k), \quad \forall j = 0, \dots, l,$$

$$x + jr\alpha \notin r(2\alpha I + k), \quad \forall j = 1, \dots, l.$$

(4.4) et (4.5) donne aussitôt

$$\begin{aligned} |\Delta_{r\alpha}^l(U_{a'}g)(x)| &= \left| \sum_{j=0}^l (-1)^j \binom{l}{j} (U_{a'}g)(x + (l-j)r\alpha) \right| \\ &= |(U_{a'}g)(x) + \sum_{j=1}^l (-1)^j \binom{l}{j} (U_{a'}g)(x + (l-j)r\alpha)| \\ &= |f(a' + b') - f(a' + b)| \end{aligned}$$

Par la Proposition 3.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|U_{a'}g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\geq (r\alpha)^{(-1/2)} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha I^+ + k)} |\Delta_{r\alpha}^l(U_{a'}g)(x)|^2 dx \right)^{(1/2)} \\ &\geq (r\alpha)^{(-1/2)} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha I^+ + k)} |f(a' + b') - f(a' + b)|^2 dx \right)^{(1/2)} \\ &\geq c_3 |f(a' + b') - f(a' + b)| r^{(-1/2)} N^{(1/2)} r^{(1/2)} \\ &= c_3 |f(a' + b') - f(a' + b)| N^{(1/2)} \\ &= c_3 \sqrt{N} |f(a' + b') - f(a' + b)| \\ &\geq c_3 \frac{\delta}{2^{(3/2)} c_2 |b - b'|} |f(a' + b') - f(a' + b)| \end{aligned}$$

En prenant en compte les inégalités (4.7) et (4.8), nous voyons que la condition (4.6) implique

$$\begin{aligned} |f(a' + b') - f(a' + b)| &\leq \frac{2^{(3/2)} c_2}{c_3 \delta} |b - b'| \|U_{a'}g\|_{B_{1,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{2^{(3/2)} M c_2}{c_3 \delta} |b - b'|, \end{aligned}$$

qui signifie que f est lipschitzienne dans un voisinage de a' .

Preuve du Théorème 4.0.2

Soit f une fonction satisfaisant l'hypothèse du Théorème 4.0.2, on se propose de mettre en évidence des constantes $\sigma > 0$ et $K > 0$ telles que $|b' - b| \leq \delta$ entraîne

$$|f(b') - f(b)| \leq K|b' - b|,$$

quels que soient b et b' dans \mathbb{R} .

Soit la fonction g telle que

$$g(x) = \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{x}{r} - k \right) \right) (b' - b) + \phi_n(x)b.$$

Les entiers positifs n et N , ainsi que le nombre $r \in]0, 1]$, seront précisés dans un instant.

Le Lemme 4.1.3 nous autorise à choisir n tel que

$$|b| \|\phi_n\|_{E_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq \frac{\delta}{2},$$

de sorte que N et r devront satisfaire les relations :

$$\delta (3|b' - b|)^{-1} < c_1 N^{(1/2)} \leq \delta (2|b' - b|)^{-1}, \quad (4.9)$$

$$rN < 2^{-n-2}. \quad (4.10)$$

L'estimation (4.3) et la relation (4.9) entraineront

$$\begin{aligned}
 \|g\|_{\left(F_{2,1}^{(1/2)} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R})_{lu}} &= \|g\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} + \|g\|_\infty \\
 &\leq \|g\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} + \|g\|_\infty \\
 &\leq \|g\|_{F_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})} \\
 &\leq \|g\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\
 &\leq \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) (b' - b) + \phi_n b \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\
 &\leq |b' - b| \left\| \sum_{k \in A_N} \varphi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cdot}{r} - k \right) \right) \right\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} + \|b\| \|\phi_n\|_{B_{2,1}^{(1/2)}(\mathbb{R})} \\
 &\leq |b' - b| c N^{(1/2)} + \frac{\delta}{2} \\
 &\leq \delta (2|b' - b|)^{-1} |b' - b| + \frac{\delta}{2} \\
 &\leq \frac{\delta |b' - b|}{2|b' - b|} + \frac{\delta}{2} \\
 &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
 \end{aligned}$$

L'inégalité (4.10) nous garantit l'inclusion

$$r(I + k) \subset 2^{-n}I, \text{ pour } k \in A_N \quad (4.11)$$

et par conséquent

$$g(x) = b', \text{ si } x \in r(\alpha I + k), \text{ } k \in A_N, \quad (4.12)$$

$$g(x) = b, \text{ si } x \in 2^{-n}I \setminus \cup_{k \in A_N} r(2\alpha I + k). \quad (4.13)$$

Supposons maintenant $s = \frac{1}{2}$.

