

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عمار تليجي بالاغواط
UNIVERSITÉ AMAR TELIDGI LAGHOUAT
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématiques

Par : HADBAOUI IBRAHIM

THEME

Contrôle optimal d'insectes nuisibles par prédateurs

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. AMAR BELACEL	M.C.A	Président
Mme. NACIMA MOUSSOUNI	M.C.B	Encadreur
Mr. MOHAND BENTOBACHE	M.C.A	Examineur

Année Universitaire 2019/2020

Remerciements

Nous remercions le bon Dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et de nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour pouvoir mener notre travail à terme.

Je tiens à remercier mon encadreur *M^{me}* N.MOUSSOUNI pour ce travail , pour ses précieux conseils et pour avoir fourni de l'aide tout au long du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous voulons exprimer nos remerciements et notre gratitude à tous mes enseignants pour leurs efforts fournis durant toute la période d'étude, ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont apportés l'aide et l'assistance nécessaire et qui ont collaboré d'une façon ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Notation	3
Introduction générale	4
1 Rappels sur les équations différentielles	6
1.1 Introduction	6
1.1.1 Equations différentielles ordinaires du premier ordre	6
1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité	7
1.3 Méthodes numérique de résolution d'équations différentielles	7
1.3.1 Méthode d'Euler	8
1.3.2 Méthode de Runge Kutta d'ordre 4	9
1.4 Méthodes de résolution d'équations non linéaire	11
1.4.1 Méthode de Newton	12
1.5 Conclusion	13
2 La théorie du contrôle optimal	14
2.1 Introduction au contrôle optimal	14
2.2 Position du problème	15
2.3 Contrôlabilité	16
2.3.1 Ensemble accessible	16
2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires	17
2.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	18
2.4 Principe du maximum de Pontryagin (PMP)	21
2.4.1 Définition et propriétés essentielles	21
2.4.2 Les conditions de transversalités	23
2.5 Méthodes numériques en contrôle optimal	25
2.5.1 Méthodes indirectes	26
2.5.2 Résolution d'un problème aux deux bouts	26
2.5.3 Méthodes directes	31
2.5.4 Comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes	35
2.6 Conclusion	36

3	Contrôle optimal d'insectes nuisibles par prédateurs	37
3.1	Introduction	37
3.2	Le modèle de Lotka-Volterra	38
3.3	Modélisation du problème	40
3.4	Position du problème	42
3.5	Résolution théorique	43
	3.5.1 Application du Principe du maximum de Pontryagin	44
3.6	Résolution numérique	45
	3.6.1 Résolution par la méthode de tir simple	45
	3.6.2 Résolution par la méthode directe	47
3.7	Comparaison et discussion des résultats	49
	Conclusion générale	49
	Bibliographie	50

Notation

\forall : Pour tout.

\exists : Il existe.

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n fois.

\circ
 $\overset{\circ}{A}$: Intérieur de l'ensemble A .

∂A : Frontière de A .

$| \quad |$: Valeur absolue.

$M_{n,m}(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices à n lignes et à m colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

e^A , ou $\exp(A)$: Exponentielle de la matrice A .

A' : Transposée de la matrice A .

$df(x).h$: Différentielle de Fréchet de f au point x , appliquée au vecteur h (f est une application de $E \times F$ dans H , E, F et H étant deux espaces de Banach).

$\text{Acc}(x_0, T)$: Ensemble accessible depuis x_0 , en temps T .

E_T : Application entrée sortie au temps T .

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: Dérivée de x par rapport à t .

\perp : Perpendiculaire.

∇f : Gradient de la fonction f .

max : Maximum.

min : Minimum.

Introduction générale

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un ou plusieurs paramètres dynamiques appelés contrôles. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, ... etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques.

Les systèmes abordés sont multiples, système avec bruit, avec retard, ... etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, économie, ... etc. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation) ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation.

Le problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut savoir d'abord si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité. Pour les systèmes non linéaires, le problème de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (maximum) et pour se faire, on dispose de deux grandes classes des méthodes à savoir la méthodes directe et la méthodes indirecte.

Le présent travail est donc devisé en trois parties organisées de la manière suivante :

Dans le premier chapitre intitulé équations différentielles, nous nous sommes intéressés ou la définition des équations différentielles du premier ordre, on a défini quelques méthodes de résolution des équations différentielles du premier ordre les plus utiles pour notre thème par exemple la méthode d'Euler et la méthode de Runge Kutta et on a terminé le chapitre avec un exemple résolu avec les deux méthodes citées auparavant puis on a comparé les résultats obtenus avec ces deux méthodes avec la solution exacte.

Dans le deuxième chapitre intitulé introduction au contrôle optimal, nous nous sommes intéressés au problème de contrôle optimal et nous avons présenté quelques notions de base d'un problème de contrôle optimal, la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires ainsi que les méthodes de

résolution théorique et puis numérique. Toutes les définitions sont illustrées par des exemples.

L'Algérie est parmi les premiers pays producteurs des agrumes, néanmoins cette culture est menacée par la présence des mouches blanches. Pour lutter contre ce fléau L'INPV (L'institut national de protection des végétaux) a opté pour une lutte biologique (la lutte chimique étant très polluante) [7] la lutte biologique consiste à lâcher des insectes nommés *macrolophus calginosus* (prédateurs) qui se nourrissent des mouches (proies) [15] ce modèle est appelé modèle prédateurs-proies de Lotka-Volterra [11].

Dans le chapitre 3, on a considéré donc un modèle simplifié de Lotka-Volterra en le modélisant en un problème de contrôle optimal à deux états (proies et prédateurs), le contrôle (ou commande) du système dans notre cas est le taux d'introduction des prédateurs.

Notre objectif est de minimiser le nombre de mouches blanches tout en minimisant la quantité de prédateurs au temps final.

Le problème obtenu est résolu théoriquement en utilisant le principe du maximum de Pontryagin (PMP) [19], numériquement, on a implémenté deux méthodes sous le logiciel Matlab, à savoir la méthode indirecte (méthode de tir) [19] et une méthode directe (discrétisation d'Euler), on a comparé et discuté les résultats obtenus (temps d'exécution, précision, ...). Notre travail est achevé par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Rappels sur les équations différentielles

1.1 Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle important dans différents domaines, en physique, en chimie, en biologie,...etc. Ces équations ont rarement des solutions exactes, autrement dit, la résolution de ces équations différentielles n'est pas toujours possible, elles ne s'intègrent pas d'une manière exacte. On fait appel dans ce cas à des méthodes numériques afin de trouver des solutions approchées.

1.1.1 Equations différentielles ordinaires du premier ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

une application continue, on considère la relation

$$y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m. \quad (1.1)$$

La relation (1.1) est appelée équation différentielle du premier ordre. Une solution de (1.1) sur un intervalle $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$\forall t \in I; \quad (t, y(t)) \in U.$$

$$\forall t \in I; \quad y' = f(t, y(t)).$$

L'inconnue de l'équation (1.1) est en fait une fonction de t .

Problème de Cauchy

Etant donné un point $(0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de (1.1) sur un intervalle I contenant 0, telle que $y(0) = y_0$.

Ce problème est formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans la pratique, la variable t représente le temps et y représente l'état d'un système matériel donné. L'équation (1.1) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps.

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E ,
 $U \subset \mathbb{R} \times E$ un fermé, Soit V un voisinage de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$

Définition 1.2.1. *On dit que f est localement lipschitzienne en y dans $[a, b] \times \Omega$, si, quels que soient t_0 de $[a, b]$ et y_0 de Ω , il existe des voisinages U et V de ces points, et un nombre $k \geq 0$, tels que l'on ait, pour $t \in U$. et $y_1 \in V, y_2 \in V$,*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\| \quad (1.3)$$

On dit que f est globalement lipschitzienne en y dans $[a, b] \times \Omega$, s'il existe $k \geq 0$ tel que la condition (1.3) est vérifiée pour tous $t \in [a, b], y_1, y_2 \in \Omega$ (autrement dit si on peut prendre $U = [a, b]$ et $V = \Omega$).

Théorème 1.2.1. [16] *Soit E un espace de Banach réel, et $f : \Omega \rightarrow E$ une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times E$ dans E . On suppose f continue sur Ω , et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. On considère l'équation différentielle*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.4)$$

Pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in \Omega$ il existe une solution unique de l'équation différentielle (1.4) satisfaisant cette donnée de Cauchy $y(t_0) = y_0$.

1.3 Méthodes numérique de résolution d'équations différentielles

Cette partie est consacrée à la résolution du problème de Cauchy défini précédemment.

Définition 1.3.1. On appelle méthode à un pas, la méthode permettant de calculer y_{n+1} à partir de la seule variable antérieure y_n .

Parmi ces méthodes on peut citer :

1.3.1 Méthode d'Euler

Considérons le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.5)$$

Subdivisons l'intervalle $[0, T]$ comme suit :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T.$$

Posons

$$h_n = t_{n+1} - t_n; \quad h = \max_{0 \leq n \leq N} h_n.$$

Pour $0 \leq i \leq N$, la solution du problème (1.5) est donnée par :

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds. \quad (1.6)$$

Par récurrence, nous construisons une approximation y_n de $y(t_n)$ en remplaçant la relation précédente par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.7)$$

Ce qui revient à approcher, pour $s \in]t_n, t_{n+1}[$, $f(s, y(s))$ par $f(t_n, y_n)$. Le schéma défini par la relation (1.7) s'appelle le schéma d'Euler.

Exemple 1.3.1. Soit le problème suivant

$$\begin{cases} y' = -2ty, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On utilise la méthode d'Euler pour résoudre le problème avec $h = 0.1$ sur l'intervalle $[0, 3]$

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \text{ ou } f(t, y) = -2ty, \quad t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Pour $i = 0$, On a $t_0 = 0$, $y_0 = 1$.

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + (0.1)(0) = 1,$$

$$y(0.1) = y_1 = 1.$$

Pour $i = 1$, On a $t_1 = 0 + 1(0.1) = 0.1$, $y_1 = 1$.

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + (0.1)(-2)(0.1)(1) \simeq 0.98,$$

$$y(0.2) = y_2 \simeq 0.98.$$

Nous suivons la même méthode pour obtenir les autres valeurs de t_i et y_i indiquées dans le tableau suivant :

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.98	0.9408	0.8844	0.8136	0.7322	0.6444	0.5542	0.4655	0.3817
t	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y	0.3054	0.2382	0.1810	0.1340	0.0964	0.0675	0.0459	0.0303	0.0194	0.0120
t	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
y	0.0072	0.0042	0.0023	0.0013	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000

TABLE 1.1 – Résultats de simulation numérique pour la méthode d'Euler

1.3.2 Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, \quad t \in I = [0, T]. \end{cases}$$

Le principe de la méthode est le suivant :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad i = 1, \dots, N-1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_i, y_i) \quad \text{ou} \quad t_i = t_0 + ih, \\ k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3). \end{array} \right.$$

Exemple 1.3.2. Soit le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -2ty, \\ y(0) = 1. \end{array} \right.$$

avec $h = 0.1$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

Pour $i = 0$ on a $t_0 = 0, y_0 = 1$.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = -2(0)(1) = 0,$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = -2(0.05)(1) = -0.1,$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = -2(0.05)(0.95) = -0.095,$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + hk_3) = -2(0.1)(0.99) = -0.198.$$

$$y(0.1) = y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), = 1 + \frac{1}{6}[-0.2 - 0.19 - 0.0198] \simeq 0.9902.$$

Pour $i = 1$, On a $t_1 = 0.1, y_1 = 0.9902$.

$$k_1 = f(t_1, y_1) = -2(0.1)(0.9902) = -0.19804,$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = -2(0.15)(0.980098) = -0.02940294,$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = -2(0.15)(0.09752985) = -0.2925896,$$

$$k_4 = f(t_1 + h, y_1 + hk_3) = -2(0.2)(0.96741) = -0.386964.$$

$$y(0.2) = y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$= 0.9902 + \frac{0.1}{6}[-0.19804 - 0.5880588 - 0.5851792 - 0.0386964] \simeq 0.9608.$$

Nous suivons la même méthode pour obtenir les autres valeurs de t_i et y_i indiquées dans le tableau suivant :

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.99	0.9608	0.9139	0.8521	0.7788	0.6977	0.6126	0.5273	0.4449	0.3679
t	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y	0.2982	0.2369	0.1845	0.1409	0.1054	0.0773	0.0556	0.0392	0.0271	0.0183
t	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
y	0.0122	0.0079	0.0050	0.0032	0.0019	0.0012	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001

TABLE 1.2 – Résultats de simulation numérique pour la méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Nous utilisons donc le programme Matlab pour trouver des solutions au problème sur l'intervalle $[0, 3]$, nous obtenons les résultats des deux méthodes décrites précédemment dans la Figure 1.1 .

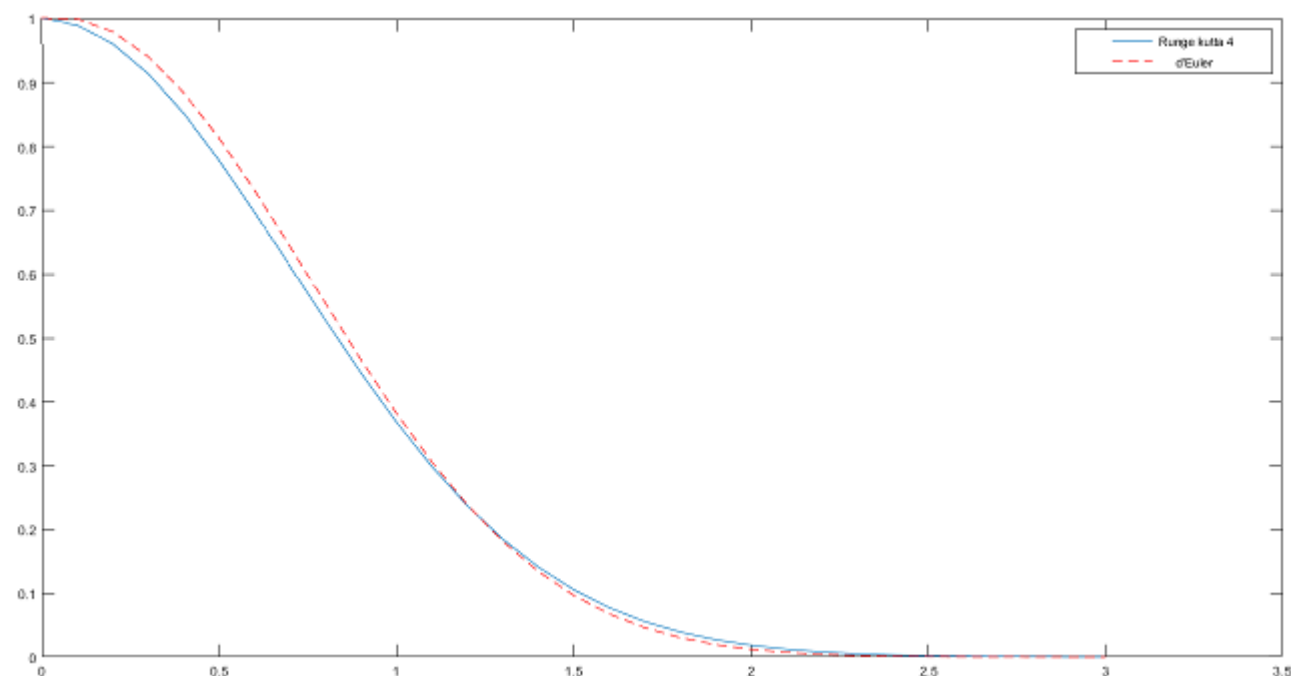


FIGURE 1.1 – Graphe des solutions par la méthodes de Runge Kutta 4 et d'Euler

1.4 Méthodes de résolution d'équations non linéaire

Ces méthodes nous permettent de trouver la résolution approchée des équations ($f(x) = 0$ sur \mathbb{R}). L'idée de ces méthodes est de partir d'une valeur approchée grossière de la solution, et d'en améliorer la précision par une application itérée d'un algorithme bien choisit. Parmi ces méthodes on cite :

1.4.1 Méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donné.

On considère la droite $y(x)$ qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ et qui a pour pente $f'(x_n)$

$$y(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

On définit le point x_{n+1} comme étant le point où cette droite intersecte l'axe des abscisses c'est à dire $y(x_{n+1}) = 0$.

Le schéma numérique de la méthode de Newton est donc le suivant :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

Exemple 1.4.1. Effectuez quatre itérations de la méthode de Newton pour trouver la plus petite racine positive de l'équation $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$.

Solution On a $f(0) = 1$, $f(1) = -3$. Puisque $f(0)f(1) < 0$ et que la fonction f est continue sur \mathbb{R} alors la plus petite racine positive se situe dans l'intervalle $[0, 1]$. En appliquant la méthode de Newton, nous obtenons

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 5x_k + 1}{3x_k^2 - 5} = \frac{2x_k^3 - 1}{3x_k^2 - 5}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Soit $x_0 = 0.5$ nous avons les résultats suivants.

$$x_1 = \frac{2x_0^3 - 1}{3x_0^2 - 5} = \frac{2(0.5)^3 - 1}{3(0.5)^2 - 5} \simeq 0.176471,$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 5} = \frac{2(0.176471)^3 - 1}{3(0.176471)^2 - 5} \simeq 0.201568,$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 - 1}{3x_2^2 - 5} = \frac{2(0.201568)^3 - 1}{3(0.201568)^2 - 5} \simeq 0.201640,$$

$$x_4 = \frac{2x_3^3 - 1}{3x_3^2 - 5} = \frac{2(0.201640)^3 - 1}{3(0.201640)^2 - 5} \simeq 0.201640.$$

Par conséquent, la racine correcte à six décimales est $x \approx 0.201640$. Voici le graphe des solutions que nous avons trouvées par matlab, De $x = 0$ à $x = 60$ (Figure 1.2)

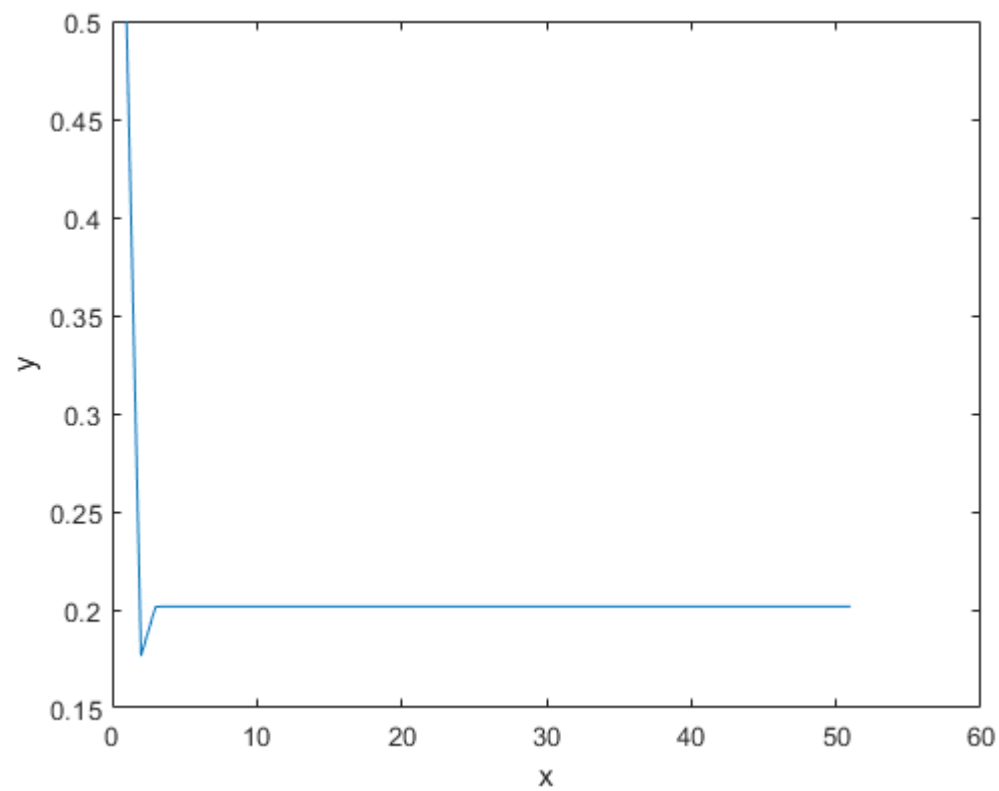


FIGURE 1.2 – Graphe des solutions par la méthode de Newton

1.5 Conclusion

La modélisation des problèmes de contrôle se fait généralement par des équations différentielles. Ceci procure aux équations différentielles un rôle majeur dans la théorie du contrôle. La résolution numérique des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont le plus nombreuses.

Chapitre 2

La théorie du contrôle optimal

2.1 Introduction au contrôle optimal

La théorie du contrôle optimal est une prolongation du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique. Elle s'intéresse à l'analyse des propriétés des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final prescrit, en respectant certains critères. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Pour modéliser un problème de contrôle optimal on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, ... etc. Pour atteindre le but de déplacer le système d'un état initial donné, vers un état final ; deux questions se posent naturellement :

- Existe-t-il un contrôle ou une commande pour déplacer ce système ? c'est le problème de la contrôlabilité.
- Si la condition précédente est remplie : Existe-t-il un contrôle joignant le point de départ x_0 à x_1 et qui minimise une certaine fonctionnelle $J(u)$? c'est le problème de contrôle optimal.

Les domaines d'application sont multiples : internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, l'automatique, la robotique (problèmes de coordination des mouvements de robots)... etc.

2.2 Position du problème

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u, T) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u, \quad (1) \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2) \\ x(0) = x_0 \in M_0, \quad (3) \\ x(T) = x_1 \in M_1, \quad (4) \\ u \in U, t \in I = [0, T], \quad (5). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 .

$x(\cdot)$ est l'état du système (2.1), $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (2).

$x(T)$ est la position finale.

$u(\cdot)$ est la commande du système (2.1), U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

M_0, M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n , I un intervalle de \mathbb{R} .

$J(T, u)$ est appelé coût, critère de qualité (fonction objectif).

On distingue trois problèmes importants :

- Problème de Lagrange

$$J(u, T) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

c'est à dire $g = 0$.

- Problème de Mayer Ici c'est le problème dont le critère est le suivant :

$$J(u, T) = g(T, x(T)),$$

c'est à dire $f^0 = 0$, $J(u, T)$ est le coût terminal.