Si $|b' - b| \leq \frac{\delta}{3}$, il est possible de trouver un entier $N \geq 1$ tel qu'on ait (4.9), on choisit alors r assez petit pour avoir (4.10). Il vient alors

$$\|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} \leq M.$$

Pour tout $x \in r(\alpha I^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\alpha \in r(I + k) \setminus \cup_{k \in A_N} r(2\alpha I + k'), \quad \forall j = 1, \dots, l.$$

Alors (4.11), (4.12) et (4.13) nous donnent

$$\begin{aligned} |\Delta_{r\alpha}^l(f \circ g)(x)| &= \left| \sum_{j=0}^l (j, l)(f \circ g)(x + (l-j)r\alpha) \right| \\ &= |f(b') - f(b)|. \end{aligned}$$

Par la Proposition 3.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}} &\geq (r\alpha)^{(-1/2)} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha I^+ + k)} |\Delta_{r\alpha}^l(f \circ g)(x)|^2 dx \right)^{(1/2)} \\ &= (r\alpha)^{(-1/2)} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha I^+ + k)} |f(b') - f(b)|^2 dx \right)^{(1/2)} \\ &= (r\alpha)^{(-1/2)} |f(b') - f(b)| \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha I^+ + k)} |1|^2 dx \right)^{(1/2)} \\ &= (r\alpha)^{(-1/2)} |f(b') - f(b)| \left(\sum_{k \in A_N} |r\alpha I^+| \right)^{(1/2)} \\ &= (r\alpha)^{(-1/2)} |f(b') - f(b)| |r\alpha I^+|^{(1/2)} \left(\sum_{k \in A_N} 1 \right)^{(1/2)} \\ &= |f(b') - f(b)| (2N + 1)^{(1/2)} (r\alpha)^{(-1/2)} |r\alpha I^+|^{(1/2)}. \end{aligned}$$

L'encadrement (4.9) implique

$$\begin{aligned} |f(b') - f(b)| &\leq \frac{\|f \circ g\|_{B_{2,\infty}^{(1/2)}(\mathbb{R})_{lu}}}{(2N + 1)^{(1/2)} (r\alpha)^{(-1/2)} |r\alpha I^+|^{(1/2)}} \\ &\leq c_1 M N^{-(1/2)} \\ &\leq c_2 M \delta^{-1} |b' - b| \end{aligned}$$

qui signifie que f est globalement Lipschitzienne.

Références

- [1] S.E. Allaoui : Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles. Annales mathématiques Blaise pascal. 16 ,2 (2009), 399-429.
- [2] S.E. Allaoui : Intégrales singulières. Thèse de Doctorat Université Batna, 2011, pp 63-76.
- [3] S.E. Allaoui, G. Bourdaud : Composition dans les espaces de Besov critiques, 260 Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. n°225, (2016), pp.875 – 893
- [4] S.E. Allaoui, G. Bourdaud : Localisation uniforme des espaces de Besov et de Lizorkin–Triebel, Arch. Math., 2017.
- [5] J. Bergh, J. Löfström : Interpolation Spaces. Springer, Berlin, 1976.
- [6] G. Bourdaud : Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers. Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.
- [7] G. Bourdaud : La trivivialité du calcul fonctionnel dans l'espace $H^{3/2}(\mathbb{R}^4)$. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 314(1992), 187190.
- [8] G. Bourdaud : Une propriété de composition dans l'espace H^s . C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340(2005), 221224
- [9] G. Bourdaud : Localisations des espaces de Besov. Studia Math. 90(1988), 153163.

- [10] G. Bourdaud : Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien, 2 ème édition, Pub. Math. Univ. Paris 7, 23(1995).
- [11] G. Bourdaud : Le calcul symbolique dans certaines algèbres de type Sobolev. In : Recent Developments in Fractals and Related Fields, J.Barral, S.Seuret (eds), Birkhäuser (2010), 131144.
- [12] G. Bourdaud : Superposition in homogeneous and vector valued Sobolev spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 362(2010), 61056130.
- [13] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis : Regularity of the symbolic calculus in Besov algebras. Studia Math. 184(2008), 271298.
- [14] G. Bourdaud, M. Lanza de Cristoforis and W. Sickel : Superposition operators and functions of bounded p-variation. Nonlinear analysis, 62(2005), 483517.
- [15] A. Djeriou : Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur certains espaces fonctionnels. Thèse de Doctorat, Université Batna, 2012, pp 15 – 24.
- [16] T. Runst, W. Sickel : Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations. de Gruyter, Berlin, 1996.
- [17] J. Peetre : New thoughts on Besov spaces, Duke Univ. Math. Series I, Durham, N.C., 1976
- [18] H. Triebel : Interpolation Theory, function spaces Differential Operators, N. H. C. AmSsterdam . New York, 1978.
- [19] H. Triebel : Theory of function spaces. Birkhauser, Basel (1983).
- [20] H. Triebel : Theory of function spaces II. Birkhauser, Basel (1992).