- Problème de Mayer-Lagrange Dans le cas ou

$$J(u, T) = g(T, x(T)) + \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

le problème est appelé problème Mayer-Lagrange, il est aussi connu sous le nom du problème de Bolza.

2.3 Contrôlabilité

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in I = [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

ou $x(\cdot)$ est l'état du système (2.2). $u(\cdot)$ est la commande du système (2.2), T est le temps final, $x(t_0) = x_0$ est la condition initiale.

2.3.1 Ensemble accessible

Etant donnée l'état initial x_0 , nous étudions l'ensemble $Acc(x_0, T)$ de tous les points de \mathbb{R}^n aux quels x_0 peut être transféré par les contrôleurs $u(t)$ pour $t \in [0, T] = I$.

Définition 2.3.1. *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ est défini par :*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0, T], U)\},$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système contrôlé associée au contrôle u voir Figure 2.2 .

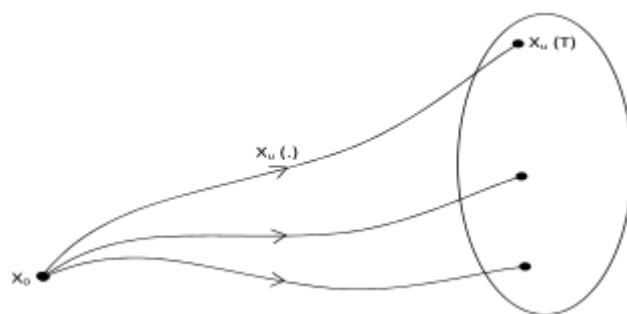


FIGURE 2.1 – Ensemble accessible

Définition 2.3.2. *On dit que le système (2.2) est contrôlable en temps T si $Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n$ c'est-à-dire pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande u telle que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T (voir Figure 2.1).*



FIGURE 2.2 – Contrôlabilité

2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in I = [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Où $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ des application localement intégrables sur I (Intervalle de \mathbb{R}), $u(\cdot)$ le contrôle du système (2.3).

Cas des systèmes linéaires autonomes

Définition 2.3.3. *Le système (2.3) est dit autonome si les matrices $A(t) = A$ et $B(t) = B$ c'est-à-dire*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in I = [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Théorème 2.3.1. [19] *On suppose $\Omega = \mathbb{R}^m$. Le système (2.4) est contrôlable en temps T (quelconque) si et seulement si la matrice $K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang n . La matrice K est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rg}K = n$ est appelée condition de Kalman.*

Remarque 2.3.1. *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Exemple 2.3.1. *Le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in I = [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

La matrice de Kalman $K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang $2 = n$

Donc le système considéré est contrôlable.

Cas des systèmes linéaires non autonomes

La solution du système (2.3) en temps t donnée par :

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_0^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \quad t \in I = [0, T],$$

où R est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t), \\ R(0) = Id, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 2.3.2. [19] *Le système (2.3) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$C = \int_0^T R(t)^{-1} B(t) B(t)' R(t)^{-1'} dt,$$

est inversible.

C est appelée matrice de contrôlabilité.

2.3.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Se prononcer sur cette propriété reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire.

Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t)), \quad t \in I = [0, T], \\ x(0) = x_0, \quad u \in U. \end{cases} \quad (2.5)$$

Où x est un vecteur de \mathbb{R}^n , A une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fonction non linéaire du contrôle $u(\cdot)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système (2.5).

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utiliser la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système (2.5).

Définition 2.3.4. *Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.5) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 , si $x_1 \in \text{Acc}(x_0, T)^\circ$. Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x_1)$ tel que $V \subset \text{Acc}(x_0, T)$.*

Application entrée sortie

Définition 2.3.5. Soit $T > 0$. L'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé (2.5) initialisé à x_0 est l'application :

$$E_{x_0, T} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \rightarrow x_u(T),$$

Où U est l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$.

Étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, le problème est donc de trouver un temps T et un contrôle u sur $[0, T]$ telle que la trajectoire associée à u , solution du système (2.5) vérifie

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(T) = x_1,$$

où x_u est la solution du système (2.5) associée au contrôle u initialisée à x_0 au temps $t = 0$. On donne une autre caractérisation de la contrôlabilité locale.

Définition 2.3.6. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (2.5) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps T depuis x_0 si

$$\exists V \in V(x) \mid \forall y \in V, \exists u \in U \quad \text{tels que} \quad y = E_T(u).$$

Lemme 2.3.1. [19] E_T est différentiable au sens de Fréchet. Sa différentielle est :

$$E_T(u + \delta u) = E_T(u) + dE_T(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|_{L^\infty}),$$

Par définition :

$$\dot{x}_u = Ax_u + B(u), \quad x_u(0) = x_0, \\ \dot{x}_{u+\delta u} = Ax_{u+\delta u} + B(u + \delta u), \quad x_{u+\delta u}(0) = x_0.$$

Notons par $\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t)$, la variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$ (voir Figure 2.3).

$$\delta x(t) = x_{u+\delta u}(t) - x_u(t), \\ \delta \dot{x} = A\delta x + B(u + \delta u) - B(u)\delta x(0) = 0, \\ B(u + \delta u) = B(u) + dB(u) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|),$$

A l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t)) \cdot \delta u(t), & t \in I = [0, T], \\ \delta x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

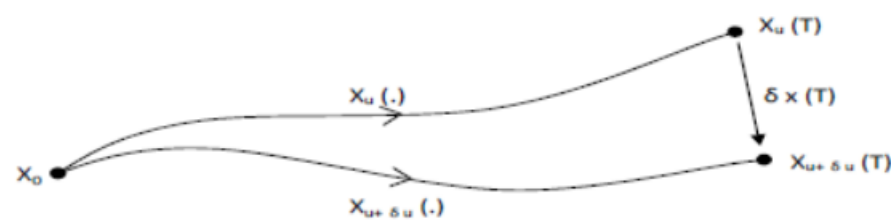


FIGURE 2.3 – Variation de la trajectoire $x_u(\cdot)$

De la condition d'admissibilité $\delta x(0) = 0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + dB(u(t))\delta u(t), \\ \delta x(0) = 0, \quad u \in U, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Définition 2.3.7. Le système (2.7) est appelé système linéarisé du système (2.5) le long de $u(\cdot)$. La solution du système linéarisé (2.7) en temps T est donnée par :

$$\delta x(T) = \int_0^T e^{(t-s)A} dB(u(s))\delta u(s)ds,$$

$$dE_T(u)\delta u = x_{u+\delta u}(T) - x_u(T),$$

où $dE_T(u)$ est l'application entrée sortie du système (2.7).

Proposition 2.3.1. [19] $dE_T(u)$ est surjective si et seulement si le système linéarisé est contrôlable.

Proposition 2.3.2. [19] Le système (2.5) est localement contrôlable au voisinage de $x_1 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si E_T est localement surjective au voisinage de x_1 .

Lemme 2.3.2. [19] Si le système linéarisé (2.7) est contrôlable, alors le système initial est localement contrôlable au voisinage de x_1 .

Théorème 2.3.3. [19] Le système (2.7) est localement contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$D = \int_0^T e^{tA} dB(u(t))dB(u(t))' e^{tA'} dt$$

est inversible.

où A' est la transposée de la matrice A .

2.4 Principe du maximum de Pontryagin (PMP)

Dans cette partie, on s'intéresse au principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité pour des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires. Il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimal pour l'envoi d'une fusée sur la lune, c'est un principe qui généralise les principes du calcul des variations classiques, en prenant en compte notamment la contrainte sur le contrôle et les contraintes sur l'état. Les trajectoires optimales sont sélectionnées parmi une famille de trajectoires dites extrémales qui sont des solutions d'un système Hamiltonien généralisé.

2.4.1 Définition et propriétés essentielles

Soit l'ensemble $U = \{u(t), t \in I = [t_0, T]\}$, est l'ensemble des contrôles admissibles.

Définition 2.4.1. (*Commande bornée*) On dit que le contrôle $u_j(t)$ est bornée si elle peut être minorer et majorer par des constantes a et b , par la forme suivante :

$$a \leq u_j(t) \leq b, j = 1, \dots, m, t \in [0, T].$$

Définition 2.4.2. (*Contrôle bang-bang*) Le contrôle $u \in U$ est dit contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, On a $|u_j(t)| = 1$.

Définition 2.4.3. On dit que le contrôle u est extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (2.1) associée à u vérifie :

$$x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t), t \in I = [0, T].$$

Définition 2.4.4. Un contrôle $u^0(t)$ est dit optimal si $u^0(\cdot)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, T]$.

Théorème 2.4.1. [19] *Considérons le système de contrôle linéaire*

$$\forall t \in I = [0, T], \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0.$$

où le domaine de contraintes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $[0, T]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $p(t)$ de l'équation $\dot{p}(t) = p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \Omega} p(t)B(t)v. \quad (2.8)$$

Définition 2.4.5. Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Remarque 2.4.1. Si $\Omega = [-a, a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation (2.8) implique immédiatement que $u(t) = \text{sign}(p(t)B(t))$.

Définition 2.4.6. La fonction $\varphi = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation,

Définition 2.4.7. Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation.

Définition 2.4.8. L'Hamiltonien du système (2.1) est défini par :

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) &= p^0 f^0(t, x(t), u(t)) + p(t)\dot{x}(t), \\ &= p^0 f^0(t, x(t), u(t)) + p(t)f(t, x(t), u(t)). \end{aligned}$$

Théorème 2.4.2. [19] Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.9)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous ensembles de \mathbb{R}^n . Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t .

On définit le coût

$$J(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + g(T, x(T)),$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , $x(\cdot)$ est la solution de (2.9) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J . Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (2.10)$$

$$\dot{p}(t) = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (2.11)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = p'(t)f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (2.12)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) = x_0 \in M_0$ et $x(T) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de

manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux) Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) = x_0 \in M_0$ et $x(T) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad (2.13)$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1. \quad (2.14)$$

Remarque 2.4.2. Si f et f^0 ne dépendent pas du temps t c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a

$$\forall t \in [0, T], \max_{v \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = \text{Cste.}$$

Définition 2.4.9. Les conditions (2.13) et (2.14) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

2.4.2 Les conditions de transversalités

Les conditions de transversalité sur le le vecteur adjoint

Dans ce cas le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (2.13) et (2.14) dans les deux cas importants suivants :

- **Cas1 : Problème de Lagrange.** Dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds,$$

i.e. $g = 0$. Les conditions de transversalité (2.13) et (2.14) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad p(T) \perp T_{x(T)}M_1.$$

Remarque 2.4.3. Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition (2.13) devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$. De même, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

- **Cas2 : Problème de Mayer.** Dans ce cas le cout s'écrit

$$C(T, u) = g(T, x(T)).$$

i.e. $f^0 = 0$. Les conditions de transversalité (2.13) et (2.14) ne se simplifient pas à priori. Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (2.14) devient

$$p(T) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)).$$

et alors forcément $p^0 \neq 0$ (on prend alors $p^0 = -1$). Si de plus g ne dépend pas du temps, on a coutume d'écrire $p(T) = -\nabla g(x(T))$.

Exemple 2.4.1. Considérons le problème du temps minimal pour le système de contrôle suivant :

$$(Pb) \left\{ \begin{array}{l} J(u, T) = \int_0^T dt \rightarrow \min_u, \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = 0, x(T) = 0, \\ y(0) = 0, y(T) = -1, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Le contrôle $u(t)$, pour $t \in [0, T]$ vérifie : $|u(t)| \leq 1$.

Le problème est d'aller de $(0, 0)$ a un point $(0, -1)$ en un temps minimal.

1-La contrôlabilité du système (Pb) :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

La matrice de Kalman est $K = (B, A^{2-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $rgK = 2$, alors le système (Pb) est contrôlable.

2-Trouver le contrôle optimal $u(t)$:

L'Hamiltonien du système (Pb) est :

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u(t)) = p_x(t)\dot{x}(t) + p_y(t)\dot{y}(t) + p^0,$$

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u(t)) = p_x(t)y(t) + p_y(t)u(t) + p^0.$$

Où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système :

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x(t). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} p_x(t) = cst = c_1, \\ p_y(t) = -c_1t + c_2, \end{cases}$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes réelles.

Le maximum de l'hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u(t)) &= \max_{-1 \leq u \leq 1} H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u(t)), \\ &= \max_{-1 \leq u \leq 1} [p^0 + p_x(t)y(t) + p_y(t)u(t)], \\ &= p^0 + p_x(t)y(t) + \max_{-1 \leq u \leq 1} (p_y(t)u(t)). \end{aligned}$$

Le contrôle qui maximise l'hamiltonien est

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_y(t) < 0, \\ +1 & \text{si } p_y(t) > 0, \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

2.5 Méthodes numériques en contrôle optimal

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal [19] : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduire le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "nonlinear programming").

2.5.1 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

Méthode de Tir simple

Considérons le problème de contrôle optimal (2.1), et Supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad \text{où } z(t) = (x(t), p(t)).$$

Les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité se mettent sous la forme :

$$R(z(0), z(T)) = R(x_0, p_0, x_1, p_1) = 0.$$

Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites suivant :

$$\begin{cases} \dot{Z} = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$z(t) = F(t, z(t)), z(0) = z_0.$$

Et posons $G(T, z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$ la fonction de tir. Le problème (2.16) aux valeurs limites est alors équivalent à la résolution du système suivant :

$$G(T, z_0) = 0.$$

Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut se résoudre par la méthode de Newton.

2.5.2 Résolution d'un problème aux deux bouts

Le problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem) est donné par :

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H(\lambda_0, u(t), x(t), p(t), t)}{\partial x(t)}, \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \quad p(0) = p_0, \\ x(T) = x_f, \quad p(T) = p_f. \end{cases} \quad (2.17)$$

où $u(t)$ est donné par la condition de maximum (1.12). Si l'on est capable, à partir de l'équation (1.12), d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \text{ où } z(t) = (x(t), p(t)).$$

Alors le problème (2.17) devient :

$$(TPBVP) \begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases}$$

où $R(z(0), z(T))$ est donné par les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité.

Fonction de tir :

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0.$$

On définit la fonction de tir G par :

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ z_0 &\longmapsto G(z_0) = R(T, z(T, z_0)). \end{aligned}$$

Le problème aux deux bouts (TPBVP) est alors équivalent à

$$G(T, z_0) = 0.$$

avec $R(\cdot, z_0)$ solution du problème à valeur initiale (Initial Value Problem)

$$(IVP) \begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ u(t) \in U, t \in [0, T], \\ z(0) = z_0, \\ z(T) = z_f. \end{cases}$$

Résolution d'un système d'équations non linéaires : Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction non linéaire $G(T, z_0) = 0$, pour cela, on utilise une méthode de type Newton.

Exemple 2.5.1. *Considérons le problème du temps minimal pour le système de contrôle suivant :*

$$(Pb) \begin{cases} J(u, T) = \int_0^T dt \rightarrow \min_u, \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \\ y(0) = 0. \quad y(T) = -1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Par l'exemple (2.4.1) le contrôle est donné par :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_y(t) < 0, \\ +1 & \text{si } p_y(t) > 0. \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

Problème aux deux bouts :

$$(TPBVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \\ \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t), \\ u(t) = \text{signe } p_y(t), \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \\ x(T) = 0, \quad y(T) = -1, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

la fonction de tir :

Posons $(x_1, x_2, p_1, p_2) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Résoudre le problème (TPBVP) est équivalent à rechercher un zéro de l'équation $G(z) = 0$ où la fonction G_0 qui sera appelée fonction de tir, associée à notre problème, Elle est définie par :

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (P(0), P(T)) &\longrightarrow G(P(0), P(T)) \end{aligned}$$

et

$$G(P(0), P(T)) = \begin{pmatrix} P_1(0) - \lambda_1 \\ P_2(0) - \lambda_2 \\ P_1(T) - \lambda_3 \\ P_2(T) - \lambda_4 T + \lambda_5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Le problème (2.19) est équivalent à

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = \text{sign}(z_4(t)), \\ u(t) = \text{sign}z_4(t), \\ \dot{z}_3(0) = 0, \\ \dot{z}_4(t) = -z_3(t), \\ z_1(0) = 0, z_2(0) = 0, \\ z_3(0) = p_{10}, z_4(0) = p_{20}, \\ z_1(T) = 0, z_2(T) = -1, \\ z_3(T) = p_{3f}, z_4(T) = p_{4f}, \\ G(p(0), p(T)) = 0. \end{array} \right.$$

Voici le code matlab de cette méthode :

```

1 function tirsimple
2 % Methode de tir simple , en utilisant fsolve.m;
3 % pour le systeme de controle
4 % xdot=y , ydot=u, |u|<=1.
5 % On veut aller de (0,0) a (0,-1) en temps minimal.
6 clear all; clf; clc; format long;
7 global x0; x0 = [0;0];
8 P0= [1;1]; tf=5;
9 % Calcul de P0, tf
10 options = optimset('Display','iter','LargeScale','on');
11 [P0tf, Fval, EXITFLAG] = fsolve(@F, [P0; tf], options);
12 EXITFLAG; % 1 si la methode converge, -1 sinon
13 %-----Trace de la trajectoire optimale-----
14 options = odeset('AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-9);
15 [t, z] = ode45(@sys, [0; P0tf(3)], [x0; P0tf(1); P0tf(2)], options);

```

```

16 subplot(121); plot(z(:,1), z(:,2));
17 axis square; title('Trajectoire');
18 subplot(122); plot(t, sign(z(:,4)));
19 axis square; title('Controle');
20 %-----Definition de la fonction dont on cherche un zero-----
21 function Xzero=F(X)
22 global x0;
23 options=odeset('AbsTol', 1e-9, 'RelTol', 1e-9);
24 [t, z]=ode113(@sys, [0; X(3)], [x0; X(1); X(2)], options);
25 HamEnd= z(end,3)*z(end,2)+abs(z(end,4))-1;
26 Xzero = [z(end,1)      % on impose xf = 0
27          z(end,2)+1    % on impose yf = -1;
28          HamEnd]; % tf libre donc H(tf) = 0;
29 %-----systeme extremal-----
30 function zdot=sys(t, z)
31 u=sign(z(4));
32 zdot=[z(2)
33       u
34       0
35       -z(3)] ;

```

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la Figure 2.4

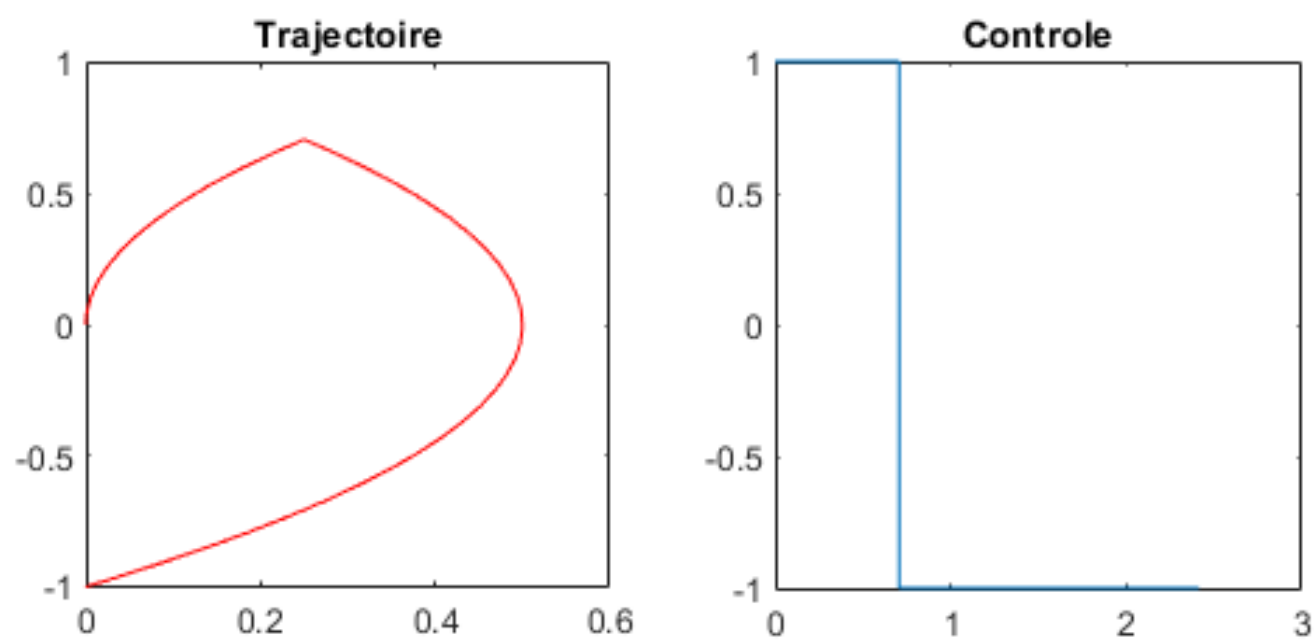


FIGURE 2.4 – Résultats par la méthode indirecte

2.5.3 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

La discrétisation totale : tir directe

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme

$$\min_{Z \in C} F(Z), \quad (2.20)$$

Où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N)$, et

$$C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r \\ g_j(Z) \leq 0, j \in r+1, \dots, m\}. \quad (2.21)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Remarque 2.5.1. *Il existe une infinité de variantes. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, D'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), Runge-Kutta, ... etc. Le choix de la méthode dépend du problème abordé.*

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$\min C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1}),$$

$$u_i \in U, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

i.e. un problème du type (2.20).

Remarque 2.5.2. *Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.*

Exemple 2.5.2. *Reprenons l'exemple de la méthode de tir simple avec la méthode de discrétisation :*

Le but est d'aller du point $(0,0)$ à un point $(0,-1)$ en un temps minimal.

$$(Pb) \left\{ \begin{array}{l} J(T, u) = \int_0^T dt \rightarrow \min_u \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(T) = -1, \\ |u(t)| \leq 1. \end{array} \right.$$

Pour la méthode directe : La discretisation se fait de la manière suivante : Pour un nombre de subdivisions N choisi à l'avance, considérons le pas de discrétisation $h = \frac{T}{N}$, on a : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. On aura donc le problème suivant :

$$\text{Minimiser } J(u) = \int_0^T dt.$$

Sous :

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hu(t_i), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hx(t_i), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$-1 \leq u(t_i) \leq 1, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Voici le code matlab de cette méthode :

```

1 function direct
2 % Discretisation directe (en utilisant fmincon.m)
3 % du probleme de temps minimal
4 % xdot = y, ydot = u, |u| <= 1.
5 % le probleme etant de joindre (0,0) a (0,-1) en temps minimal.
6 clear all; close all; clc;

```

```

7 N=60; % nombre de pas de discretisation
8 uinit=2*rand(N,1)-1; % initialisation aleatoire du controle
9 tfinit=1; xinit = [uinit; tfinit];
10 % point de depart pour fmincon
11 lb = -ones(N+1,1); lb(N+1) = 0; ub = ones(N+1,1); ub(N+1)=60;
12 % contrainte sur le controle |u| <= 1 et 0 <= tf <= 20
13 [rep, Fval, exitflag] = fmincon(@tempsfinal, xinit, [], [], [], [], lb, ub, @cond);
14 exitflag;
15 tf = rep(end); x(1)=0; y(1)= 0;
16 for i = 1: N
17 x(i+1)=x(i)+tf/N*y(i);
18 y(i+1)=y(i)+tf/N*rep(i);
19 end % calcul de la trajectoire optimale
20 subplot(121); plot(x, y); axis square; title('Trajectoire');
21 subplot(122); plot(linspace(0, tf, N), rep(1: N));
22 axis square; title('Controle');
23 %-----
24 function [c, ceq]=cond(x)
25 N=length(x)-1 ;
26 c=0 ;
27 tf=x(end); xf=0 ; yf=0 ;
28 for i=1 :N
29 xf=xf+tf/N*yf ;
30 % calcul du point final au temps tf
31 yf=yf+tf/N*x(i); % avec la methode d'Euler explicite
32 end
33 ceq = [xf; yf+1]; % on impose la condition finale xf = 0, yf = -1
34 %-----
35 function val=tempsfinal(x)
36 val=x(end) ; % x = [u; tf], ou est le discretise du controle ,
37 % et tf est le temps final

```

Les resultats de ce programme sont illustrés dans la Figure 2.5

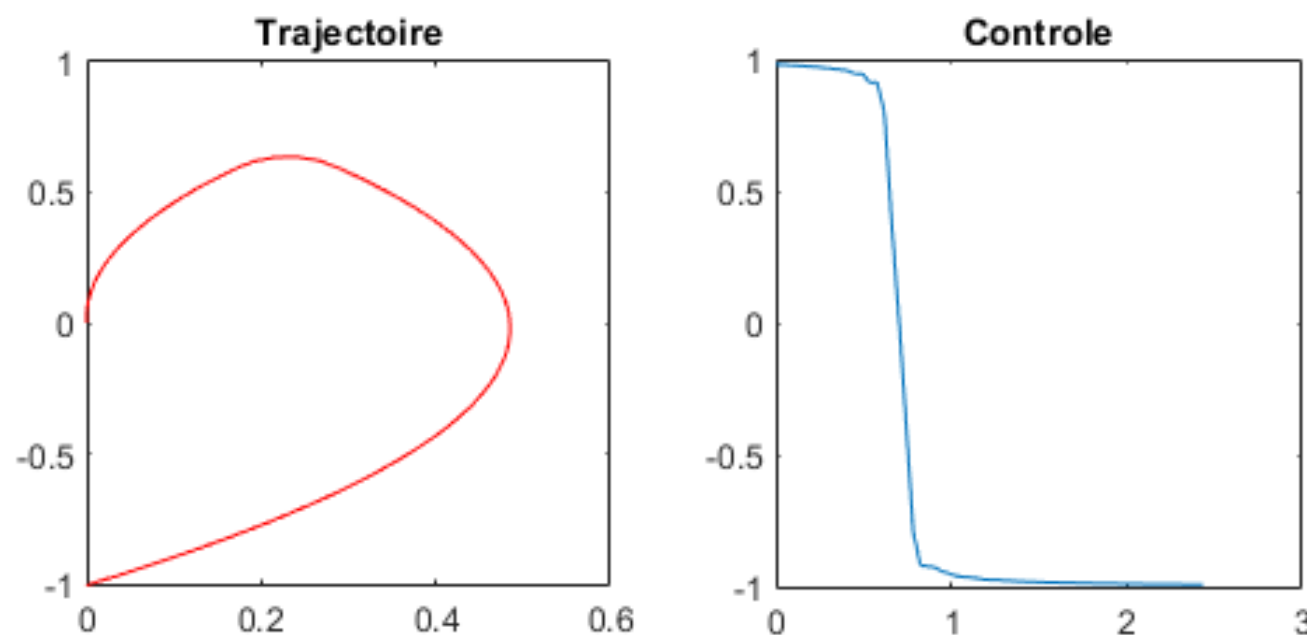


FIGURE 2.5 – Résultats par la méthode directe

2.5.4 Comparaison entre les méthodes directes et les méthodes indirectes

1- **On utilisera plutôt une méthode directe si :**

- on n'a pas besoin d'une grande précision de calcul.
- la dimension d'espace est assez petite.
- on n'a aucune idée a priori de la trajectoire optimale recherchée, par exemple on ne sait rien sur la structure des commutations.
- on peut introduire facilement des contraintes sur l'état.

2- **On utilisera plutôt une méthode indirecte si :**

- la dimension d'espace est assez grande.
- on a besoin de calculer la trajectoire optimale de manière très précise.
- dans un deuxième temps, après avoir appliqué une méthode directe qui a donné une première approximation de la solution optimale.

3- **Les caractéristiques des méthodes directes et indirectes.**

1 **Méthodes directes :**

- Mise en oeuvre simple , sans connaissance à priori de la solution.
- Facilité de la prise en compte des contraintes sur l'état.
- Peu sensible au choix de la condition initiale.
- Précision numérique basse ou moyenne .
- Efficaces en basse dimension.

2 **Méthodes indirectes :**

- Connaissance à priori de la structure de la trajectoire optimale.
- Difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état.
- Très sensibles au choix de la condition initiale.
- Efficaces en toute dimension.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la théorie de contrôle optimal où nous avons développé certains éléments de base de cette théorie, en portant un intérêt particulier à la contrôlabilité et les méthodes de résolution. Et à la fin on a résolu un problème de contrôle optimal en temps minimal avec deux méthodes de résolution à savoir la méthode directe , puis la méthode indirecte appelée méthode de tir basée sur le principe du maximum. Un handicap majeur de cette méthode est le choix du point initial, d'où il faut être capable de bien poser de bonne conditions initiales pour faire converger la méthode tir.

Chapitre 3

Contrôle optimal d'insectes nuisibles par prédateurs

3.1 Introduction

Le nombre croissant de publications sur le sujet de la biomathématique montre que la modélisation mathématique joue actuellement un rôle important dans l'étude de la biologie théorique et appliquée. Un sujet de recherche important en écologie mathématique est la lutte antiparasitaire. En général, le terme «ravageur» désigne une espèce dont les éclosions envahissantes peuvent réduire la fertilité du sol, causer des maladies au bétail, des cultures vivrières ou des dommages à d'autres matières importantes pour les humains. Il existe aujourd'hui deux procédures typiques de lutte antiparasitaire. Le premier est le contrôle chimique à l'aide de pesticides très efficaces [10], mais leur utilisation dans les systèmes de production comporte le risque de polluer les cultures ou les produits vivants contenant des substances nocives pour la santé humaine [10]. Le second est la lutte contre les ravageurs par l'interférence avec leur statut écologique, comme en introduisant un ennemi naturel ou un agent pathogène dans l'environnement. Les biens de consommation obtenus grâce à la lutte biologique ont une plus grande valeur sur le marché, de sorte que l'étude du sujet revêt une grande importance économique [10]. Habituellement, dans un problème de contrôle biologique, la ressource doit être maintenue à un équilibre biologique et économique simultané qui assure un profit maximal tout en gardant la population à une densité appropriée. Cet équilibre bioéconomique est fixé par un compte de dommages acceptable que l'organisme nuisible produit sur la ressource et est établi selon un critère approprié pour le contrôle de sa densité.

Dans ce chapitre, nous avons adapté une application de la théorie du contrôle optimal à un modèle biologique : le modèle Lotka-Volterra [11], également connu sous le nom de modèle prédateur-proie. Nous avons analysés un problème concret de Lotka-Volterra comme un problème d'horizon temporel. Il y a une raison naturelle à cela : le caractère de nombreux problèmes en biologie et sociologie nous oblige à les traiter dans de longs intervalles de temps. Et pour cela nous fixerons le temps dans notre modélisation à 10 mois.

Cela prend en compte deux espèces : le prédateur (*Macrolophus calginosus*), la proie (Les mouches blanches). On suppose que la croissance des populations de proies et de prédateurs suit une dynamique dépendante de la densité influencée par la favorabilité environnementale induite par la disponibilité des ressources. Les équations de différence qui caractérisent le modèle sont exprimées en termes de structure cellulaire, qui comprend les termes d'émigration et d'immigration pour les prédateurs et les proies. On a modélisé un problème de contrôle optimal en prenant comme états le nombre d'insectes (proie et prédateurs) et comme commande le taux de prédation. L'objectif est de minimiser le nombre total des mouches blanches et de minimiser le nombre de prédateurs au temps final. Le problème de contrôle optimal obtenu est résolu théoriquement on utilisant le principe du maximum de Pontryagin, numériquement, on a utilisé deux méthodes (méthode de tir et méthode de discrétisation d'Euler).

3.2 Le modèle de Lotka-Volterra

Les équations Lotka-Volterra considérées dans notre cas, également connues sous le nom d'équations prédateur-proie, sont un système non linéaire différentiel de deux équations, et elles sont utilisées pour modéliser des systèmes biologiques où deux espèces interagissent : une proie et un prédateur. Les deux types évoluent selon le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\gamma x_1(t)x_2(t) + \delta x_2(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $x_1(\cdot)$ représente la population de proies, $x_2(\cdot)$ la population de prédateurs telle que x_1 et x_2 sont strictement positif, et α , β , γ et δ sont des paramètres positifs réels qui décrivent les interactions des deux espèces. Ce modèle a été le premier à représenter l'interaction de plus d'une espèce.

Du problème (3.1), on peut déterminer la variation de x_1 en fonction de x_2 (espace de phase) telle que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\alpha - \beta x_2}{x_2} \times \frac{x_1}{\gamma x_1 - \delta},$$

On utilise une intégration par variables séparées on aura :

$$x_2(\gamma - \delta)dx_1 = x_1(\alpha - \beta x_2)dx_2,$$

puis on intègre par rapport à x_2 et par rapport à x_1

$$\int \frac{\alpha - \beta x_2}{x_2} dx_2 = \int \frac{\gamma x_1 - \delta}{x_1} dx_1,$$

Et nous obtenons l'équation de phase de la forme suivant :

$$F(x_1, x_2) = \gamma x_1 + \beta x_2 - \delta \ln(x_1) + \alpha \ln(x_2).$$

Par deux méthodes différentes nous obtenons les graphes de système (3.1) illustrés dans la Figures suivante :

Par la méthode d'Euler nous obtenons les graphes illustrés dans la Figure 3.1 :

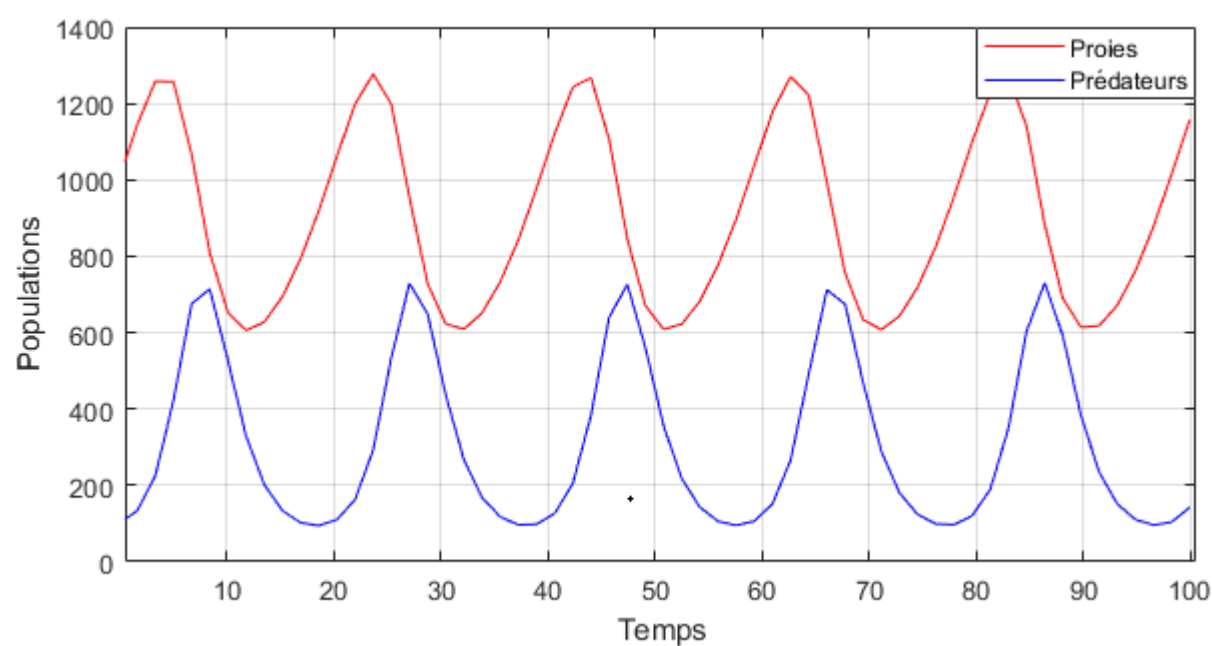


FIGURE 3.1 – Graphe des variations de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction du temps par la méthode d'Euler avec $x_1(0) = 1000$, $x_2(0) = 100$, $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.0004$, $\gamma = 0.001$, $\delta = 1$

Par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 nous obtenons les graphes illustrés dans la Figure 3.2 :

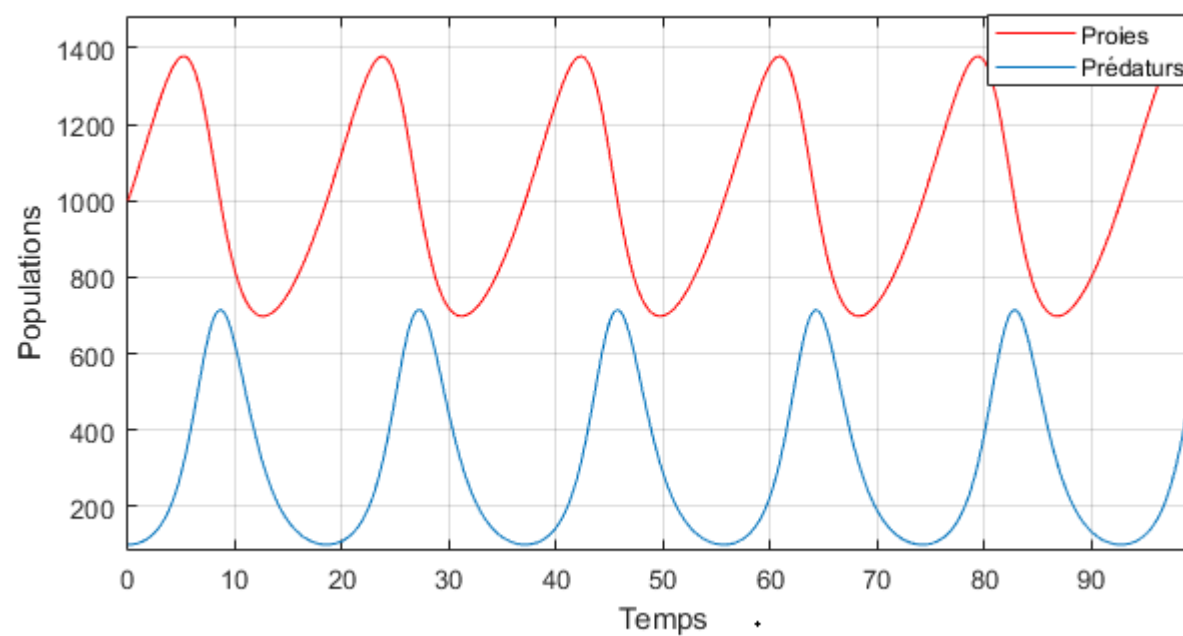


FIGURE 3.2 – Graphe des variations de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction du temps par la méthode Runge Kutta d'ordre 4 avec $x_1(0) = 1000$, $x_2(0) = 100$, $\alpha = 0.125$, $\beta = 0.0004$, $\gamma = 0.001$, $\delta = 1$

Les graphes de l'équation de phase illustrés dans la Figure 3.3

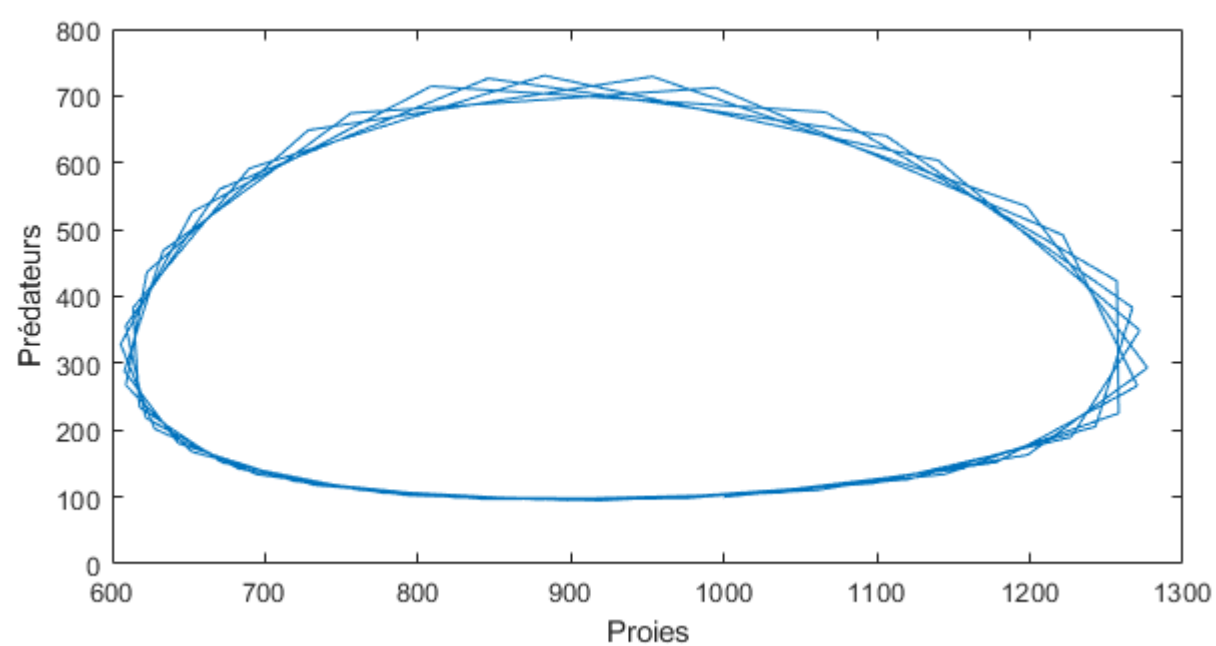


FIGURE 3.3 – Portrait de phase

3.3 Modélisation du problème

- 1- **La mouche blanche (Proie)** : Il existe deux types de ces insectes sur les agrumes : La mouche blanche des agrumes dialeurodes citri et le renard blanc floccosus. Ces derniers préfèrent les agrumes et cet insecte est le plus répandu en Algérie et cause de grandes pertes voir Figure 3.4.

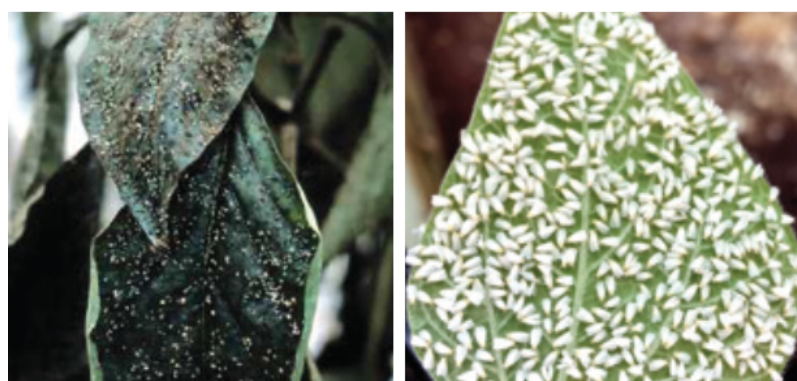


FIGURE 3.4 – Mouches blanches qui attaque les cultures

2- **Macrolophus calgajosus (Prédateur)** : Cet insecte est considéré comme l'un des prédateurs généraux et il appartient à la famille des punaises (Miridae) et au rang d'ailes différentes (Heteroptera) et il nourrit ses stades adultes et différentes nymphes sur de nombreuses proies, en particulier l'insecte des mouches blanches voir Figure 3.5.



FIGURE 3.5 – Le macrolophus calgajosus se nourrit de la nymphe de la mouche blanche

On suppose que les prédateurs que l'on introduit se reproduisent, de manière proportionnelle au nombre de nuisibles. Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = (\alpha - \beta R(t))M(t), \\ \frac{dR}{dt} = -\gamma R(t) + u(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Où au temps t , M et R représentent respectivement le nombre des mouches blanches (proie) et de macrolophus calgajosus (prédateur), α est le taux de reproduction naturelle des mouches blanches, β est un taux de prédation, γ est le taux de disparition naturelle des prédateurs. Le contrôle $u(t)$ est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs au temps t .

Afin d'encapsuler l'interaction mouche blanches-macrolophus calgajosus-ressource dans une formalisation plus réaliste, nous commençons par modifier le modèle. Pour ce but, nous considérons d'abord une caractérisation à temps discret du système donné par :

$$\begin{cases} \frac{\Delta M}{\Delta t} = M(t+1) - M(t) = (\alpha - \beta R(t))M(t), \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} = R(t+1) - R(t) = -\gamma R(t) + u(t). \end{cases}$$

On fait diminuer cette unité de temps à l'heure ,à la minute,à la seconde , que nous notons Δt .

Pendant une unité de temps Δt , le nombre des mouches blanches passe de $M(t)$ à $M(t + \Delta t)$, et la variation de $M(t + \Delta t) - M(t)$ peut s'écrire alors :

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = (\alpha - \beta R(t))M(t).$$

Ainsi, de la même façon on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\Delta M}{\Delta t} = (\alpha - \beta R(t))M(t), \\ \frac{\Delta R}{\Delta t} = -\gamma R(t) + u(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

3.4 Position du problème

Dans cette partie on a utilisé un modèle plus simple à mettre en oeuvre avec les deux méthodes citées précédemment (méthodes directe et indirecte).

Le système étudié a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = (\alpha - \beta R(t))M(t), \\ \dot{R}(t) = -\gamma R(t) + u(t), \\ 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.3)$$

Où le contrôle $u(t)$ vérifie la contrainte : $0 \leq u(t) \leq a$, pour $t \in [0, T]$, $a > 0$.

Le but ici est de minimiser le nombre total des mouches blanches et le nombre de prédateurs au temps final . Par conséquent , le coût à minimiser , en temps T fixé , est :

$$J(u) = M(T) + R(T).$$

Avec le système (3.3) et les données initiales non négatives $M(0) = M_0, R(0) = R_0$, le problème de contrôle optimal est donné comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = M(T) + R(T) \rightarrow \min, \quad (1) \\ \dot{M}(t) = \alpha M(t) - \beta M(t)R(t), \quad M(0) = M_0 > 0, \quad (2) \\ \dot{R}(t) = -\gamma R(t) + u(t), \quad R(0) = R_0 > 0, \quad (3) \\ 0 \leq u(t) \leq a, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Où $M(0) = M_0, R(0) = R_0$ est le nombre des mouches blanches et *macrolophus calginosus* respectivement à l'instant $t = 0$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrons que $M(t) > 0, R(t) > 0, \forall t \in [0, T]$:

Comme $u(t) \geq 0$, de l'équation (3) du système (3.4) on a $\dot{R}(t) \geq -\gamma R(t)$, donc

$$\frac{dR}{dt} \geq -\gamma R \Leftrightarrow \frac{dR}{R} \geq -\gamma dt,$$

$$\Rightarrow \int \frac{dR}{R} \geq -\gamma \int dt \Rightarrow \ln(R) \geq -\gamma t + k \Rightarrow R(t) \geq ce^{-\gamma t} \text{ telle que } c > 0$$

et on a la condition initiale $R(0) = R_0 > 0$ donc

$$R(0) \geq ce^0 \Leftrightarrow R_0 \geq c.$$

Alors $R(t) \geq R_0 e^{-\gamma t} > 0$ ce qui prouve que $R(t) > 0$.

Et pour $M(t)$, on raisonne par l'absurde : s'il existe $t_1 \in [0, T]$ tel que $M(t_1) = 0$, alors $M(t) = 0$ pour tout t , par unicité de Cauchy ; cela est absurde car $M(0) = M_0 > 0$ alors $M(t) > 0$.

3.5 Résolution théorique

Dans cette partie, on résoud le problème de contrôle optimal (3.4) issu de la modélisation de Lotka-Volterra théoriquement en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.

3.5.1 Application du Principe du maximum de Pontryagin

Le Hamiltonien du système (3.4) précédent s'écrit pour $t \in [0, T]$:

$$H(t, u, M, R, P_M, P_R) = P_M(t)\dot{M}(t) + P_R(t)\dot{R}(t) + p^0 f^0(t, M(t), R(t), u(t)),$$

$$\begin{aligned} H(t, u, M, R, P_M, P_R) &= P_M(t) (\alpha M(t) - \beta M(t)R(t)) + P_R(t) (-\gamma R(t) + u(t)), \\ &= \alpha P_M(t)M(t) - \beta P_M(t)M(t)R(t) - \gamma P_R(t)R(t) + P_R(t)u(t). \end{aligned}$$

Dans ce problème on a $f^0(t, M(t), R(t), u(t)) = 0$ et puis que le problème est de minimisation alors on pose $p^0 = -1$, où P_M et P_R sont les vecteurs adjoints, ils sont solutions du système ci dessous :

$$\begin{cases} \dot{P}_M(t) = -\frac{\partial H}{\partial M} = -\alpha P_M(t) + \beta P_M(t)R(t), \\ \dot{P}_R(t) = -\frac{\partial H}{\partial R} = \beta P_M(t)M(t) + \gamma P_R(t), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Les conditions de transversalité sont données par :

$$\begin{cases} P_M(T) = p^0 \frac{\partial g(T, M(T), R(T))}{\partial M(T)} = -1, \\ P_R(T) = p^0 \frac{\partial g(T, M(T), R(T))}{\partial R(T)} = -1. \end{cases}$$

Où $g(T, M(T), R(T)) = M(T) + R(T)$.

On a $p^0 \neq 0$ car si $p^0 = 0$, alors tout le vecteur adjoint (P_M, P_R, p^0) est nul, ce qui est absurde avec le théorème (2.4.2) donc le vecteur adjoint doit être non trivial $p^0 \neq 0$, et puisque on minimise la fonction objectif et on maximise l'hamiltonien donc dans la suite on pose $p^0 = -1$.

On maximise l'Hamiltonien H

Pour $t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned} H(t, u, M, R, P_M, P_R) &= \max_{0 \leq u \leq a} [\alpha P_M M(t) - \beta P_M M(t)R(t) - \gamma P_R M(t)R(t) + P_R(t)u(t)], \\ &= \alpha P_M(t)M(t) - \beta P_M(t)M(t)R(t) - \gamma P_R(t)R(t) + \max_{0 \leq u \leq a} [P_R(t)u(t)], \end{aligned}$$

Alors la condition de maximisation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq u \leq a} [P_R(t)u(t)], \quad t \in [0, T]. \\ u(t) &= \begin{cases} 0 & \text{Si } P_R(t) < 0, \\ a & \text{Si } P_R(t) > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donc $u(t) = a \times \max(0, \text{sign}(P_R(t)))$. $t \in [0, T]$.

Lemme 3.5.1. $P_R(t)$ ne s'annule pas sur tout $[0, T]$.

Preuve : Supposons, par l'absurde, que ce soit le cas $P_R(t) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. cela conduit à $MP_M = 0$ sur $[0, T]$, donc $P_M = 0$ sur $[0, T]$. Donc, on en déduit $p^0 = 0$, d'où une contradiction avec le théorème (2.4.2). car le vecteur adjoint (P_M, P_R, p^0) doit être non trivial. Donc la fonction $t \rightarrow P_R(t)$ ne s'annule pas identiquement sur aucun sous-intervalle.

3.6 Résolution numérique

3.6.1 Résolution par la méthode de tir simple

La méthode de tir simple permet de trouver la commande et les trajectoire associée . On définit une fonction $z(t) = (x(t), P(t))$, $t \in [0, T]$, et les conditions initiales , finales et les conditions de transversalités , se mettent sous la forme

$$h(z(t), p(t)).$$

D'après le principe de maximum on a

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si } P_R(t) < 0, \\ a & \text{Si } P_R(t) > 0, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

La connaissance de la fonction de tir permet de considérer que ce problème optimal est entièrement résolu théoriquement.

Nous avons le problème aux deux bouts suivante :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l}
\dot{M}(t) = \alpha M(t) - \beta M(t)R(t), \\
\dot{R}(t) = -\gamma R(t) + a \times \max(0, \text{sign}(P_R(t))), \\
\dot{P}_M(t) = -\alpha P_M(t) + \beta P_M(t)R(t), \\
\dot{P}_R(t) = \beta P_M(t)M(t) + \gamma P_R(t), \\
M(0) = M_0, \\
R(0) = R_0, \\
P_M(0) = \lambda_1, \quad P_R(0) = \lambda_2 \\
P_M(T) = -1, \quad P_R(T) = -1, \\
t \in [0, T].
\end{array} \right. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Posant $z(t) = (M(t), R(t), P_M(t), P_R(t)) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))$. Résoudre le problème $(TPBVP)$ est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $G(z) = 0$ où la fonction G est la fonction de tir associée à notre problème et est définie par :

$$\begin{aligned}
G: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\
(P(0), P(T)) &\rightarrow G(P(0), P(T)),
\end{aligned}$$

avec

$$G(P(0), P(T)) = \begin{pmatrix} P_M(0) - \lambda_1 \\ P_R(0) - \lambda_2 \\ P_M(T) + 1 \\ P_R(T) + 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Le problème (3.7) sera équivalent à :

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = z_1(t) (\alpha - \beta z_2(t)), \\ \dot{z}_2(t) = -\gamma z_2(t) + a \times \max(0, \text{sign}(z_4(t))), \\ \dot{z}_3(t) = -\alpha z_3(t) + \beta z_3(t) z_2(t), \\ \dot{z}_4(t) = \beta z_3(t) z_1(t) + \gamma z_4(t), \\ z_1(0) = z_{10}, z_2(0) = z_{20}, \\ G(p(0), p(T)) = 0. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Les résultats trouvés par cette méthode sont illustrés dans la figure suivante (Figure 3.6) :

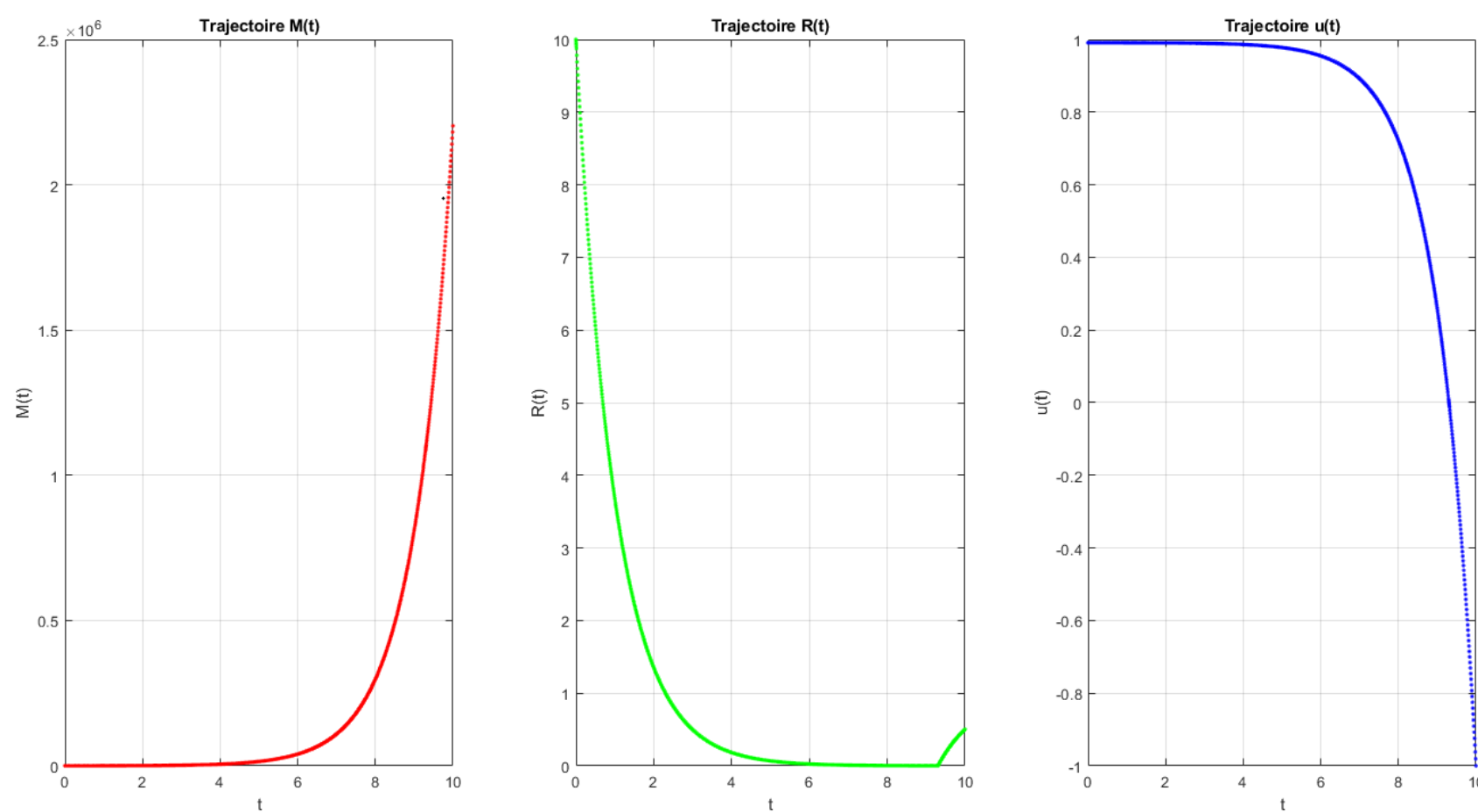


FIGURE 3.6 – Résultats par la méthode indirecte

3.6.2 Résolution par la méthode directe

Tout d'abord, nous choisissons N , le nombre de discrétisation, et en suite, nous discrétisons le contrôle $u(\cdot)$ et le système d'état selon la subdivision de l'intervalle $[0, T]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T.$$

Le problème initial discret devient :

$$\text{Minimiser } J(u) = M(T) + R(T),$$

Sous les contraintes :

$$M(t_{i+1}) = M(t_i) + \frac{t_N}{N}(M(t_i)(\alpha - \beta R(t_i))), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$R(t_{i+1}) = R(t_i) + \frac{t_N}{N}(-\gamma R(t_i) + u(t_i)), \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$M(0) = M_0 > \varepsilon, \quad R(0) = R_0 > \varepsilon, \text{ telle que } \varepsilon > 0,$$

$$0 \leq u(t_i) \leq a, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Les résultats trouvés par cette méthode sont illustrés dans la Figure 3.7 :

Dans le tableau suivant (Table 3.1) on a noté les temps d'exécution et la valeurs de la fonction objectif pour différentes valeurs de N .

N	Temps d'exécution (s)	Valeur de la fonction objectif
10	1.1857775	3.763409×10^4
50	2.324298	1.032300×10^4
100	2.9174343	1.209003×10^4
200	4.0165206	1.381399×10^4
500	5.4513593	1.381399×10^4
900	8.4770907	1.403645×10^4
1200	10.4816471	1.411061×10^4
2000	13.7370798	1.419652×10^4

TABLE 3.1 – Résultats de simulation numérique pour la méthode de discrétisation

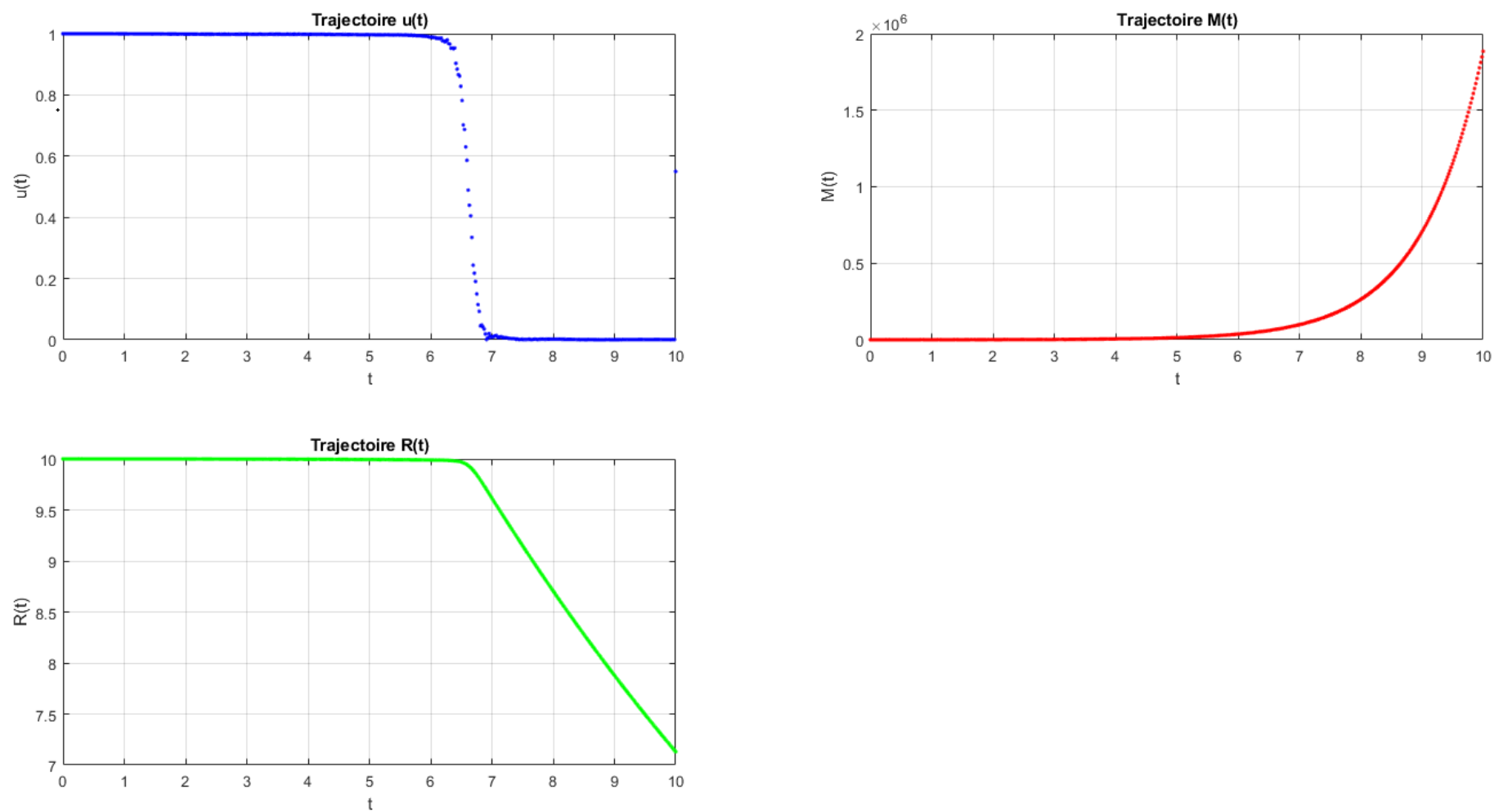


FIGURE 3.7 – Résultats par la méthode directe

3.7 Comparaison et discussion des résultats

On remarque que les résultats sont similaires, à partir de $t = 7$ mois, $u(t) = 0$, au même moment $R(t)$ s'annule et $M(t)$ augmente considérablement.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons modélisé un problème de contrôle optimal (prédateurs-proies) en s'inspirant du modèle simple de Lotka-Volterra ceci en considérant les mouches blanches qui attaquent les cultures d'agrumes. Le contrôle dans notre problème est le taux d'introduction des prédateurs.

On a résolu le problème considéré théoriquement en utilisant le PMP, numériquement, on a utilisé deux méthodes à savoir la méthode directe (discrétisation d'Euler) et une méthode indirecte (méthode de tir) les résultats trouvés sont similaires néanmoins le temps d'exécution de la méthode de tir est beaucoup plus court.

En implémentant les méthodes citées dans ce document on a constaté que la méthode de tir est plus précise, la méthode de discrétisation utilisée est gourmande en mémoire, néanmoins elles nous permettent d'avoir une idée assez précise des trajectoires optimales.

Comme dans tout travail, on souhaite trouver des résultats assez précis, on a mis en oeuvre la méthode de tir.

Dans ce travail, on a considéré un modèle simple de Lotka-Volterra comprenant uniquement deux espèces, sans prendre en considération la capacité du milieu, et en considérant uniquement un seul contrôle, il est souhaitable prochainement de considérer un modèle avec plusieurs états et plusieurs commandes et utiliser de différentes méthodes pour trouver les trajectoires optimales.

Bibliographie

- [1] John T Betts. *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*, volume 19. Siam, 2010.
- [2] Fred Brauer, Carlos Castillo-Chavez, and Carlos Castillo-Chavez. *Mathematical models in population biology and epidemiology*, volume 2. Springer, 2012.
- [3] Henri Cartan. *Calcul différentiel*. 1967.
- [4] Yacine Chitour, Frédéric Jean, and Emmanuel Trélat. Singular trajectories of control-affine systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(2) :1078–1095, 2008.
- [5] Nacima Moussouni Dehbi. *Contrôle optimal : optimisation d’une production céréalière*. Theses de doctorat, Université Mouloud Mammeri-Tizi-Ouzou, 2012.
- [6] Grib.S et Dehbi.L. *Contrôle optimal d’une épidémie*. *Mémoire de master, l’université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*, 2017.
- [7] Azzeddine Haddad. *Etude d’un système de protection biologique préventive intégrée contre les ravageurs des cultures sous serres dans la région de Biskra*. Theses de doctorat, Université Mohamed Kheider-Biskra, 2018.
- [8] Aitziber Ibañez. Optimal control of the lotka–volterra system : turnpike property and numerical simulations. *Journal of biological dynamics*, 11(1) :25–41, 2017.
- [9] Soovoojeet Jana and TK Kar. A mathematical study of a prey–predator model in relevance to pest control. *Nonlinear Dynamics*, 74(3) :667–683, 2013.
- [10] Cecilia Leal-Ramírez, Oscar Castillo, Patricia Melin, and Héctor Echavarría-Heras. A fuzzy cellular prey–predator model for pest control under sustainable bio-economic equilibrium : A formal description and simulation analysis study. *Applied Mathematical Modelling*, 39(7) :1794–1803, 2015.
- [11] Suzanne Lenhart and John T Workman. *Optimal control applied to biological models*. CRC press, 2007.
- [12] James D Murray. *Mathematical biology : I. An introduction*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13] D Subbaram Naidu. *Optimal control systems*. CRC press, 2002.
- [14] Ouazna Oukacha. *Méthode directe d’optimisation de problèmes de contrôle*. Theses de doctorat, Université Mouloud Mammeri-Tizi-Ouzou, 2017.

- [15] J van Schelt, J Klapwijk, M Letard, and C Aucouturier. use of macrolophus caliginosus as a whitefly predator in protected crops. *Bemisia : 1995, taxonomy, biology, damage, control and management*, 1996.
- [16] Laurent Schwartz. *Analyse. II, Calcul différentiel et équations différentielles*. Hermann, 1992.
- [17] R.K.Jain S.R.K.Iyengar. *Numerical Methods*. New Age International (P) Limited, 2009.
- [18] Yasuhiro Takeuchi. *Global dynamical properties of Lotka-Volterra systems*. World Scientific, 1996.
- [19] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert Paris, 2005.
- [20] Setuzô Yosida. An optimal control problem of the prey-predator system. *Funk. Ekvacioj*, 25 :283–293, 1982.